

**Г.И. Гребенюк  
И.В. Кучеренко  
Г.Б. Лебедев  
М.В. Табанюхова  
Е.В. Яньков**

**ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБО-  
ТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»  
(«СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»)**

**Новосибирск 2015**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин)

*Г.И.Гребенюк, И.В.Кучеренко, Г.Б.Лебедев, М.В. Табанюхова,*

*Е.В.Яньков*

**Индивидуальные задания и контрольные работы по дисциплине «Техническая механика» («Соппротивление материалов»)**

**Учебное пособие**

**Новосибирск 2015**

**УДК 539.31.6**

**ББК 30.121**

**Г79**

**Гребенюк Г.И.** Индивидуальные задания и контрольные работы по дисциплине «Техническая механика» («Сопротивление материалов»): учеб. пособие / Г.И.Гребенюк, И.В.Кучеренко, Г.Б.Лебедев, М.В. Табанюхова, Е.В.Яньков; Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин).- ...с.

ISBN.....

В учебном пособии приведены основные сведения о составе, порядке выполнения и требованиях к оформлению индивидуальных заданий и контрольных работ по дисциплине «Техническая механика» («Сопротивление материалов») для студентов всех форм обучения, по всем направлениям и профилям подготовки. Учебное пособие содержит сведения из теории и справочные материалы, необходимые для выполнения индивидуальных заданий и контрольных работ. В нём приведены примеры решения задач по темам индивидуальных заданий и контрольных работ, а также сформулированы контрольные вопросы для самопроверки.

Печатается по решению издательско-библиотечного совета НГАСУ (Сибстрин)

Рецензенты:

– С.И. Герасимов, д-р техн. наук, профессор,  
заведующий кафедрой «Строительная механика»  
(СГУПС);

– Н.Н. Пантелеев, д-р техн. наук, профессор кафедры  
«Железобетонные конструкции» (НГАСУ (Сибстрин))

## ОГЛАВЛЕНИЕ

### ВВЕДЕНИЕ.

### 1. СТРУКТУРА ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ (КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ) И ОСНОВНЫЕ ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ ПО ЕГО ВЫПОЛНЕНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ

- 1.1. Структура индивидуального задания (контрольной работы)
- 1.2. Требования по выполнению индивидуального задания (контрольной работы)
- 1.3. Требования по оформлению индивидуального задания (контрольной работы)

### 2. СОСТАВ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ (КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ) ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ И ПРОФИЛЕЙ ПОДГОТОВКИ СТУДЕНТОВ.

- 2.1. Направление 270800 «Строительство». Бакалавриат.
- 2.2. Направление 271101 «Строительство уникальных зданий и сооружений». Специалитет.
- 2.3. Направление 270100 «Архитектура». Бакалавриат.
- 2.4. Направление 221700.62 «Стандартизация и метрология» Бакалавриат.
- 2.5. Направление 280100 «Природообустройство и водопользование». Бакалавриат.
- 2.6. Направление 230400.62 «Информационные системы и технологии». Бакалавриат.

### 3. ОПИСАНИЕ СОДЕРЖАНИЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ (КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ)

- 3.1 Общая методика выбора исходных данных по задачам.
- 3.2. Индивидуальное задание 1(контрольная работа 1). Осевое растяжение - сжатие стержней
  - 3.2.1.Краткие сведения из теории
  - 3.2.2.Задача 1.1
  - 3.2.3.Задача 1.2
  - 3.2.4.Задача 1.3
- 3.3. Индивидуальное задание 2 (контрольная работа 2). Напряжённо-деформированное состояние материала в точке. Геометрические характеристики сечений.

- 3.3.1.Краткие сведения из теории
- 3.3.2.Задача 2.1.
- 3.3.3.Задача 2.2.
- 3.3.4.Задача 2.3.
- 3.4. Индивидуальное задание 3 (контрольная работа 3). Расчёт прямых стержней при деформации кручения.
  - 3.4.1.Краткие сведения из теории
  - 3.4.2.Задача 3.1.
  - 3.4.3.Задача 3.2.
- 3.5. Индивидуальное задание 4 (контрольная работа 4). Прямой поперечный изгиб балок.
  - 3.5.1.Краткие сведения из теории
  - 3.5.2.Задача 4.1.
- 3.6. Индивидуальное задание 5 (контрольная работа 5). Сложное сопротивление стержней.
  - 3.6.1.Краткие сведения из теории
  - 3.6.2.Задача 5.1.
  - 3.6.3.Задача 5.2.
- 3.7. Индивидуальное задание 6 (контрольная работа 6). Расчёт центрально-сжатого стержня на устойчивость. Определение перемещений сечений плоских ломаных стержней и стержневых систем.
  - 3.7.1.Краткие сведения из теории
  - 3.7.2.Задача 6.1.
  - 3.7.3.Задача 6.2.
  - 3.7.4.Задача 6.3
- 4. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМАМ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ (КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ). КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ.
  - 4.1. Осовое растяжение – сжатие стержней
    - 4.1.1.Задача 1.1.
    - 4.1.2.Задача 1.2.
    - 4.1.3.Задача 1.3.
    - 4.1.4.Контрольные вопросы для самопроверки.
  - 4.2. Напряжённо-деформированное состояние материала в точке. Геометрические характеристики сечений.
    - 4.2.1.Задача 2.1.
    - 4.2.2.Задача 2.2.
    - 4.2.3.Задача 2.3.

- 4.2.4. Контрольные вопросы для самопроверки
- 4.3. Расчёт прямых стержней при деформации кручения.
  - 4.3.1. Задача 3.1.
  - 4.3.2. Задача 3.2.
  - 4.3.3. Контрольные вопросы для самопроверки
- 4.4. Прямой поперечный изгиб балок.
  - 4.4.1. Задача 4.1.
  - 4.4.2. Задача 4.2.
  - 4.4.3. Задача 4.3.
  - 4.4.4. Контрольные вопросы для самопроверки.
- 4.5. Сложное сопротивление стержней.
  - 4.5.1. Задача 5.1
  - 4.5.2. Задача 5.2.
  - 4.5.3. Контрольные вопросы для самопроверки.
- 4.6. Расчёт центрально-сжатого стержня на устойчивость. Построение эпюр внутренних усилий и определение перемещений сечений плоского ломаного стержня и стержневой системы.
  - 4.6.1. Задача 6.1.
  - 4.6.2. Задача 6.2
  - 4.6.3. Задача 6.3.
  - 4.6.4. Контрольные вопросы для самопроверки.

ПРИЛОЖЕНИЯ.....

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

## ВВЕДЕНИЕ

Техническая механика (сопротивление материалов) является одной из основных общетехнических дисциплин, определяющих уровень подготовки и составляющих необходимый «инженерный багаж» будущего бакалавра, или специалиста. При переходе на новые ФГОС, в условиях существенного сокращения числа аудиторных часов, выделенных в новых учебных планах на данную дисциплину, важной задачей является подготовка методических материалов для выполнения студентами индивидуальных заданий (контрольных работ) при увеличении доли их самостоятельной работы.

В разработанном учебном пособии при определении содержания индивидуальных заданий (контрольных работ) авторы придерживались тенденции к уменьшению их вычислительной трудоёмкости, с сохранением их тематической полноты. Кроме того, при определении состава и содержания индивидуальных заданий (контрольных работ) учтена разница в учебных планах для разных направлений и профилей подготовки бакалавров и специалистов. По всем индивидуальным заданиям (контрольным работам) приведены краткие сведения из соответствующих разделов теории расчета и необходимые справочные материалы, что позволит облегчить и ускорить работу по их выполнению, в первую очередь, студентам заочной формы обучения.

### 1. СТРУКТУРА ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ (КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ) И ОСНОВНЫЕ ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ ПО ЕГО ВЫПОЛНЕНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ

#### 1.1. Структура индивидуального задания (контрольной работы).

Каждое индивидуальное задание (контрольная работа) относится к одному или нескольким разделам дисциплин «Техническая механика» («Сопротивление материалов») и содержит от одной до трёх задач.

Для каждой из задач, входящих в состав индивидуального задания (контрольной работы), приведены варианты расчётных схем рассчитываемых сооружений (или их элементов), а также таблицы вариантов исходных данных, относящихся к общим геометрическим размерам сооружений, размерам сечений и физико-механическим характеристикам материалов элементов, величинам

и местам приложения нагрузок. Кроме того, для каждой из задач сформулированы задания по их решению.

## 1.2. Требования по выполнению индивидуального задания (контрольной работы)

Индивидуальное задание (контрольная работа) считается выполненным и принимается для проверки, если решены все задачи, входящие в его состав. Состав индивидуальных заданий (контрольных работ) для различных направлений и профилей подготовки студентов приведён далее, в главе 2.

При решении задач, входящих в состав индивидуального задания (контрольной работы) должны быть последовательно выполнены все пункты заданий, сформулированных для отдельных задач. Пункты заданий должны быть выделены как заголовки разделов решения задачи; решение должно сопровождаться необходимыми иллюстрациями, пояснениями и математическими выкладками.

В случае невыполнения части задач, входящих в состав индивидуального задания (контрольной работы), или невыполнения пунктов заданий для отдельных задач индивидуальное задание (контрольная работа) возвращается студенту на доработку **без предварительной проверки и указания возможных ошибок решения**. В том случае, если все задачи индивидуального задания (контрольной работы), а также все пункты заданий на решение отдельных задач выполнены, но при решении допущены ошибки, индивидуальное задание (контрольная работа) возвращается на доработку **с указанием ошибок и пояснениями их характера** (логические, арифметические).

При полном и правильном решении всех задач индивидуальное задание (контрольная работа) считается зачтённым и в дальнейшем должно быть защищено путём решения тестовых задач и ответов на дополнительные вопросы по теме индивидуального задания (контрольной работы). Защита индивидуального задания (контрольной работы) может также проводиться на основе интернет-тестирования.

### 1.3. Требования по оформлению индивидуального задания (контрольной работы)

Индивидуальное задание (контрольная работа) выполняется на листах белой писчей бумаги формата А4. Допускается (в целях удобства пересылки по почте) выполнение контрольных работ студентами заочной формы обучения с использованием тетрадей.

На титульном листе индивидуального задания (контрольной работы) должно быть представлены данные об образовательном учреждении и его подразделении, проводящем обучение по изучаемой дисциплине, а также полные данные о студенте: ФИО, № группы, индивидуальный шифр (для студентов заочной формы обучения). Кроме того, должны быть указаны номер и тема индивидуального задания (контрольной работы), а также дата представления индивидуального задания (контрольной работы) на проверку. На титульном листе должны быть указаны ФИО проверяющего преподавателя (на титульном листе контрольной работы студентов заочной формы обучения указываются проверяющим), а также даты проверок.

Пример оформления титульного листа представлен на рисунке 1.1.

Исходные данные по решаемой задаче (размеры элементов на расчетных схемах, величины нагрузок, физические и расчетные характеристики материалов элементов и т.д.) должны приводиться на расчетных схемах в цифровом виде, оформляться достаточно яркой пастой (или распечатываться на принтере) с размером шрифта  $\geq 12$  п. Те же требования по оформлению относятся и к результатам решения задач, входящих в состав индивидуального задания (контрольной работы).

Все чертежи, при ручном исполнении, должны выполняться с использованием чертёжных инструментов. При выполнении индивидуального задания (контрольной работы) на ЭВМ чертежи должны выполняться с использованием какого-либо графического редактора, оформлены с соблюдением правил строительного черчения и размещены в тексте согласно последовательности выполнения индивидуального задания (контрольной работы).

Министерство образования и науки РФ

Новосибирский ГАСУ (Сибстрин)

Кафедра строительной механики

Индивидуальное задание № ...

Тема: \_\_\_\_\_

Выполнил: студент \_\_\_\_\_ гр.

---

(ФИО)

Индивидуальный шифр студента: \_\_\_\_\_  
(для студентов заочной формы обучения)

Проверил: \_\_\_\_\_  
(ФИО преподавателя)

На доработку: \_\_\_\_\_  
(подпись) (число) (месяц) (год)

На доработку: \_\_\_\_\_

На доработку: \_\_\_\_\_

Зачтено: \_\_\_\_\_  
(подпись) (число) (месяц) (год)

Новосибирск ....  
(год)

Рис. 1.1.

## 2. СОСТАВ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ (КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ) ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ И ПРОФИЛЕЙ ПОДГОТОВКИ СТУДЕНТОВ

### 2.1. Направление 270800 «Строительство». Бакалавриат

Профили подготовки:

- промышленное и гражданское строительство;
- гидротехническое строительство;
- водоснабжение и водоотведение;
- теплогазоснабжение и вентиляция;
- механизация и автоматизация строительства;
- производство и применение строительных материалов и изделий;
- городское строительство;
- проектирование зданий и сооружений;
- экспертиза и управление недвижимостью;
- строительство автомобильных дорог.

Состав индивидуальных заданий (контрольных работ) по дисциплине «Техническая механика» для всех профилей подготовки в направлении «Строительство» одинаков и представлен в таблицах 2.1 (очная форма обучения) и 2.2 (заочная форма обучения).

Таблица 2.1

Состав индивидуальных заданий по дисциплине «Техническая механика» для всех профилей подготовки бакалавров в направлении «Строительство» (очная форма обучения).

| № ИЗ   | 1    | 2    | 3    | 4   | 5    | 6    |
|--------|------|------|------|-----|------|------|
| Задачи | 1.1. | 2.1. | 3.1. | 4.1 | 5.1. | 6.1. |
|        | 1.2. | 2.2. | 3.2. |     | 5.2. | 6.2. |
|        | 1.3  | 2.3. |      |     |      |      |

Таблица 2.2

Состав контрольных работ по дисциплине «Техническая механика» для всех профилей подготовки бакалавров в направлении «Строительство» (заочная форма обучения).

| № КР   | 1    | 2    | 3    | 4   | 5    | 6    |
|--------|------|------|------|-----|------|------|
| Задачи | 1.1. | 2.1. | 3.1. | 4.1 | 5.1. | 6.1. |
|        | 1.3  | 2.3. | 3.2. |     | 5.2. | 6.2. |

## 2.2. Направление 271101 «Строительство уникальных зданий и сооружений». Специалитет

Специализации:

- строительство уникальных зданий и сооружений;
- строительство гидротехнических сооружений повышенной ответственности

Таблица 2.3

Состав индивидуальных заданий по дисциплине «Сопротивление материалов» для профиля подготовки «Строительство уникальных зданий и сооружений» (очная форма обучения).

| № ИЗ   | 1    | 2    | 3    | 4   | 5    | 6    |
|--------|------|------|------|-----|------|------|
| Задачи | 1.1. | 2.1. | 3.1. | 4.1 | 5.1. | 6.1. |
|        | 1.2. | 2.2. | 3.2. |     | 5.2. | 6.3. |
|        | 1.3. | 2.3. |      |     |      |      |

Таблица 2.4

Состав контрольных работ по дисциплине «Сопротивление материалов» для профиля подготовки «Строительство уникальных зданий и сооружений» (заочная форма обучения).

| № КР   | 1    | 2    | 3    | 4   | 5    | 6    |
|--------|------|------|------|-----|------|------|
| Задачи | 1.1. | 2.1. | 3.1. | 4.1 | 5.1. | 6.1. |
|        | 1.3  | 2.3. | 3.2. |     | 5.2. | 6.3. |

## 2.3. Направление 270100 «Архитектура». Бакалавриат

Профили подготовки:

- архитектура;
- реконструкция и реставрация архитектурного наследия.

Таблица 2.5

Состав индивидуальных заданий по дисциплине «Сопротивление материалов» для указанных профилей подготовки (очная форма обучения).

| № ИЗ   | 1    | 2                 |
|--------|------|-------------------|
| Задачи | 1.1. | 4.1,<br>пп. 1,2,3 |
|        | 1.2. |                   |
|        | 1.3. |                   |

## **2.4. Направление 221700.62 «Стандартизация и метрология». Бакалавриат.**

Профиль подготовки:

- стандартизация и метрология.

Таблица 2.6

Состав индивидуальных заданий по дисциплине «Основы сопротивления материалов и строительной механики» для профиля подготовки «Стандартизация и метрология» (очная форма обучения).

| № ИЗ   | 1           | 2    |
|--------|-------------|------|
| Задачи | 1.1.<br>3.2 | 6.3. |

## **2.5. Направление 280100 «Природообустройство и водопользование». Бакалавриат.**

Профиль подготовки:

- Природообустройство и водопользование.

