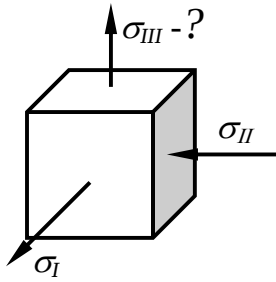
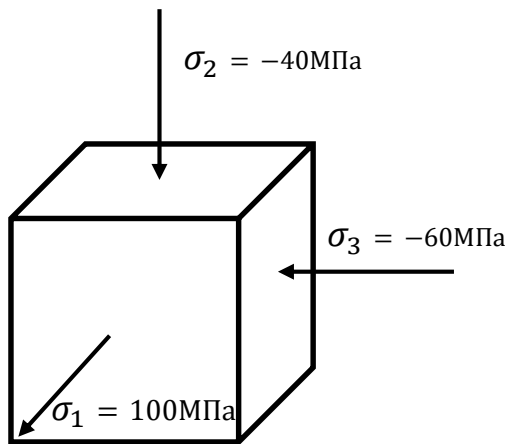


Задача № 1



В одной из точек детали известны два главных напряжения: $\sigma_I = 100$ МПа и $\sigma_{II} = -60$ МПа. Каким должно быть третье главное напряжение, чтобы объём в окрестности рассматриваемой точки не изменился? (В ответе главные напряжения обозначить в виде $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$). Будет ли обеспечена прочность материала в данной точке, если расчётное сопротивление материала $R = 155$ МПа? (Использовать энергетическую теорию прочности).

Решение



По условию объёмная деформация равна нулю:

$$\theta = \frac{1 - 2 \cdot \nu}{E} \cdot (\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}) = 0 \Rightarrow$$

$$\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = 0 \Rightarrow \sigma_{III} = -\sigma_I - \sigma_{II} = -100 - (-60) = -40 \text{ МПа.}$$

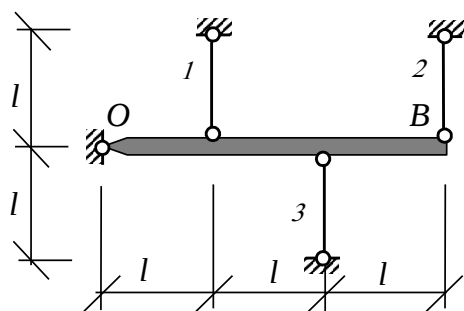
Следовательно: $\sigma_1 = 100$ МПа; $\sigma_2 = -40$ МПа;

$$\sigma_3 = -60 \text{ МПа}$$

По энергетической теории прочности:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ЭКВ}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{100 - (-40))^2 + (100 - (-60))^2 + (-40 - (-60))^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(140)^2 + (160)^2 + (20)^2} = 151 \text{ МПа} < R = 155 \text{ МПа} \end{aligned}$$

Следовательно, прочность материала в точке обеспечена.

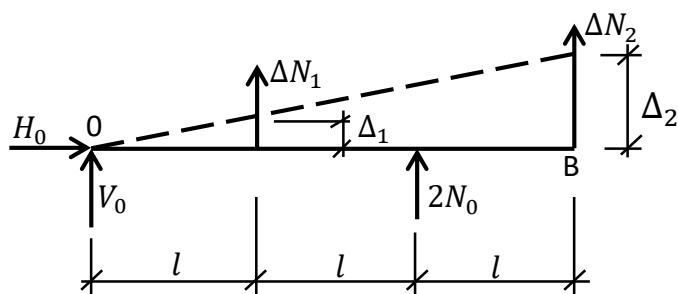


Задача № 2

В трёх одинаковых стержнях созданы растягивающие начальные усилия: $N_1 = N_2 = N_0$; $N_3 = 2N_0$. Определить усилия в стержнях 1 и 2, которые возникнут после удаления стержня 3.

Балку **OB** считать абсолютно жёсткой.

Решение



Удаление стержня 3 эквивалентно приложению в точке его крепления к балке усилия, равного $N_3 = 2N_0$, но противоположно направленного.

Найдём от его действия приращения усилий ΔN_1 и ΔN_2 в стержнях 1 и 2.

С.С.З.: $\sum m_0 = \Delta N_1 \cdot l + \Delta N_2 \cdot 3l + 2N_0 \cdot 2l = 0 \Rightarrow \Delta N_1 + 3\Delta N_2 + 4N_0 = 0$. (1)

Г.С.З.: $\Delta_2 = 3 \cdot \Delta_1$ $\Delta_1 = \Delta l_1$ $\Delta_2 = \Delta l_2 \Rightarrow \Delta_2 = 3 \cdot \Delta l_1$. (2)

Ф.С.З.: $\Delta l_1 = \frac{\Delta N_1 \cdot l}{EA}$ $\Delta l_2 = \frac{\Delta N_2 \cdot l}{EA}$, подставляя в (2), получаем $\Delta N_2 = 3 \cdot \Delta N_1$. (3)

Подставляем (3) в (1): $\Delta N_1 + 3 \cdot 3\Delta N_1 + 4N_0 = 0 \Rightarrow \Delta N_1 = -0,4 \cdot N_0 \Rightarrow \Delta N_2 = -1,2 \cdot N_0$.

