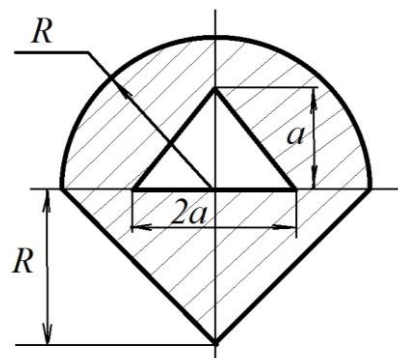


ЗАДАЧА 1

Условие

Фигура состоит из полукруга и треугольника. Из этой фигуры вырезается ещё один треугольник. Найти размер a вырезанного треугольника, при котором моменты инерции относительно главных центральных осей фигуры равны друг другу.
Дано: R .



Решение

Найдём осевые моменты фигуры относительно главной центральной оси Y и оси X_0 , проходящей через диаметр полукруга

$$I_{X_0} = \frac{\pi R^4}{8} + \frac{2R \cdot R^3}{12} - \frac{2a \cdot a^3}{12}, \quad I_Y = \frac{\pi R^4}{8} + 2 \frac{R \cdot R^3}{12} - 2 \frac{a \cdot a^3}{12}.$$

При вычислении момента инерции относительно главной центральной оси Y треугольники были представлены как сумма двух прямоугольных треугольников. Видно, что моменты инерции относительно осей X_0 и Y равны друг другу. Поэтому условие задачи будет выполняться, если ось X_0 будет главной центральной. Для этого необходимо, чтобы центр тяжести фигуры лежал на оси X_0 . Запишем выражение для координаты центра тяжести относительно оси X_0 и приравняем его нулю

$$y_c = \frac{S_{X_0}}{A} = \frac{\frac{1}{2} \pi R^2 \frac{4R}{3\pi} - \frac{1}{2} 2R \cdot R \cdot \frac{1}{3} R - \frac{1}{2} 2a \cdot a \cdot \frac{1}{3} a}{A} = \frac{R^3 - a^3}{3A} = 0,$$

где A – площадь фигуры.

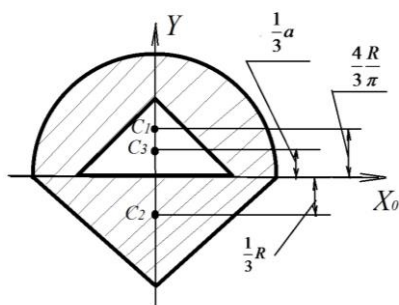


Рис. 1

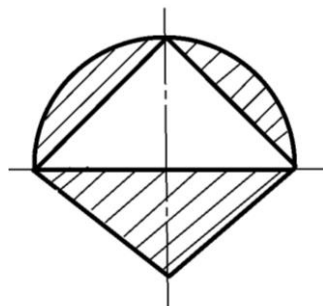


Рис. 2

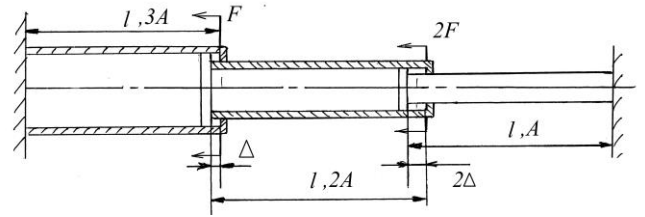
Отсюда следует, что моменты инерции относительно главных центральных осей фигуры будут равны, только в том случае, если $a = R$. Итоговое состояние фигуры представлено на рис. 2.

ЗАДАЧА 2

Условие

Определить максимальное осевое перемещение в брус с внутренними зазорами. Краевыми эффектами в зоне приложения сил пренебречь. Дано: F, l, A, E – модуль Юнга,

$$\Delta = \frac{Fl}{9EA}$$



Решение

Запишем уравнения равновесия (рис. 1)

$$N_1 - N_2 = F, \quad (1)$$

$$N_2 + N_3 = 2F \quad (2)$$

и уравнение совместности перемещений

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = -3\Delta.$$

Распишем уравнение совместности перемещений по закону Гука и подставим значение Δ

$$-\frac{N_1 l}{3EA} - \frac{N_2 l}{2EA} + \frac{N_3 l}{EA} = -3 \frac{Fl}{9EA} \quad (3)$$