Таблица 2.7

Состав индивидуальных заданий по дисциплине «Сопротивление материалов» для профиля подготовки «Природообустройство и водопользование» (очная форма обучения).

| № ИЗ   | 1                     |
|--------|-----------------------|
| Задачи | 1.1.<br>4.1, пп 1,2,3 |

## **2.6. Направление 230400.62 «Информационные системы и технологии». Бакалавриат**

Профиль подготовки:

- Информационные системы и технологии.

По данному направлению (профилю подготовки) предусмотрено одно индивидуальное задание по сопротивлению материалов, состоящее из трех задач.

Таблица 2.8

Состав индивидуального задания 1 по дисциплине «Основы сопротивления материалов и строительной механики» для профиля подготовки «Информационные системы и технологии» (очная форма обучения).

| № ИЗ   | 1    |
|--------|------|
| Задачи | 1.1. |
|        | 3.1. |
|        | 6.3. |

### 3. ОПИСАНИЕ СОДЕРЖАНИЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ (КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ)

#### 3.1. Общая методика выбора исходных данных по задачам.

Выбор исходных данных по задачам, составляющим индивидуальное задание (КР), осуществляется с использованием списков учебных групп (дневная и вечерняя формы обучения) и индивидуальных шифров студентов.

Обозначим символом  $i$  номер индивидуального задания (КР), а символом  $j$  номер задачи  $i,j$ , входящей в состав индивидуального задания (КР)  $i$ . Для каждой задачи  $i,j$  при описании содержания индивидуального задания (КР) приводятся варианты расчетных схем соответствующих конструкций, а также таблица  $i,j$  десяти вариантов остальных исходных данных (нумерация вариантов от 0 до 9).

Варианты расчетных схем для студентов дневной и вечерней форм обучения соответствуют их номерам в списке учебной группы. Вариант остальных исходных данных выбираются из таблицы  $i,j$  преподавателем (например, он может быть одинаковым для всей группы).

Студенты заочной формы обучения принимают номер расчетной схемы в задаче  $i,j$  равным сумме трех последних цифр их индивидуального шифра. В случае, если сумма трех последних цифр индивидуального шифра студента превышает число приведенных в задании расчетных схем, номер расчетной схемы принимается равным сумме двух последних цифр индивидуального шифра студента. Номер варианта остальных исходных данных

принимается по таблице  $ij$  равным последней цифре индивидуального шифра студента.

Структура таблицы  $ij$  принята следующей:

Таблица  $ij$

| Вид исходных данных | Варианты исходных данных по задаче $ij$ |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---------------------|-----------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|                     | 0                                       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $a$ , м             |                                         |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| $h$ , м             |                                         |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| $F_1$ , кН          |                                         |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| $q_1$ , кН/м        |                                         |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| $M_1$ , кН*м        |                                         |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| и т.д.              |                                         |   |   |   |   |   |   |   |   |   |

В задаче  $ij$ , где требуется проводить расчет на жесткость, считать нормативную нагрузку равной заданной расчетной нагрузке

### 3.2. Индивидуальное задание 1(контрольная работа 1). Осевое растяжение - сжатие стержней

#### 3.2.1. Краткие сведения из теории

Осевым (центральный) растяжением-сжатием называется сопротивление прямого стержня действию внешних нагрузок, направленных вдоль его продольной оси (рис.3.1.)

Воспользовавшись методом сечений [3], нетрудно показать, что в данном случае силы внутреннего взаимодействия в произвольном поперечном сечении стержня суммируются только к продольной силе  $N(x)$ , а остальные внутренние усилия тождественно равны нулю. Методика построения эпюры продольных сил с достаточной полнотой изложена в [3].

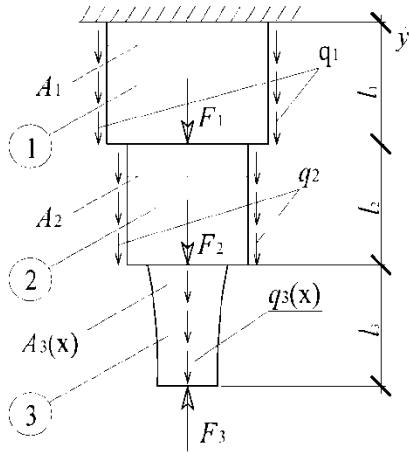


Рис. 3.1.

При использовании в данном случае гипотезы плоских сечений (Я. Бернулли) и гипотезы об отсутствии взаимодействия продольных волокон стержня в поперечных направлениях напряженное состояние материала сводится к линейному:  $\sigma_x \neq 0$ ;  $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yx} = \tau_{yz} = \tau_{yz} \equiv 0$ . Одно из главных напряжений отлично от нуля (при растяжении  $\sigma_x = \sigma_1 \neq 0$ , при сжатии  $\sigma_x = \sigma_3 \neq 0$ ).

### Определение напряжений и деформаций в точках поперечных сечений

Нормальные напряжения равномерно распределяются по площади поперечного сечения  $\sigma_x(x, y, z) = \sigma(x)$ , а их величина в произвольном поперечном сечении определяется согласно соотношению

$$\sigma(x) = N(x) / A(x), \quad (3.1)$$

где  $A(x)$  – площадь поперечного сечения стержня.

Полагая, что справедлив закон Гука и закон линейного температурного деформирования, получим соотношение для линейной деформации в продольном направлении:

$$\varepsilon_x(x) = \frac{\sigma_x(x)}{E(x)} + \alpha(x) \cdot \Delta t^\circ(x) \quad (3.2)$$

где  $E(x)$ ,  $\alpha(x)$ ,  $\Delta t^\circ(x)$  – функции, определяющие модуль упругости, коэффициент температурной деформации и изменение температуры в сечениях стержня. Как правило, эти функции задаются кусочно-постоянными на участках стержня. В рассматриваемом

мой постановке также считается, что они не зависят от координат точки сечения, т.е. постоянны в рассматриваемом поперечном сечении.

### Определение абсолютной деформации стержня и перемещений поперечных сечений

Рассмотрим прямой стержень, нагруженный силовой и температурной нагрузками и состоящий из  $n$  участков (рис.3.2). Под участком  $i$ ,  $i=1, \dots, n$ , будем, в данном случае, понимать такую протяженность стержня, на которой функция

$$\varepsilon_i(x) = \frac{N_i(x)}{A_i(x)E_i(x)} + \alpha_i(x) \cdot \Delta t_i^0(x) \text{ не меняется.}$$

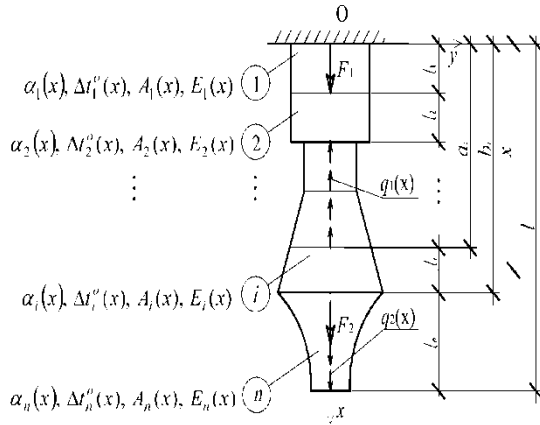


Рис. 3.2

Суммируя деформации элементарных частей стержня на участке  $i$ ,

получим:

$$\Delta l_i = \int_{a_i}^{b_i} \left( \frac{N_i(x)}{A_i(x)E_i(x)} + \alpha_i(x) \cdot \Delta t_i^0(x) \right) dx, \quad (3.3)$$

где  $a_i, b_i$  координаты начала и конца участка  $i$  в выбранной системе координат. Суммируя абсолютные деформации участков, получим полную абсолютную деформацию (удлинение или укорочение) всего стержня при действии силовых и температурных нагрузок:

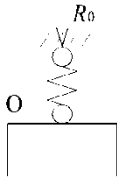
$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} \left( \frac{N_i(x)}{A_i(x)E_i(x)} + \alpha_i(x) \cdot \Delta t_i^0(x) \right) dx \quad (3.4)$$

Введем в рассмотрение функцию  $u_i(x)$  продольных перемещений сечений на участке  $i$ . Нетрудно заметить, что продольное перемещение сечения складывается из перемещения стержня как жесткого диска (перемещения начального сечения) и абсолютной деформации части стержня, заключенной между начальным и рассматриваемым сечениями. Для произвольного сечения на участке  $i$

$$u_i(x) = u_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \int_{a_j}^{b_j} \left( \frac{N_j(x)}{A_j(x)E_j(x)} + \alpha_j(x) \cdot \Delta t_j^0(x) \right) dx + \int_{a_i}^x \left( \frac{N_i(x)}{A_i(x)E_i(x)} + \alpha_i(x) \cdot \Delta t_i^0(x) \right) dx \quad (3.5)$$

При жестком (неподатливом) закреплении начального сечения (рис.3.2)  $u_0=0$ . В случае, когда начальное сечение закреплено линейно-податливой связью (опорой),

$$u_0 = -\frac{R_0}{k_0} = -R_0 \cdot c_0, \quad (3.6)$$



кция,  $k_0$ (кН/м) – жесткость опоры,  $c_0 = \frac{1}{k_0}$

(м/кН) – податливость опоры.

В том случае, если  $\alpha_i(x) = \alpha_i$ ,

$\Delta t_i^0(x) = \Delta t_i^0$ ,  $i=1, \dots, n$  (равномерное температурное воздействие на участках),

$$u_i(x) = u_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \left[ \int_{a_j}^{b_j} \frac{N_j(x)}{A_j(x)E_j(x)} dx + \alpha_i \cdot \Delta t_i^0 \cdot l_i \right] + \int_{a_i}^x \frac{N_i(x)}{A_i(x)E_i(x)} dx + \alpha_i \cdot \Delta t_i^0 \cdot x \quad (3.7)$$

При  $\Delta t_i^0 = 0$ ,  $i=1, \dots, n$ , (температурное воздействие отсутствует) в выражениях (3.2 ÷ 3.7) отсутствуют члены, зависящие от изменения температуры материалов на участках.

## Статически неопределимые системы при растяжении-сжатии и порядок их расчета

Системы, для определения реакций в связях которых недостаточно уравнений равновесия (уравнений статики), называются статически неопределимыми. Примеры статически неопределимых стержневых систем с растянутыми (сжатыми) элементами показаны на рис. а), б), в).

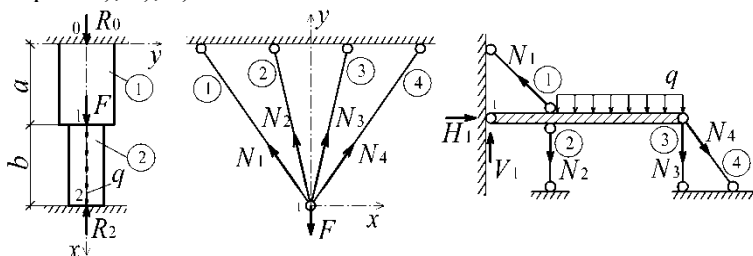


Рис. 3.3.

Пользуясь методом сечений, нетрудно убедиться, что во всех, показанных на рис.3.3, случаях для определения реакций в связях систем недостаточно уравнений равновесия. Для получения недостающих уравнений необходимо, кроме статической, рассмотреть две другие стороны задачи – **геометрическую и физическую**. Подробнее методика расчета статически неопределимых систем при растяжении-сжатии изложена в [6] и в разделе 4.1. данного пособия.

### Расчет стержней при растяжении сжатии по предельным состояниям

В рассматриваемом случае условие расчета по несущей способности (по прочности) для участка стержня, выполненного из материала с единым расчетным сопротивлением при растяжении и сжатии, записывается в виде:

$$|N| \leq R \cdot A \cdot \gamma_H \quad (3.8)$$

где  $N$  – продольная сила в опасном сечении, зависящая от составляющих вектора расчетных нагрузок на стержень;  $A$  – площадь опасного сечения;  $R$  – расчетное сопротивление материала;  $\gamma_H$  – коэффициент надежности по назначению конструкции, который в дальнейшем будет считаться равным единице. В качестве условий жесткости (условий расчета по деформациям) в данном случае используются следующие:

$$|u|_{\max} \leq [u], \quad |\Delta l| \leq [\Delta l], \quad (3.9)$$

где  $|u|_{\max}$  – максимальное по абсолютной величине продольное перемещение одного из сечений стержня;  $|\Delta l|$  – абсолютная деформация всего стержня, или отдельного его участка;  $[u]$ ,  $[\Delta l]$  – допускаемые значения рассматриваемых характеристик деформации стержня. Величины  $|u|_{\max}$  и  $|\Delta l|$  вычисляются при действии нормативных нагрузок.

Условия (3.8), (3.9) позволяют решать три типа задач:

- проверочная задача;
- проектная задача 1 – подбор сечений стержня;
- проектная задача 2 – подбор параметра нагрузки на стержень.

В том случае, когда стержень выполнен из материалов с различными значениями расчетных сопротивлений, условия вида (3.8) составляются по каждому из материалов.

Для материалов с различными расчетными сопротивлениями при растяжении и при сжатии условия вида (3.8) составляются отдельно для опасных сечений по растяжению и сжатию:

$$N^{расч} \leq R_t A, \quad |N^{сж}| \leq R_c A \quad (3.10)$$

### **Расчет по разрушающим (предельным) нагрузкам**

Идея метода расчета конструкций по разрушающим (предельным) нагрузкам основана на предварительном выявлении параметра разрушающей (предельной) нагрузки  $P_{\lim}$ . Условие надежной работы конструкции записывается в следующем виде:

$$P \leq \frac{P_{\lim}}{K}, \quad (3.11)$$

где  $P$  – параметр заданной ой нагрузки;  $K > 1$  – коэффициент запаса прочности по нагрузке, учитывающий все факторы, снижающие надежность работы конструкции.

Применение метода разрушающих нагрузок имеет смысл, прежде всего, для пластичных материалов. При определении предельной нагрузки в качестве предельных значений напряжений принимаются пределы текучести материала (материалов) стержня. При этом, **предельным будет такое состояние конструкции, при котором материалы либо всюду текут, либо конструкция в результате локальной текучести превращается в механизм.** В случае статически неопределимых систем использование метода

расчета по разрушающим (предельным) нагрузкам позволяет экономить материал при одинаковых коэффициентах запаса прочности по напряжениям и нагрузке.

### 3.2.2. Задача 1.1. Статически определимая система

Дано: Стойка из бетона жёстко закреплена на нижнем конце и нагружена силами  $F_1$ ,  $F_2$  и  $q$ , действующими вдоль оси стержня.

