

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(СИБСТРИН)

**Кафедра
строительной механики**

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Часть 2.

ДИНАМИКА И УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Методические указания и контрольные задания
для студентов, обучающихся по направлению подготовки
08.03.01 «Строительство» (профиль «Промышленное
и гражданское строительство»)
заочной формы обучения

НОВОСИБИРСК 2018

Методические указания разработаны
канд. техн. наук, профессором А.А. Кулагиным,
канд. техн. наук, профессором В.Г. Себешевым,
канд. техн. наук, доцентом Н.В. Хариновой

Утверждены учебно-методической комиссией
факультета вечернего и заочного обучения
7 февраля 2018 года

Рецензенты:

- В.А. Беккер, канд. техн. наук, профессор кафедры железобетонных конструкций НГАСУ (Сибстрин);
- Е.В. Яньков, канд. техн. наук, доцент кафедры строительной механики НГАСУ (Сибстрин)

© Новосибирский государственный
архитектурно-строительный
университет (Сибстрин), 2018

СОДЕРЖАНИЕ

1. СТРУКТУРА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 5, ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ ПО ЕЕ ВЫПОЛНЕНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ	
1.1. Структура и состав контрольной работы.....	3
1.2. Указания по выполнению контрольной работы.....	3
1.3. Требования по оформлению контрольной работы	4
2. Задача № 10 РАСЧЕТ СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ МАСС НА СОБСТВЕННЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ	
2.1. Задание	7
2.2. Исходные данные	8
2.3. Расчетные схемы	9
2.4. Пример выполнения задачи № 10.....	12
2.4.1. Определение числа степеней свободы масс системы	12
2.4.2. Расчет системы на собственные колебания	12
2.4.3. Расчет системы на вынужденные колебания	18
2.4.4. Построение эпюры изгибающих моментов от статического действия веса сосредоточенных масс.....	22
2.4.5. Построение эпюры расчетных изгибающих моментов	22
2.4.6. Построение эпюр поперечных и продольных сил, соответствующих эпюре моментов при $\sin \omega_F t = 1$	24
2.4.7. Выполнение проверки равновесия системы при $\sin \omega_F t = 1$ (статическая проверка).....	24

3. Задача № 11

РАСЧЕТ РАМЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

3.1. Задание	25
3.2. Исходные данные	26
3.3. Расчетные схемы	27
3.4. Пример выполнения задачи № 11.....	30
3.4.1. Формирование основной системы метода перемещений и системы канонических уравнений.....	30
3.4.2. Решение системы канонических уравнений метода перемещений	34
3.4.3. Решение уравнения устойчивости и вычисление критического значения параметра нагрузки.....	35
3.4.4. Определение приведенных длин сжатых стержней рамы.....	38
3.4.5. Выявление формы потери устойчивости системы	38
3.4.6. Проверка местной потери устойчивости сжатых стоек	40

4. ЗАДАЧИ ДЛЯ ЗАЩИТЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

4.1. Динамический расчет плоской рамы.....	42
4.2. Расчет плоской рамы на устойчивость.....	46

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ ПО ТЕМЕ «ДИНАМИКА И УСТОЙЧИВОСТЬ

СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ»	49
---------------------------------	-----------

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	51
--------------------------------	-----------

ПРИЛОЖЕНИЯ.....	52
------------------------	-----------

1. СТРУКТУРА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 5, ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ ПО ЕЕ ВЫПОЛНЕНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ

1.1. Структура и состав контрольной работы

Контрольная работа относится ко второй части дисциплины «Строительная механика» – «Динамика и устойчивость стержневых систем» и содержит две задачи. Задача раздела «Динамический расчет плоских стержневых систем» посвящена расчету системы на собственные и вынужденные колебания, а в разделе «Расчет плоских стержневых систем на устойчивость» представлена задача по расчету на устойчивость рамы методом перемещений.

Для каждой из задач сформулированы пункты задания по ее решению, приведены варианты расчетных схем, а также таблицы вариантов исходных данных.

Исходные данные для решения задачи выбираются студентом в соответствии с его личным учебным шифром. Шифром считаются последние три цифры номера зачетной книжки. Например, если номер зачетной книжки 291018, то шифром будет 018. В этом случае первая цифра шифра – 0, вторая цифра шифра – 1, третья цифра шифра – 8. Для получения исходных данных надо выписать из таблицы три строчки: одну – отвечающую первой цифре шифра (0), вторую – отвечающую второй цифре (1) и третью – отвечающую третьей цифре шифра (8).

Номер схемы определяется суммой цифр личного учебного шифра студента. Для рассматриваемого примера это будет схема под номером $0 + 1 + 8 = 9$.

1.2. Указания по выполнению контрольной работы

Контрольная работа считается выполненной и принимается для проверки, если полностью решены все входящая в нее задачи.

При решении задач, входящих в состав контрольной работы, должны быть последовательно выполнены все пункты заданий, сформулированных для отдельных задач. Пункты заданий должны быть выделены как заголовки разделов решения задачи; решение должно сопровождаться необходимыми иллюстрациями, пояснениями и математическими выкладками.

В случае невыполнения части задач, входящих в состав контрольной работы, или невыполнения пунктов заданий для отдельных задач контрольная работа возвращается студенту на доработку без предварительной проверки и указания возможных ошибок решения. В том случае, если все задачи контрольной работы, а также все пункты заданий на решение отдельных задач выполнены, но при решении допущены ошибки, контрольная работа возвращается на доработку с указанием ошибок и пояснениями их характера (логические, арифметические).

При полном и правильном решении всех задач контрольная работа считается принятой к дальнейшей защите путем решения контрольных задач и ответов на дополнительные вопросы по теме контрольной работы.

1.3. Требования по оформлению контрольной работы

Контрольная работа выполняется на листах белой писчей бумаги формата А4. Допускается (в целях удобства пересылки по почте) использование тетрадей.

На титульном листе контрольной работы должны быть указаны:

- название образовательной организации и ее подразделения, проводящего обучение по изучаемой дисциплине;
- данные о студенте: фамилия, имя, отчество (полностью), номер группы, индивидуальный шифр;
- тема контрольной работы;
- дата представления контрольной работы на проверку.

На титульном листе проверяющим преподавателем вписываются его фамилия и инициалы, а также даты проверок.

Образец оформления титульного листа приведен на с. 6.

Исходные данные решаемой задачи (размеры элементов на расчетных схемах, значения нагрузок, физические и расчетные характеристики материалов элементов и т.д.) должны приводиться на расчетных схемах в цифровом виде, оформляться достаточно яркой пастой или распечатываться на принтере (размер шрифта 12–14 pt). Те же требования по оформлению относятся к изложению и результатам решения задачи.

При ручном исполнении чертежей должны использоваться чертежные инструменты. При оформлении контрольной работы на персональном компьютере чертежи следует выполнять с использованием какого-либо графического редактора или средствами Word с соблюдением правил строительного черчения и размещать в тексте согласно последовательности выполнения контрольной работы. Формулы допускается вписывать вручную или набирать с использованием редактора формул.

Образец

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-
СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (Сибстрин)

Кафедра строительной механики

Контрольная работа

Тема: Динамика и устойчивость стержневых систем

Выполнил: студент _____ гр.

(Фамилия, имя, отчество)

Индивидуальный шифр студента:

(для студентов заочной формы обучения)

Проверил: _____
(Фамилия И. О. преподавателя)

На доработку: _____
(подпись) (число) (месяц) (год)

На доработку: _____

На доработку: _____

К защите: _____
(подпись) (число) (месяц) (год)

Новосибирск ...
(год)

2. Задача № 10

РАСЧЕТ СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ МАСС НА СОБСТВЕННЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

2.1. Задание

Для плоской системы с невесомыми стержнями, выбранной согласно шифру (рис. 1), требуется:

а) определить число степеней свободы масс системы, пренебрегая продольными деформациями элементов;

б) выполнить расчет на собственные колебания и определить их угловые и технические частоты, изобразить главные формы собственных колебаний системы и проверить их на ортогональность;

в) выполнить расчет на установившиеся вынужденные колебания при заданной вибрационной нагрузке $F(t) = F \cdot \sin \omega_F t$, $M(t) = M \cdot \sin \omega_F t$, $q(t) = q \cdot \sin \omega_F t$. По расчету на вынужденные колебания построить эпюру амплитуд динамических изгибающих моментов. Выполнить кинематическую проверку;

г) построить эпюру изгибающих моментов от статического действия веса сосредоточенных масс;

д) построить эпюру расчетных изгибающих моментов;

е) построить эпюры поперечных и продольных сил, соответствующие эпюре изгибающих моментов при $\sin \omega_F t = 1$;

ж) выполнить статическую проверку, используя полученные эпюры внутренних усилий при $\sin \omega_F t = 1$.

Исходные данные выбираются в соответствии с шифром из табл. 1.

2.2. Исходные данные

Таблица 1

Первая цифра цифра	a , м	Вторая цифра цифра	F , кН	M , кН·м	q , кН/м	Третья цифра цифра	$\frac{\omega_F}{\omega_{\min}}$	$\frac{EI_{\Gamma}}{EI_B}$	EI_B , кН·м ²	$\frac{m_1}{m_2}$	m_2 , т
1	3	1	20	40	20	1	0,8	3	25000	2,0	2,0
2	4	2	30	80	16	2	0,85	2	24000	1,5	1,6
3	3	3	50	60	24	3	0,7	4	22000	2,5	1,2
4	5	4	60	80	20	4	0,75	2	23000	2,0	1,8
5	6	5	40	60	36	5	0,8	3	26000	1,5	2,2
6	2	6	60	40	32	6	0,85	4	24000	2,5	2,8
7	4	7	50	60	30	7	0,7	2	25000	2,0	2,4
8	3	8	30	80	24	8	0,75	4	22000	1,5	2,0
9	4	9	40	40	16	9	0,8	3	20000	2,5	1,6
0	6	0	20	60	30	0	0,85	3	26000	2,0	2,6

2.3. Расчетные схемы

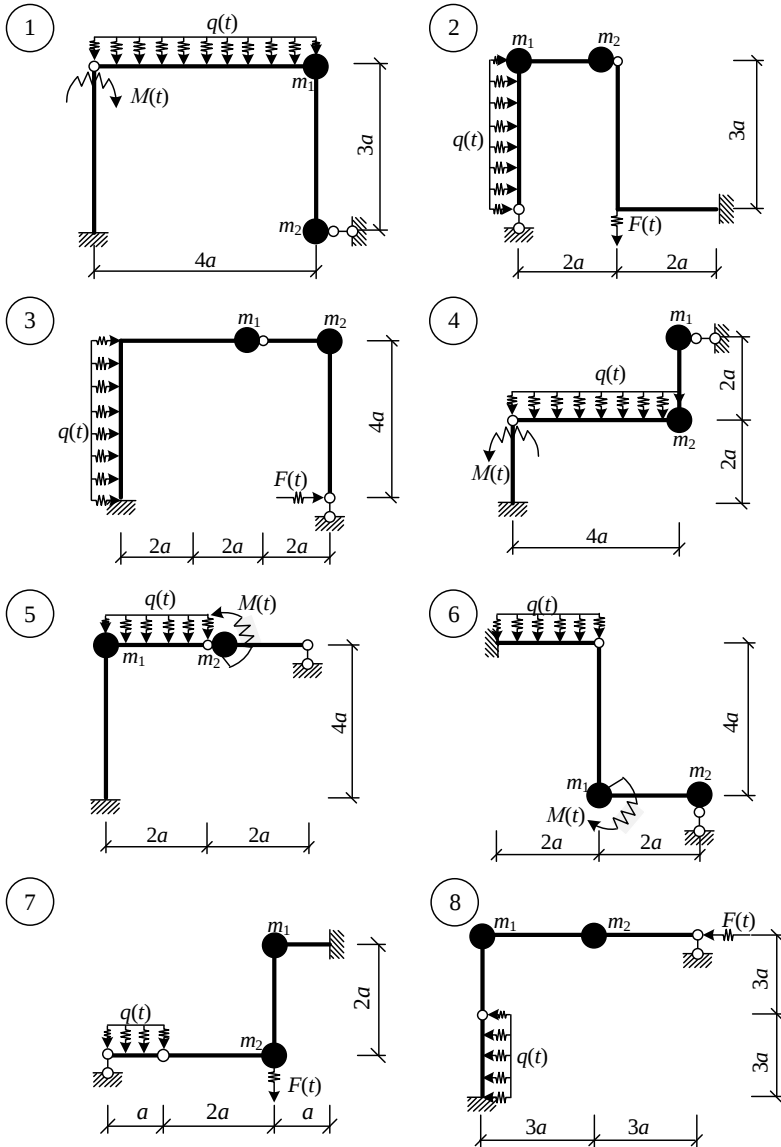


Рис. 1

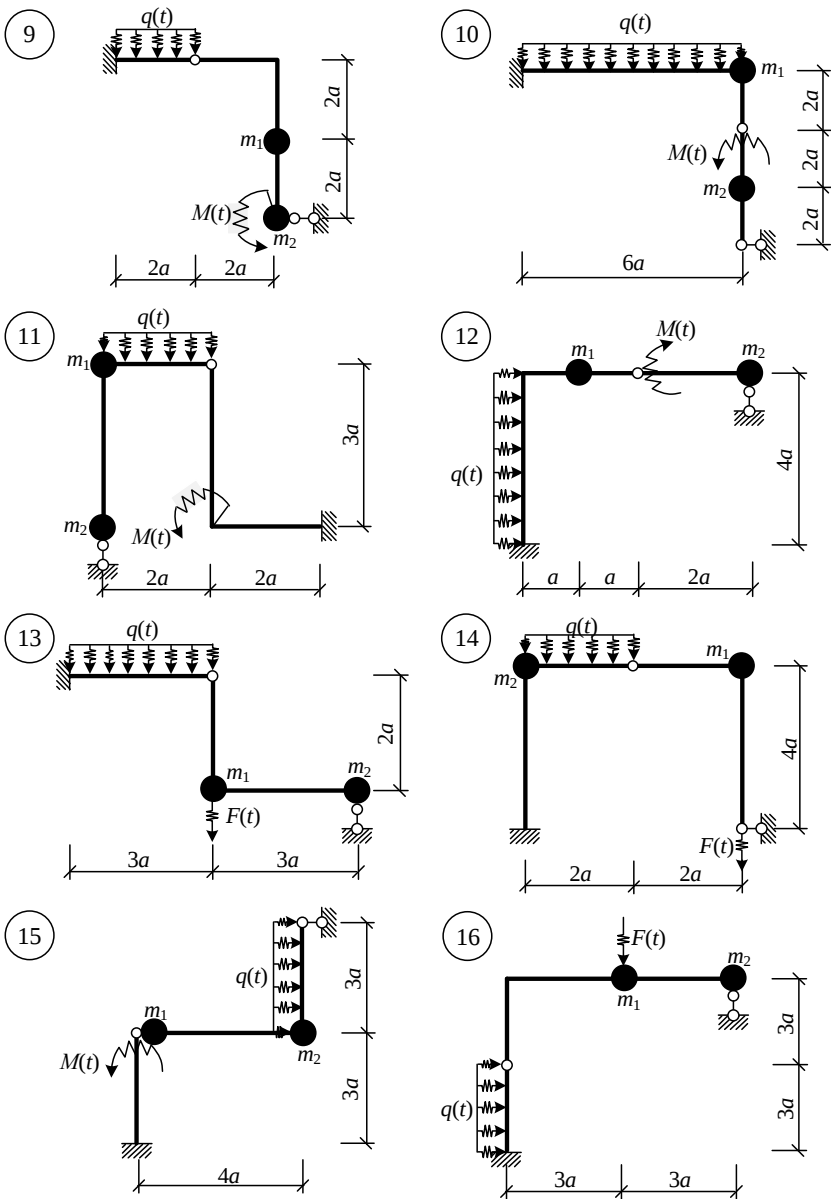


Рис. 1 (продолжение)

