

Задача 1.

Общий объем двух одинаковых стержней AB и AC равен V . При каком угле α , допускаемая сила F будет наибольшей, если известно $[\sigma]$ для материала стержней?

Решение

Из условия равновесия узла A имеем, что

$$N_{AB} = N_{AC} = N \quad F = 2 \cdot N \cdot \sin \alpha.$$

Из условия прочности:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma] \text{ следует, } F = 2 \cdot A \cdot [\sigma] \cdot \sin \alpha, \text{ объем } V = \frac{2 \cdot A \cdot a}{\cos \alpha}, \text{ площадь } A = \frac{V \cdot \cos \alpha}{2 \cdot a}.$$

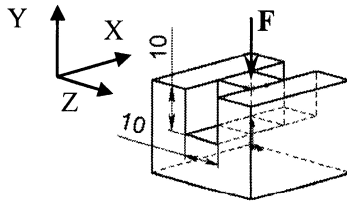
$$\text{Тогда } F = \frac{V \cdot [\sigma] \cdot \sin 2\alpha}{2 \cdot a}.$$

Условие экстремума для силы F дает:

$$\frac{dF}{d\alpha} = \frac{V \cdot [\sigma]}{2 \cdot a} \cdot 2 \cdot \cos 2\alpha = 0,$$

$$\text{откуда } \alpha = \pi/4.$$

Задача 2.



Абсолютно жесткая плита имеет выемку (паз) прямоугольной формы. Ширина и глубина паза равны 1 см. В паз плотно (без зазора) вставлен упругий элемент в форме параллелепипеда. Высота элемента h , поперечное сечение - квадрат с размерами 1x1 см. Элемент изготовлен из дюралюминия: модуль упругости $E=0,7 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$. Подобрать высоту h , при которой после приложения сжимающей силы $F = 12$ кН, верхняя грань элемента совпадает с поверхностью плиты. Рассчитать значения главных напряжений.

Решение

Вычисляем нормальные напряжения в поперечном сечении упругого элемента

$$\sigma_y = \frac{F}{A} = -\frac{12 \cdot 10^3}{0,01^2} = -120 \text{ МПа}$$

На свободных гранях элемента нормальные напряжения $\sigma_x = 0$. На боковых гранях, контактирующих с плитой, нормальные напряжения определяются по формуле обобщённого закона Гука. При этом

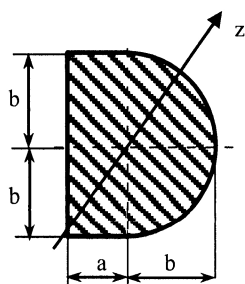
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0, \text{ откуда } \sigma_z = 0,3 \cdot (-120) = -36 \text{ МПа.}$$

В зависимости от напряжений определяется деформация

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{1}{0,7 \cdot 10^5} \cdot [-120 - 0,3 \cdot (-36 + 0)] = -1,56 \cdot 10^{-3}$$

$$h \cdot (1 + \varepsilon_y) = 1 \text{ см, Откуда, } h = \frac{1}{1 + 1,56 \cdot 10^{-3}} = 1,00156 \text{ см.}$$

Главные напряжения: $\sigma_1 = 0$; $\sigma_2 = -36$ МПа; $\sigma_3 = -120$ МПа.



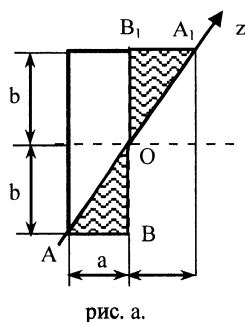
Задача 3.

Определить момент инерции фигуры, состоящей из полуокружности и прямоугольника, относительно оси z .

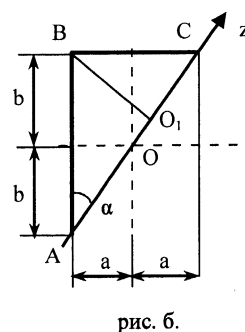
Решение

Для полукруга любая ось, проходящая через середину основания, является главной.

Его момент инерции относительно оси z : $\frac{\pi b^4}{8}$.