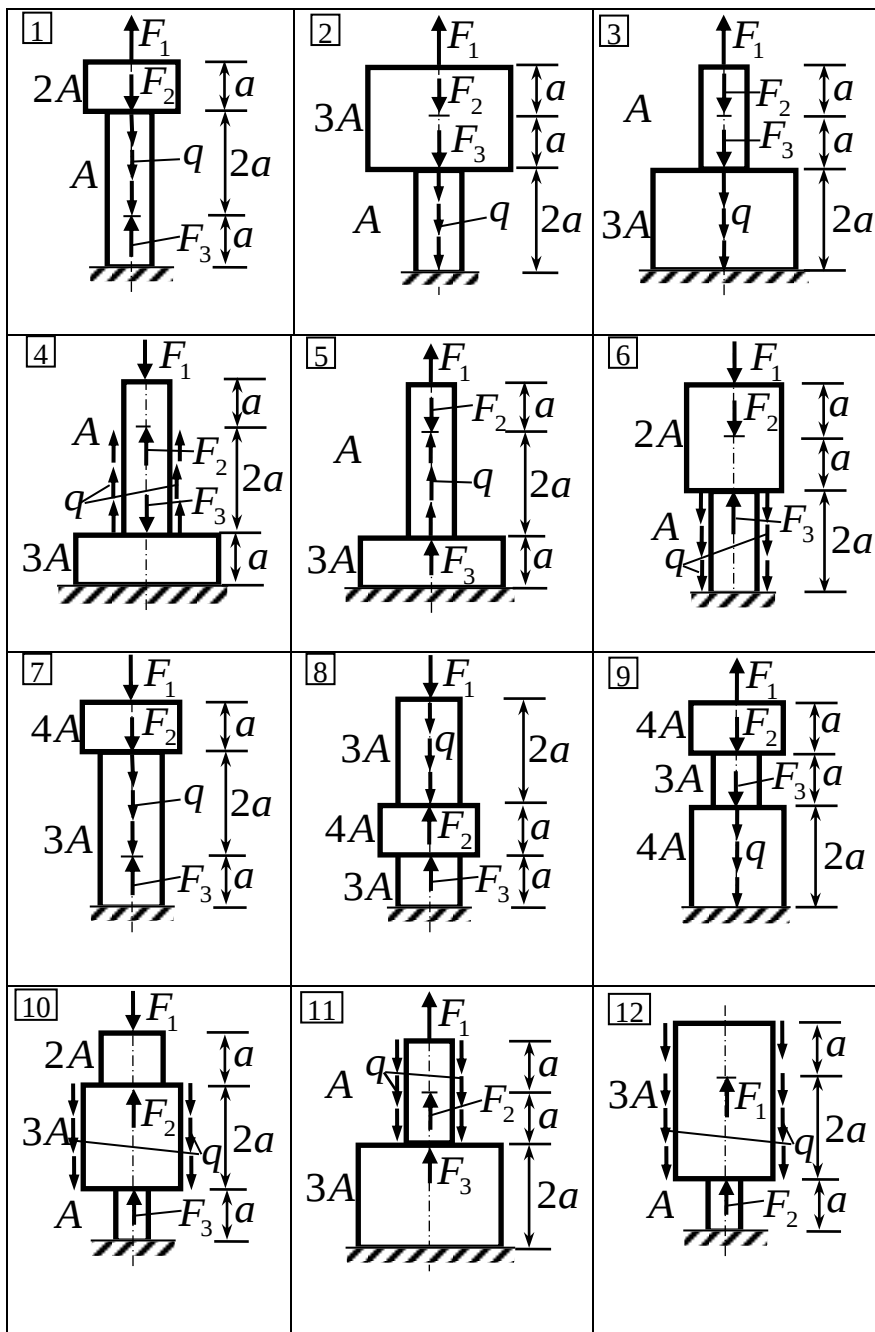
$E = 0,27 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $R_c = 12 \text{ МПа}$ ,  $R_t = 0,9 \text{ МПа}$ .

Требуется:

1. Построить эпюру продольных сил  $N$ .
2. Определить требуемые площади поперечных сечений  $A$  из условий прочности и соблюдения при этом заданного соотношения площадей на различных участках.
3. Построить эпюру нормальных напряжений  $\sigma$ .
4. Построить эпюру перемещений сечений  $u$ .
5. Выполнить проверку жёсткости.  $[\Delta l] = (0,01 \div 0,02) l$ ,  
 $[u] = 0,001 l$ . Здесь  $l$  – длина стержня.

Таблица 1.1

| Вид исходных данных | Варианты исходных данных по задаче 1.1 |     |     |     |     |     |     |     |    |     |
|---------------------|----------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|-----|
|                     | 0                                      | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8  | 9   |
| $a$ , м             | 1                                      | 2   | 3   | 1   | 2   | 3   | 1   | 2   | 3  | 1   |
| $F_1$ , кН          | 100                                    | 110 | 140 | 80  | 160 | 140 | 150 | 120 | 80 | 100 |
| $F_2$ , кН          | 120                                    | 100 | 120 | 110 | 120 | 110 | 180 | 150 | 60 | 110 |
| $F_3$ , кН          | 130                                    | 120 | 80  | 140 | 100 | 150 | 160 | 160 | 40 | 150 |
| $q$ , кН/м          | 20                                     | 40  | 60  | 40  | 50  | 60  | 80  | 40  | 20 | 60  |



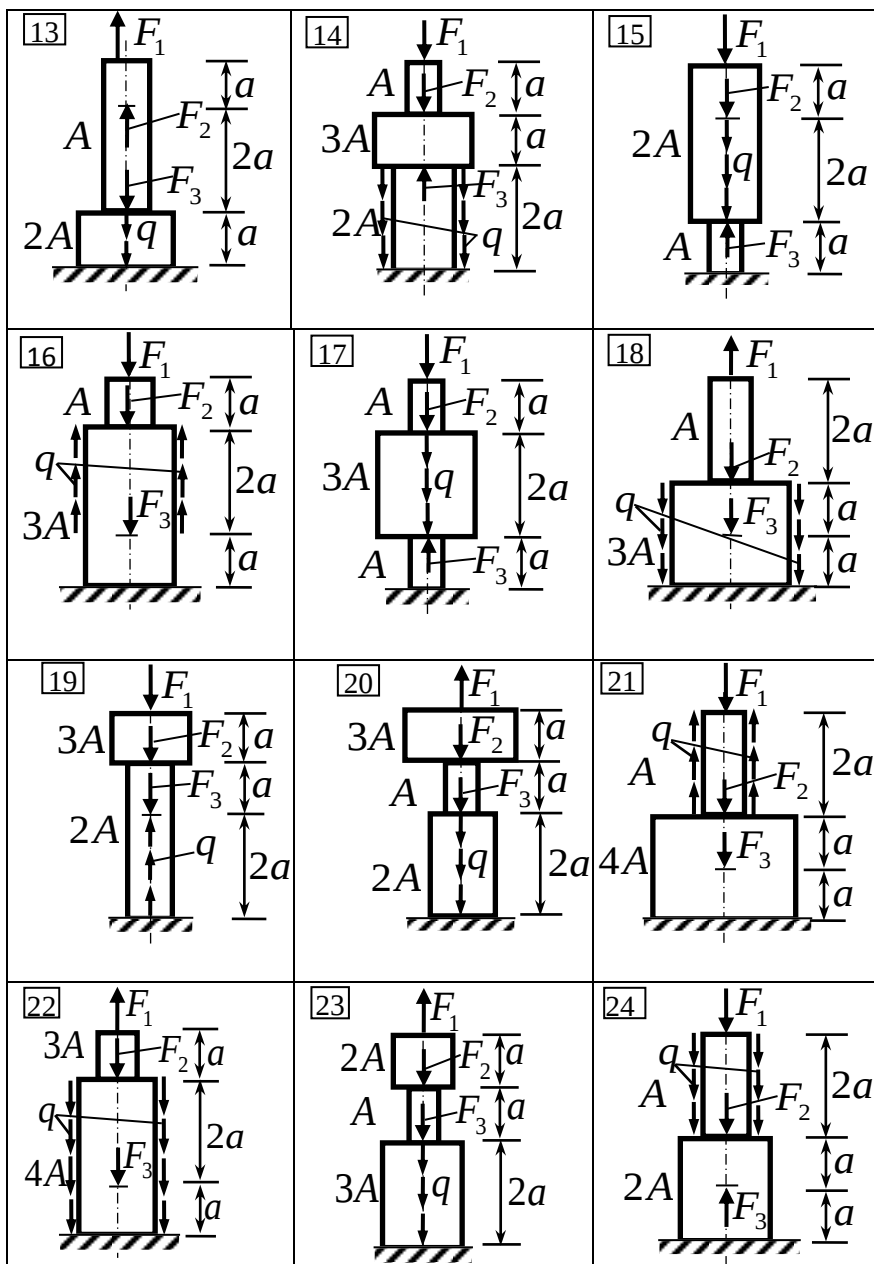


Рис. 3.4.

### 3.2.3. Задача 1.2. Статически неопределимая система

Дано: Составной стержень из алюминиевых и стальных частей жёстко закреплён на нижнем конце и нагружен силами  $F_1$ ,  $F_2$  и  $q$ , действующими вдоль оси стержня.

Для алюминия –  $E_a = 0,7 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $\alpha_a = 23 \cdot 10^{-6} \text{ 1 / } ^\circ\text{рад}$ .

Для стали –  $E_c = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $\alpha_c = 13 \cdot 10^{-6} \text{ 1 / } ^\circ\text{рад}$ .

Исходные данные взять из таблицы 1.2.

Требуется:

1. Определить опорные реакции при действии сил  $F_1$ ,  $F_2$ , и  $q$ , увеличении температуры на  $\Delta t$  и при наличии монтажного зазора между верхним концом бруса и опорой величиной

$\Delta = 1 \text{ мм}$ .

2. Построить эпюры продольных сил  $N$ , нормальных напряжений  $\sigma$  и перемещений  $u$ . Принять параметр площади поперечного сечения  $A = 20 \text{ см}^2$ .

Таблица 1.2

| Вид исходных данных | Варианты исходных данных по задаче 1.2 |     |     |     |     |     |     |     |    |     |
|---------------------|----------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|-----|
|                     | 0                                      | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8  | 9   |
| $a$ , м             | 4                                      | 2   | 3   | 4   | 2   | 3   | 4   | 2   | 3  | 4   |
| $F_1$ , кН          | 100                                    | 110 | 140 | 80  | 160 | 140 | 150 | 120 | 80 | 100 |
| $F_2$ , кН          | 120                                    | 100 | 120 | 110 | 120 | 110 | 180 | 150 | 60 | 110 |
| $q$ , кН/м          | 70                                     | 40  | 60  | 40  | 50  | 60  | 80  | 40  | 70 | 60  |
| $\Delta t$          | 100                                    | 90  | 80  | 60  | 120 | 110 | 60  | 80  | 90 | 100 |



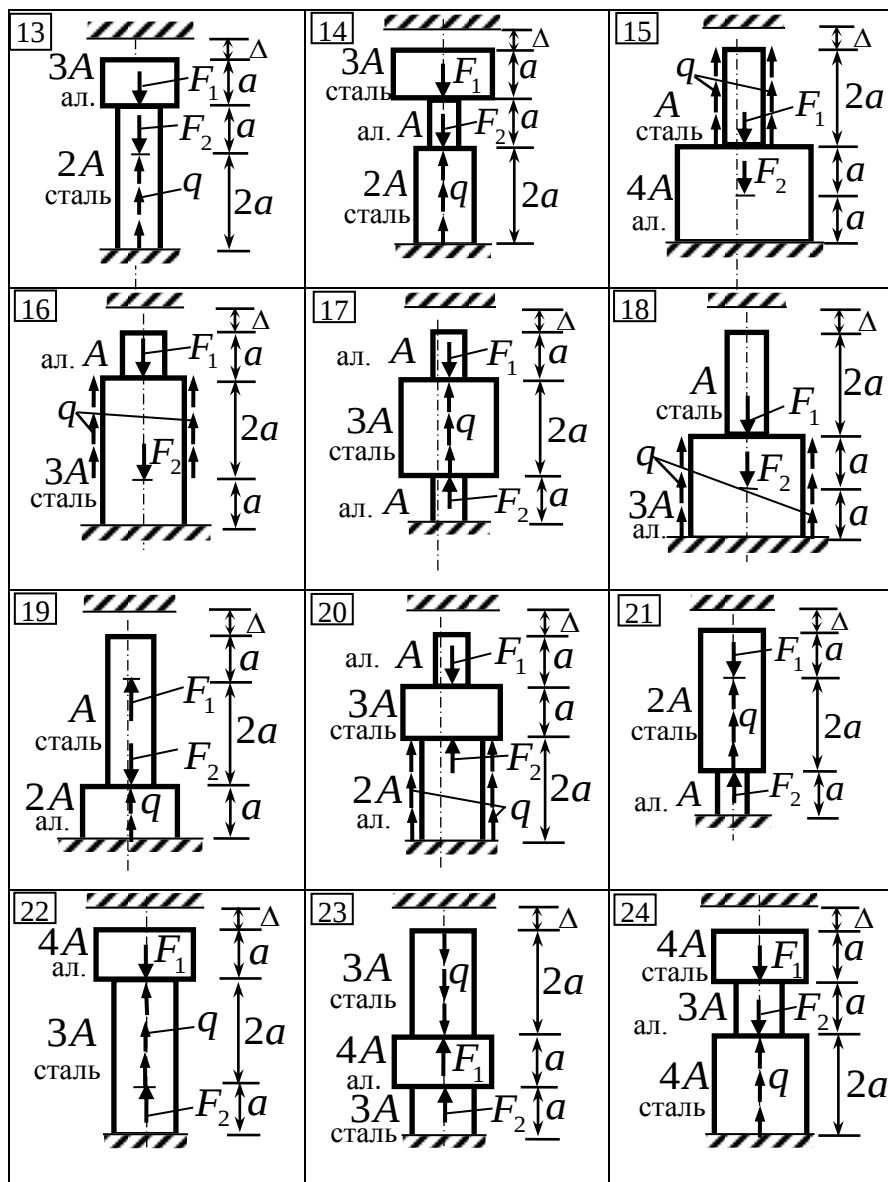


Рис. 3.5

### 3.2.4. Задача 1.3. Статически неопределимая

#### стержневая система

Дано: Жёсткий стержень, нагруженный силой  $F$ , закреплён с помощью шарнирно неподвижной опоры и двух стержней. Материал стержней - сталь.

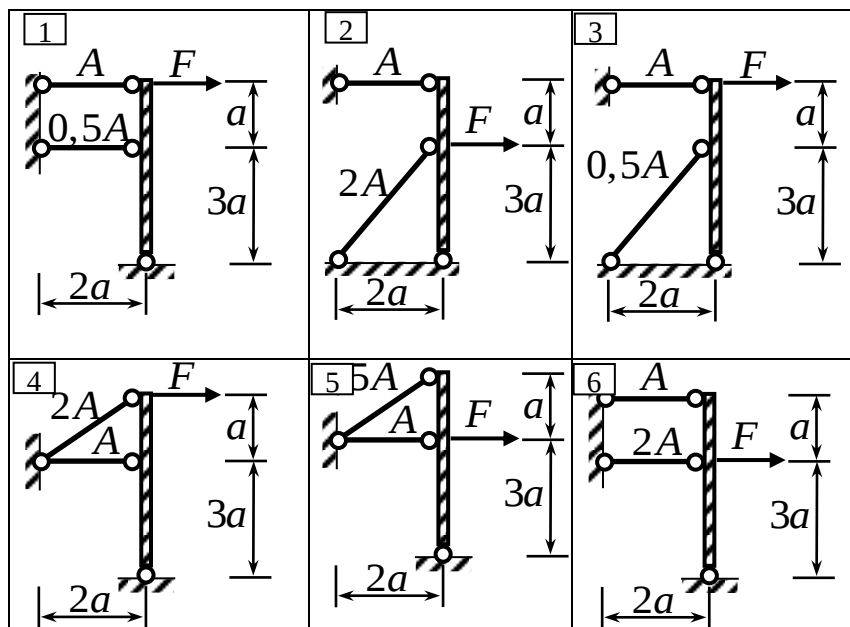
Исходные данные взять из таблицы 1.3.