Решая совместно систему уравнений (1)-(3) придем к следующим значениям нормальных сил

$$N_1 = \frac{23}{11}F, \quad N_2 = \frac{12}{11}F, \quad N_3 = \frac{10}{11}F.$$

Затем вычислим с учетом знака значения напряжений на участках бруса

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{3A} = -\frac{23F}{33A}, \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{2A} = -\frac{6F}{11A}, \quad \sigma_3 = \frac{N_3}{A} = \frac{10F}{11A}.$$

Далее займемся определением осевых перемещений и построением эпюры перемещений. Для этого обозначим сечения бруса (рис. 2). Смещаться будем от левой заделки.

$$w_A = \frac{\sigma_1 l}{E} = -\frac{23 Fl}{33 EA} (\text{влево}), \quad w_B = w_A + \Delta = -\frac{23 Fl}{33 EA} + \frac{1 Fl}{9 EA} = -\frac{58 Fl}{99 EA} (\text{влево}),$$

$$w_C = w_B + \frac{\sigma_2 l}{E} = -\frac{58 Fl}{99 EA} - \frac{12 Fl}{11 \cdot 2 EA} = -\frac{112 Fl}{99 EA} (\text{влево}),$$

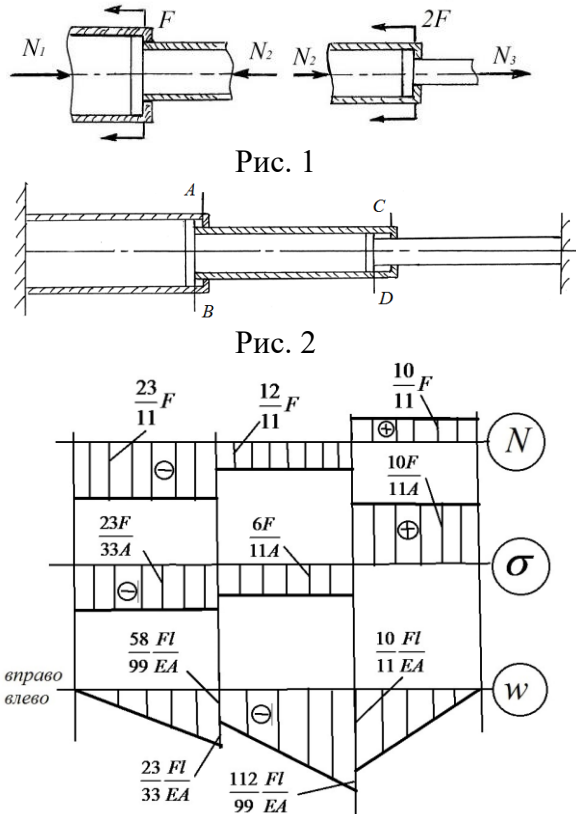
$$w_D = w_C + 2\Delta = -\frac{112 Fl}{99 EA} + \frac{2 Fl}{9 EA} = -\frac{10 Fl}{11 EA} (\text{влево}).$$

С другой стороны, если идти от правой заделки

$$w_D = \frac{\sigma_3 l}{E} = \frac{10 Fl}{11 EA} (\text{влево}).$$

То есть значения w_D сошлись. Причем при движении от левой заделки перемещение сечения D влево происходит за счет сжатия первого и второго участков и выбора зазоров, а при движении от правой заделки за счет растяжения третьего участка. Очевидно, что максимальное осевое перемещение будет направлено влево, и равняться по модулю

$$w_{\max} = \frac{112 Fl}{99 EA}$$

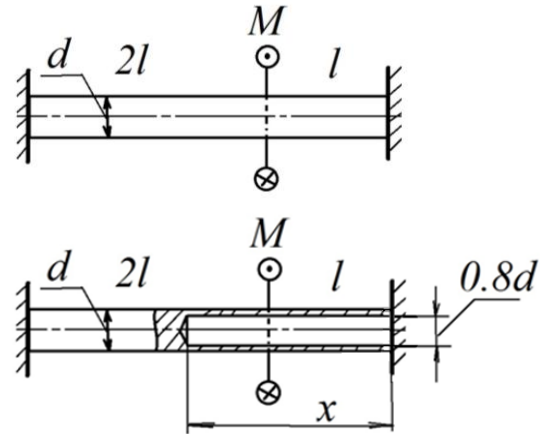


ЗАДАЧА 3

Дан вал диаметром d , нагруженный моментом M . На какую глубину x необходимо высверлить отверстие диаметром $0,8d$, чтобы угол поворота сечения, в котором приложен момент M , увеличился на 50 %?