Моменты инерции треугольников AOB и A_1OB_1 (рис. а) относительно оси z одинаковы. Вычислим момент инерции треугольника ABC (рис. б). Из рисунка следует, что $AO = OC = \sqrt{a^2 + b^2}$. Высота треугольника ABC $BO_1 = AB \sin \alpha = AB \frac{BC}{AC} = \frac{2b2a}{2\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Момент инерции треугольника относительно оси



проходящей через его основание $J_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{2\sqrt{a^2+b^2}(2ab)^3}{12(\sqrt{a^2+b^2})^3} = \frac{4a^3b^3}{3(a^2+b^2)}$. Для всей фигуры получим:

$$J_z = \frac{4a^3b^3}{3(a^2+b^2)} + \frac{\pi b^4}{8}.$$

Вариант 2:

Вначале вычисляются моменты инерции относительно осей z_1 и y_1 .

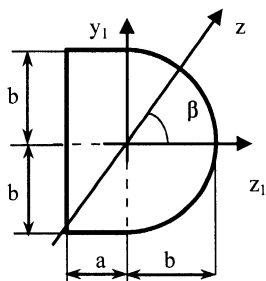
$J_{z1} = \frac{a(2b)^3}{12} = \frac{2ab^3}{3}$, $J_{y1} = \frac{2ba^3}{3}$, $J_{z1y1} = 0$, т.к. ось z_1 - ось симметрии. При повороте осей на угол β :

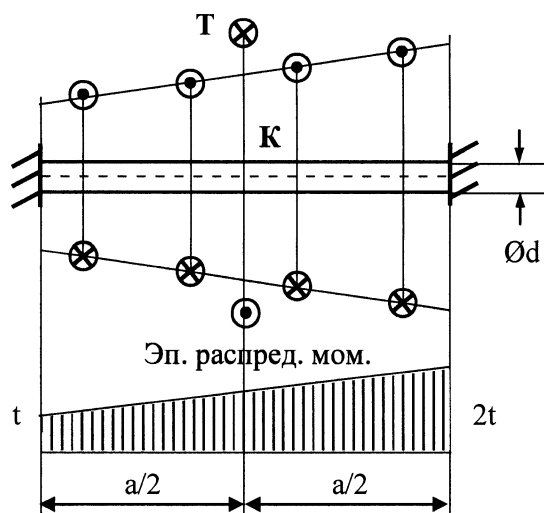
$$\sin \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$J_z = J_{y1} \sin^2 \beta + J_{z1} \cos^2 \beta = \frac{2ba^3}{3} \cdot \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{2ab^3}{3} \cdot \frac{a^2}{a^2+b^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{a^3b^3}{a^2+b^2}.$$

Для всей фигуры получим:

$$J_z = \frac{4a^3b^3}{3(a^2+b^2)} + \frac{\pi b^4}{8}.$$





Задача 4.

Стержень нагружен линейно распределенным крутящим моментом. Каким должен быть дополнительно приложенный сосредоточенный момент T , чтобы сечение K не имело бы углового перемещения.

Решение

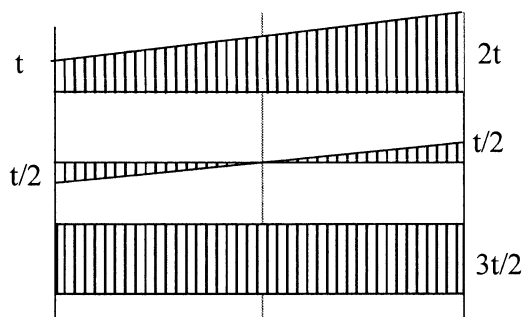


Рис. а.

Распределенная нагрузка представлена суммой симметричной и кососимметричной нагрузок. Кососимметричная нагрузка не создает углового перемещения сечения K . Для симметричной нагрузки реакции справа и слева одинаковы. Вычисляется угол поворота в сечении K от симметричной части нагрузки и от дополнительного