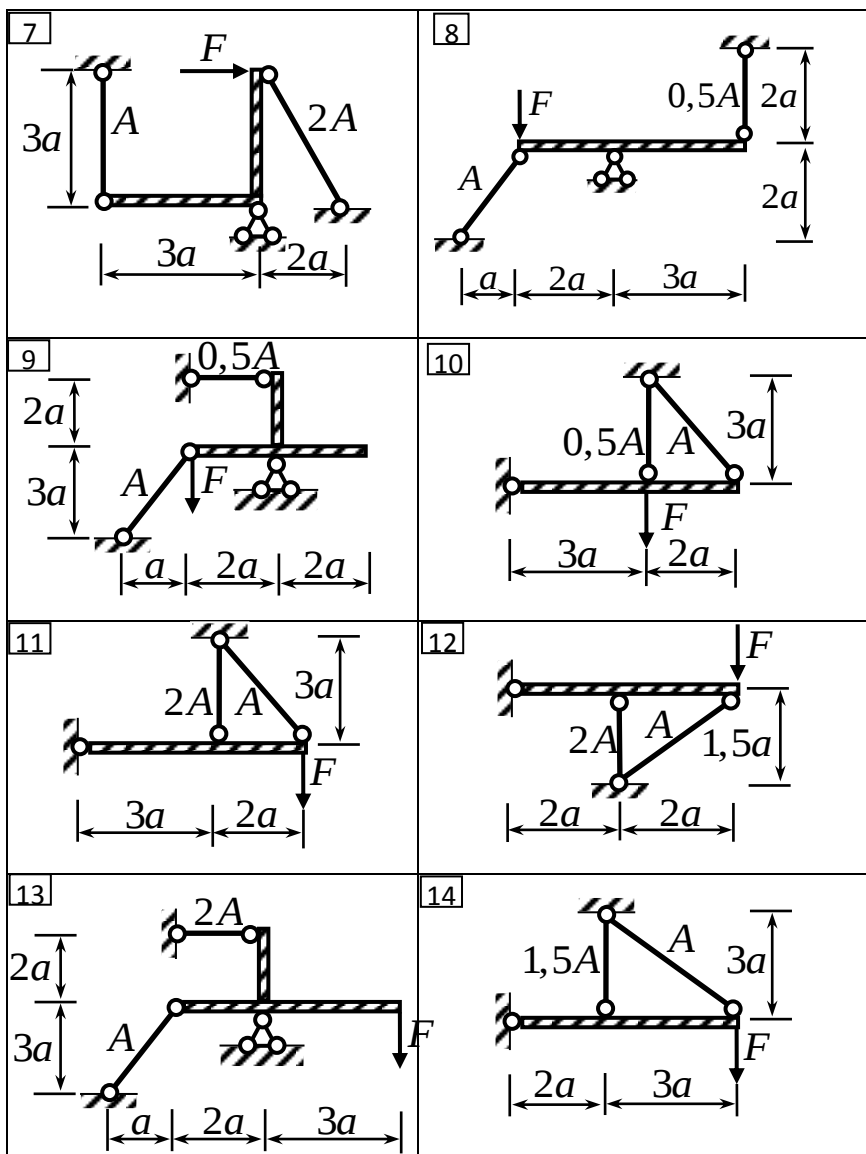
Требуется:

1. Определить усилия в стержнях при действии силы  $F$ .
2. Определить параметр площади поперечного сечения  $A$  из условия прочности  $R = 200 \text{ МПа}$ .
3. Найти значение нагрузки  $F_s$  по методу предельного равновесия и допустимое значение силы  $F_{adm}$ . Сравнить  $F_{adm}$  с заданной нагрузкой. Принять предел текучести  $\sigma_s = 240 \text{ МПа}$ , коэффициент запаса прочности  $k = 1,2$ .

Таблица 1.3

| Вид исходных данных | Варианты исходных данных по задаче 1.3 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---------------------|----------------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
|                     | 0                                      | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
| $a, \text{ м}$      | 1                                      | 2  | 3  | 1  | 2  | 3  | 1  | 2  | 3  | 1  |
| $F, \text{ кН}$     | 40                                     | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 40 | 50 | 60 | 80 |





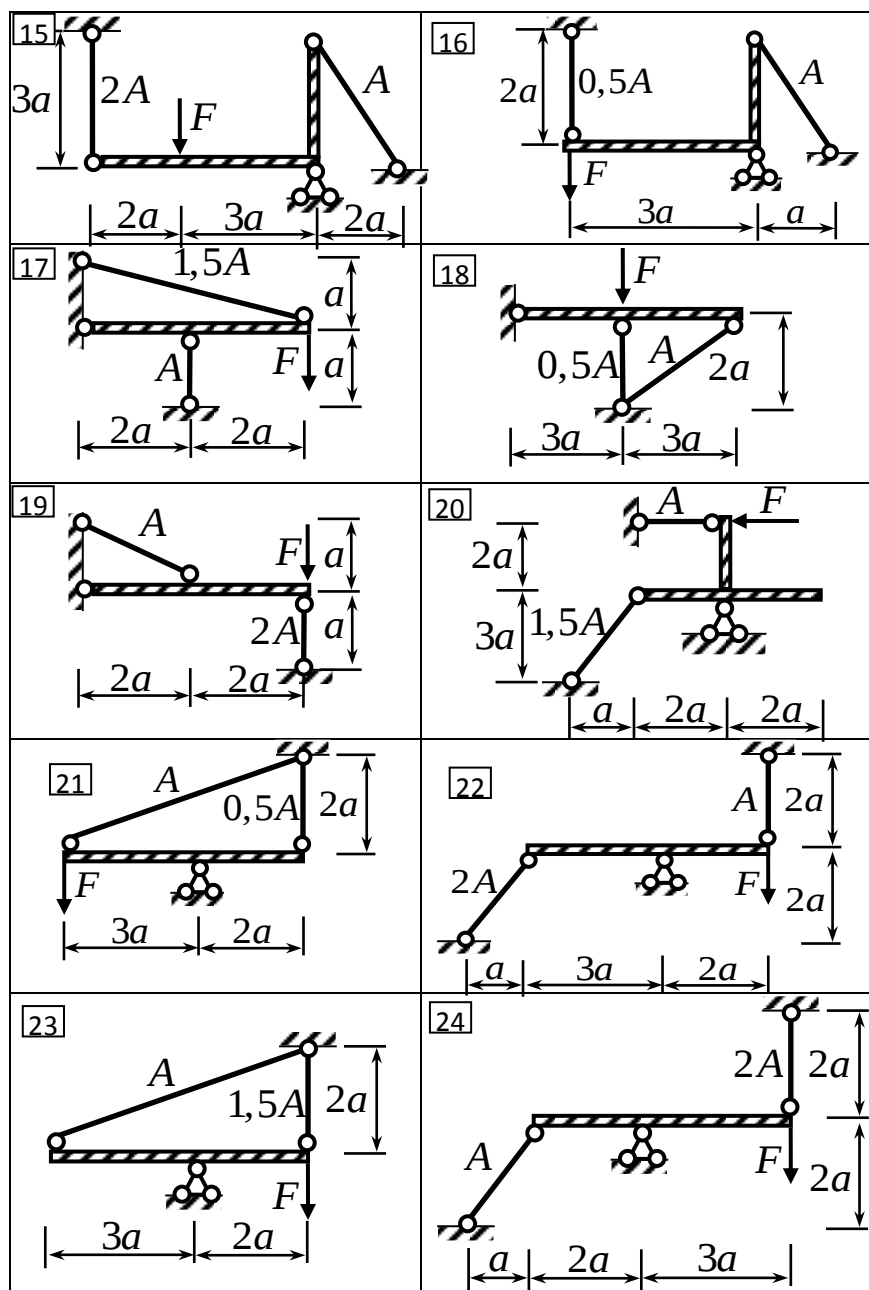


Рис. 3.6

### 3.3. Индивидуальное задание 2 (контрольная работа 2). Напряжённо-деформированное состояние материала в точке. Геометрические характеристики сечений.

#### 3.3.1. Краткие сведения из теории

Напряженным состоянием в точке называется совокупность напряжений на множестве площадок, проходящих через данную точку.

Правила знаков: Растягивающие нормальные напряжения считаются положительными, сжимающие - отрицательными;

Главными называются площадки, на которых касательные напряжения равны нулю, соответствующие этим площадкам нормальные напряжения также называются главными. Принята следующая индексация главных напряжений:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (3.12)$$

Определение главных напряжений:

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (3.13)$$

Определение положения главных площадок:

$$\operatorname{tg} \alpha_{01} = \frac{\tau_{yx}}{\sigma_y - \sigma_{\max}}, \quad \operatorname{tg} \alpha_{02} = \frac{\tau_{yx}}{\sigma_y - \sigma_{\min}} \quad (3.14)$$

Максимальные касательные напряжения определяются по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (3.15)$$

Линейные и угловые деформации определяются с использованием обобщенного закона Гука:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)), & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)), & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)), & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где  $E, G, \nu$  - модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала соответственно, для расчетов нужно выбрать их значения из таблицы П 1 приложений.

## Классические теории прочности

|                                                                                      |                                                                                                                                                                               |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Первая теория прочности (используется при линейном напряженном состоянии)            | <p>для пластичного материала: <math> \sigma _{\max} \leq R</math> ;</p> <p>для хрупкого материала:</p> $\sigma_1 \leq R_t,  \sigma_3  \leq R_c, (\sigma_1 > 0, \sigma_3 < 0)$ |
| Вторая теория прочности                                                              | $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq R$                                                                                                            |
| Третья теория прочности                                                              | $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq R.$                                                                                                                           |
| Четвертая (энергетическая) теория прочности (используется для пластичных материалов) | $\sigma_{\text{экв}} =$ $= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \leq R$                                      |
| Теория прочности Кулона-Мора (используется для хрупких материалов)                   | $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \frac{R_t}{R_c} \sigma_3 \leq R_t, \text{ где}$ <p><math>R_t, R_c</math> - расчетные сопротивления материала при растяжении и сжатии</p>    |

## Геометрические характеристики сечений

Основными геометрическими характеристиками сечения являются (рис.3.7):

Площадь:  $A = \int_A dA$

Статические моменты площади сечения относительно осей  $z, y$ :

$$S_z = \int_A y dA, S_y = \int_A z dA$$

Осевые моменты инерции относительно осей  $z, y$ :

$$I_z = \int_A y^2 dA, I_y = \int_A z^2 dA$$

Центробежный момент инерции относительно осей  $z, y$ :

$$I_{zy} = \int_A yz dA.$$

Для основных типов сечений их геометрические характеристики определены и представлены в таблице.

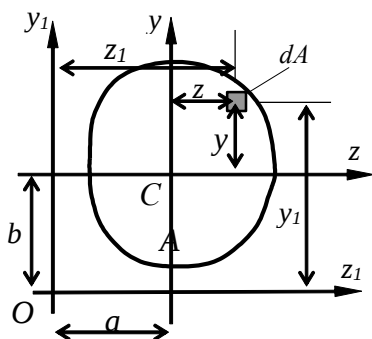
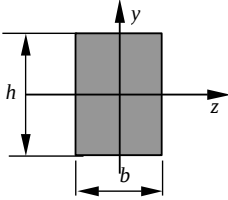
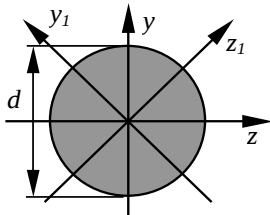
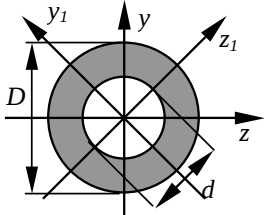
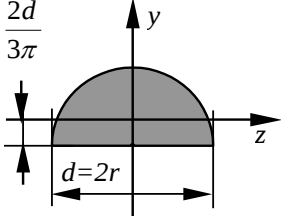
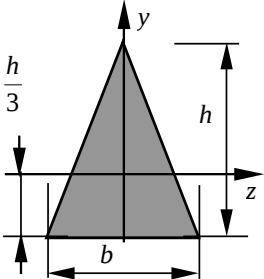


Рис. 3.7.

|                                                                                                                                                   |                                                                                     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Прямоугольник</p> $I_z = \frac{bh^3}{12}, \quad I_y = \frac{hb^3}{12}, \quad I_{zy} = 0$                                                       |    |
| <p>Круг</p> $I_z = I_y = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4},$ $I_{zy} = I_{z_1 y_1} = 0$ $r = \frac{d}{2}$                                    |    |
| <p>Кольцо</p> $I_z = I_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4), \quad \alpha = \frac{d}{D},$ $I_{zy} = I_{z_1 y_1} = 0$ |    |
| <p>Полукруг</p> $I_z = 0,11r^4, \quad I_y = \frac{\pi \cdot r^4}{8}, \quad I_{zy} = 0$                                                            |   |
| <p>Треугольник<br/>равнобедренный</p> $I_z = \frac{bh^3}{36}, \quad I_y = \frac{hb^3}{48}, \quad I_{zy} = 0$                                      |  |

Главными осями инерции сечения называются взаимно-

перпендикулярные оси, относительно которых  $I_{zy} = 0$ .

Координаты центра тяжести составного сечения определяют по формулам:

$$z_c = \frac{S_y^-}{A}, \quad y_c = \frac{S_z^-}{A}. \quad (3.17)$$

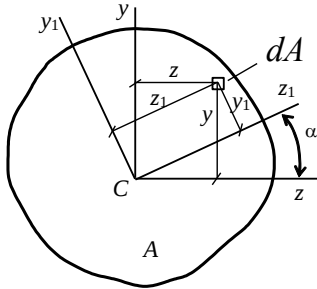


Рис. 3.8.

Центральными осями сечения называются все оси, проходящие через центр тяжести сечения. Относительно центральных осей статические моменты сечения равны нулю.

Для определения главных центральных моментов инерции составного сечения удобно использовать формулы перехода от центральных осей к нецентральным (рис.3.7):

$$\begin{aligned} I_{z_1} &= I_z + b^2 A, \\ I_{y_1} &= I_y + a^2 A, \\ I_{z_1 y_1} &= I_{zy} + abA \end{aligned} \quad (3.18)$$

а также зависимость между моментами инерции при повороте осей на угол  $\alpha$  (рис. 3.8)

$$\begin{aligned} I_{z_1} &= I_z \cdot \cos^2 \alpha + I_y \cdot \sin^2 \alpha - I_{zy} \cdot \sin 2\alpha, \\ I_{y_1} &= I_z \cdot \sin^2 \alpha + I_y \cdot \cos^2 \alpha + I_{zy} \cdot \sin 2\alpha, \\ I_{z_1 y_1} &= \frac{I_z - I_y}{2} \cdot \sin 2\alpha + I_{zy} \cdot \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Главные центральные моменты инерции можно определить, используя следующие выражения:

$$\begin{aligned} I_u &= I_{\max} = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2}, \\ I_v &= I_{\min} = \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Направления главных осей определяются по формулам:

$$\operatorname{tg} \alpha_{01} = \frac{I_{zy}}{I_y - I_u}, \quad \operatorname{tg} \alpha_{02} = \frac{I_{zy}}{I_y - I_v} \quad (3.21)$$

Радиусы инерции сечения определяются по формулам:

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{I_z}{A}}. \quad (3.22)$$

### 3.3.2. Задача 2.1. Плоское напряженное состояние

**ДАНО:** на площадках рассматриваемого элемента объёма заданы напряжения (рис. 3.9). Варианты остальных исходных данных приведены в таблице 3.5

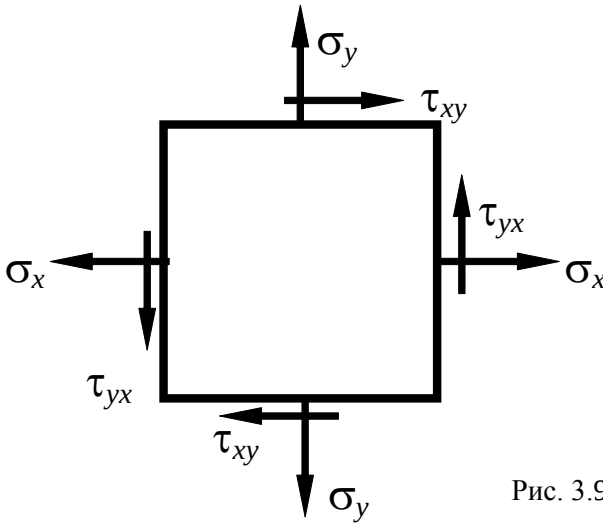


Рис. 3.9.

**ТРЕБУЕТСЯ:** 1. Выполнить чертеж с учетом знака напряжений.  
 2. Определить главные напряжения и положение главных площадок.  
 3. Найти экстремальные касательные напряжения и положение соответствующих им площадок.  
 3. Найти деформации в направлении заданных осей  $x$ ,  $y$  и главные деформации.  
 3. Проверить выполнение условий прочности по различным теориям прочности: 1) теория максимальных нормальных напряжений; 2) теория наибольших линейных деформаций; 3) теория максимальных касательных напряжений; 4) энергетическая теория; 5) теория прочности Кулона-Мора.