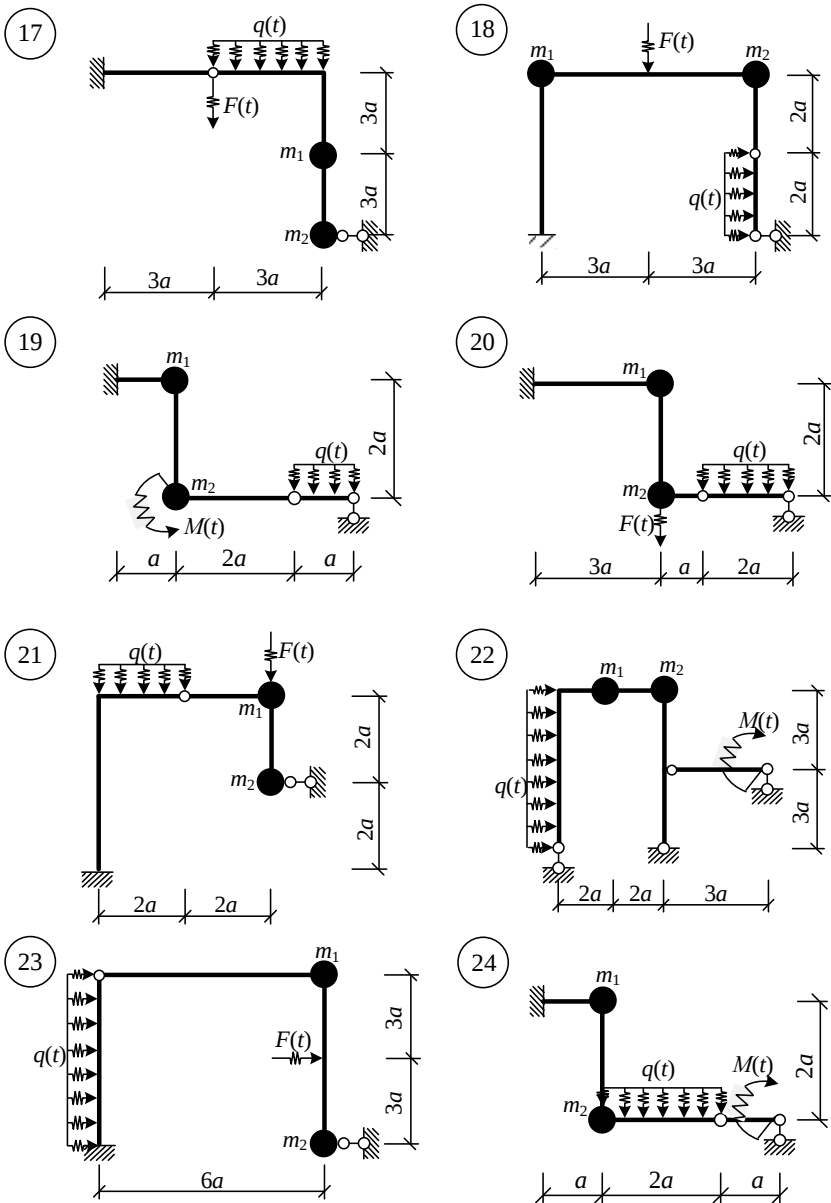


Рис. 1 (окончание)

2.4. Пример выполнения задачи № 10

Исходные данные: $m = 1,2 \text{ Т}$; $EI_{\Gamma} = 3EI_B$; $EI_B = 20000 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$;
 $M(t) = M \sin \omega_F t$; $M = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $q(t) = q \sin \omega_F t$; $q = 10 \text{ кН/м}$;
 $\omega_F = 0,8\omega_{\min}$.

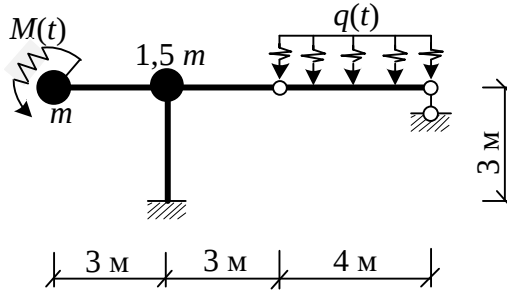


Рис. 2

2.4.1. Определение числа степеней свободы масс системы

Число степеней свободы n сосредоточенных масс заданной системы (рис. 2) равно минимальному числу связей, которые нужно наложить на массы для устранения их возможных перемещений (рис. 3). В заданной системе число степеней свободы сосредоточенных масс $n = 2$ (деформации растяжения/сжатия стержней не учитываются).

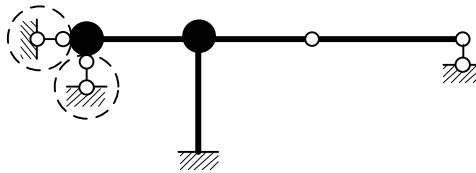


Рис. 3

2.4.2. Расчет системы на собственные колебания

Расчетная схема системы для решения задачи кинетостатическим методом представлена на рис. 4.

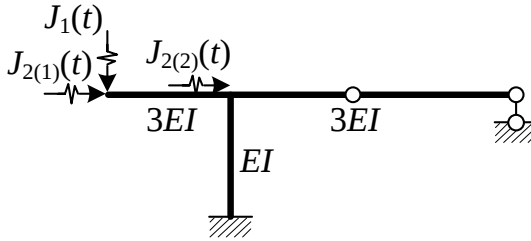


Рис. 4

Записываем систему двух уравнений собственных колебаний в амплитудах инерционных сил J_1 и $J_2 = J_{2(1)} + J_{2(2)}$, действующих в направлениях возможных перемещений масс $\bar{m}_1 = m_1 = m$ и $\bar{m}_2 = m_1 + m_2 = m + 1,5m = 2,5m$:

$$\begin{cases} \left(\delta_{11} - \frac{1}{\bar{m}_1 \cdot \omega^2} \right) \cdot J_1 + \delta_{12} \cdot J_2 = 0, \\ \delta_{21} \cdot J_1 + \left(\delta_{22} - \frac{1}{\bar{m}_2 \cdot \omega^2} \right) \cdot J_2 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Для определения коэффициентов уравнений – единичных перемещений δ_{ik} ($i, k = 1, 2$) по методу Максвелла–Мора – необходимо построить эпюры изгибающих моментов M_1 и M_2 от действия в заданной системе амплитудных сил инерции, значения которых задаются равными единице: $J_1 = 1$, $J_2 = 1$.

Загружаем заданную систему силой $J_1 = 1$ и строим единичную эпюру изгибающих моментов M_1 (рис. 5).

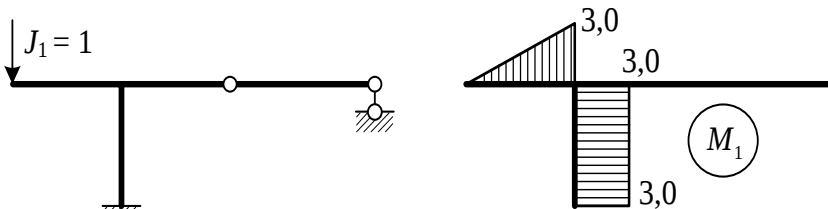


Рис. 5

Загружаем заданную систему силами $J_{2(1)} = 0,4$ и $J_{2(2)} = 0,6$, равными в сумме $J_2 = 1$ и пропорциональными массам m и $1,5m$, и строим единичную эпюру изгибающих моментов M_2 (рис. 6).

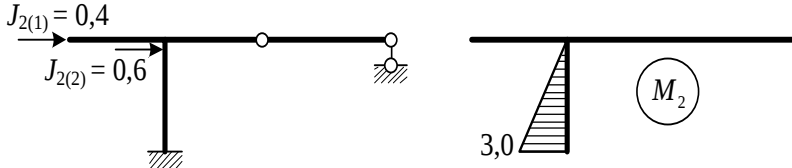


Рис. 6

Определяем коэффициенты уравнений собственных колебаний заданной системы:

$$\delta_{11} = \sum_{j=1}^{n_M} \int_{l_j} \frac{M_1^2}{EI_j} dx_j = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot 3 \cdot 3 \right] = \frac{30}{EI};$$

$$\delta_{22} = \sum_{j=1}^{n_M} \int_{l_j} \frac{M_2^2}{EI_j} dx_j = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{9}{EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum_{j=1}^{n_M} \int_{l_j} \frac{M_1 \cdot M_2}{EI_j} dx_j = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = -\frac{13,5}{EI}.$$

Для проверки найденных коэффициентов строим суммарную единичную эпюру $M_s = M_1 + M_2$ (рис. 7), «умножаем» ее саму на себя и сравниваем полученный результат с суммой коэффициентов:

$$\delta_{ss} = \sum_{j=1}^{n_M} \int_{l_j} \frac{(M_s)^2}{EI_j} dx_j = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right] = \frac{12}{EI}.$$

$$\sum \delta_{ik} = \delta_{11} + \delta_{22} + 2 \cdot \delta_{12} = \frac{30}{EI} + \frac{9}{EI} + 2 \cdot \frac{-13,5}{EI} = \frac{12}{EI}.$$

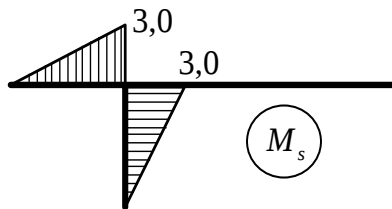


Рис. 7

Подставляем коэффициенты δ_{ik} ($i, k = 1, 2$) в уравнения собственных колебаний (1) и умножаем первое уравнение на EI , а второе – на $2,5EI$:

$$\begin{cases} \left(30 - \frac{EI}{m \cdot \omega^2}\right) \cdot J_1 - 13,5 \cdot J_2 = 0, \\ 2,5 \cdot (-13,5) \cdot J_1 + \left(2,5 \cdot 9 - \frac{EI}{m \cdot \omega^2}\right) \cdot J_2 = 0. \end{cases}$$

Обозначаем $\frac{EI}{m \cdot \omega^2} = \lambda$, тогда уравнения принимают вид:

$$\begin{cases} (30 - \lambda) \cdot J_1 - 13,5 \cdot J_2 = 0, \\ 33,75 \cdot J_1 + (22,5 - \lambda) \cdot J_2 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Уравнения собственных колебаний являются линейными однородными, поэтому решение, при котором амплитуды инерционных сил J_1 и J_2 (хотя бы одна или обе одновременно) отличны от нуля, отвечает условию

$$\begin{vmatrix} (30 - \lambda) & -13,5 \\ -33,75 & (22,5 - \lambda) \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Раскрываем определитель и получаем характеристическое (частотное) уравнение – квадратное относительно λ :

$$\lambda^2 - 52,5\lambda + 219,375 = 0.$$

Решаем полученное квадратное уравнение и, найдя два вещественных корня λ_1 и λ_2 , определяем искомые значения угловых и технических частот собственных колебаний заданной системы:

$$\lambda_{1,2} = \frac{52,5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{52,5}{2}\right)^2 - 219,375} = 26,25 \pm 21,672,$$

откуда $\lambda_1 = \lambda_{\max} = 47,922 \text{ м}^3$; $\lambda_2 = 4,578 \text{ м}^3$.

Отметим, что значение $\lambda_1 = \lambda_{\max}$ соответствует минимальной частоте собственных колебаний системы:

$$\omega_1 = \omega_{\min} = \sqrt{\frac{EI}{m \cdot \lambda_{\max}}} = \sqrt{\frac{20000 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^2}{1200 \text{ кг} \cdot 47,922 \text{ м}^3}} = 18,65 \text{ с}^{-1};$$

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{18,65}{6,28} = 2,97 \text{ Гц.}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{EI}{m \cdot \lambda_2}} = \sqrt{\frac{20000 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^2}{1200 \text{ кг} \cdot 4,578 \text{ м}^3}} = 60,34 \text{ с}^{-1};$$

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{60,34}{6,28} = 9,61 \text{ Гц.}$$

Для определения главных форм собственных колебаний системы используем уравнение колебаний в амплитудах перемещений масс, полученное из первого уравнения¹ системы (2) подстановкой $J_{1j} = m \cdot \omega_j^2 \cdot Y_{1j}$, $J_{2j} = 2,5 \cdot m \cdot \omega_j^2 \cdot Y_{2j}$ ($j = 1, 2$ – номера главных форм):

$$(30 - \lambda_j) \cdot Y_{1j} - 13,5 \cdot 2,5 \cdot Y_{2j} = 0,$$

Откуда
$$Y_{2j} = Y_{1j} \cdot \frac{30 - \lambda_j}{33,75}.$$

¹ Можно использовать и второе уравнение. Результат получится тот же.

Последовательно подставляя в это уравнение значения λ_1 и λ_2 , получаем значения перемещений Y_{21} , Y_{22} в 1-й и 2-й главных формах, выраженные через перемещения Y_{11} и Y_{12} :

– при $j = 1$ $(30 - 47,922) \cdot Y_{11} - 33,75 \cdot Y_{21} = 0$,
откуда $Y_{21} = -0,531Y_{11}$. Знак «-» указывает на то, что перемещение Y_{21} направлено противоположно силам $J_{2(1)}$ и $J_{2(2)}$ на рис. 6;
– при $j = 2$ $(30 - 4,578) \cdot Y_{12} - 33,75 \cdot Y_{22} = 0$ – получаем $Y_{22} = 0,753Y_{12}$.

Изображаем главные формы собственных колебаний системы (рис. 8, 9).

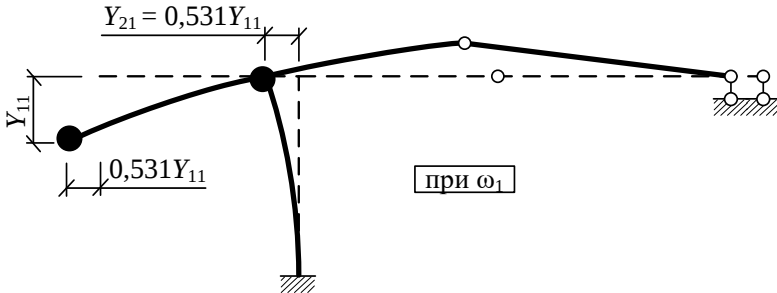


Рис. 8

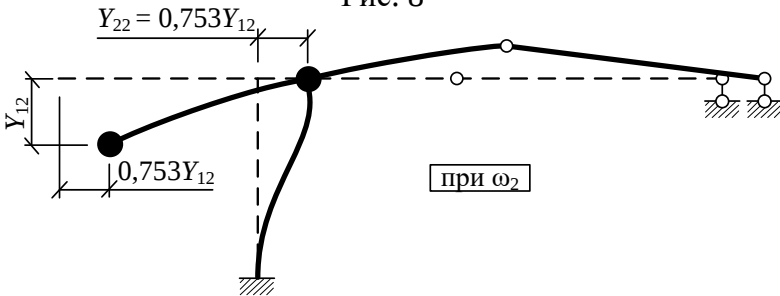


Рис. 9

Выполняем проверку ортогональности главных форм колебаний. Ортогональность главных форм колебаний заключается в том, что возможная работа сил инерции одной из главных форм на перемещениях любой другой главной формы колебаний равна

нулю: $\sum_{i=1}^n \bar{m}_i \cdot Y_{ij} \cdot Y_{ik} = 0$, где i – номер степени свободы масс;

j, k – номера главных форм колебаний.

В нашем случае: $\bar{m}_1 \cdot Y_{11} \cdot Y_{12} + \bar{m}_2 \cdot Y_{21} \cdot Y_{22} = m \cdot Y_{11} \cdot Y_{12} + 2,5m \cdot Y_{21} \cdot Y_{22} = m \cdot Y_{11} \cdot Y_{12} \cdot [1 + 2,5 \cdot (-0,531) \cdot 0,753] = m \cdot Y_{11} \cdot Y_{12} \cdot (1 - 0,9996) \cong \cong 0$ – условие ортогональности выполняется.

2.4.3. Расчет системы на вынужденные колебания

Расчетная схема рамы для решения задачи о вынужденных колебаниях кинестатическим методом представлена на рис. 10.

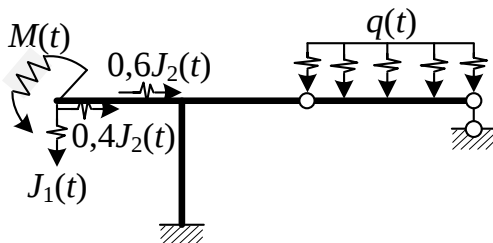


Рис. 10

Записываем систему двух (по числу степеней свободы масс) уравнений вынужденных колебаний в амплитудах инерционных сил J_1 и $J_2 = 0,4 J_2 + 0,6 J_2$, действующих в направлениях возможных перемещений масс:

$$\begin{cases} \left(\delta_{11} - \frac{1}{\bar{m}_1 \cdot \omega_F^2} \right) \cdot J_1 + \delta_{12} \cdot J_2 + \Delta_{1F} = 0, \\ \delta_{21} \cdot J_1 + \left(\delta_{22} - \frac{1}{\bar{m}_2 \cdot \omega_F^2} \right) \cdot J_2 + \Delta_{2F} = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где $\bar{m}_1 = m_1 = m$ и $\bar{m}_2 = m_1 + m_2 = m + 1,5m = 2,5m$.