Суммируя усилия в стержнях, которые были в них до удаления стержня 3,

с полученными приращениями усилий получаем:

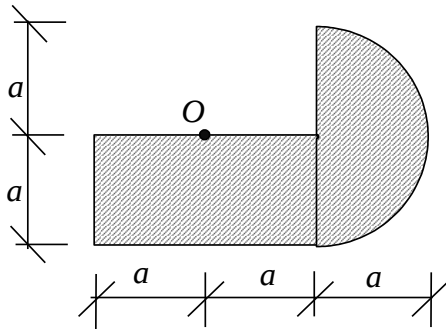
$N_1 = N_0 + \Delta N_1 = N_0 - 0,4N_0 = 0,6 \cdot N_0$ (растяжение),

$N_2 = N_0 + \Delta N_2 = N_0 - 1,2N_0 = -0,2 \cdot N_0$ (сжатие).

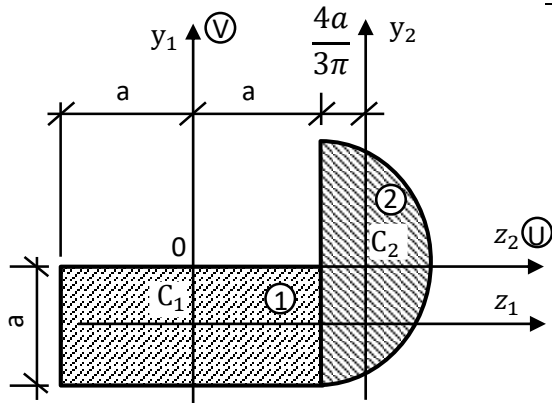
Ответ: $N_1 = 0,6 \cdot N_0$; $N_2 = -0,2 \cdot N_0$.

Задача № 3

Определить положение главных осей, проходящих через точку O , и моменты инерции относительно этих осей (фигура показана на рисунке), размер a известен.



Решение



Заданная фигура состоит из:

прямоугольника ① и полукруга ②.

Оси y_1 и z_2 являются главными для всей фигуры, так как:

$J_{y_1 z_2}^{①} = 0$ ось y_1 - ось симметрии для ①;

$J_{y_1 z_2}^{②} = 0$ ось z_2 - ось симметрии для ② $\Rightarrow$

$\Rightarrow J_{y_1 z_2} = J_{y_1 z_2}^{①} + J_{y_1 z_2}^{②} = 0$.

Обозначим главные оси U (совпадает с осью z_2) и V (совпадает с осью y_1).

$$J_U = J_U^{①} + J_U^{②} = \underbrace{\left[\frac{2a \cdot a^3}{12} + a \cdot 2a \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right]}_{J_U^{①}} + \underbrace{\frac{\pi a^4}{8}}_{J_U^{②}} = (0,167 + 0,5) \cdot a^4 + 0,392a^4 = 1,059 \cdot a^4.$$

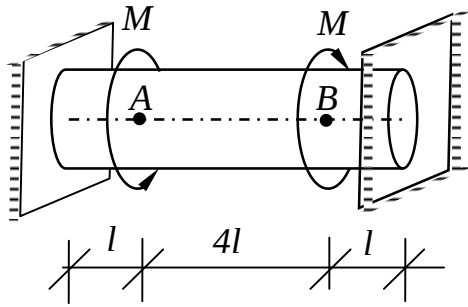
$$J_V = J_V^{①} + J_V^{②} = \underbrace{\frac{a \cdot (2a)^3}{12}}_{J_V^{①} = 0,667 \cdot a^4} + \underbrace{\left[\frac{\pi a^4}{8} - \frac{\pi a^2}{2} \left(\frac{4a}{3\pi} \right)^2 \right]}_{J_V^{②} = 0,11 \cdot a^4} + \underbrace{\frac{\pi a^2}{2} \cdot \left(a + \frac{4a}{3\pi} \right)^2}_{3,187 \cdot a^4} = a^4 \cdot (0,667 + 3,297) = 3,964 \cdot a^4$$

$J_V^{②}$

Ответ: $J_U = 1,059 \cdot a^4$;

$J_V = 3,964 \cdot a^4$.

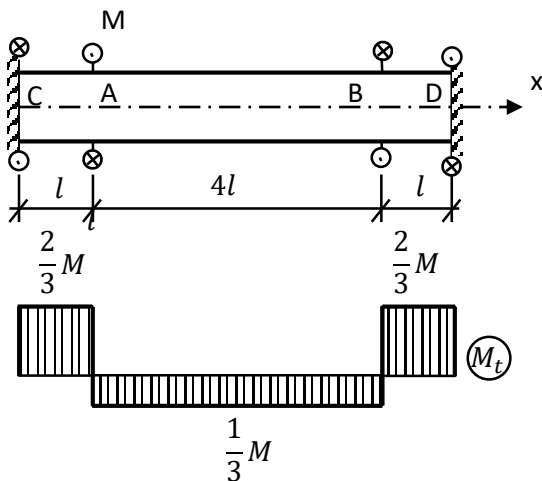
Задача № 4



Вал с круглым поперечным сечением диаметром $d = 4$ см нагружен моментами M , при этом взаимный угол закручивания сечений A и B $\varphi_{AB} = 0,01$ рад.