Таблица 2.1

| №<br>вар.<br>(К) | $\sigma_x$ | $\sigma_y$ | $\tau_{xy}$ | материал       | №<br>вар.<br>(К) | $\sigma_x$ | $\sigma_y$ | $\tau_{xy}$ | материал       |
|------------------|------------|------------|-------------|----------------|------------------|------------|------------|-------------|----------------|
| 1                | 30         | 80         | 60          | медь           | 26               | 90         | 80         | 60          | сталь          |
| 2                | 40         | -50        | 70          |                | 27               | 140        | 80         | 60          |                |
| 3                | 70         | -30        | 50          |                | 28               | 90         | 110        | 50          |                |
| 4                | 60         | 20         | 40          |                | 29               | 60         | -90        | 40          |                |
| 5                | 70         | 20         | -50         |                | 30               | 140        | 80         | 50          |                |
| 6                | 30         | -40        | 50          | алюминий       | 31               | -100       | 70         | 50          | сталь          |
| 7                | -20        | -30        | 50          |                | 32               | -90        | 90         | 50          |                |
| 8                | -50        | 20         | 60          |                | 33               | 80         | 100        | -60         |                |
| 9                | -40        | 40         | 50          |                | 34               | 170        | -60        | 50          |                |
| 10               | 50         | -20        | 30          |                | 35               | 60         | 90         | -30         |                |
| 11               | 140        | -70        | 20          | сталь          | 36               | 80         | -70        | 20          | серый<br>чугун |
| 12               | -80        | -60        | 40          |                | 37               | 20         | -60        | 40          |                |
| 13               | 80         | 130        | 50          |                | 38               | 80         | 60         | 50          |                |
| 14               | 75         | -120       | 60          |                | 39               | 90         | 80         | 60          |                |
| 15               | 10         | 100        | 40          |                | 40               | -10        | 40         | 60          |                |
| 16               | 90         | 20         | 30          | серый<br>чугун | 41               | 90         | 20         | -90         | сталь          |
| 17               | -80        | 60         | 50          |                | 42               | 130        | -60        | 50          |                |
| 18               | 20         | 40         | 60          |                | 43               | -90        | 100        | 60          |                |
| 19               | 90         | -40        | 70          |                | 44               | 110        | -40        | 30          |                |
| 20               | 60         | 80         | 80          |                | 45               | -60        | -100       | 80          |                |
| 21               | -30        | -80        | 60          | сосна          | 46               | 70         | 120        | -60         | сталь          |
| 22               | -60        | -50        | 50          |                | 47               | 60         | -130       | 50          |                |
| 23               | -70        | -50        | 50          |                | 48               | -70        | 160        | -50         |                |
| 24               | 10         | -90        | 40          |                | 49               | 100        | -120       | 20          |                |
| 25               | -50        | -30        | 40          |                | 50               | -90        | 110        | 10          |                |

Расчетные сопротивления материалов, модули упругости и коэффициенты Пуассона приведены в ПРИЛОЖЕНИЯХ, таблица П.1.

### 3.3.3.Задача 2.2.Определение геометрических характеристик плоских сечений

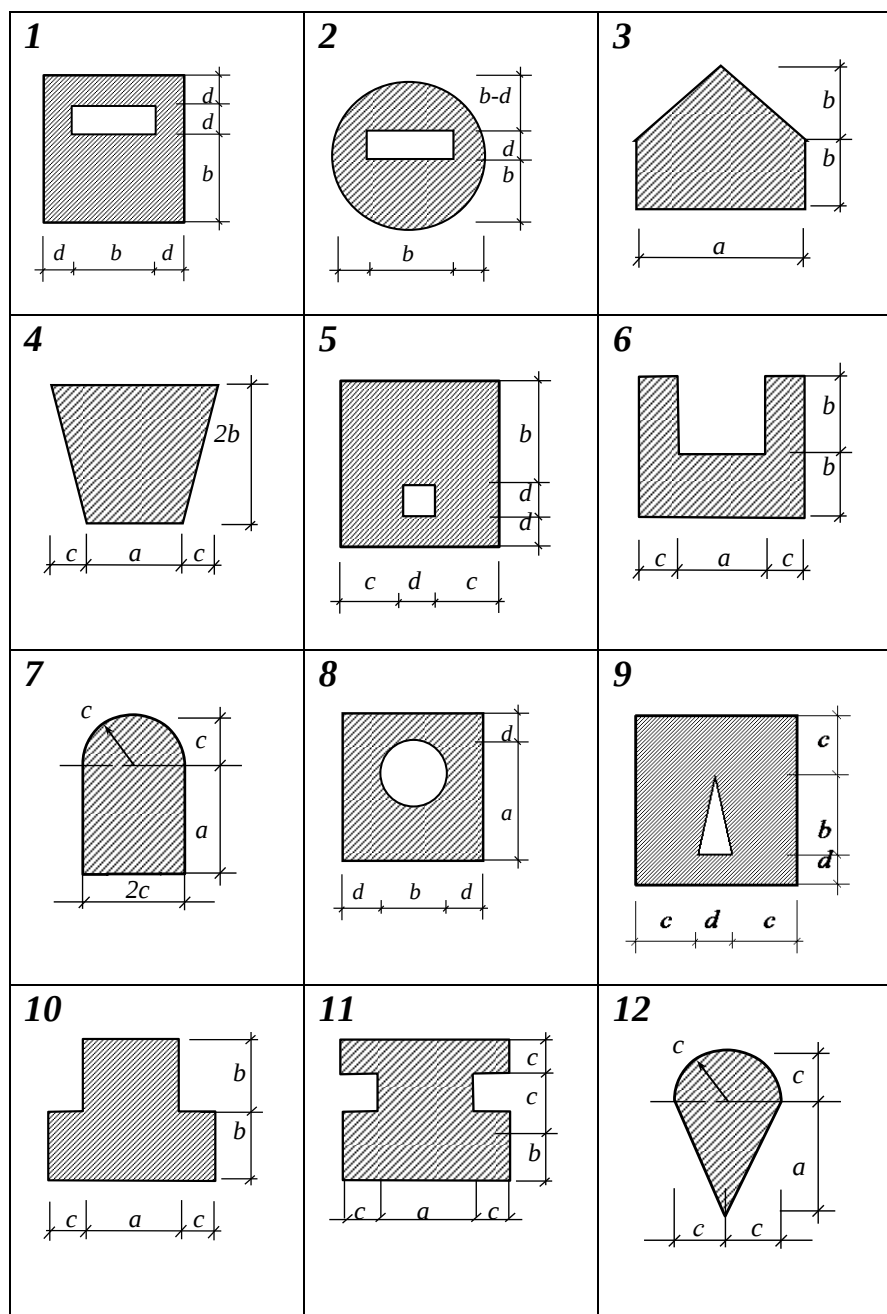
Дано поперечное сечение стержня (рис.3.10).

Требуется:

1. Начертить заданное поперечное сечение в масштабе, про-  
ставить размеры в сантиметрах.
2. Определить координаты центра тяжести сечения и прове-  
сти главные центральные оси.
3. Определить величины главных центральных моментов  
инерции.
4. Определить величины главных центральных радиусов  
инерции сечения.

Таблица 2.2

| Вид<br>исход-<br>ных<br>данных | Варианты исходных данных по задаче 2.2 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|--------------------------------|----------------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
|                                | 0                                      | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
| <i>a</i>                       | 24                                     | 20 | 36 | 20 | 20 | 32 | 24 | 18 | 40 | 48 |
| <i>b</i>                       | 12                                     | 10 | 24 | 12 | 16 | 20 | 18 | 16 | 36 | 32 |
| <i>c</i>                       | 8                                      | 6  | 12 | 8  | 12 | 12 | 10 | 8  | 24 | 20 |
| <i>d</i>                       | 4                                      | 3  | 4  | 2  | 4  | 4  | 2  | 4  | 6  | 8  |



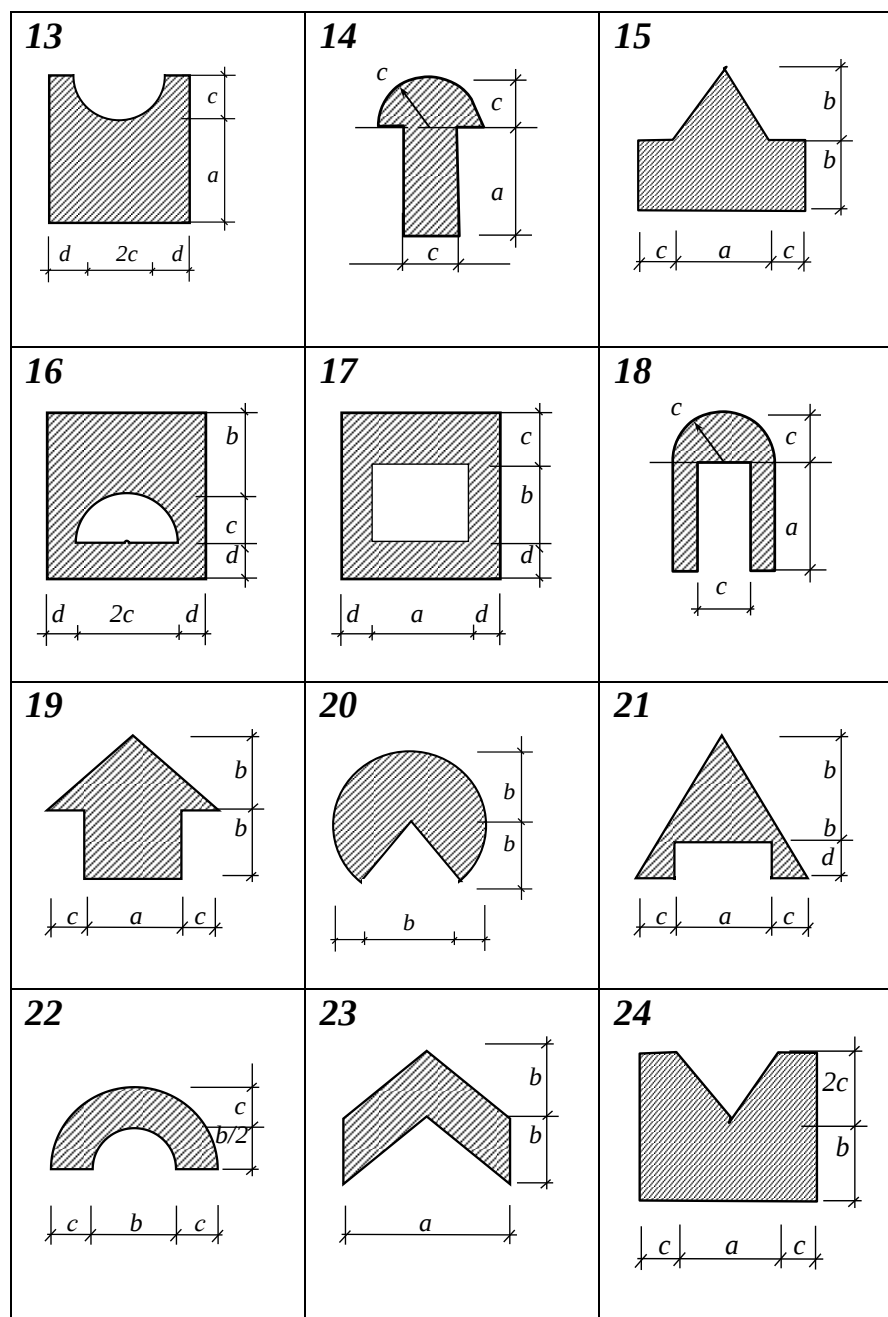


Рис.3.10

### 3.3.4. Задача 2.3. Определение геометрических характеристик плоских сечений

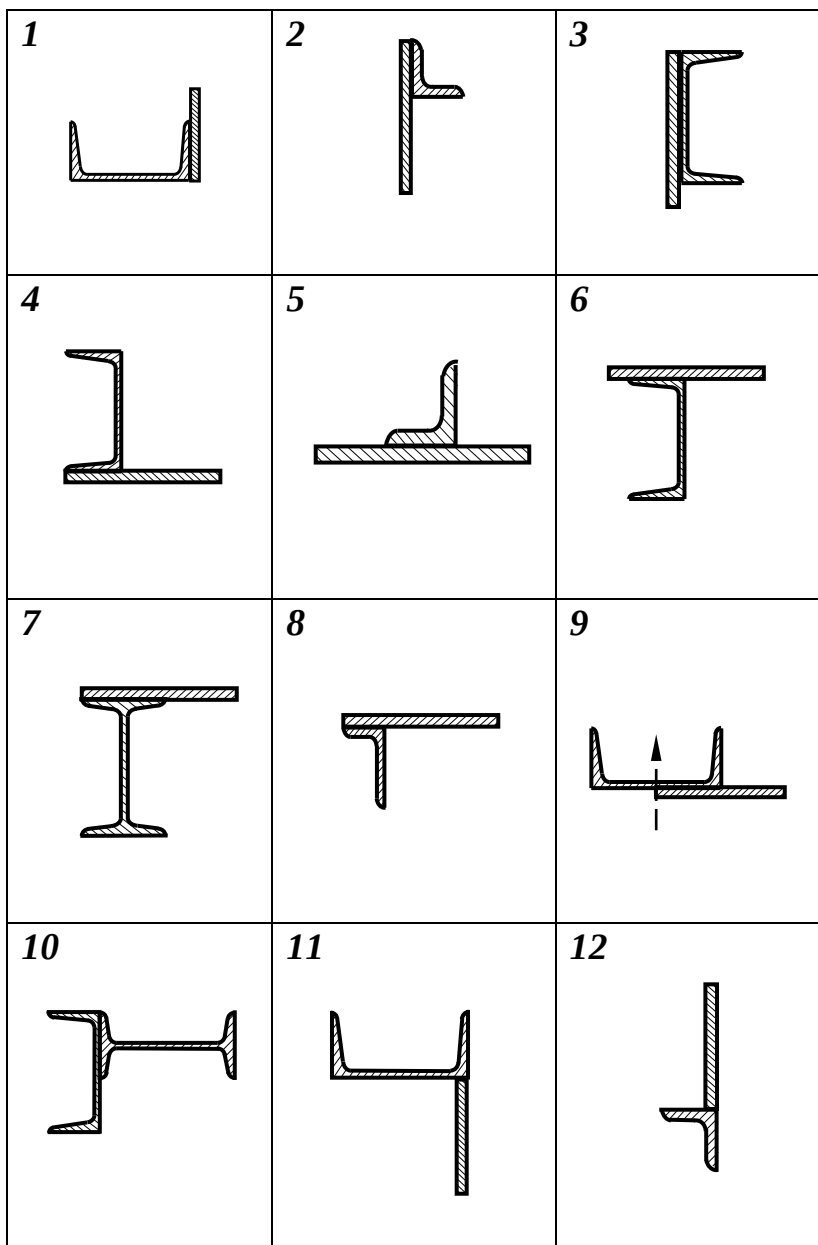
Дано поперечное сечение стержня (рис.3.11).

Требуется:

1. Начертить заданное поперечное сечение в масштабе, проставить размеры в сантиметрах.
2. Определить координаты центра тяжести сечения и провести горизонтальную и вертикальную центральные оси.
3. Определить осевые и центробежные моменты инерции сечения относительно проведенных центральных осей.
4. Определить положение главных центральных осей инерции и показать их на чертеже.
5. Вычислить величины главных центральных моментов инерции.
6. Определить величины главных центральных радиусов инерции сечения.