Коэффициенты уравнений (единичные перемещения δ_{ik}) известны из расчета на собственные колебания. Для определения свободных членов Δ_{1F} и Δ_{2F} необходимо построить эпюру изгибающих моментов M_F в заданной системе от амплитуд вынужда-

ющих воздействий – момента $M(t)$ и нагрузки $q(t)$. Загружаем заданную раму амплитудным моментом $M = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}$ и нагрузкой $q = 10 \text{ кН/м}$ (рис. 11,а) и строим эпюру M_F (рис. 11,б).

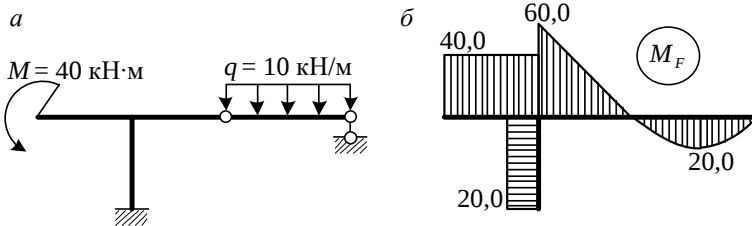


Рис. 11

Определяем свободные члены уравнений вынужденных колебаний – перемещения Δ_{1F} и Δ_{2F} – методом Максвелла–Мора:

$$\Delta_{1F} = \sum_{j=1}^{n_M} \int_{l_j} \frac{M_1 \cdot M_F}{EI_j} dx_j = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 40 \cdot \frac{1}{3} - 3 \cdot 3 \cdot 20 \right] = \frac{-120}{EI};$$

$$\Delta_{2F} = \sum_{j=1}^{n_M} \int_{l_j} \frac{M_2 \cdot M_F}{EI_j} dx_j = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 20 = \frac{90}{EI}.$$

Для проверки найденных свободных членов уравнений колебаний «умножаем» эпюру M_F на суммарную единичную эпюру M_S (рис. 7) и сравниваем результат с суммой свободных членов уравнений:

$$\Delta_{SF} = \sum_{j=1}^{n_M} \int_{l_j} \frac{M_S \cdot M_F}{EI_j} dx_j = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 40 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 20 \right] = -\frac{30}{EI};$$

$$\sum \Delta_{iF} = \Delta_{1F} + \Delta_{2F} = \frac{-120}{EI} + \frac{90}{EI} = -\frac{30}{EI}.$$

Согласно условию задачи $\omega_F = 0,8 \cdot \omega_{\min}$, тогда

$$\omega_F^2 = 0,64 \cdot \frac{EI}{m \cdot \lambda_{\max}}$$

и, соответственно,

$$\frac{1}{m \cdot \omega_F^2} = \frac{1}{m \cdot 0,64 \cdot \frac{EI}{m \cdot \lambda_{\max}}} = \frac{\lambda_{\max}}{0,64 \cdot EI} = \frac{47,922}{0,64 \cdot EI} = \frac{74,878}{EI}.$$

Подставляем значения δ_{11} , δ_{22} , $\delta_{12} = \delta_{21}$, Δ_{1F} , Δ_{2F} , $\frac{1}{m \cdot \omega_F^2}$

в систему уравнений вынужденных колебаний (4) и умножаем первое уравнение на EI , а второе – на $2,5EI$:

$$\begin{cases} (30 - 74,878) \cdot J_1 - 13,5 \cdot J_2 - 120 = 0, \\ 2,5 \cdot (-13,5) \cdot J_1 + (2,5 \cdot 9 - 74,878) \cdot J_2 + 2,5 \cdot 90 = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -44,878 \cdot J_1 - 13,5 \cdot J_2 - 120 = 0, \\ -33,75 \cdot J_1 - 52,378 \cdot J_2 + 225 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Решая систему (5), находим амплитудные значения сил инерции J_1 и J_2 вынужденных колебаний системы:

$$J_1 = -4,92 \text{ кН}; \quad J_2 = 7,466 \text{ кН}.$$

Умножая единичные эпюры M_1 , M_2 на найденные значения амплитуд J_1 и J_2 , получаем эпюры моментов $M_1 \cdot J_1$ (рис. 12) и $M_2 \cdot J_2$ (рис. 13):

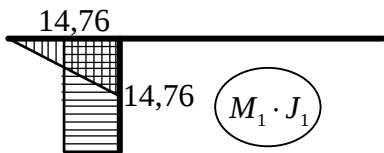


Рис. 12



Рис. 13

Строим эпюру амплитуд динамических изгибающих моментов M_{dyn} (рис. 14) по формуле $M_{dyn} = \pm(M_F + M_1 \cdot J_1 + M_2 \cdot J_2)$.

В формуле знак «+» соответствует значению $\sin \omega_F t = +1$, а знак «-» — значению $\sin \omega_F t = -1$ (на эпюре показано штриховой линией).

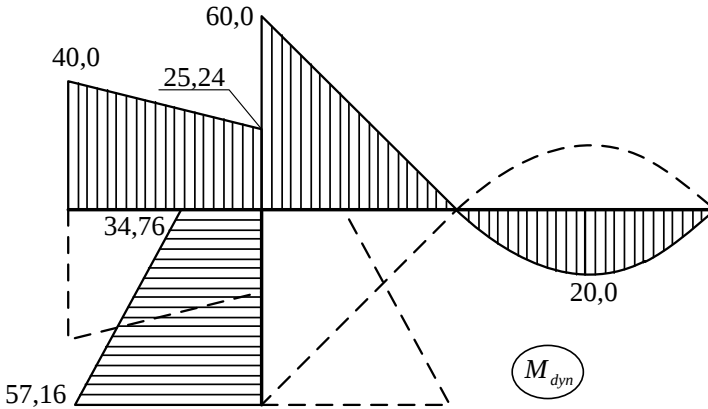


Рис. 14

Выполняем кинематическую проверку эпюры M_{dyn} . С этой целью определяем амплитуды перемещений сосредоточенных масс в вертикальном и горизонтальном направлениях двумя способами: сначала через амплитуды инерционных сил, а затем путем «перемножения» эпюры M_{dyn} при $\sin \omega_F t = +1$ с соответствующими единичными эпюрами.

В вертикальном направлении:

$$Y_1 = \frac{J_1}{m \cdot \omega_F^2} = -4,92 \cdot \frac{74,878}{EI} = -\frac{368,4}{EI};$$

$$Y_1 = \sum_{j=1}^{n_M} \int \frac{M_{dyn} \cdot M_1}{EI_j} dx_j = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{3}{6} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 40 + 2 \cdot 3 \cdot 25,24 + 0 \cdot 25,24 + 3 \cdot 40) \cdot \frac{1}{3} - \frac{34,76 + 57,16}{2} \cdot 3 \cdot 3 \right] = -\frac{368,4}{EI}.$$

В горизонтальном направлении:

$$Y_2 = \frac{J_2}{2,5m \cdot \omega_F^2} = 7,466 \cdot \frac{74,878}{2,5 \cdot EI} = \frac{223,62}{EI};$$

$$Y_2 = \sum_{j=1}^{n_M} \int \frac{M_{dyn} \cdot M_2}{EI_j} dx_j = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{3}{6} (2 \cdot 0 \cdot 34,76 + 2 \cdot 3 \cdot 57,16 + \right. \\ \left. + 0 \cdot 57,16 + 3 \cdot 34,76) \right] = \frac{223,62}{EI}.$$

2.4.4. Построение эпюры изгибающих моментов от статического действия веса сосредоточенных масс

Сила веса расположенной в узле сосредоточенной массы $1,5t$, сжимающая стойку, не создает изгибающих моментов в стержнях рамы. Изгибающие моменты возникают только от сосредоточенной массы m , вес которой равен $G_1 = mg = 1200 \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 = 11760 \text{ Н} = 11,76 \text{ кН}$.

Загружаем заданную систему силой $G_1 = 11,76 \text{ кН}$ и строим статическую эпюру M_{st} (рис. 15).

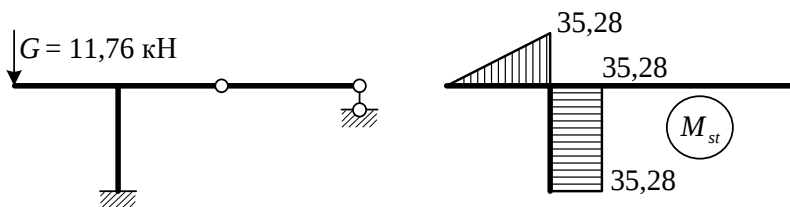


Рис. 15

2.4.5. Построение эпюры расчетных изгибающих моментов

Расчетные изгибающие моменты определяем по формуле

$$M = M_{st} + M_{dyn}.$$

Суммируя ординаты статической эпюры M_{st} с ординатами динамической эпюры M_{dyn} при $\sin \omega_F t = +1$, получаем значения ординат эпюры $M_{(+)}$ (рис. 16).

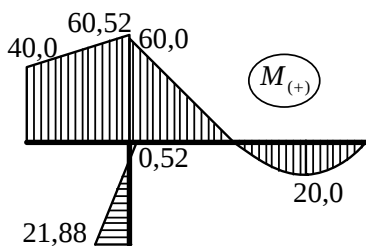


Рис. 16

Затем, складывая поординатно эпюру M_{st} и эпюру M_{dyn} при $\sin \omega_F t = -1$, получаем значения ординат эпюры $M_{(-)}$ (рис. 17).

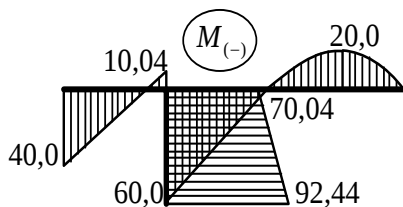


Рис. 17

Объединив эпюры $M_{(+)}$ и $M_{(-)}$, получаем эпюру расчетных моментов M в заданной системе (рис. 18).

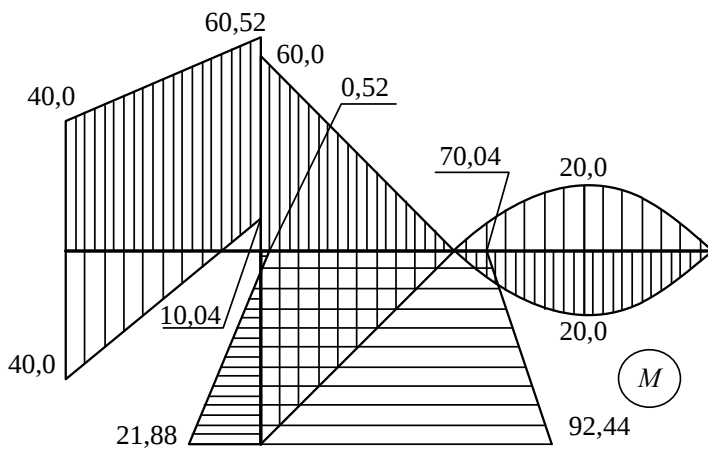


Рис. 18

2.4.6. Построение эпюр поперечных и продольных сил, соответствующих эпюре моментов при $\sin \omega_F t = 1$

По эпюре $M_{(+)}$ обычными приемами определяем ординаты эпюры поперечных сил $Q_{(+)}$ (рис. 19). А затем по эпюре $Q_{(+)}$ из условия равновесия узлов рамы определяем ординаты эпюры продольных сил $N_{(+)}$ (рис. 20). При этом учитываем сжатие стойки от силы веса массы $1,5m$, равного $G_2 = 1,5mg = 1,5 \cdot 1200 \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 = 17640 \text{ Н} = 17,64 \text{ кН}$.

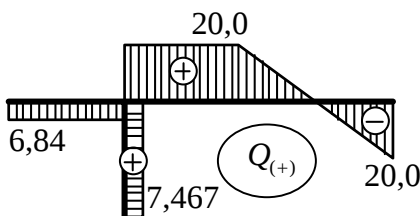


Рис. 19

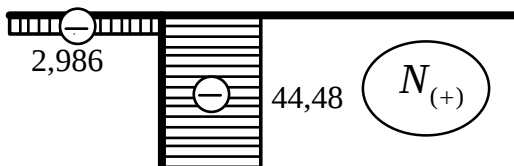


Рис. 20

2.4.7. Выполнение проверки равновесия системы при $\sin \omega_F t = 1$ (статическая проверка)

Для проверки равновесия отдельной от опор рамы прикладываем к ней, амплитудный момент $M = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$; амплитудную нагрузку $q = 10 \text{ кН/м}$; веса масс $G_1 = 11,76 \text{ кН}$, $G_2 = 17,64 \text{ кН}$; инерционные силы $J_1 = 4,92 \text{ кН}$, $J_{2(1)} = 2,986 \text{ кН}$, $J_{2(2)} = 4,48 \text{ кН}$ (по принципу Д'Аламбера) и найденные по эпюрам $M_{(+)}$, $Q_{(+)}$ и $N_{(+)}$ реакции опор (рис. 21).

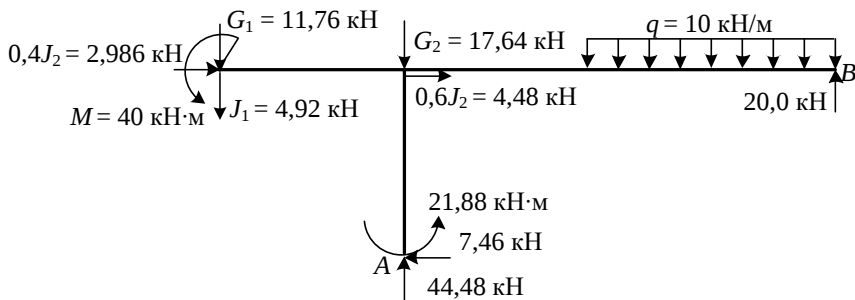


Рис. 21

Проверяем, выполняются ли уравнения равновесия для рамы в целом при найденных инерционных силах и внутренних силовых факторах:

$$\sum X = 2,986 + 4,48 - 7,467 = -0,001 \approx 0;$$

$$\sum Y = 4,92 + 44,48 + 20 - 11,76 - 17,64 = 0;$$

$$\begin{aligned} \sum M_B = 40 + 21,88 + (11,76 - 4,92) \cdot 10 + (17,64 - 44,48) \cdot 7 + \\ + 10 \cdot 4 \cdot 2 - 7,467 \cdot 3 = -0,001 \approx 0. \end{aligned}$$

2. Задача № 11

РАСЧЕТ РАМЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

3.1. Задание

Для плоской статически неопределимой рамы, выбранной согласно шифру (рис. 22), требуется:

- определить степень кинематической неопределимости системы;
- образовать основную систему метода перемещений (ОС МП);
- определить внутренние усилия и построить эпюры изгибающих моментов в единичных состояниях ОС МП;

- г) составить уравнение устойчивости;
- д) решением уравнения устойчивости найти v_{cr} и вычислить F_{cr} ;
- е) определить приведенные длины сжатых элементов рамы;
- ж) изобразить форму потери устойчивости рамы.

Исходные данные выбираются в соответствии с шифром из табл. 2.