Дано: l .

Условие



Решение

Раскроем статическую неопределимость исходного вала (до сверления), записав уравнение совместности углов закручивания (рис. 1)

$$\frac{M_R 2l}{GI_p} + \frac{(M_R - M)l}{GI_p} = 0,$$

Откуда $M_R = \frac{M}{3}$. Тогда эпюры

внутреннего крутящего момента будут выглядеть, как на рис.1. Угол поворота сечения B , где приложен момент, в исходном варианте равен

$$\varphi_B^{\text{исх}} = \frac{2Ml}{3GI_p}, \text{ где } I_p = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (1)$$

Раскроем статическую неопределимость вала с высверленным отверстием (рис. 2). Для этого запишем уравнение совместности угловых перемещений

$$\varphi_{AC} = \varphi_{AK} + \varphi_{KB} + \varphi_{BC} = 0. \quad (2)$$

Распишем уравнение (2) по закону Гука

$$\frac{M_A(3l-x)}{GI_p} + \frac{M_A(x-l)}{GI'_p} + \frac{(M_A - M)l}{GI'_p} = 0, \quad (3)$$

где $I'_p = \frac{\pi d^4}{32}(1 - 0,8^4) \approx 0,59I_p$.

Согласно условию задачи $\varphi_B^{\text{нов}} = 1,5 \varphi_B^{\text{исх}}$.

Тогда, как следует из (1) и (3)

$$\frac{M_A(3l-x)}{GI_p} + \frac{M_A(x-l)}{GI'_p} = 1,5 \frac{2Ml}{3GI_p}. \quad (4)$$

Решая совместно систему уравнений (3) и (4) относительно двух неизвестных M_A и x , получим

$$M_A = 0,41M, \quad x = 1,63l.$$

Таким образом, вал необходимо высверлить на глубину $x = 1,632l$.

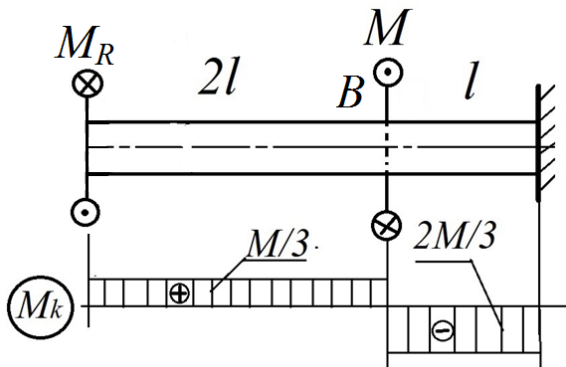


Рис. 1

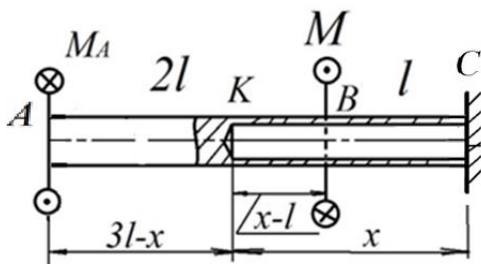
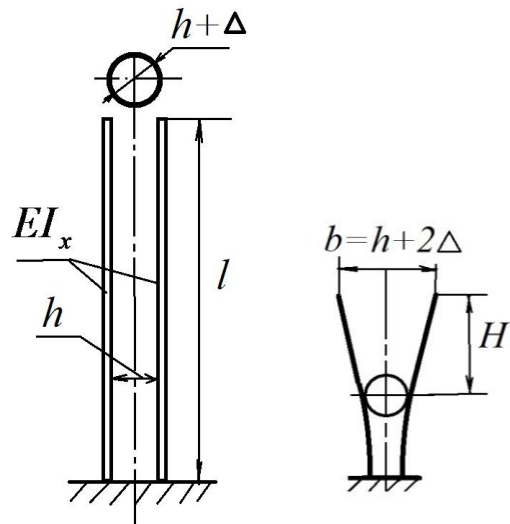


Рис. 2

ЗАДАЧА 4

Между двумя балками длиной l и жесткостью на изгиб EI_x , находящимися на расстоянии h друг от друга внедряется без трения абсолютно жёсткий шарик диаметром $d = h + \Delta$. На какую глубину H необходимо вставить шарик, чтобы между свободными концами балок расстояние составило $b = h + 2\Delta$?
Дано: l, EI_x, h, Δ .