Таблица 2.3

| Вид исходных данных                       | Варианты исходных данных по задаче 2.3 |      |      |      |        |        |      |       |       |       |
|-------------------------------------------|----------------------------------------|------|------|------|--------|--------|------|-------|-------|-------|
|                                           | 0                                      | 1    | 2    | 3    | 4      | 5      | 6    | 7     | 8     | 9     |
| Прямоугольник                             | 10×1                                   | 10×2 | 12×1 | 20×2 | 12×4   | 16×1   | 16×2 | 36×4  | 20×2  | 24×4  |
| Номер двутавра                            | 12                                     | 14   | 18   | 20   | 24     | 30     | 36   | 22    | 40    | 36    |
| Номер швеллера                            | 16                                     | 18   | 20   | 22   | 27     | 18а    | 30   | 24    | 36    | 33    |
| Номер равнополочного уголка/толщина, мм   | 4/4                                    | 5/4  | 7/5  | 5/6  | 8/6    | 8/8    | 10/8 | 14/10 | 16/12 | 10/12 |
| Номер неравнополочного уголка/толщина, мм | 5/3,2                                  | 4/3  | 8/5  | 11/7 | 12,5/8 | 12,5/8 | 14/9 | 16/10 | 16/10 | 14/9  |
|                                           | 4                                      | 5    | 5    | 8    | 8      | 10     | 8    | 10    | 12    | 10    |



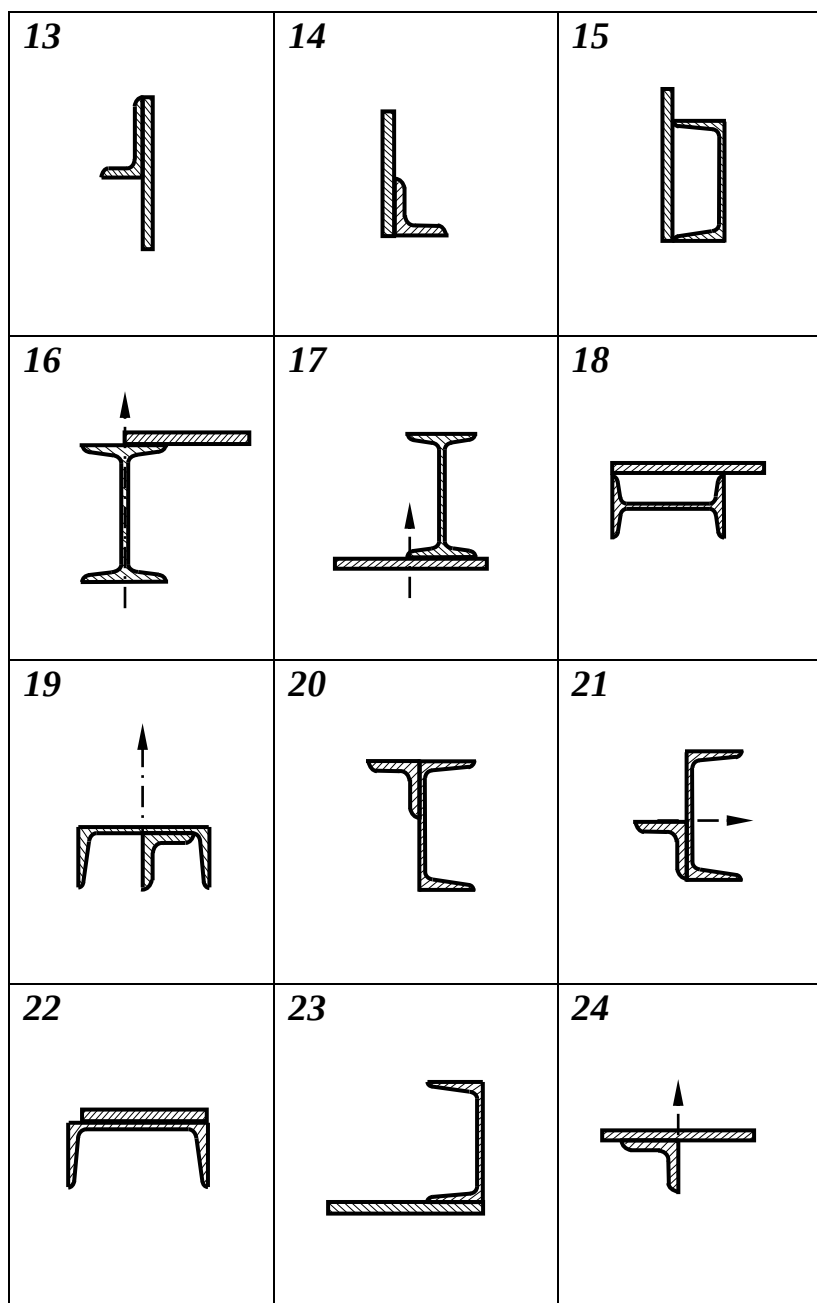


Рис. 3.11

### 3.4. Индивидуальное задание 3 (контрольная работа 3). Расчёт прямых стержней при деформации кручения.

#### 3.4.1. Краткие сведения из теории.

Кручением называется деформация прямого стержня при действии внешней нагрузки в виде пар сил, плоскости которых перпендикулярны продольной оси стержня (рис. 3.12).

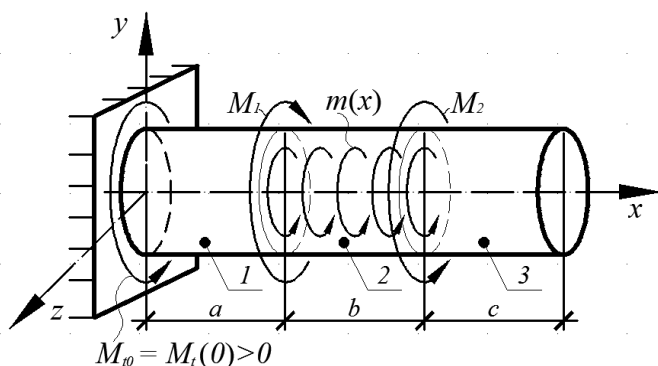


Рис. 3.12

В данном случае силы внутреннего взаимодействия между частицами в поперечном сечении суммируются к одному усилию - крутящему моменту  $M_t$ . При построении эпюры  $M_t$  стержень разбивается на участки и с помощью метода сечений определяются функции  $M_{ti}(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  $n$  - число участков. Например, для случая, приведенного на рис. 3.12,  $n = 3$ ,  $M_{t2}(x) = M_{t0} - M_1 + \int_a^x m(x) \cdot dx$ .

При свободном кручении стержней в поперечном сечении возникают только касательные напряжения. Для стержней круглого и кольцевого сечения (рис. 3.13) выражения для касательных напряжений имеет вид:

$$\tau(\rho) = \frac{M_t \cdot \rho}{I_p}, \quad (3.23)$$

где  $I_p$  - полярный момент инерции.

а) Круглое сечение

б) Кольцевое сечение

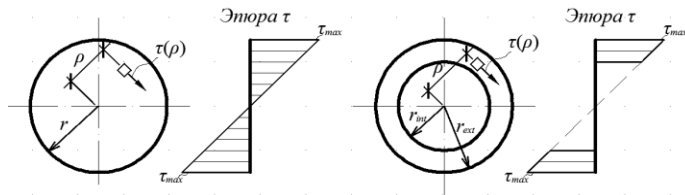


Рис. 3.13

Величина максимальных касательных напряжений в сечении равна:  $\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p}$ , где  $W_p$  - полярный момент сопротивления сечения.

Для круглого сечения:  $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$ ;  $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$ . Для кольцевого сечения:  $I_p = \frac{\pi d_{\text{ext}}^4}{32} (1 - D^4)$ ;  $W_p = \frac{\pi d_{\text{ext}}^3}{16} (1 - D^4)$ , где  $D = \frac{d_{\text{int}}}{d_{\text{ext}}}$ .

Для стержней прямоугольного сечения  $\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}$ ,  $W_t = \alpha h b^2$

- момент сопротивления при кручении,  $\alpha$  - коэффициент Сен-Венана,  $b, h > b$  - размеры прямоугольного сечения (рис. 3.14).

Условие расчета по несущей способности (условие прочности) записывается в виде

$$\tau_{\max} \leq R_s, \quad (3.24)$$

где  $R_s$  - расчетное сопротивление при сдвиге. При использовании 3-й теории прочности

$R_s = \frac{R}{2}$ ,  $R$  - основное расчетное сопротивление.

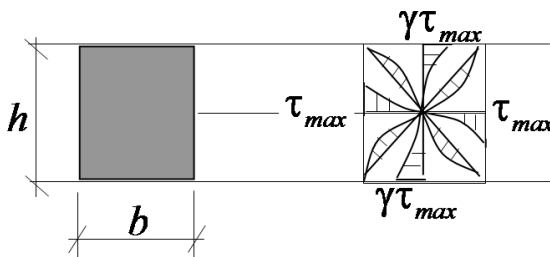


Рис. 3.14

Условие (3.24) позволяет решать как проверочную, так и проектные задачи (проектирование сечений и нагрузок). В частности, при про-

ектировании сечений используются следующие выражения:- для

круглого сечения  $d \geq \sqrt[3]{\frac{16|M_t|_{\max}}{\pi R_s}}$ ; для кольцевого сечения

$$d_{\text{ext}} \geq \sqrt[3]{\frac{16|M_t|_{\max}}{\pi(1-D^4)R_s}}; \text{ для прямоугольного сечения } b \geq \sqrt[3]{\frac{|M_t|_{\max}}{\alpha m R_s}},$$

где  $m = h/b$ . Расчет по деформациям (на жесткость) заключается в проверке условия

$$|\varphi|_{\max} \leq [\varphi], \quad (3.25)$$

где  $|\varphi|_{\max}$  – максимальный по модулю угол закручивания сечения от нормативной нагрузки;  $[\varphi]$  – допустимый угол закручивания.

Величина  $|\varphi|_{\max}$  находится на основе анализа общего соотношения для углов закручивания на участках:

$$\varphi_j(x) = \varphi_0 + \sum_{i=1}^{j-1} \int_{a_i}^{b_i} \frac{M_{ti}(x)}{GI_{\rho i}(x)} dx + \int_{a_j}^x \frac{M_{tj}(x)}{GI_{\rho j}(x)} dx, \quad j=1, \dots, n, \quad (3.26)$$

где  $\varphi_0$  – угол закручивания начального сечения;  $a_j, b_j$  – координаты границ участка  $j$ .

При кручении стержней прямоугольного сечения вместо  $I_{\rho j}(x)$  используется выражение  $I_{tj}(x) = \beta_j(x) h_j(x) b_j(x)^3$ , где  $\beta_j(x)$  – коэффициент Сен-Венана. В рассматриваемых задачах  $GI_{\rho i}(x) = GI_{\rho i} = \text{const}$ ,  $GI_{ti}(x) = GI_{ti} = \text{const}$ .  $\beta_j(x) = \text{const}$  и т.д.

При кручении стержня, жестко защемленного по концам (правый конец стержня, приведенного на рис. 3.12, также защемлен), задача расчета является статически неопределимой. В таком случае для раскрытия статической неопределимости дополнительно к уравнению равновесия стержня  $\sum m_x = 0$  составляется урав-

$$\text{нение } \varphi_3(e) = \sum_{i=1}^3 \int_{a_i}^{b_i} \frac{M_{ti}(x)}{GI_p} dx = 0, \text{ вытекающее из рассмотрения гео-}$$

метрической и физической сторон задачи, а опорные реакции находятся из решения системы двух полученных уравнений.

Расчет по предельной (разрушающей) нагрузке предполагает предварительное определение предельного крутящего момента  $M_{t\lim}$  в сечении:

- для круглого стержня  $M_{t\lim} = \frac{4}{3} \frac{\pi d^3}{16} \tau_s$ ;

- для стержня кольцевого сечения  $M_{t\lim} = \frac{4}{3} \frac{\pi d_{\text{dext}}^3}{16} (1 - D^3) \tau_s$ ;

где  $\tau_s$  – предел текучести материала при сдвиге. В дальнейшем при однопараметрической нагрузке (все нагрузки выражаются через один параметр  $M$  (или  $m$ )) находится предельное значение  $M_{\lim}$  (или  $m_{\lim}$ ) параметра нагрузки, при котором стержень либо всюду течет, либо превращается в механизм вследствие появления шарниров текучести. Условие расчета по предельной нагрузке имеет вид:

$$M \text{ (m)} \leq \frac{M_{\lim} \text{ (} m_{\lim} \text{)}}{k}, \quad (3.27)$$

где  $M$  (или  $m$ ) - заданная величина параметра нагрузки,  $k > 1$  - коэффициент запаса прочности по нагрузке.

### 3.4.2. Задача 3.1.

Варианты поперечных сечений и расчетных схем стержней для статической определимой задачи 3.1 при кручении показаны на рис. 3.15 и рис. 3.16 соответственно. Варианты остальных исходных данных по задаче 3.1 представлены в таблице 3.1.

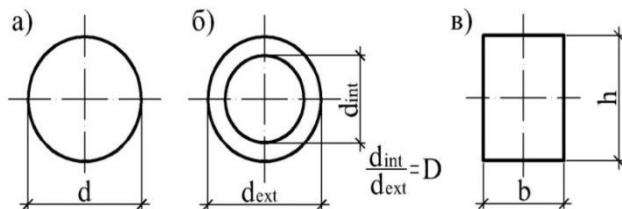


Рис.3.15

Таблица значений коэффициентов Сен-Венана  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  приведена в приложении

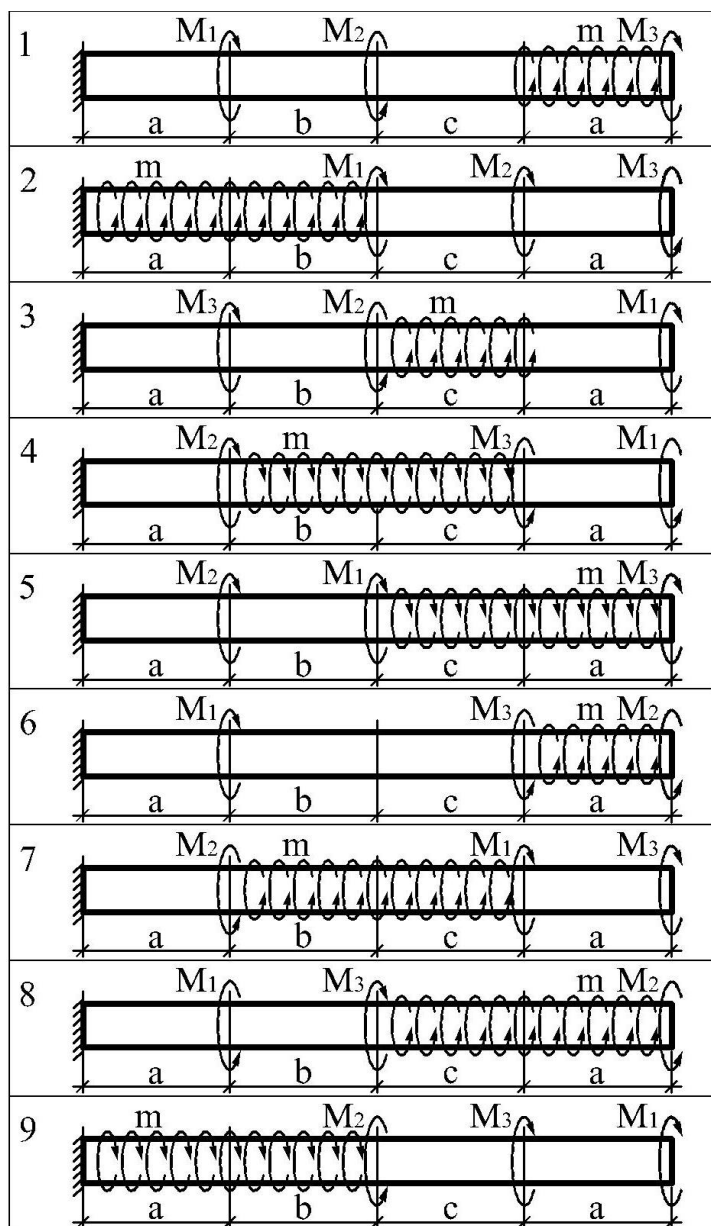
#### Требуется:

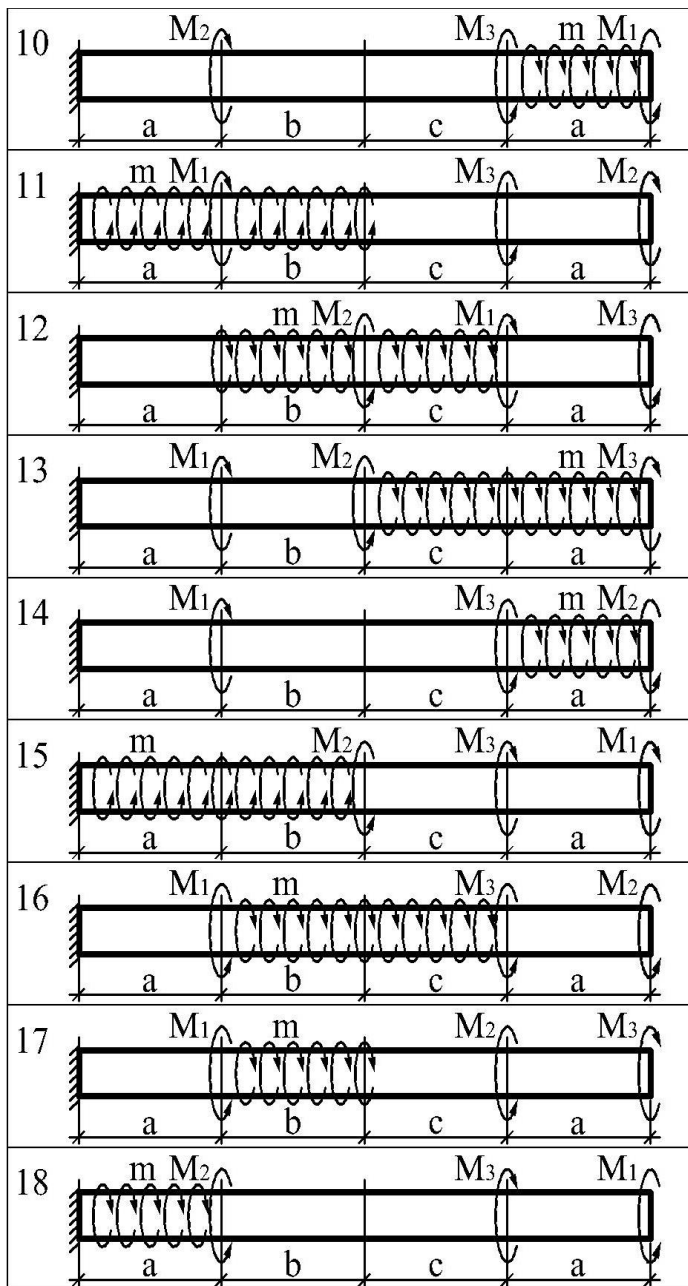
- 1) построить эпюру крутящих моментов в сечении стержня;

- 2) по усилиям прочности подобрать сечение стержня в вариантах а), б), в) (см. рис. 3.15);
- 3) построить эпюру углов закручивания сечения при постоянной жесткости стержня.  $GI_p$  (или  $GI_t$ ) = const.;
- 4) подобрать сечение из условия жесткости (вариант б),  $G = 0,8 \cdot 10^5$  МПа);
- 5) выбрать окончательные размеры сечения (вариант б)) из условий прочности и жесткости.