3.2. Исходные данные

Таблица 2

Первая цифра шифра	$a,$ м	$\frac{EI_{\Gamma}}{EI_B}$	Вторая цифра шифра	$\frac{F_1}{F}$	$\frac{F_2}{F}$
1	3	3	1	0	2
2	2,5	2	2	0,6	0
3	4	4	3	1,5	0
4	2	2	4	0	1,2
5	5	3	5	0,8	0
6	4	4	6	1,6	0
7	3	2	7	0	0,8
8	2	4	8	2	0
9	3	3	9	1,2	0
0	4	3	0	1	0

3.3. Расчетные схемы

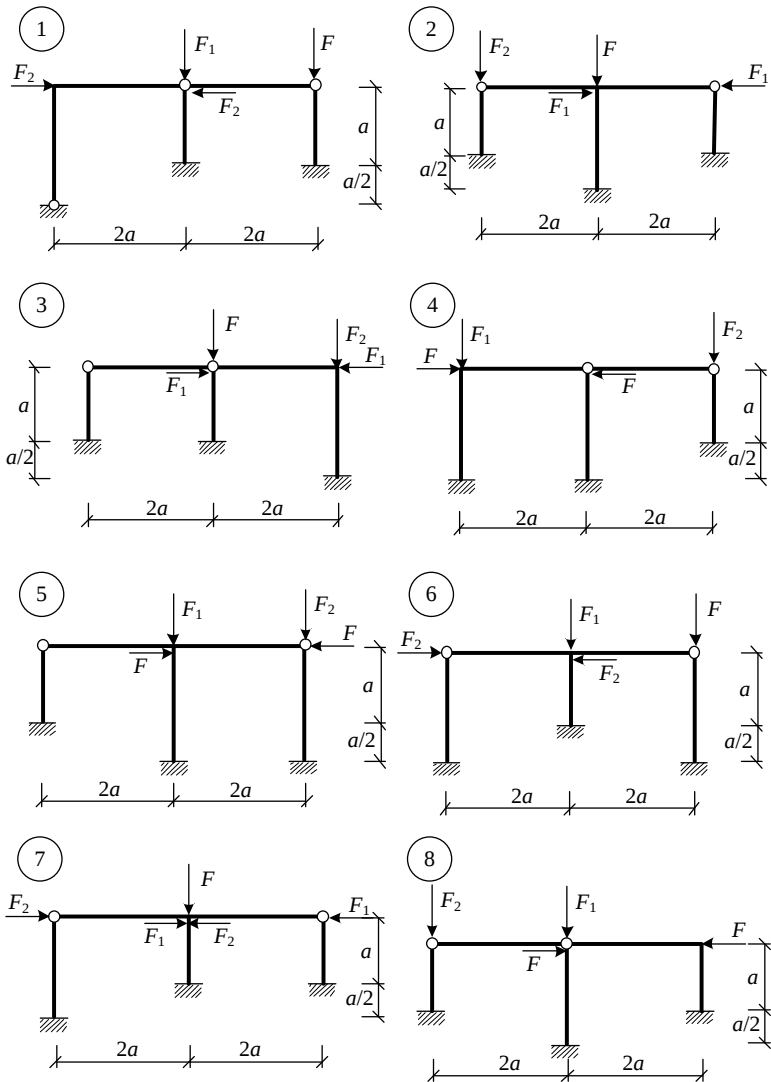


Рис. 22

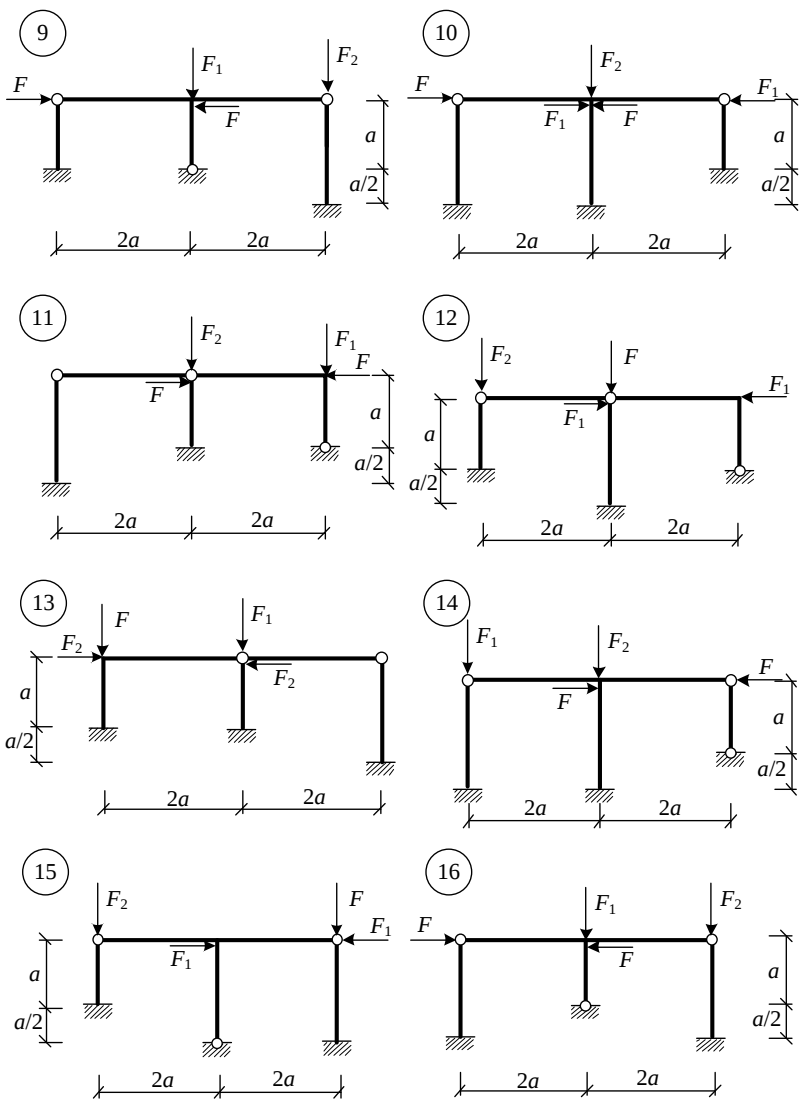


Рис. 22 (продолжение)

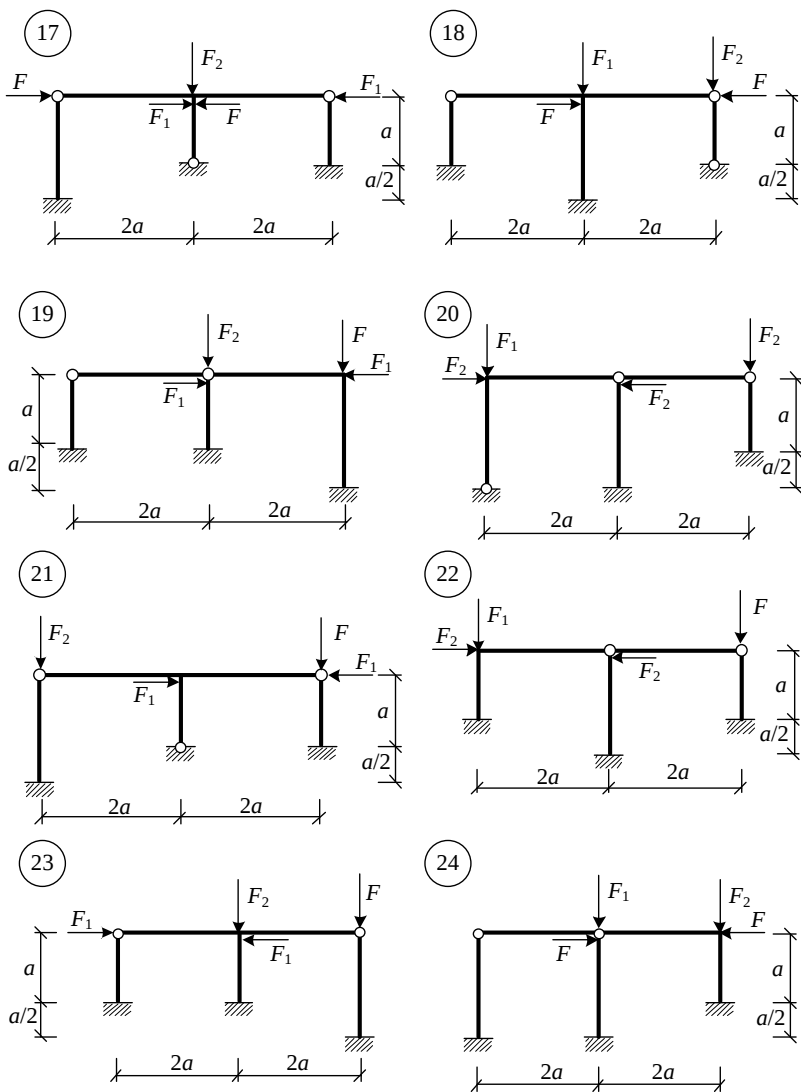


Рис. 22 (окончание)

3.4. Пример выполнения задачи № 11

Определяем для заданной системы (рис. 23) число основных неизвестных метода перемещений: $n = n_0 + n_\Delta = 1 + 1 = 2$ – основными неизвестными являются угол поворота Z_1 жесткого узла C и горизонтальное линейное смещение Z_2 (общее для узлов C и K), возникающие при потере устойчивости рамы.

3.4.1. Формирование основной системы метода перемещений и системы канонических уравнений

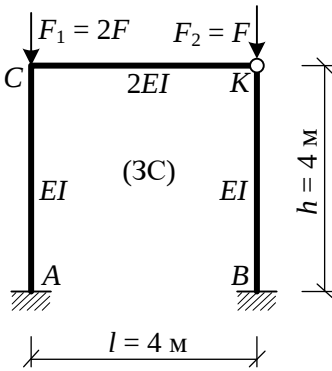


Рис. 23

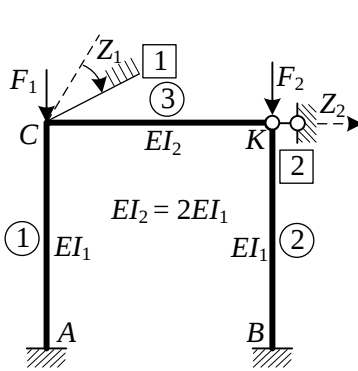


Рис. 24

Основная система метода перемещений (ОС МП) получается путем введения связи, препятствующей повороту узла C , и линейной связи в узле K . Она представлена на рис. 24, где приняты следующие обозначения:

$\boxed{1}, \boxed{2}$ – номера введенных связей (основных неизвестных);

$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ – номера стержней рамы.

Записываем систему канонических уравнений метода перемещений, выражающую равенство нулю реакций введенных связей $\boxed{1}$ и $\boxed{2}$ в состоянии ОС МП, эквивалентном действительному состоянию заданной системы при потере устойчивости:

$$\begin{cases} r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 = 0, \\ r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Находим характеристики элементов ОС МП, необходимые для определения коэффициентов r_{ik} ($i, k = 1, 2$) уравнений (6):

– погонные жесткости стержней рамы $i_j = EI_j/l_j$ (j – номер элемента, EI_j и l_j – соответственно изгибная жесткость сечения и длина j -го элемента):

$$i_1 = \frac{EI}{4M}; \quad i_2 = \frac{EI}{4M} = i_1; \quad i_3 = \frac{2EI}{4M} = 2i_1;$$

– коэффициенты продольных сил сжатых стоек рамы

$$v_j = l_j \cdot \sqrt{\frac{|N_j|}{EI_j}} \text{ (учитываем, что } N_1 = -F_1 = -2F, N_2 = -F_2 = -F \text{):}$$

$$v_1 = h \cdot \sqrt{\frac{|N_1|}{EI}} = 4M \cdot \sqrt{\frac{2F}{EI}} = 4M \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{F}{EI}};$$

$$v_2 = h \cdot \sqrt{\frac{|N_2|}{EI}} = 4M \cdot \sqrt{\frac{F_2}{EI}} = 4M \cdot \sqrt{\frac{F}{EI}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot v_1 = 0,707 v_1.$$

Чтобы определить коэффициенты r_{11} и r_{21} , задаем единичное смещение $Z_1 = 1$ первой введенной связи, изображаем вид деформированного состояния основной системы (рис. 25) и, пользуясь прил. 1 и 3, строим эпюру изгибающих моментов M_1 в первом единичном состоянии (рис. 26). При повороте узла C на угол $Z_1 = 1$ стойка AC испытывает **продольно-поперечный изгиб**, поэтому характер распределения изгибающих моментов в ней нелинейный (см. прил. 3). Моменты в концевых сечениях этой стойки при единичном повороте одного из ее зашеченных концов зависят не только от жесткости стержня, но и от продольной силы в нем, что учитывается введением поправочных коэффициентов $\varphi_2(v_1)$ и $\varphi_3(v_1)$, являющихся функциями коэффициента продольной силы v_1 . Общее очертание эпюры M_1 для стойки AC напоминает эпюру изгибающих моментов в этом элементе, которая получилась бы без учета влияния продольной силы (эта эпюра была бы, в отличие от изображенной на рис. 26, прямолинейной с ординатами по концам $4i_1$ и $2i_1$). Поскольку продольная сила в ригеле CK до потери устойчивости равна нулю, то, в соот-

ветствии с общими допущениями линейной теории устойчивости, считаем, что в единичном состоянии элемент $СК$ испытывает только изгиб, поэтому эпюра изгибающих моментов в нем получается линейной (прил. 1).

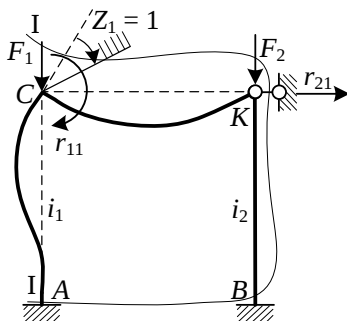


Рис. 25

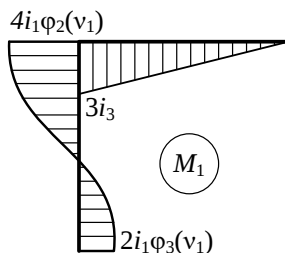


Рис. 26

Коэффициент r_{11} , представляющий собой реакцию первой введенной связи в первом единичном состоянии, находим из условия равновесия узла C (рис. 27). Так как r_{11} – момент, то составляем уравнение равновесия моментов в узле C (на рис. 27 для простоты в сечениях стержней, примыкающих к узлу C , изображены только изгибающие моменты и не показаны продольные и поперечные силы):

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow -r_{11} + 4i_1\varphi_2(v_1) + 3i_3 = 0 \Rightarrow r_{11} = [4\varphi_2(v_1) + 6] \cdot i_1.$$

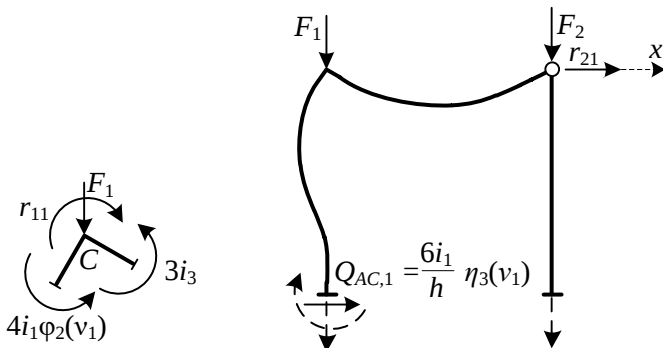


Рис. 27

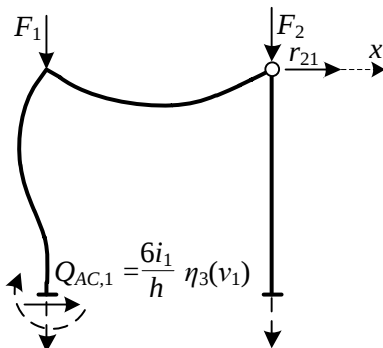


Рис. 28

Для определения коэффициента r_{21} (реакции второй связи в первом единичном состоянии) сечением I–I (рис. 25) отделяем часть рамы (рис. 28) и рассматриваем ее равновесие, проецируя все действующие на нее силы на направление реакции r_{21} . В уравнение равновесия, кроме r_{21} войдут только поперечные силы в стойках².

$$\sum X = 0 \Rightarrow r_{21} + \frac{6i_1}{h} \eta_3(v_1) = 0 \Rightarrow r_{21} = -\frac{6i_1}{4} \eta_3(v_1) = -1,5i_1 \eta_3(v_1).$$

Коэффициенты r_{12} и r_{22} определяем как реакции введенных связей во втором единичном состоянии, соответствующем единичному смещению $Z_2 = 1$ (рис. 29). Эпюра M_2 , построенная с помощью прил. 3, изображена на рис. 30.