Условие



Решение

Рассмотрим расчетную схему, представленную на рисунке. Вопрос задачи можно переформулировать так: на каком расстоянии z_0 (точка K) от заделки нужно приложить некоторую силу F , чтобы в месте приложения силы прогиб балки оказался равным $\Delta/2$, а прогиб балки на конце (точка B) при этом составил значение, равное Δ ? Перемещение т. K найдём, перемножив силовую эпюру M_x на эпюру M_1 от единичной силы, приложенной в т. K

$$\delta_K = \frac{1}{EI_x} \{M_x \times M_1\} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} F z_0^2 \frac{2}{3} z_0 \right) = \frac{F z_0^3}{3EI_x}.$$

Угловое перемещение т. K (равное угловому перемещению т. B) найдём, перемножив силовую эпюру M_x на эпюру M'_1 от единичного момента, приложенного в т. K

$$\theta_B = \theta_K = \frac{1}{EI_x} \{M_x \times M'_1\} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} F z_0^2 \cdot 1 \right) = \frac{F z_0^2}{2EI_x}.$$

Перемещение т. B будет равно

$$\delta_B = \delta_K + (l - z_0) \theta_B \Rightarrow \Delta = \frac{\Delta}{2} + (l - z_0) \theta_B.$$

Или

$$\frac{\Delta}{2} = (l - z_0) \theta_B.$$

Подставляя значения Δ , равное δ_K , и θ_B , получим

$$\frac{F z_0^3}{3EI_x} = (l - z_0) \frac{F z_0^2}{2EI_x}.$$

Откуда $z_0 = \frac{3}{5}l$. Таким образом, шарик необходимо внедрить на глубину

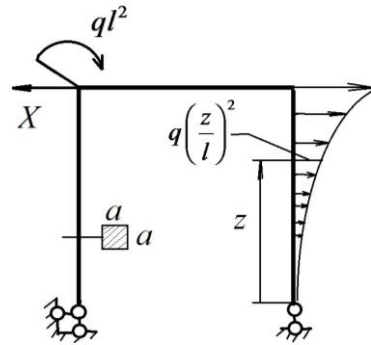
$$H = (l - z_0) = \frac{2}{5}l.$$

ЗАДАЧА 5

Условие

Чему должна равняться сила X , чтобы горизонтальный участок рамы изогнулся по дуге окружности? Считая перемещения малыми, найти радиус кривизны этой окружности.

Дано: q, l, a, E – модуль Юнга



Решение

Для того, чтобы горизонтальный участок рамы изогнулся по дуге окружности необходимо, чтобы изгибающий момент на этом участке был постоянным, а для этого вертикальные силы реакций в опорах равны нулю. Тогда будет только одна сила реакции R_0 (рис. 1), которую можно определить из уравнения равновесия для моментов относительно точки O .

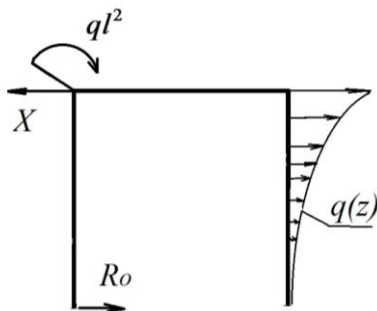


Рис. 1

$$\sum M_O = 0 \Rightarrow ql^2 + \int_0^l q \left(\frac{z}{l} \right)^2 z dz - Xl = 0.$$

$$\text{Откуда } X = \frac{5}{4} ql.$$

Для вычисления силы реакции R_0 составим уравнение равновесия для сил в проекции на горизонтальную ось.