Таблица 3.1

| Вид исходных данных | Варианты исходных данных по задаче 3.1 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|---------------------|----------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|                     | 0                                      | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |
| $a$ , м             | 1,2                                    | 1,1  | 1,0  | 1,2  | 0,8  | 1,3  | 0,7  | 1,2  | 0,8  | 1,1  |
| $b$ , м             | 0,8                                    | 1,3  | 1,4  | 1,0  | 1,1  | 0,7  | 1,2  | 0,9  | 1,1  | 0,7  |
| $c$ , м             | 1,0                                    | 0,7  | 0,8  | 0,7  | 1,2  | 0,9  | 1,3  | 1,1  | 1,4  | 1,5  |
| $M_1$ , кН*м        | 2,1                                    | 1,8  | 2,3  | 1,9  | 1,6  | 1,8  | 2,3  | 2,2  | 1,9  | 2,1  |
| $M_2$ , кН*м        | 1,8                                    | 2,2  | 1,4  | 2,5  | 2,6  | 1,5  | 1,2  | 1,4  | 2,1  | 1,4  |
| $M_3$ , кН*м        | 1,9                                    | 1,6  | 1,8  | 1,3  | 1,2  | 2,1  | 1,6  | 1,8  | 1,6  | 1,8  |
| $m$ , кН*м/м        | 1,0                                    | 1,2  | 1,3  | 1,1  | 0,8  | 1,4  | 1,2  | 1,0  | 1,3  | 1,5  |
| $h/b$               | 1,2                                    | 1,5  | 3,0  | 2,0  | 4,0  | 1,5  | 2,0  | 1,1  | 4,0  | 3,0  |
| $D$                 | 0,9                                    | 0,85 | 0,8  | 0,75 | 0,8  | 0,85 | 0,9  | 0,85 | 0,8  | 0,75 |
| $R_s$ , МПа         | 100                                    | 90   | 80   | 70   | 60   | 70   | 80   | 90   | 100  | 80   |
| $[\varphi]$ , рад   | 0,03                                   | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,05 |





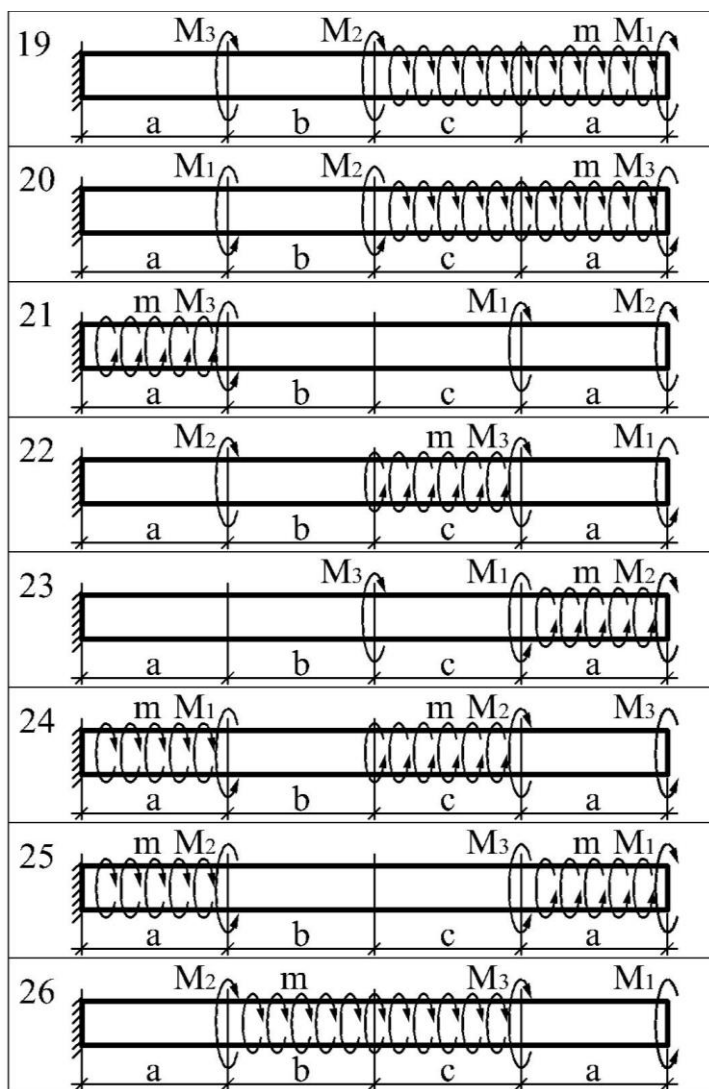


Рис. 3.16

### Задача 3.2.

Варианты расчетных схем стержней для статически неопределимой задачи 3.2 при кручении показаны на рис. 3.17. Задан вариант а) поперечного сечения стержня (рис. 3.15, круглое сечение).

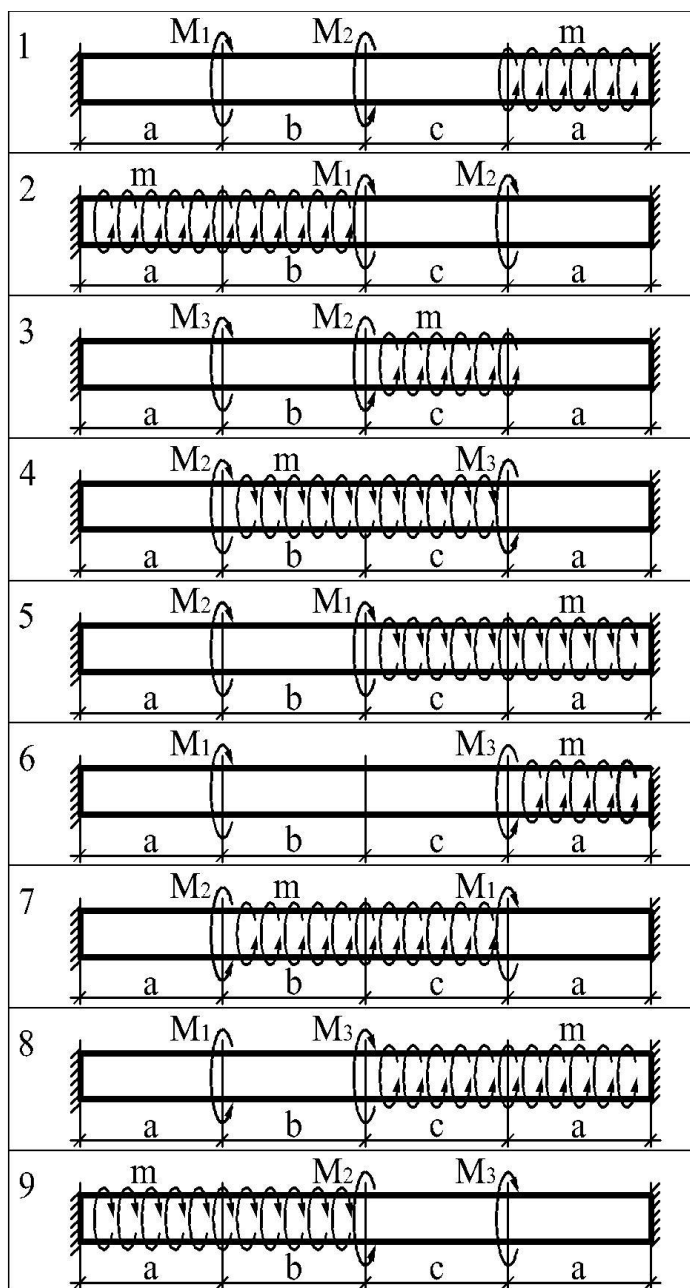
Требуется:

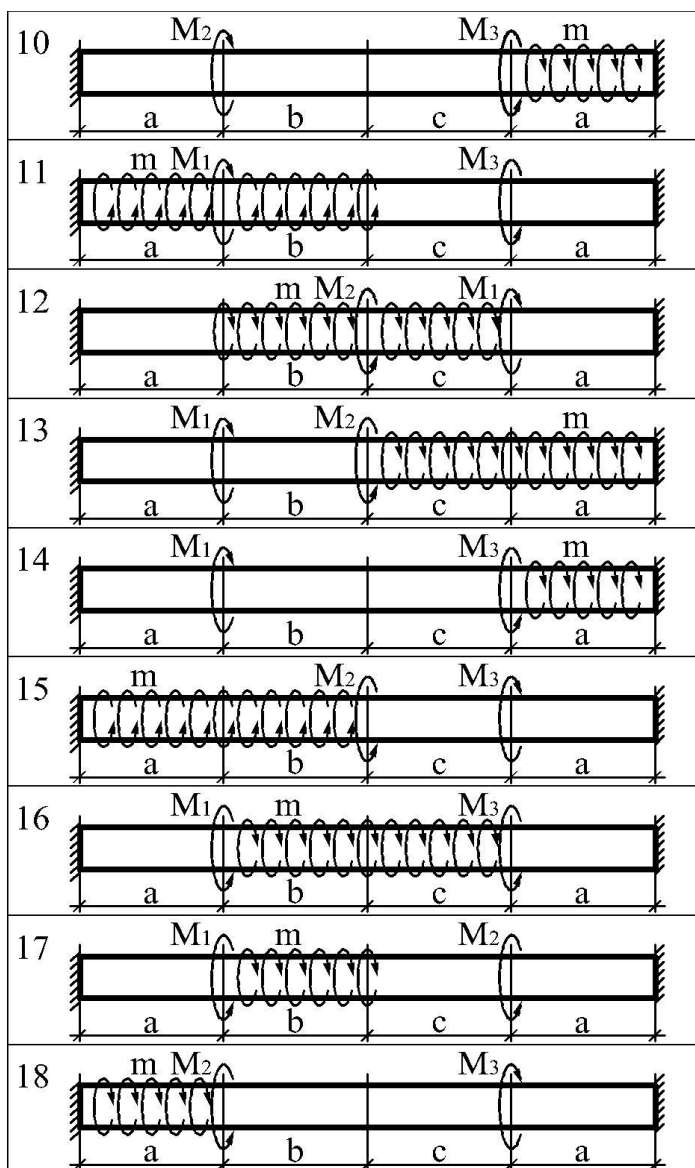
- 1) построить эпюру  $M_t$  в предположении линейно упругой работы материала;
- 2) по условию прочности (расчет по несущей способности) подобрать круглое поперечное сечение стержня;
- 3) подобрать круглое сечение стержня из условия расчета по предельной нагрузке выражая  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  через величину  $m$  согласно исходным данным;
- 4) сравнить результаты расчетов по расчетному сопротивлению (несущей способности) и по предельной нагрузке.

Варианты остальных исходных данных по задаче 3.2 представлены в таблице 3.2.

Таблица 3.2

| Вид исходных данных | Варианты исходных данных по задаче 3.2 |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|---------------------|----------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|                     | 0                                      | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   |
| a, м                | 1,2                                    | 1,1 | 1,0 | 1,2 | 0,8 | 1,3 | 0,7 | 1,2 | 0,8 | 1,1 |
| b, м                | 0,8                                    | 1,3 | 1,4 | 1,0 | 1,1 | 0,7 | 1,2 | 0,9 | 1,1 | 0,7 |
| c, м                | 1,0                                    | 0,7 | 0,8 | 0,7 | 1,2 | 0,9 | 1,3 | 1,1 | 1,4 | 1,5 |
| $M_1$ , кН*м        | 2,1                                    | 1,8 | 2,3 | 1,9 | 1,6 | 1,8 | 2,3 | 2,2 | 1,9 | 2,1 |
| $M_2$ , кН*м        | 1,8                                    | 2,2 | 1,4 | 2,5 | 2,6 | 1,5 | 1,2 | 1,4 | 2,1 | 1,4 |
| $M_3$ , кН*м        | 1,9                                    | 1,6 | 1,8 | 1,3 | 1,2 | 2,1 | 1,6 | 1,8 | 1,6 | 1,8 |
| $m$ , кН*м/м        | 1,0                                    | 1,2 | 1,3 | 1,1 | 0,8 | 1,4 | 1,2 | 1,0 | 1,3 | 1,5 |
| $R_s$ , МПа         | 100                                    | 90  | 80  | 70  | 60  | 70  | 80  | 90  | 100 | 80  |
| $\tau_s$ , МПа      | 120                                    | 117 | 112 | 105 | 84  | 91  | 96  | 117 | 140 | 120 |
| k                   | 1,2                                    | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,4 | 1,3 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 |





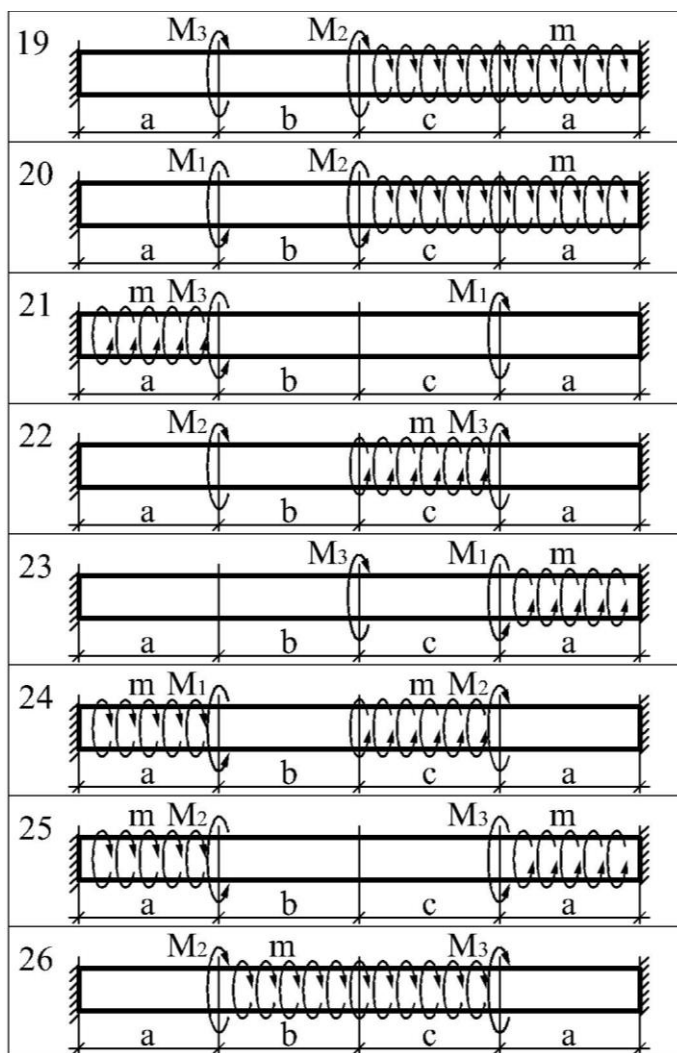


Рис. 3.17

### 3.5. Индивидуальное задание 4 (контрольная работа 4). Прямой поперечный изгиб балок.

#### 3.5.1. Краткие сведения из теории

**Прямой поперечный изгибом** называется вид сопротивления материалов (вид деформации стержня) при котором внешние нагрузки действуют перпендикулярно оси стержня и находятся в плоскости параллельной одной из главных осей инерции (или главной плоскости инерции) и проходящей через центр изгиба сечения. Центром изгиба называют особую точку в плоскости поперечного сечения стержня, которая характерна тем, что приложенная в ней нагрузка не вызывает в поперечном сечении крутящего момента (актуально для одиночного швеллера, уголка и подобных тонкостенных сечений).