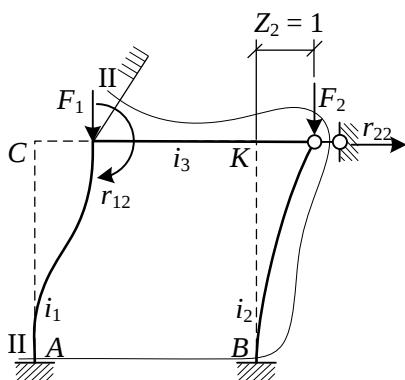


Рис. 29

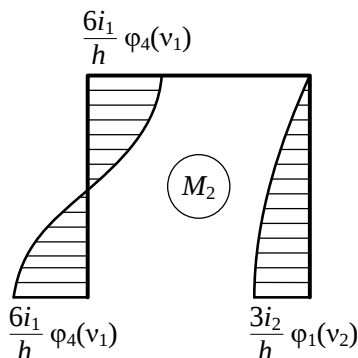


Рис. 30

На обеих сжато-изогнутых стойках эпюра M_2 имеет криволинейное очертание. Моменты в концевых сечениях стойки AC получаются путем умножения величины $6i_1/h$ на поправочный коэффициент $\varphi_4(v_1)$, учитывающий влияние сжатия при изгибе. Момент в нижнем сечении стойки BK получается соответственно умножением выражения $3i_2/h$ на коэффициент $\varphi_1(v_2)$.

² Сечение I–I проведено через точки стоек, в каждой из которых касательная к оси стержня в деформированном состоянии параллельна оси стержня до деформации. В прил. 3, используемом для определения поперечных сил, ординаты на эпюрах Q обозначены в упомянутых точках.

Для определения r_{12} вырезаем узел C (рис. 31) и рассматриваем его равновесие:

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow -r_{12} - \frac{6i_1}{h} \varphi_4(v_1) = 0 \Rightarrow r_{12} = -\frac{6i_1}{4} \varphi_4(v_1) = -1,5i_1 \varphi_4(v_1).$$

Так как $\varphi_4(v) = \eta_3(v)$, то $r_{12} = r_{21}$.

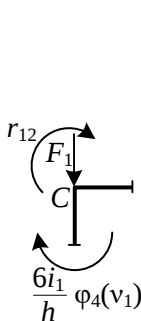


Рис. 31

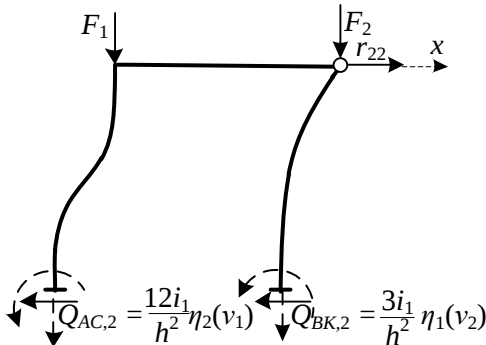


Рис. 32

Сечением II–II (рис. 29) отделяем часть рамы (рис. 32) и из условия ее равновесия находим r_{22} :

$$\Sigma X = 0 \Rightarrow r_{22} - \frac{12i_1}{h^2} \eta_2(v_1) - \frac{3i_2}{h^2} \eta_1(v_2) = 0;$$

$$r_{22} = \frac{12i_1}{4^2} \eta_2(v_1) + \frac{3i_1}{4^2} \eta_1(v_2) = [0,75 \eta_2(v_1) + 0,1875 \eta_1(v_2)] \cdot i_1.$$

3.4.2. Решение системы канонических уравнений метода перемещений

Имеем систему (6) линейных однородных уравнений (неизвестные Z_1 и Z_2 в первой степени; свободные члены уравнений отсутствуют). Возможны два варианта ее решения:

- 1) $Z_1 = Z_2 = 0$ (тривиальное решение);
- 2) хотя бы одно из неизвестных Z_1 или Z_2 или оба одновременно отличны от нуля (нетривиальное решение), при этом должен быть равен нулю определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных:

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

Первое решение соответствует либо устойчивому равновесию исходного состояния рамы с осевым сжатием стоек без их искривления (этот случай не представляет интереса с точки зрения расчета на устойчивость), либо потере устойчивости стоек без смещения их концов (случай местной потери устойчивости, исследуемый дополнительно).

Второе решение характеризует потерю устойчивости исходной формы равновесия системы (с прямолинейными центрально сжатыми стойками) и возникновение качественно новой формы равновесия – с искривлением (изгибом) стержней. Основной практический интерес представляет именно второе (нетривиальное) решение. Раскрыв определитель D , получаем **уравнение устойчивости**:

$$D = r_{11} \cdot r_{22} - r_{12}^2 = 0, \quad (8)$$

левая часть которого имеет вид:

$$D(v_1) = r_{11} \cdot r_{22} - r_{12}^2 = \left\{ \left[4\varphi_2(v_1) + 6 \right] \cdot \left[0,75\eta_2(v_1) + 0,1875\eta_1(0,707v_1) \right] - 2,25\varphi_4^2(v_1) \right\} \cdot i_1^2.$$

3.4.3. Решение уравнения устойчивости и вычисление критического значения параметра нагрузки

Уравнение устойчивости – сложное трансцендентное, имеющее множество корней; решение его выполняется численно итерационными методами или простым подбором с помощью значений функций $\varphi_1(v)$, ..., $\eta_2(v)$ ³ прил. 4. Практическое значение имеет только минимальный корень уравнения устойчивости v_{1cr} , отвечающий наименьшей критической нагрузке. Для его отыскания используем следующий алгоритм, реализующий метод последовательных приближений с учетом того, что значения коэффициентов продольных сил заключены в интервале от 0 до 2π :

³ Напомним, что $\eta_3(v) = \varphi_4(v)$, поэтому отдельного столбца для $\eta_3(v)$ в прил. 4 нет.

– выполняем ряд попыток решения уравнения устойчивости $D(v_1) = 0$ с постепенным увеличением v_1 (большого из коэффициентов) от 0 с шагом Δv_1 и вычислением при каждом v_1 левой части уравнения – до тех пор, пока для двух соседних v_1 , отличающихся на шаг Δv_1 , не будут получены разные по знаку значения $D(v_1)$;

– далее корень уравнения устойчивости отыскиваем в интервале между этими двумя значениями v_1 , применяя интерполяцию.

Поиск корня $v_{1\text{ cr}}$ начинаем с $v_1 = 0$:

1) $v_1 = 0$; $v_2 = 0,707v_1 = 0$; по прил. 4 находим:

$\varphi_2(0) = 1$; $\varphi_4(0) = 1$; $\eta_1(0) = 1$; $\eta_2(0) = 1$, тогда

$$D(0) = [(4 \cdot 1 + 6) \cdot (0,75 \cdot 1 + 0,1875 \cdot 1) - 2,25 \cdot 1^2] \cdot i_1^2 = 7,125 i_1^2.$$

Выбираем $\Delta v_1 = 1$, тогда

2) $v_1 = 1$; $v_2 = 0,707 \cdot 1 = 0,707$; $\varphi_2(1) = 0,9662$; $\varphi_4(1) = 0,9832$;

$\eta_1(0,707) = 0,7956$ (это значение получено линейной интерполяцией табличных данных); $\eta_2(1) = 0,8999$;

$$D(1) = [(4 \cdot 0,9662 + 6) \cdot (0,75 \cdot 0,8999 + 0,1875 \cdot 0,7956) - 2,25 \cdot 0,9832^2] \cdot i_1^2 = 5,955 i_1^2.$$

3) $v_1 = 2$; $v_2 = 0,707 \cdot 2 = 1,414$; $\varphi_2(2) = 0,8590$; $\varphi_4(2) = 0,9313$;

$\eta_1(1,414) = 0,1914$; $\eta_2(2) = 0,5980$;

$$D(2) = [(4 \cdot 0,859 + 6) \cdot (0,75 \cdot 0,598 + 0,1875 \cdot 0,1914) - 2,25 \cdot 0,9313^2] \cdot i_1^2 = 2,619 i_1^2.$$

4) $v_1 = 3$; $v_2 = 0,707 \cdot 3 = 2,121$; $\varphi_2(3) = 0,6560$; $\varphi_4(3) = 0,8393$;

$\eta_1(2,121) = -0,8483$; $\eta_2(3) = 0,0893$;

$$D(3) = [(4 \cdot 0,656 + 6) \cdot (0,75 \cdot 0,0893 - 0,1875 \cdot 0,8483) - 2,25 \cdot 0,8393^2] \cdot i_1^2 = -2,379 i_1^2 - \text{функция } D(v_1) \text{ поменяла}$$

знак, следовательно, корень уравнения $D(v_1) = 0$ расположен в интервале от 2 до 3. Построив по найденным значениям график $D(v_1)$ (рис. 33), уточняем по нему v_1 и выполняем следующую попытку.

5) $v_1 = 2,5$; $v_2 = 0,707 \cdot 2,5 = 1,768$; $\varphi_2(2,5) = 0,7720$;

$\varphi_4(2,5) = 0,8909$; $\eta_1(1,768) = -0,2727$; $\eta_2(2,5) = 0,3701$;

$$D(2,5) = [(4 \cdot 0,772 + 6) \cdot (0,75 \cdot 0,3701 - 0,1875 \cdot 0,2727) - 2,25 \cdot 0,8909^2] \cdot i_1^2 = 0,272 i_1^2.$$

Так как получено положительное значение функции, то, согласно графику на рис. 33, следует несколько увеличить v_1 :

$$\begin{aligned} 6) v_1 = 2,6; v_2 = 0,707 \cdot 2,6 = 1,838; \varphi_2(2,6) = 0,7513; \\ \varphi_4(2,6) = 0,8814; \eta_1(1,838) = -0,3778; \eta_2(2,6) = 0,3181; \\ D(2,6) = [(4 \cdot 0,7513 + 6) \cdot (0,75 \cdot 0,3181 - 0,1875 \cdot 0,3778) - 2,25 \cdot 0,8814^2] \cdot i_1^2 = -0,237 i_1^2. \end{aligned}$$

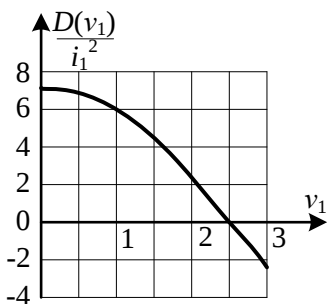


Рис. 33

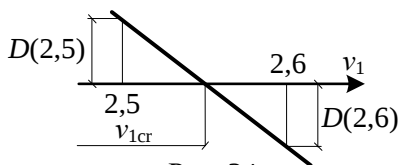


Рис. 34

Поскольку $D(2,5)$ и $D(2,6)$ имеют разные знаки, то корень уравнения следует искать внутри интервала $[2,5; 2,6]$. Уточненное значение v_1 определяем линейной интерполяцией (рис. 34):

$$v_1 = 2,5 + \frac{2,6 - 2,5}{1 - \frac{D(2,6)}{D(2,5)}} = 2,5 + \frac{0,1}{1 - \frac{-0,237}{0,272}} = 2,5 + 0,053 = 2,553;$$

$$v_2 = 0,707 \cdot 2,553 = 1,805; \varphi_2(2,553) = 0,7606; \varphi_4(2,553) = 0,8856;$$

$$\eta_1(1,805) = -0,3268; \eta_2(2,553) = 0,3415;$$

$$\begin{aligned} D(2,553) = [(4 \cdot 0,7606 + 6) \cdot (0,75 \cdot 0,3415 - 0,1875 \cdot 0,3268) - \\ - 2,25 \cdot 0,8856^2] \cdot i_1^2 = -0,003 i_1^2 \approx 0. \end{aligned}$$

После еще одной интерполяции в интервале [2,5; 2,553] окончательно получаем:

$$v_{1cr} = 2,5523; \quad v_{2cr} = 0,707 \cdot 2,5523 = 1,8045.$$

Вычисляем критические значения продольных сил в стойках и соответствующие критические нагрузки F_{1cr} и F_{2cr} :

$$F_{1cr} = N_{1cr} = \frac{v_{1cr}^2 \cdot EI}{h^2} = \frac{2,5523^2 EI}{4^2} = 0,4071EI;$$

$$F_{2cr} = N_{2cr} = \frac{v_{2cr}^2 \cdot EI}{h^2} = \frac{1,8045^2 EI}{4^2} = 0,2035EI.$$

Исходя из того, что $F_{1cr} = 2F_{cr}$, $F_{2cr} = F_{cr}$, из обоих соотношений находим одно и то же значение критического параметра нагрузки $F_{cr} = 0,2035EI$.

3.4.4. Определение приведенных длин сжатых стержней рамы

Приведенные длины стоек

$$l_{jnp} = \mu_j l_j = \frac{\pi}{v_{jcr}} l_j \quad (9)$$

(здесь $\mu_j = \frac{\pi}{v_{jcr}}$ – коэффициент приведения длины):

$$l_{1np} = \frac{\pi}{v_{1cr}} h = \frac{3,142}{2,5523} \cdot 4 \text{ м} = 4,92 \text{ м};$$

$$l_{2np} = \frac{\pi}{v_{2cr}} h = \frac{3,142}{1,8045} \cdot 4 \text{ м} = 6,96 \text{ м}.$$

3.4.5. Выявление формы потери устойчивости системы

Определяем форму потери устойчивости рамы, то есть вид деформированной рамы после отклонения от исходного (безызгибного) состояния. Характеристикой формы потери устойчивости является соотношение перемещений Z_1 и Z_2 (абсолютные значения перемещений при критической нагрузке не могут быть определены при решении задачи в линейной постанов-

ке). Отношение линейного перемещения Z_2 к угловому Z_1 находим, используя любое из канонических уравнений метода перемещений, например, первое:

$$\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{r_{11}}{r_{12}} = -\frac{[4\varphi_2(v_1) + 6] \cdot i_1}{-\frac{6i_1}{h} \eta_3(v_1)} = \frac{4\varphi_2(v_1) + 6}{1,5\varphi_4(v_1)} \quad [\text{м}]. \quad (10)$$

Размерность результата – [длина], так как одно из перемещений (Z_2) – линейное, а другое (Z_1) – угловое.

Подставив в соотношение (10) значения функций при $v_1 \text{ cr}$, получаем:

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{4 \cdot 0,7606 + 6}{1,5 \cdot 0,8857} = 6,81 \text{ м}. \quad (11)$$

Полученную величину следует понимать как коэффициент, на который нужно умножить угол поворота Z_1 , чтобы найти линейное смещение Z_2 .

Каковы бы ни были абсолютные значения *малых* перемещений Z_1 и Z_2 при отклонении от исходного равновесного состояния в момент потери устойчивости, они должны удовлетворять зависимости (10) со значением (11).

Для графического изображения формы потери устойчивости в основной системе метода перемещений задаем угол поворота Z_1 произвольной величины (рис. 35) – при этом схема деформации рамы оказывается подобной показанной на рис. 25. Из узла C , которому задано угловое перемещение, проводим касательную к оси одного из стержней (выбран стержень $СК$) в деформированном состоянии. Вдоль оси этого же стержня в недеформированном состоянии откладываем *в масштабе чертежа* отрезок, равный 6,81 м и из полученной точки a проводим перпендикуляр до пересечения с касательной Cb . Очевидно, что отрезок $\overline{ab}$ равен $(6,81 \text{ м}) \cdot Z_1$ (так как угол Z_1 – малый, то $\text{tg } Z_1 \approx Z_1$), т.е. линейному перемещению Z_2 , определяемому отношением (11). Далее изображаем основную систему при смещении ригеля на Z_2 , причем Z_2 показываем равным отрезку $\overline{ab}$ (рис. 36). Наконец, суммируем (с учетом знаков) перемещения основной системы от поворота узла C на Z_1 и линейного перемещения $Z_2 = (6,81 \text{ м}) \cdot Z_1$,

в результате чего получаем вид рамы после потери устойчивости (рис. 37).

При выполнении описанных выше графических построений выбран такой масштаб изображения перемещений, чтобы наибольшее линейное перемещение на чертеже получилось в пределах $1/6 - 1/3$ длины самого длинного стержня рамы.