Тогда

$$R_0 = X - \int_0^l q \left(\frac{z}{l} \right)^2 dz = \frac{5}{4} ql - \frac{ql}{3} = \frac{11}{12} ql.$$

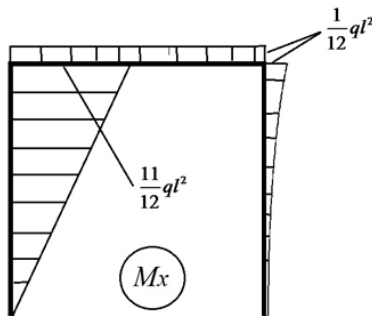


Рис. 2

Далее построим эпюру моментов, которая изображена на рис. 2

Для малых перемещений радиус кривизны можно определить из следующей формулы

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x},$$

где I_x – осевой момент инерции.

Выражая из данной формулы радиус кривизны, и подставляя момент инерции для квадрата, придем к значению

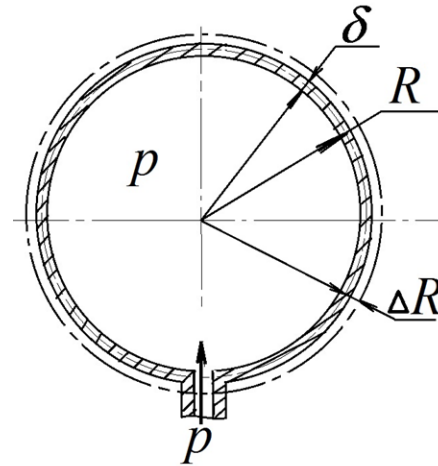
$$\rho = \frac{EI_x}{M_x} = \frac{Ea^4 12}{12ql^2} = \frac{Ea^4}{ql^2}.$$

ЗАДАЧА 6

Условие

В сферическую оболочку радиусом R и толщиной δ подаётся давление p , при котором её радиус увеличивается на ΔR . Определить изменение объёма тела оболочки (материала, из которого она изготовлена).

Дано: $R, \Delta R = R/500, \delta = R/30, \mu = 0,3$ - коэффициент Пуассона.



Решение

Определим давление p , при котором радиус оболочки увеличивается на ΔR . Для этого воспользуемся связью окружной деформации ε_t с ΔR и обобщенным законом Гука.

Тогда

$$\Delta R = \varepsilon_t R = \frac{R}{E} [\sigma_t - \mu(\sigma_m + \sigma_r)].$$

Подставляя окружное и меридиональное напряжения по следующей из уравнения Лапласа формуле $\sigma_t = \sigma_m = \frac{pR}{2\delta}$, и учитывая, что напряженное состояние в оболочке плоское $\sigma_r \approx 0$, придем к выражению

$$\Delta R = \frac{pR^2}{2E\delta} (1 - \mu).$$

Откуда значение давления получается равным

$$p = \frac{2E\delta\Delta R}{R^2(1 - \mu)}.$$

Изменение объема определим, как произведение первоначального объема V_0 на объемную деформацию. Вначале вычислим по обобщенному закону Гука окружную, меридиональную и радиальную деформации $\varepsilon_t, \varepsilon_m, \varepsilon_r$

$$\varepsilon_t = \varepsilon_m = \frac{1}{E} [\sigma_t - \mu(\sigma_m + \sigma_r)] = \frac{pR}{2E\delta} (1 - \mu), \quad \varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu(\sigma_t + \sigma_m)] = -\frac{2\mu pR}{2E\delta}.$$

Объемная деформация, как известно, равна сумме осевых деформаций

$$\theta = \varepsilon_t + \varepsilon_m + \varepsilon_r = \frac{pR}{2E\delta} (1 - 3\mu).$$

Объем тела сферической оболочки определим как произведение площади поверхности сферы на толщину оболочки

$$V_0 = 4\pi R^2 \delta.$$

Тогда изменение объема тела оболочки будет равняться

$$\begin{aligned} \Delta V = \theta V_0 &= 4\pi R^2 \delta \frac{pR}{2E\delta} (1 - 3\mu) = \frac{2\pi R^3 (1 - 3\mu)}{E} \frac{2E\delta\Delta R}{R^2 (1 - \mu)} = \\ &= \frac{4\pi R (1 - 3\mu) \frac{R}{500} \frac{R}{30}}{(1 - \mu)} = 1,197 \cdot 10^{-4} R^3. \end{aligned}$$