Определить наибольшее касательное напряжение, если известны модуль сдвига материала $G = 80 \cdot 10^3$ МПа и размер $l = 16$ см.

Решение



$$\sum m_x = M_D - M + M - M_C = 0 \Rightarrow M_D = M_C$$

$$\varphi_C = \frac{M_C \cdot 6l}{G \cdot J_\rho} - \frac{M \cdot 5l}{G \cdot J_\rho} + \frac{M \cdot l}{G \cdot J_\rho} = 0 \Rightarrow$$

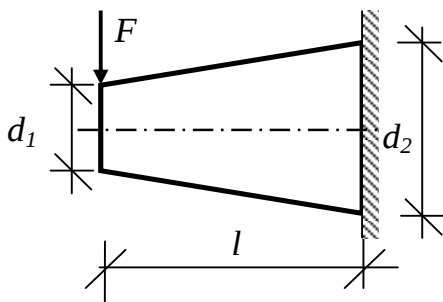
$$\Rightarrow M_C = M_D = \frac{2}{3}M \Rightarrow \text{Эпюра } M_t.$$

$$\varphi_{A-B} = \frac{\frac{1}{3}M \cdot 4l}{G \cdot J_\rho} \Rightarrow M = \frac{3 \cdot \varphi_{AB} \cdot G \cdot J_\rho}{4l}.$$

$$\tau_{max} = \frac{\frac{2}{3}M}{W_\rho} = \frac{2 \cdot 3 \cdot \varphi_{AB} \cdot G \cdot \pi d^4 \cdot 16}{3 \cdot 4 \cdot l \cdot 32 \cdot \pi d^3} = \frac{\varphi_{AB} \cdot G \cdot d}{4l} = \frac{0,01 \cdot 80 \cdot 10^3 \cdot 0,04}{4 \cdot 0,16} =$$

$$= 50 \text{ МПа.}$$

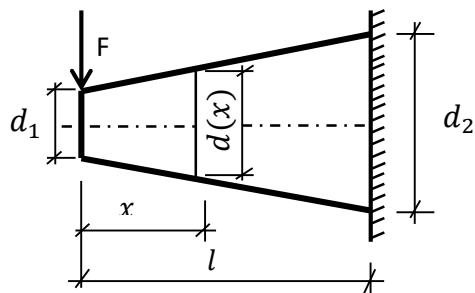
Ответ: $\tau_{max} = 50 \text{ МПа.}$



Задача № 5

Балка-консоль, нагруженная силой на свободном конце, имеет форму усеченного кругового конуса с диаметрами оснований d_1 и d_2 . При каких соотношениях d_1 и d_2 наибольшее нормальное напряжение возникает в заделке?

Решение



$$d(x) = d_1 + \frac{d_2 - d_1}{l} \cdot x = \frac{d_1 \cdot l + d_2 \cdot x - d_1 \cdot x}{l}; \quad M(x) = F \cdot x$$

$$\sigma(x) = \frac{M(x)}{W(x)} = \frac{F \cdot x}{\frac{\pi \cdot d^3(x)}{32}} = \frac{32 \cdot F \cdot l^3}{\pi} \cdot \frac{x}{(d_1 l + d_2 x - d_1 x)^3}$$

$$\frac{d\sigma(x)}{dx} = 0 \Rightarrow \left| \frac{x}{(d_1 \cdot l + d_2 \cdot x - d_1 \cdot x)^3} \right|' =$$

$$= \frac{1 \cdot (d_1 \cdot l + d_2 \cdot x_0 - d_1 \cdot x_0)^3 - 3 \cdot (d_1 \cdot l + d_2 \cdot x_0 - d_1 \cdot x_0)^2 \cdot (d_2 - d_1) \cdot x_0}{(d_1 \cdot l + d_2 \cdot x_0 - d_1 \cdot x_0)^6} = 0.$$

$$0 \leq x \leq l \Rightarrow (d_1 \cdot l + d_2 \cdot x - d_1 \cdot x) > 0 \Rightarrow d_1 \cdot l + d_2 \cdot x_0 - d_1 \cdot x_0 - 3d_2 \cdot x_0 + 3d_1 \cdot x_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_1 \cdot l - 2d_2 \cdot x_0 + 2d_1 \cdot x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{d_1 \cdot l}{2(d_2 - d_1)}.$$

$$\text{Чтобы } x_0 = l \text{ должно быть } \frac{d_1}{2(d_2 - d_1)} = 1 \Rightarrow d_1 = 2d_2 - 2d_1 \Rightarrow d_2 = 1,5d_1.$$

Ответ: $d_2 = 1,5d_1$.