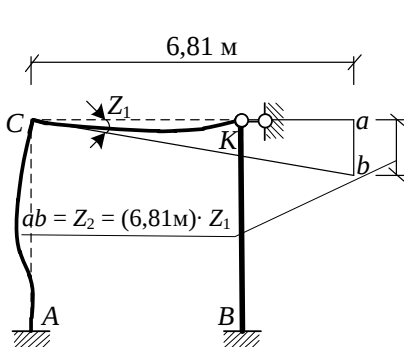


Рис. 35

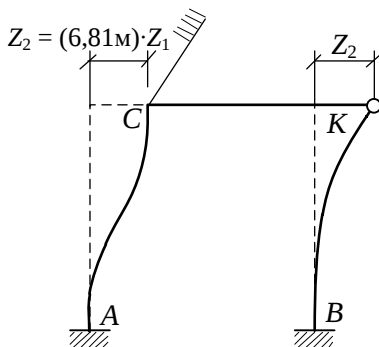


Рис. 36

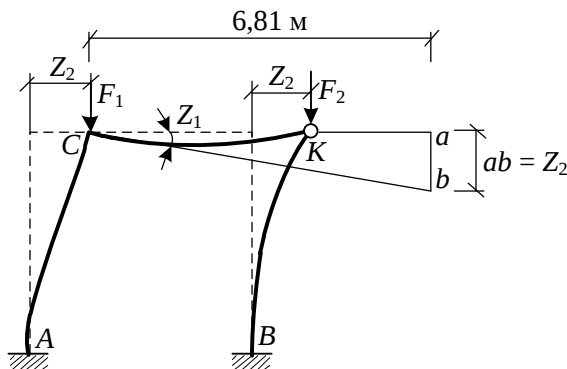


Рис. 37

3.4.6. Проверка местной потери устойчивости сжатых стоек

В заключение проанализируем возможность потери устойчивости при $Z_1 = Z_2 = 0$ (тривиальное решение системы канонических уравнений метода перемещений). Поскольку концы стоек

не получают смещений, то каждую из них рассчитывают независимо от других элементов системы, как одиночный стержень. Стойка AC рассматривается как защемленная двумя концами. В этом случае коэффициент продольной силы v_{1cr} , как известно, равен 2π . Соответствующая критическая сила определяется по обобщенной формуле Эйлера:

$$F_{1cr} = N_{1cr} = \frac{v_{1cr}^2 \cdot EI}{h^2} = \frac{(2\pi)^2 \cdot EI}{4^2} = 2,468EI,$$

что в 6,06 раз больше значения критической силы, найденного выше с учетом работы стойки в составе рамы.

Для стойки BK , защемленной нижним концом и шарнирно опертой сверху, имеем $v_{2cr} = \frac{\pi}{\mu_2} = \frac{\pi}{0,6992} = 4,4934$, тогда

$$F_{2cr} = N_{2cr} = \frac{(v_{2cr})^2 \cdot EI}{h^2} = \frac{4,4934^2 \cdot EI}{4^2} = 1,262EI,$$

или в 6,2 раза больше, чем в случае нетривиального решения.

Очевидно, что столь большие значения продольных сил не могут быть реализованы, так как рама потеряет устойчивость при меньших критических силах, найденных ранее и соответствующих ненулевым перемещениям Z_1 и Z_2 (см. рис. 37).

4. ЗАДАЧИ ДЛЯ ЗАЩИТЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

4.1. Динамический расчет плоской рамы

При решении задачи требуется выполнить расчет на собственные колебания и определить их угловые и технические частоты.

Схемы для задач по защите контрольных работ даны на рис. 40. Исходные данные приведены в табл. 3.

Таблица 3

Номер варианта	l , м	h , м	$m_1 : m_2$	$EI_1 : EI_2$
1	10	11	2 : 1	4
2	8	9	3 : 2	3
3	6	7	4 : 3	4
4	4	5	3 : 4	4
5	2	3	2 : 3	2
6	3	2	1 : 2	3
7	5	4	1 : 4	2
8	7	6	3 : 1	3
9	9	8	4 : 1	2
10	11	10	1 : 3	4

Примечание. EI_1 – жесткость поперечного сечения при изгибе горизонтальных элементов;

EI_2 – жесткость поперечного сечения при изгибе вертикальных элементов.

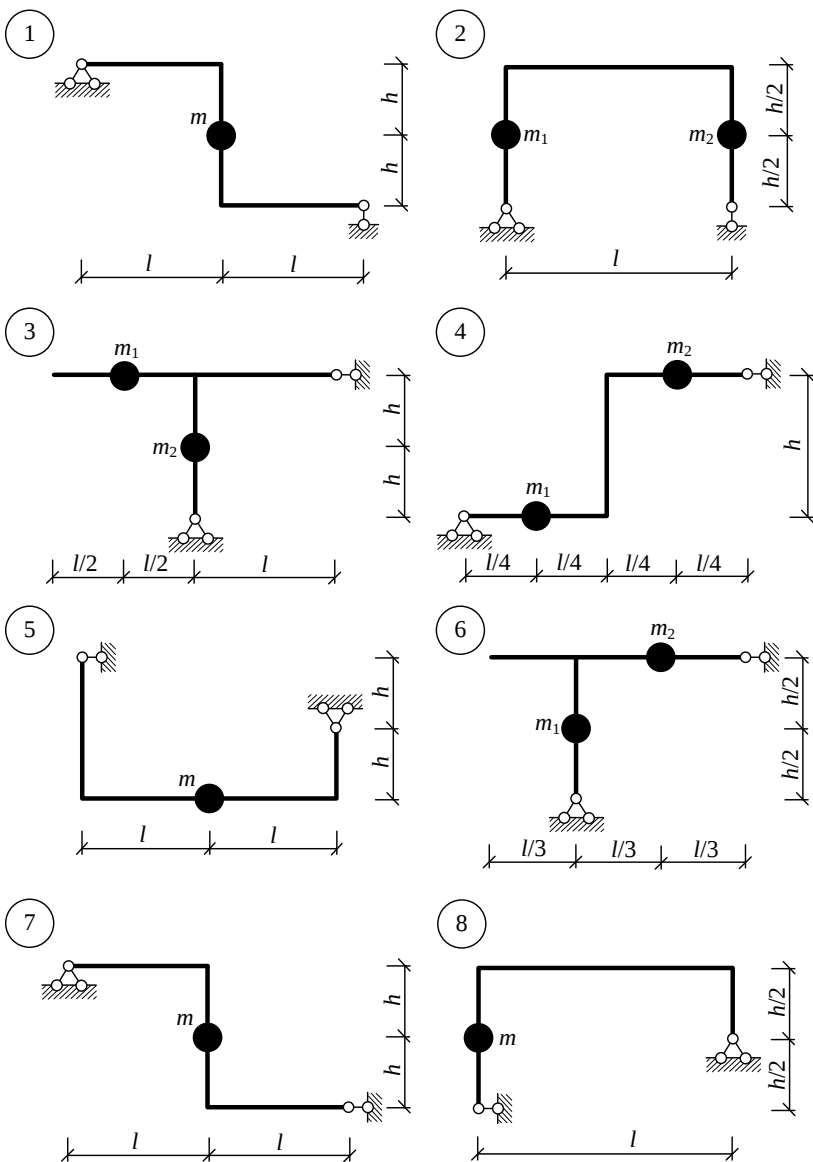
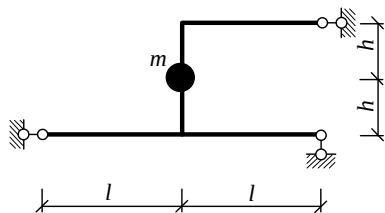
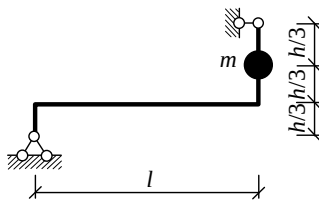


Рис. 40

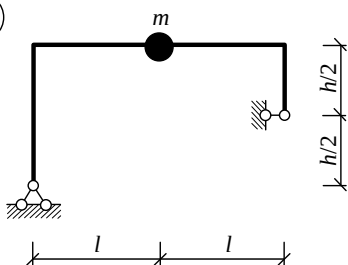
9



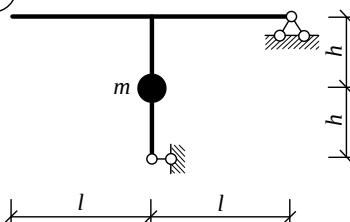
10



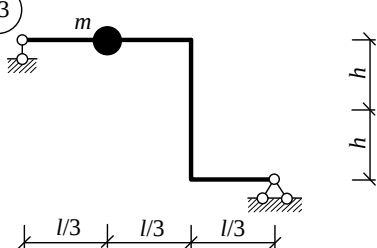
11



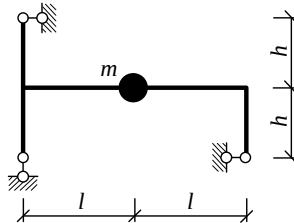
12



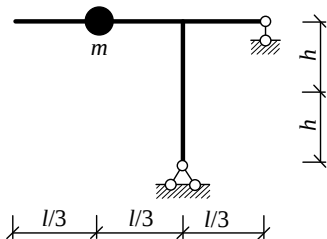
13



14



15



16

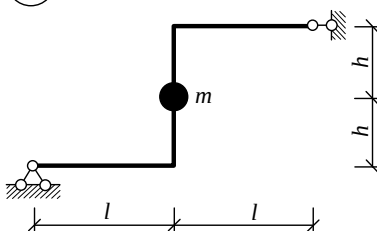
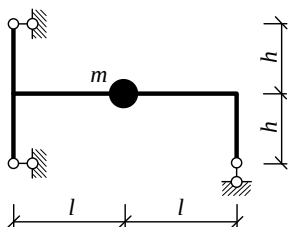
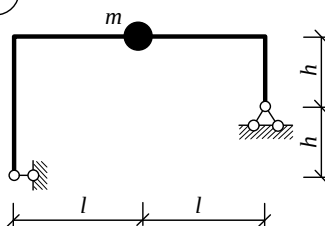


Рис. 40 (продолжение)

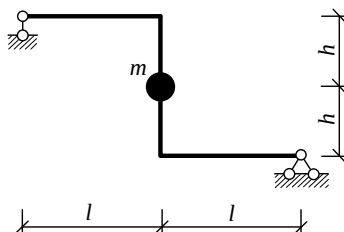
17



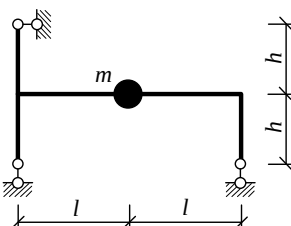
18



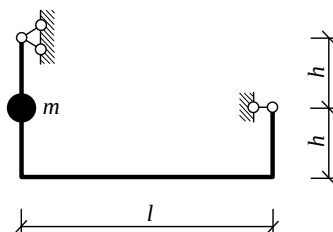
19



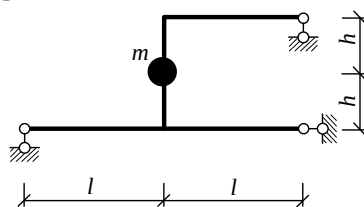
20



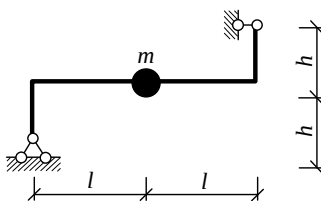
21



22



23



24

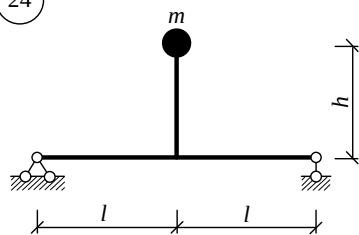


Рис. 40 (окончание)

4.2. Расчет плоской рамы на устойчивость

При решении задачи требуется выполнить расчет рамной системы на устойчивость методом перемещений и определить величину критической силы.

Схемы для задач по защите контрольных работ даны на рис. 41. Исходные данные приведены в табл. 3.

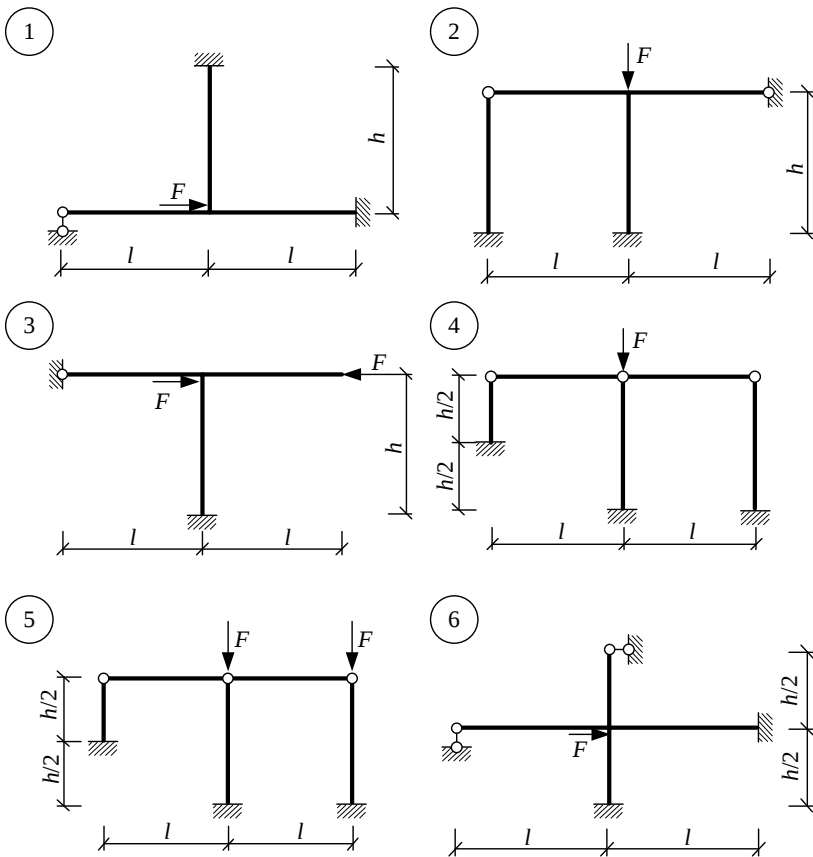


Рис. 41

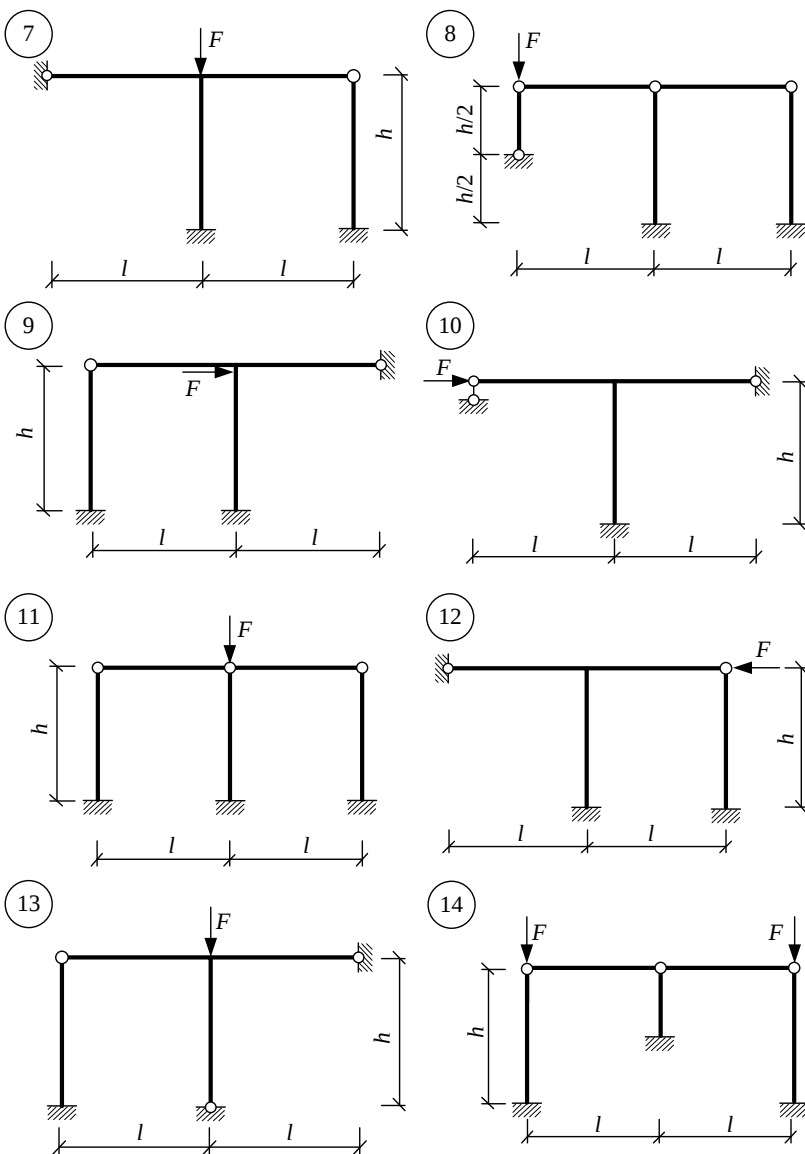


Рис. 41 (продолжение)