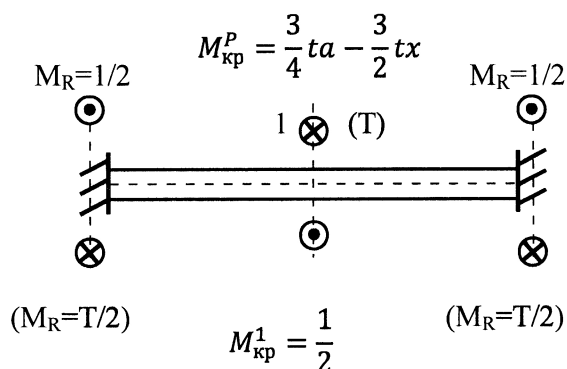
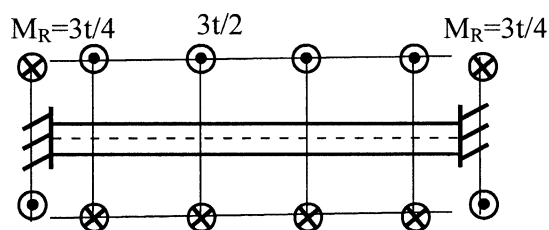
момента T . Из условия равенства этих углов находится значение T .

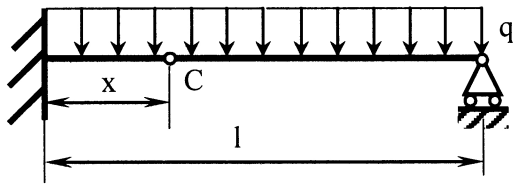
$$\varphi_k(t) = \frac{2}{GJ_p} \int_0^{a/2} \left(\frac{3}{4}ta - \frac{3}{2}tx \right) \frac{1}{2} dx = \frac{3}{16} \cdot \frac{ta^2}{GJ_p},$$

$$\varphi_k(T) = \frac{2}{GJ_p} \int_0^{a/2} \frac{T}{2} \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{Ta}{4GJ_p},$$

$$\varphi_k(t) = \varphi_k(T),$$

$$\frac{3}{16} \cdot \frac{ta^2}{GJ_p} = \frac{Ta}{4GJ_p}, \quad T = \frac{3}{4}ta.$$



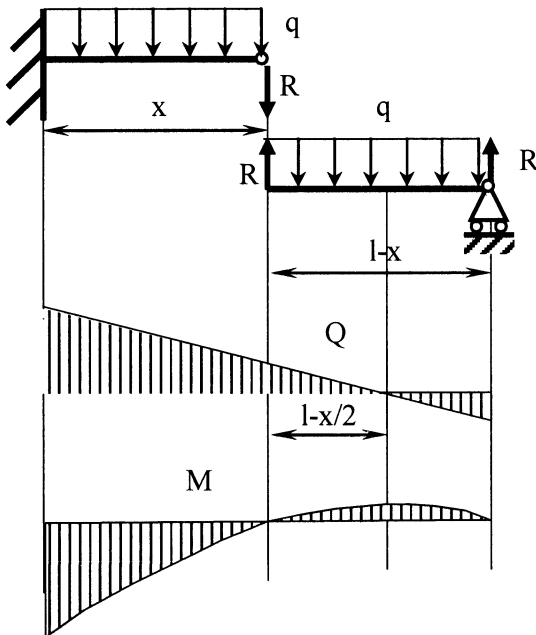


Задача

Определить положение шарнира С, при котором балка постоянного поперечного сечения обладает наибольшей грузоподъемностью.

Решение

Разделив балку на два участка получим следующие эпюры:



Рассматривая равновесие правого участка, получим:

$$R = \frac{q(l-x)}{2}.$$

Балка будет обладать максимальной грузоподъемностью в том случае, если максимальные значения изгибающего момента на левом и правом участках будут одинаковы. На правом участке:

$$M_{max}^{пр} = \frac{q(l-x)}{2} \cdot \frac{(l-x)}{2} - \frac{q\left(\frac{l-x}{2}\right)^2}{2} = \frac{q(l-x)^2}{8}$$

На левом участке:

$$M_{max}^{лев} = \frac{q(l-x)}{2} \cdot x + \frac{qx^2}{2}.$$

Приравнявая эти выражения, получим:

$$\frac{q(l-x)^2}{8} = \frac{q(l-x)}{2} \cdot x + \frac{qx^2}{2}, \text{ приведя подобные, получим квадратное уравнение:}$$

$$x^2 - 6lx + l^2 = 0, \text{ его корни: } x_{1,2} = l(3 \pm 2\sqrt{2}).$$

Значение первого корня не удовлетворяет условиям задачи, значит:

$$x = l(3 - 2\sqrt{2}) \approx 0.17l.$$