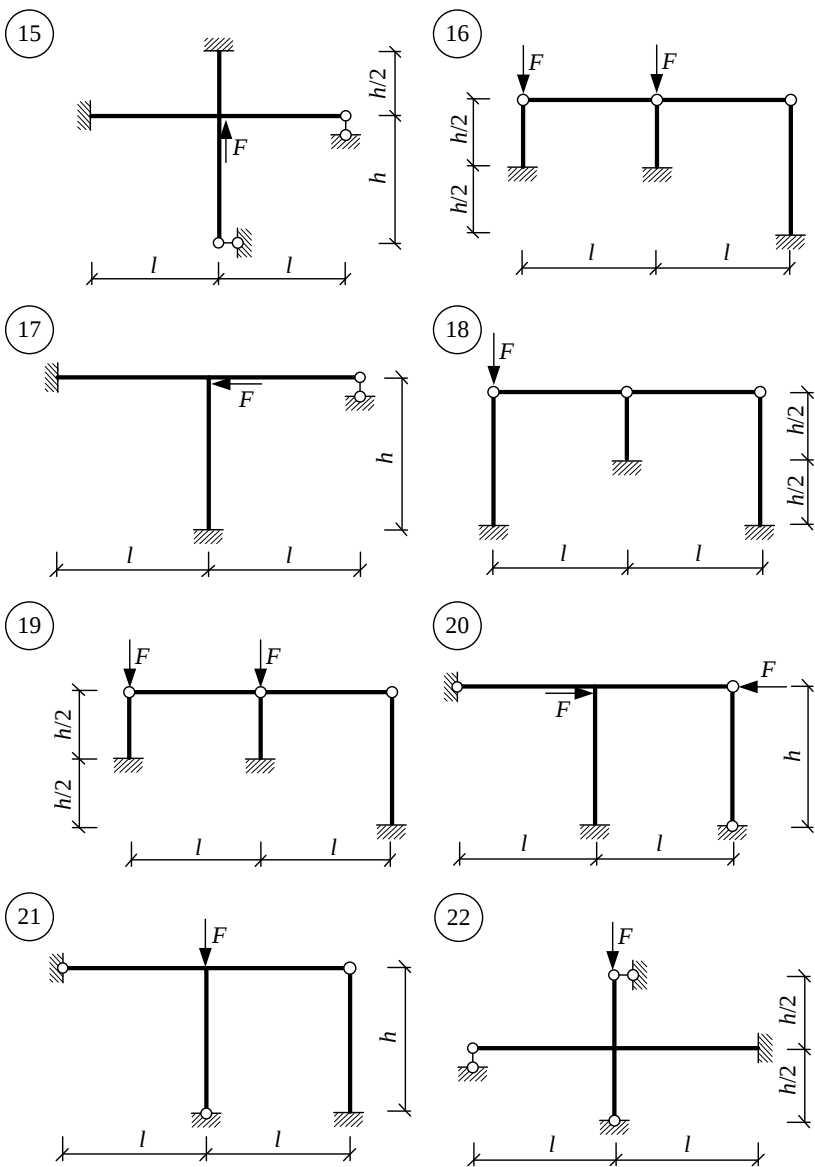


Рис. 41 (окончание)

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ ПО ТЕМЕ «ДИНАМИКА И УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ»

1. Динамика сооружений. Основные понятия теории расчета сооружений на динамические воздействия. Степени свободы в динамике деформируемых систем. Классификация динамических воздействий. Виды колебаний.
2. Основные задачи динамических расчетов сооружений. Методы решения задач динамики. Принцип Д'Аламбера.
3. Колебания систем с одной степенью свободы масс. Обобщенная расчетная модель. Свободные колебания систем с одной степенью свободы масс без учета демпфирования.
4. Вынужденные колебания систем с одной степенью свободы масс.
5. Определение усилий при динамических нагрузках в системах с одной степенью свободы масс.
6. Динамический коэффициент. Резонанс в системе с одной степенью свободы масс.
7. Системы с конечным числом степеней свободы масс. Гипотезы и допущения. Расчетная схема системы при свободных и вынужденных колебаниях.
8. Собственные колебания систем с конечным числом степеней свободы масс. Уравнения собственных колебаний, возможные варианты их записи – в амплитудах инерционных сил или перемещений.
9. Уравнение частот собственных колебаний систем с конечным числом степеней свободы масс. Спектр частот и главные формы колебаний. Выявление главных форм колебаний. Ортогональность главных форм.
10. Вынужденные колебания систем с конечным числом степеней свободы масс при гармонических воздействиях. Предположения и гипотезы. Уравнения установившихся вынужденных колебаний при вибрационной нагрузке в амплитудах инерционных сил.

11. Определение динамических усилий от гармонических воздействий в системах с конечным числом степеней свободы масс.
12. Принципиальные способы и приемы виброзащиты и гашения колебаний зданий, сооружений и конструкций.
13. Понятие устойчивости равновесия стержневых систем. Свойства (качество) равновесия. Критическая нагрузка. Виды потери устойчивости. Бифуркация.
14. Основные задачи расчета сооружений и конструкций на устойчивость равновесного состояния. Методы расчета сооружений на устойчивость (статический, энергетический, динамический), их сущность.
15. Общий порядок расчета на устойчивость равновесия. Предпосылки, допущения и рабочие гипотезы линейной теории устойчивости. Пределы применения линейной теории.
16. Расчет на устойчивость методом перемещений стержневых систем со сжатыми прямолинейными элементами. Основная система. Система канонических уравнений, ее физический смысл.
17. Способы определения коэффициентов канонических уравнений. Специальные функции метода перемещений и их использование для построения единичных эпюр.
18. Получение уравнения устойчивости (бифуркации). Определение критической нагрузки и формы потери устойчивости.
19. Общий алгоритм расчета на устойчивость методом перемещений.
20. Использование групповых неизвестных метода перемещений и учет симметрии в расчетах на устойчивость.

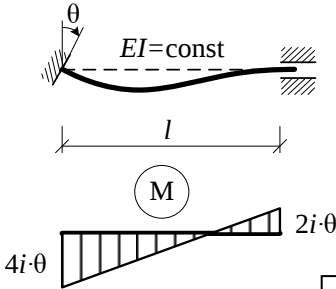
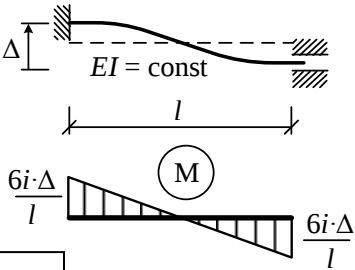
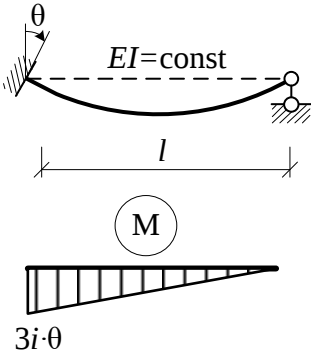
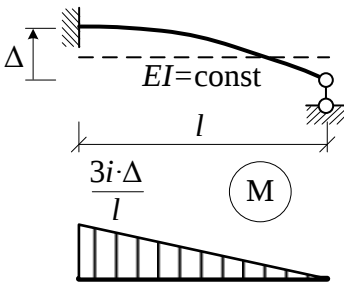
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шапошников, Н. Н. Строительная механика : учебник / Н. Н. Шапошников, Р. Е. Кристалинский, А. В. Дарков. – 13-е изд., перераб. и доп. – Санкт-Петербург : Лань, 2012. – 704 с. (Предыдущие: 12-е изд., стер. – 2010. – 656 с.; 11-е изд., стер. – 2008. – 656 с.).
2. Леонтьев, Н. Н. Основы строительной механики стержневых систем : учебник / Н. Н. Леонтьев, Д. Н. Соболев, А. А. Амосов. – Москва : АСВ, 1996. – 541 с.
3. Александров, А. В. Строительная механика : в 2 кн. Кн. 2 : Динамика и устойчивость упругих систем : учебник для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, В. Б. Зылев ; под ред. А. В. Александрова. – Москва : Высшая школа, 2008. – 384 с.
4. Масленников, А. М. Основы динамики и устойчивости стержневых систем : учеб. пособие для студентов строит. специальностей / А. М. Масленников. – Москва ; Санкт-Петербург : АСВ, 2002. – 204 с.
5. Себешев, В. Г. Строительная механика. Ч. III : Динамика и устойчивость сооружений : иллюстративный конспект лекций [Электронный ресурс] / В. Г. Себешев. – Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2011. – Режим доступа: <http://mega.sibstrin.ru/MegaPro/Web/SearchResult/ToPage/1>
6. Себешев, В. Г. Динамика деформируемых систем с конечным числом степеней свободы масс : учеб. пособие / В. Г. Себешев. – Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2011. – 228 с.
7. Себешев, В. Г. Расчет стержневых систем на устойчивость методом перемещений : учеб. пособие [Электронный ресурс] / В. Г. Себешев. – Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2014. – Режим доступа: <http://mega.sibstrin.ru/MegaPro/Web/SearchResult/ToPage/1>
8. Расчет деформируемых стержневых систем методом перемещений : метод. указания / сост. В. Г. Себешев. – Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2010. – 93 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

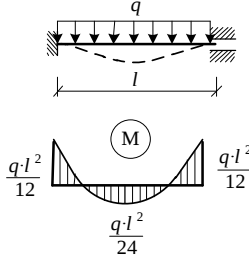
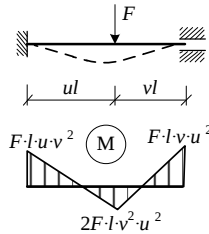
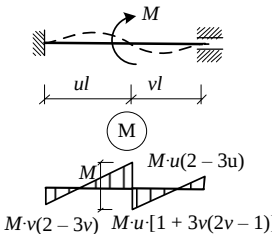
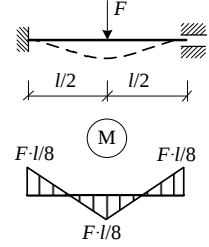
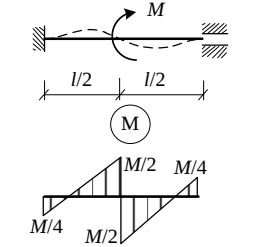
Приложение 1

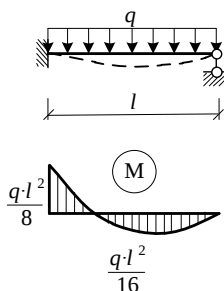
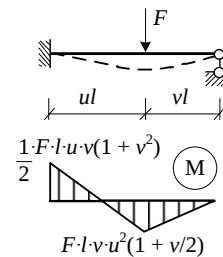
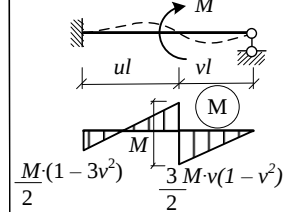
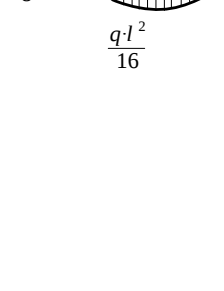
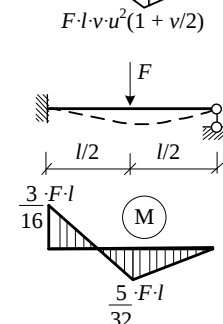
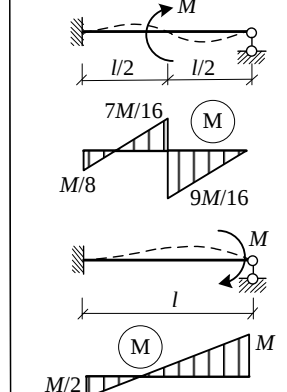
Эпюры изгибающих моментов в типовых элементах постоянного сечения плоских ОС МП от смещений конечных сечений

Вид смещения	
Поворот конечного сечения на угол θ	Взаимное линейное смещение конечных сечений Δ
Элемент типа 1	
 $i = \frac{EI}{l}$	
Элемент типа 2	
	

Приложение 2

Эпюры изгибающих моментов в типовых элементах постоянного сечения плоских ОС МП от некоторых видов нагрузок

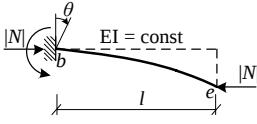
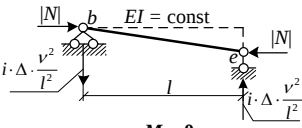
Тип элемента	НАГРУЗКИ		
	Равномерно распределенная нагрузка	Сосредоточенная сила	Сосредоточенный момент
Тип 1			
			

Тип элемента	НАГРУЗКИ		
	Равномерно распределенная нагрузка	Сосредоточенная сила	Сосредоточенный момент
Тип 2			
			

Приложение 3

Реакции и эпюры внутренних силовых факторов от смещений концевых сечений однопролетных сжато-изогнутых стержней постоянного сечения (типовых элементов плоских ОС МП)

Вид смещения	
1	2
Поворот концевого сечения на угол θ	Взаимное линейное смещение концевых сечений Δ
Тип 1	
$\frac{6i}{l} \cdot \theta \cdot \eta_3(v)$ $EI = \text{const}$ l $4i \cdot \theta \cdot \varphi_2(v)$ $2i \cdot \theta \cdot \varphi_2(v)$ $\frac{6i}{l} \cdot \theta \cdot \eta_3(v)$	$\frac{12i}{l^2} \cdot \Delta \cdot \eta_2(v)$ $EI = \text{const}$ l $\frac{6i}{l} \cdot \Delta \cdot \varphi_4(v)$ $\frac{6i}{l} \cdot \Delta \cdot \varphi_4(v)$ $i = \frac{EI}{l}$ $\frac{12i}{l^2} \cdot \Delta \cdot \eta_2(v)$
Тип 2	
$\frac{3i}{l} \cdot \theta \cdot \varphi_1(v)$ $EI = \text{const}$ l $3i \cdot \theta \cdot \varphi_1(v)$ $\frac{3i}{l} \cdot \theta \cdot \varphi_1(v)$	$\frac{3i}{l^2} \cdot \Delta \cdot \eta_1(v)$ $EI = \text{const}$ l $\frac{3i}{l} \cdot \Delta \cdot \varphi_1(v)$ $\frac{3i}{l^2} \cdot \Delta \cdot \eta_1(v)$

1 Тип 3	2 Тип 4
 $EI = \text{const}$ N θ l N $i \cdot \theta \cdot v \cdot \text{tg } v$ M $i \cdot \theta \cdot \frac{v^2}{l}$ Q	 $EI = \text{const}$ N $i \cdot \Delta \cdot \frac{v^2}{l^2}$ l N $i \cdot \Delta \cdot \frac{v^2}{l^2}$ $M = 0$ $Q = 0$ Δ_{be} v_b v_e $\Delta_{be} = v_b + v_e$
$v = l \sqrt{\frac{-N}{EI}}; \quad \varphi_1(v) = \frac{v^2 \text{tg } v_j}{3(\text{tg } v - v)}; \quad \varphi_2(v) = \frac{v(\text{tg } v - v)}{8 \text{tg } v \left(\text{tg } \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)};$ $\varphi_3(v) = \frac{v \cdot (v - \sin v)}{4 \sin v \left(\text{tg } \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)}; \quad \varphi_4(v) = \frac{v^2 \text{tg } \frac{v}{2}}{12 \left(\text{tg } \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)} = \varphi_1 \left(\frac{v}{2} \right);$ $\eta_1(v) = \frac{v^3}{3(\text{tg } v - v)}; \quad \eta_2(v) = \frac{v^3}{24 \left(\text{tg } \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)} = \eta_1 \left(\frac{v}{2} \right);$ $\eta_3(v) = \varphi_4(v)$	

Приложение 4

**Значения специальных функций метода перемещений
для сжато-изогнутых стержней**

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v)$	$\eta_1(v)$	$\eta_2(v)$	$v \operatorname{tg} v$
1	2	3	4	5	6	7	8
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,0000
0,10	0,9993	0,9997	1,0002	0,9998	0,9960	0,9990	0,0100
0,20	0,9973	0,9987	1,0007	0,9993	0,9840	0,9960	0,0405
0,30	0,9940	0,9970	1,0015	0,9985	0,9640	0,9910	0,0928
0,40	0,9893	0,9947	1,0027	0,9973	0,9360	0,9840	0,1691
0,50	0,9832	0,9916	1,0042	0,9958	0,8999	0,9750	0,2732
0,60	0,9757	0,9879	1,0061	0,9940	0,8557	0,9640	0,4105
0,70	0,9669	0,9836	1,0083	0,9918	0,8035	0,9510	0,5896
0,80	0,95655	0,9785	1,0109	0,9893	0,7432	0,9360	0,8237
0,90	0,9447	0,9727	1,0138	0,9864	0,6747	0,9189	1,1341
1,00	0,9313	0,9662	1,0172	0,9832	0,5980	0,8999	1,5574
1,10	0,9164	0,9590	1,0209	0,9797	0,5131	0,8786	2,1612
1,20	0,8998	0,9511	1,0251	0,9757	0,4198	0,8557	3,0866
1,30	0,8814	0,9424	1,0297	0,9715	0,3181	0,8307	4,6827
1,40	0,8613	0,9329	1,0348	0,9669	0,2080	0,8035	8,1170
1,50	0,8393	0,9227	1,0403	0,9619	0,0893	0,7744	21,152
$\pi/2$	0,8225	0,9150	1,0445	0,9581	0,0000	0,7525	$\pm \infty$
1,60	0,8152	0,9116	1,0463	0,9565	-0,0381	0,7432	-54,772
1,70	0,7891	0,8998	1,0529	0,9508	-0,1743	0,7100	-13,084
1,80	0,7606	0,8871	1,0600	0,9447	-0,3194	0,6747	-7,7153
1,90	0,7297	0,8735	1,0676	0,9382	-0,4736	0,6374	-5,5615
2,00	0,6961	0,8590	1,0760	0,9313	-0,6372	0,5980	-4,3701
2,04	0,6819	0,8530	1,0795	0,9285	-0,7053	0,5817	-4,0240
2,08	0,6673	0,8468	1,0831	0,9256	-0,7749	0,5650	-3,7255
2,12	0,6521	0,8404	1,0868	0,9226	-0,8461	0,5480	-3,4640
2,16	0,6364	0,8339	1,0907	0,9195	-0,9188	0,5307	-3,2316
2,20	0,6202	0,8273	1,0946	0,9164	-0,9931	0,5131	-3,0224
2,24	0,6034	0,8204	1,0987	0,9132	-1,0691	0,4951	-2,8320
2,28	0,5861	0,8134	1,1030	0,9099	-1,1467	0,4767	-2,6569
2,32	0,5681	0,8063	1,1073	0,9066	-1,2260	0,4581	-2,4943

Продолжение прил. 4

1	2	3	4	5	6	7	8
2,36	0,5496	0,7990	1,1118	0,9032	-1,3069	0,4391	-2,3421
2,40	0,5304	0,7915	1,1164	0,8998	-1,3896	0,4198	-2,1984
2,44	0,5105	0,7838	1,1212	0,8963	-1,4740	0,4001	-2,0618
2,48	0,4899	0,7760	1,1261	0,8927	-1,5603	0,3801	-1,9311
2,52	0,4685	0,7679	1,1311	0,8890	-1,6483	0,3598	-1,8051
2,56	0,4464	0,7597	1,1363	0,8853	-1,7381	0,3391	-1,6831
2,60	0,4234	0,7513	1,1417	0,8814	-1,8299	0,3181	-1,5642
2,64	0,3996	0,7427	1,1473	0,8776	-1,9236	0,2968	-1,4477
2,68	0,3748	0,7339	1,1530	0,8736	-2,0193	0,2751	-1,3331
2,72	0,3491	0,7249	1,1589	0,8696	-8,1171	0,2531	-1,2199
2,76	0,3223	0,7158	1,1650	0,8655	-2,2169	0,2307	-1,1075
2,80	0,2944	0,7064	1,1712	0,8613	-2,3189	0,2080	-0,9955
2,84	0,2654	0,6967	1,1777	0,8571	-2,4231	0,1849	-0,9835
2,88	0,2352	0,6869	1,1844	0,8527	-2,5296	0,1615	-0,7711
2,92	0,2036	0,6769	1,1913	0,8483	-2,6386	0,1378	-0,6579
2,96	0,1706	0,6666	1,1984	0,8438	-2,7499	0,1137	-0,5435
3,00	0,1361	0,6560	1,2057	0,8393	-2,8639	0,0893	-0,4276
3,04	0,1000	0,6453	1,2133	0,8345	-2,9806	0,0645	-0,3099
3,08	0,0621	0,6343	1,2211	0,8299	-3,1001	0,0394	-0,1899
3,12	0,0223	0,6230	1,2292	0,8251	-3,2225	0,0139	-0,0674
π	0,0000	0,6169	1,2337	0,8225	-3,2899	0,0000	0,0000
3,16	-0,0195	0,6115	1,2376	0,8202	-3,3480	-0,0119	0,0582
3,20	-0,0635	0,5997	1,2462	0,8152	-3,4769	-0,0381	0,1871
3,24	-0,1100	0,5877	1,2551	0,8102	-3,6092	-0,0646	0,3199
3,28	-0,1591	0,5753	1,2644	0,8050	-3,7452	-0,0915	0,4569
3,32	-0,2110	0,5627	1,2739	0,7998	-3,8852	-0,1187	0,5987
3,36	-0,2662	0,5498	1,2838	0,7945	-4,0294	-0,1468	0,7457
3,40	-0,3248	0,5366	1,2940	0,7891	-4,1781	-0,1743	0,8967
3,44	-0,3873	0,5230	1,3046	0,7835	-4,3319	-0,2026	1,0581
3,48	-0,4542	0,5091	1,3156	0,7779	-4,4910	-0,2313	1,2248
3,52	-0,5259	0,4949	1,3269	0,7723	-4,6560	-0,2603	1,3994
3,56	-0,6030	0,4804	1,3367	0,7065	-4,8275	-0,2897	1,5830
3,60	-0,6862	0,4655	1,3509	0,7606	-5,0062	-0,3194	1,7765

Продолжение прил. 4

1	2	3	4	5	6	7	8
3,64	-0,7764	0,4502	1,3635	0,7546	-5,1930	-0,3495	1,9810
3,68	-0,8746	0,4345	1,3766	0,7485	-5,3887	-0,3800	2,1979
3,72	-0,9819	0,4184	1,3902	0,7424	-5,5947	-0,4108	2,4288
3,76	-1,0999	0,4019	1,4404	0,7361	-5,8124	-0,4420	2,6753
3,80	-1,2303	0,3850	1,4191	0,7297	-6,0436	-0,4736	2,9395
3,84	-1,3754	0,3676	1,4344	0,7232	-6,2906	-0,5056	3,2239
3,88	-1,5379	0,3498	1,4502	0,7166	-6,5561	-0,5379	3,5315
3,92	-1,7216	0,3315	1,4668	0,7099	-6,8437	-0,5706	3,8656
3,96	-1,9311	0,3126	1,4840	0,7031	-7,1583	-0,6037	4,2305
4,00	-2,1726	0,2933	1,5019	0,6961	-7,5060	-0,6372	4,6313
4,04	-2,4546	0,2734	1,5205	0,6891	-7,8952	-0,6710	5,0744
4,08	-2,7887	0,2529	1,5400	0,6819	-8,3375	-0,7053	5,5678
4,12	-3,1916	0,2318	1,5603	0,6747	-8,8497	-0,7399	6,1216
4,16	-3,6878	0,2101	1,5815	0,6673	-9,4564	-0,7749	6,7489
4,20	-4,3156	0,1878	1,6037	0,6597	-10,196	-0,8103	7,4667
4,22	-4,6968	0,1763	1,6151	0,6559	-10,633	-0,8281	7,8664
4,24	-5,1370	0,1647	1,6269	0,6521	-11,130	-0,8461	8,2979
4,26	-5,6514	0,1529	1,6388	0,6482	-11,701	-0,8641	8,7653
4,28	-6,2609	0,1409	1,6511	0,6443	-12,367	-0,8822	9,2738
4,30	-6,9947	0,1287	1,6636	0,6404	-13,158	-0,9005	9,8291
4,32	-7,8961	0,1164	1,6765	0,6364	-14,116	-0,9188	10,439
4,34	-9,0304	0,1038	1,6896	0,6324	-15,308	-0,9372	11,111
4,36	-10,502	0,0910	1,7031	0,6284	-16,839	-0,9558	11,856
4,38	-12,490	0,0780	1,7168,7	0,6243	-18,885	-0,9744	12,688
4,40	-15,327	0,0648	1,7310	0,6202	-21,780	-0,9931	13,624
4,42	-19,704	0,0514	1,7454	0,6160	-26,216	-1,0120	14,684
4,44	-27,353	0,0377	1,7602	0,6119	-33,925	-1,0309	15,895
4,46	-44,150	0,0238	1,7754	0,6077	-50,781	-1,0500	17,294
4,48	-111,02	0,0096	1,7910	0,6034	-117,72	-1,0691	18,930
4,50	227,93	-0,0048	1,8070	0,5991	221,18	-1,0884	20,868
4,52	56,983	-0,0194	1,8234	0,5948	50,173	-1,1077	23,204
4,54	32,794	-0,0344	1,8402	0,5905	25,923	-1,1272	26,074

Продолжение прил. 4

1	2	3	4	5	6	7	8
4,56	23,129	-0,0496	1,8574	0,5861	16,198	-1,1467	29,691
4,58	17,924	-0,0651	1,8751	0,5817	10,932	-1,1664	34,393
4,60	14,669	-0,0809	1,8933	0,5772	7,6160	-1,1861	40,757
4,62	12,440	-0,0969	1,9120	0,5727	5,3249	-1,2060	49,864
4,64	10,816	-0,1134	1,9312	0,5681	3,6392	-1,2260	63,986
4,66	9,5793	-0,1301	1,9509	0,5636	2,3408	-1,2461	88,869
4,68	8,6057	-0,1471	1,9711	0,5589	1,3049	-1,2663	144,44
4,70	7,8186	-0,1645	1,9920	0,5543	0,4553	-1,2865	379,35
$3\pi/2$	7,4022	-0,1755	2,0052	0,5514	0,0000	-1,2992	$\pm \infty$
4,72	7,1686	-0,1823	2,0134	0,5496	-0,2575	-1,3069	-620,14
4,74	6,6223	-0,2005	2,0355	0,5449	-0,8669	-1,3274	-171,63
4,76	6,1563	-0,2190	2,0582	0,5401	-1,3962	-1,3481	-99,901
4,78	5,7538	-0,2379	2,0815	0,5352	-1,8624	-1,3668	-70,591
4,80	5,4023	-0,2572	2,1056	0,5304	-2,2777	-1,3896	-54,647
4,82	5,0925	-0,2770	2,1304	0,5255	-2,6516	-1,4106	-44,618
4,84	4,8171	-0,2972	2,1560	0,5205	-2,9915	-1,4316	-37,722
4,86	4,5704	-0,3179	2,1823	0,5155	-3,3028	-1,4528	-32,685
4,88	4,3480	-0,3390	2,2095	0,5105	-3,5901	-1,4740	-28,842
4,90	4,1463	-0,3607	2,2375	0,5054	-3,8570	-1,4954	-25,811
4,92	3,9623	-0,3828	2,2665	0,5003	-4,1065	-1,5169	-23,357
4,94	3,7937	-0,4056	2,2964	0,4951	-4,3408	-1,5385	-21,328
4,96	3,6384	-0,4288	2,3273	0,4899	-4,5621	-1,5603	-19,620
4,98	3,4948	-0,4527	2,3592	0,4846	-4,7720	-1,5821	-18,163
5,00	3,3615	-0,4772	2,3923	0,4793	-4,9719	-1,6040	-16903
5,04	3,1211	-0,5281	2,4618	0,4685	-5,3461	-1,6483	-14,830
5,08	2,9097	-0,5818	2,5364	0,4576	-5,6925	-1,6930	-13,191
5,12	2,7215	-0,6387	2,6165	0,4464	-6,0166	-1,7381	-11,858
5,16	2,5523	-0,6989	2,7028	0,4350	-6,3229	-1,7838	-10,748
5,20	2,3986	-0,7629	2,7960	0,4234	-6,6147	-1,8299	-9,8053
5,24	2,2580	-0,8311	2,8969	0,4116	-6,8946	-1,8765	-8,9924
5,28	2,1282	-0,9039	3,0065	0,3996	-7,1646	-1,9236	-8,2810
5,32	2,0075	-0,9819	3,1257	0,3873	-7,4266	-1,9712	-7,6506

Окончание прил. 4

1	2	3	4	5	6	7	8
5,36	1,8946	-1,0658	3,2560	0,3748	-7,6819	-2,0193	-7,0858
5,40	1,7884	-1,1563	3,3989	0,3621	-7,9316	-2,0679	-6,5747
5,44	1,6877	-1,2544	3,5560	0,3491	-8,1768	-2,1171	-6,1081
5,48	1,5918	-1,3611	3,7297	0,3358	-8,4183	-2,1667	-5,6785
5,52	1,5001	-1,4779	3,9226	0,3223	-8,6567	-2,2169	-5,2801
5,56	1,4118	-1,6062	4,1379	0,3085	-8,8927	-2,2676	-4,9079
5,60	1,3266	-1,7481	4,3794	0,2944	-9,1268	-2,3189	-4,5581
5,64	1,2438	-1,9061	4,6523	0,2801	-9,3594	-2,3707	-4,2272
5,68	1,1631	-2,0833	4,9628	0,2654	-9,5910	-2,4231	-3,9125
5,72	1,0842	-2,2838	5,3190	0,2504	-9,8219	-2,4761	-3,6116
5,76	1,0066	-2,5129	5,7313	0,2352	-10,053	-2,5296	-3,3224
5,80	0,9302	-2,7777	6,2139	0,2195	-10,283	-2,5838	-3,0431
5,84	0,8546	-3,0876	6,7858	0,2036	-10,514	-2,6386	-2,7721
5,88	0,7795	-3,4560	7,4736	0,1873	-10,745	-2,6939	-2,5081
5,92	0,7047	-3,9022	8,3162	0,1706	-10,977	-2,7499	-2,2499
5,96	0,6300	-4,4550	9,3706	0,1535	-11,210	-2,8066	-1,9962
6,00	0,5551	-5,1594	10,727	0,1361	-11,445	-2,8639	-1,7460
6,02	0,5175	-5,5900	11,562	0,1272	-11,563	-2,8928	-1,6220
6,04	0,4798	-6,0900	12,535	0,1182	-11,681	-2,9219	-1,4985
6,06	0,4419	-6,6780	13,684	0,1091	-11,799	-2,9512	-1,3754
6,08	0,4039	-7,3801	15,060	0,1000	-11,918	-2,9806	-1,2527
6,10	0,3656	-8,2336	16,739	0,0907	-12,038	-3,0102	-1,1301
6,12	0,3271	-9,2941	18,832	0,0812	-12,158	-3,0400	-1,0077
6,14	0,2883	-16,648	21,512	0,0717	-12,278	-3,0699	-0,8852
6,16	0,2492	-12,439	25,064	0,0621	-12,399	-3,1001	-0,7627
6,18	0,2098	-14,920	29,998	0,0523	-12,521	-3,1304	-0,6400
6,20	0,1700	-18,590	37,308	0,0424	-12,643	-3,1609	-0,5169
6,22	0,1299	-24,578	49,253	0,0324	-12,766	-3,1916	-0,3935
6,24	0,0893	-36,101	72,269	0,0223	-12,890	-3,2225	-0,2696
6,26	0,0482	-67,488	135,01	0,0121	-13,014	-3,2536	-0,1452
6,28	0,0067	-492,89	985,78	0,0017	-13,140	-3,2849	-0,0200
2 π	0,0000	$-\infty$	$+\infty$	0,0000	-13,159	-3,2899	0,0000

Составители

Алексей Анатольевич Кулагин
Владимир Григорьевич Себешев
Наталья Владимировна Харинова

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
Часть 3.
ДИНАМИКА И УСТОЙЧИВОСТЬ
СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Методические указания и контрольные задания
для студентов, обучающихся по направлению подготовки
08.03.01 «Строительство» (профиль «Промышленное
и гражданское строительство»)
заочной формы обучения

Редактор Г.К. Найденова

Новосибирский государственный архитектурно-строительный
университет (Сибстрин)
630008, Новосибирск, ул. Ленинградская, 113