При прямом поперечном изгибе в поперечном сечении возникают *внутренние усилия*: изгибающий момент  $M$  и поперечная сила  $Q$ . При построении эпюр этих внутренних усилий стержень разбивается на грузовые участки. При помощи метода сечений определяются функции  $M_{zi}(x)$ ,  $Q_{yi}(x)$ ,  $i=1, \dots, n$ ;  $n$  – число участков, причём текущие координаты сечений могут определяться как в общей, так и в местных системах координат. На эпюре изгибающих моментов  $M_z$  знаки «+» и «-» принято не указывать, а откладывать значение «со стороны растянутых волокон».

Между  $M_z$ ,  $Q_y$  и  $q$  имеются следующие *дифференциальные зависимости*:

$$\frac{dM_z(x)}{dx} = Q_y(x) ; \quad \frac{dQ_y(x)}{dx} = -q(x) ; \quad \frac{d^2M_z(x)}{dx^2} = -q(x) . \quad (3.28)$$

При прямом поперечном изгибе в различных точках поперечного сечения *нормальные и касательные напряжения* определяют по формулам:

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} \cdot y ; \quad \tau_{yx} = \frac{Q_y \cdot |S_z^{omc}|}{I_z \cdot b} , \quad (3.29)$$

где  $I_z$  – момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси  $Z$ ;  $y$  – ордината точки (слоя) относительно нейтральной оси. в которой определяются напряжения ( $M_z$  и  $y$  подставляются с учётом знака);  $|S_z^{omc}|$  – статический момент отсечённой части (момент части площади поперечного сечения, распо-

ложенной выше или ниже слоя (точки), в котором определяются касательные напряжения, взятый относительно нейтральной оси  $Z$ );  $b$  – ширина слоя (сечения), в котором определяются касательные напряжения.

*Подбор размеров сечения* стержня при прямом поперечном изгибе производят по значению требуемого момента сопротивления, полученного из условия прочности по нормальным напряжениям:

$$W_z^{mp} \geq \frac{|M_z|_{\max}}{R}, \quad (3.30)$$

где  $R$  – расчётное сопротивление материала.

Для составных сечений момент сопротивления определяется для наиболее удалённых от нейтральной оси точек поперечного сечения стержня:

$$W_z = I_z / |y|_{\max} \quad (3.31)$$

Подобранное сечение должно удовлетворять нескольким условиям прочности:

$$|\sigma_x|_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_z} \leq R \quad \text{– по нормальным напряжениям;}$$

$$|\tau_{yx}|_{\max} = \frac{|Q_y|_{\max}}{I_z} \cdot \left| \frac{S_z^{omc}}{b} \right|_{\max} \leq R_s \quad \text{– по касательным напряжениям,}$$

где  $R_s$  – расчётное сопротивление на сдвиг;

$\sigma_{\text{эквIII}} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{yx}^2} \leq R$  – по гипотезе наибольших касательных напряжений;

$\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{yx}^2} \leq R$  – по энергетической гипотезе прочности. Причём каждое условие записывается для определённой точки поперечного сечения с соответствующими компонентами напряжённого состояния и найденными расчётными усилиями.

Проведение указанных проверок подразумевает, что в любой точке любого поперечного сечения стержня рассматриваемые условия прочности должны выполняться.

*Расчёт по предельной несущей способности* рассматривает состояние предельного равновесия стержня и предполагает образова-

ние пластического шарнира в наиболее «нагруженном» его сечении. Предельный момент в пластическом шарнире

$$M_{\text{lim}} = \sigma_s \cdot W_s, \quad (3.32)$$

Пластический момент сопротивления  $W_s = |S_{\text{верх}}| + |S_{\text{нижн}}|$

определяется как сумма статических моментов верхней и нижней частей поперечного сечения относительно оси, параллельной нейтральной, и делящей площадь поперечного сечения на две равновеликие части ( $A_{\text{верх}} = A_{\text{нижн}}$ ).

Расчётный момент, который может воспринять материал сечения, уменьшается относительно предельного при помощи коэффициента запаса  $k$ :

$$M_z = M_{\text{lim}} / k.$$

Тогда требуемый пластический момент сопротивления

$$W_s^{mp} \geq \frac{M_z \cdot k}{\sigma_s} \text{ позволяет определить размеры сечения.}$$

*Определение перемещений* поперечных сечений стержня при прямом поперечном изгибе (прогибов и углов поворота) проводят при помощи метода начальных параметров. Для этого используют универсальные выражения прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил, начальные параметры которых определяют при помощи статических и кинематических граничных условий.

Для прогибов

$$EI_z v = EI_z v_0 + EI_z \theta_0 x + \frac{M_0 x^2}{2!} + \frac{Q_0 x^3}{3!} + \sum_1^n M_i \frac{(x - a_i)^2}{2!} + \sum_1^n F_i \frac{(x - a_i)^3}{3!} + \sum_1^n m_i \frac{(x - a_i)^3}{3!} + \sum_1^n q_i \frac{(x - a_i)^4}{4!}, \quad (3.33)$$

для углов поворота

$$EI_z v' = EI_z \theta = EI_z \theta_0 + \frac{M_0 x}{1!} + \frac{Q_0 x^2}{2!} + \sum_1^n M_i \frac{(x - a_i)}{1!} + \sum_1^n F_i \frac{(x - a_i)^2}{2!} + \sum_1^n m_i \frac{(x - a_i)^2}{2!} + \sum_1^n q_i \frac{(x - a_i)^3}{3!}, \quad (3.34)$$

для изгибающих моментов

$$EI_z v'' = M_0 + Q_0 x + \sum_1^n M_i (x - a_i)^0 + \sum_1^n F_i (x - a_i) + \sum_1^n m_i (x - a_i) + \sum_1^n q_i \frac{(x - a_i)^2}{2}, \quad (3.35)$$

где  $\theta_0, \nu_0, M_0, Q_0$  – начальные параметры.

Для каждого грузового участка балки в универсальных уравнениях исключаются все члены, содержащие в скобках отрицательные значения.

Метод начальных параметров также применим к решению *статически неопределимых* задач, когда к уравнениям, связанным с набором имеющихся граничных условий добавляют необходимые уравнения равновесия.

### 3.5.2. Задача 4.1.

Для балок, расчетные схемы которых показаны на рис. 3.19 и приведены данные нагрузок и размеров в табл.4.1, требуется:

1. Определить реакции опор. Построить эпюры поперечных сил  $Q_y$  и изгибающих моментов  $M_z$ . Определить положение опасных сечений.
2. Из условия прочности по нормальным напряжениям определить размеры поперечного сечения балки в двух вариантах: "а" и "б" (рис. 3.18). Принять  $R=200 \text{ МПа}$ .

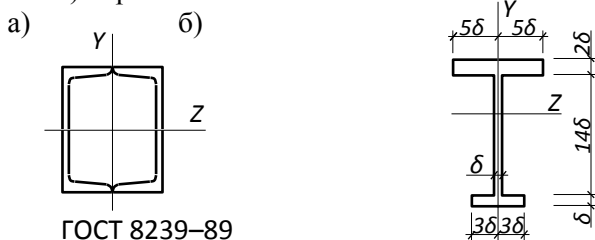


Рис. 3.18

3. Выполнить проверку прочности по касательным напряжениям. Принять  $R_s = 120 \text{ МПа}$ .
4. Для варианта "б" поперечного сечения сделать проверку прочности материала в точке, в которой имеет место неблагоприятное сочетание нормальных  $\sigma_x$  и касательных  $\tau_{yx}$  напряжений. Применить гипотезы прочности – наибольших касательных напряжений и энергетическую.

5. Для варианта "б" поперечного сечения определить его размеры из расчета по предельной несущей способности. Принять  $\sigma_s = 240 \text{ МПа}$ ;  $k = 1, 2$ .
6. Для заданной балки записать уравнения прогибов и углов поворота по методу начальных параметров. Определить начальные параметры (сечение вариант «а»).
7. Вычислить значение прогиба на расстоянии  $3a$  ( $2a$ ), и угла поворота на расстоянии  $5a$  от начала координат.
8. Составить перечень исходных данных для расчета на ЭВМ. Выполнить расчет на ЭВМ. Результаты сравнить с данными, полученными вручную в пункте 7.
9. По результатам расчета на ЭВМ построить эпюры углов поворота  $\theta$  и прогибов  $\nu$  сечений балки.
10. Проверить выполнение условия жесткости балки, приняв 
$$[\nu] = \frac{1}{400} l$$
 , где  $l$  – пролет балки (расстояние между опорами, или длина консольной части).

Таблица 4.1

| Вид исходных данных | Варианты исходных данных по задаче 4.1 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---------------------|----------------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
|                     | 0                                      | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
| $q$ (кН/м)          | 20                                     | 10 | 20 | 10 | 20 | 30 | 40 | 30 | 40 | 30 |
| $F$ (кН)            | 30                                     | 50 | 40 | 30 | 40 | 60 | 50 | 80 | 70 | 90 |
| $M$ (кН·м)          | 40                                     | 20 | 50 | 50 | 50 | 40 | 60 | 50 | 30 | 80 |
| $a$ (м)             | 2                                      | 2  | 2  | 2  | 2  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |

*Примечание для студентов ВиЗО:*

1. Выполнение пп.8, 9 не обязательно.
2. Для п.10 значение прогиба взять из пп.7, 6.

# Расчётные схемы балок

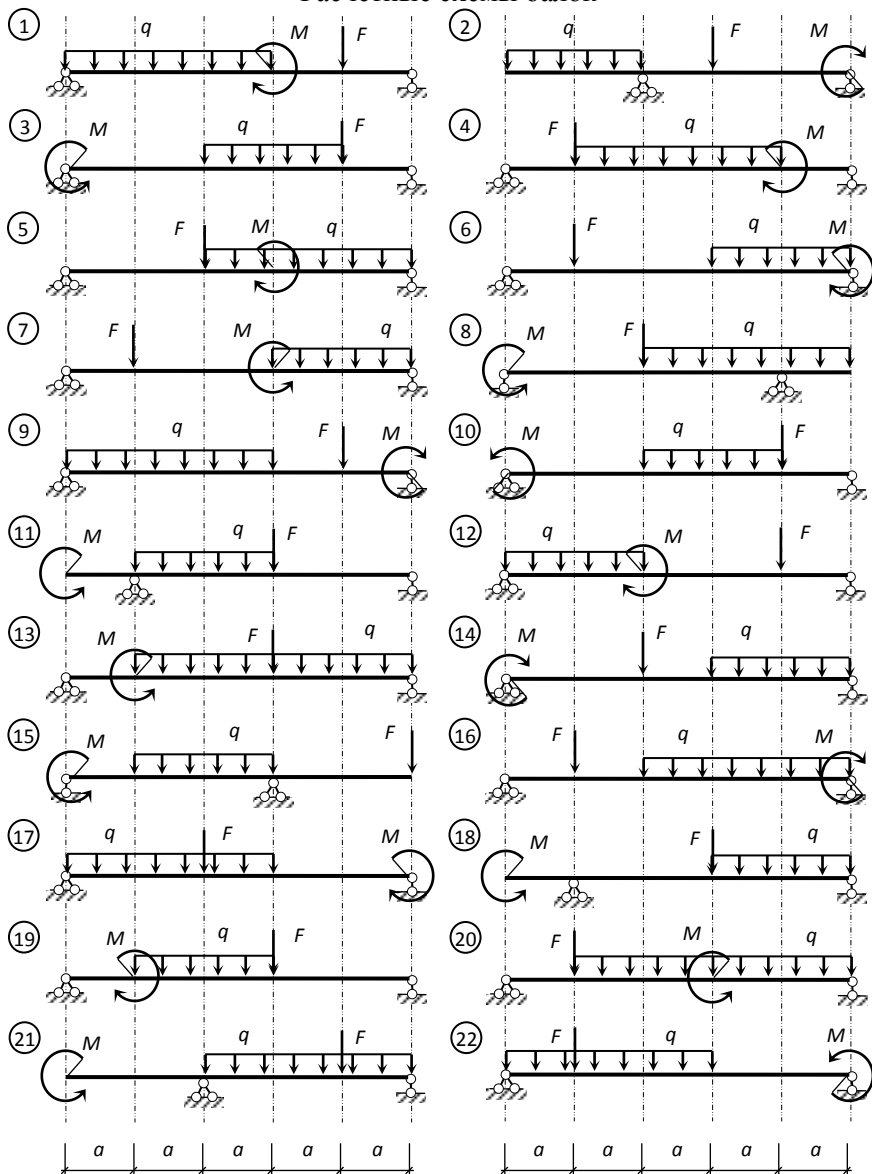
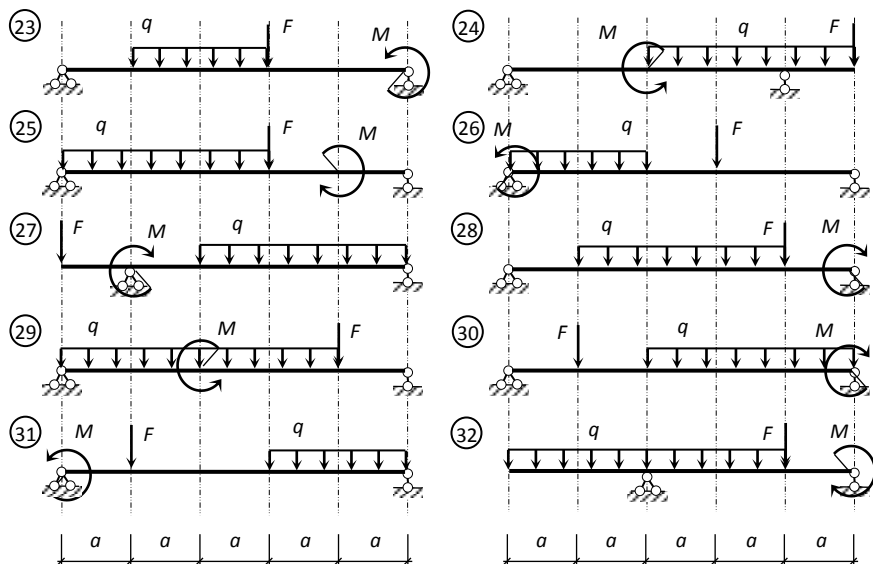


Рис. 3.19



Продолжение рис. 3.19

### 3.6. Индивидуальное задание 5 (контрольная работа 5). Сложное сопротивление стержней.

#### 3.6.1. Краткие сведения из теории.

Сопротивление стержня называется сложным, если оно может быть представлено как сумма нескольких простых видов деформации стержня.

В реальных конструкциях при деформировании стержней присутствуют все виды простых деформаций (растяжение, сжатие, изгиб, кручение, сдвиг). Однако в ряде случаев, пренебрегая влиянием некоторых видов простых деформаций (в силу их малости) мы можем упростить истинную картину сложного сопротивления без существенного ущерба надежности сооружения. К таким упрощенным видам сложного сопротивления относятся: косой изгиб; изгиб с кручением; внецентренное растяжение - сжатие жестких стержней. Если пренебрегать влиянием части простых видов деформации нельзя, то мы имеем общий случай сложного сопротивления стержня.

В той постановке, которая принята в данном учебном пособии при рассмотрении сложного сопротивления стержней, в силу

малости деформаций, считается применимым принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции).

Косой изгиб – сопротивление прямого стержня действию поперечных нагрузок, проходящих через центры изгиба сечений (то есть не вызывающих закручивания стержня), но не располагающихся только в одной главной плоскости инерции стержня (рис. 3.20). Будем полагать, что центры тяжести и центры изгиба сечений совпадают (сечения имеют две и более осей симметрии, либо разницей положения центров тяжести и изгиба можно пренебречь).

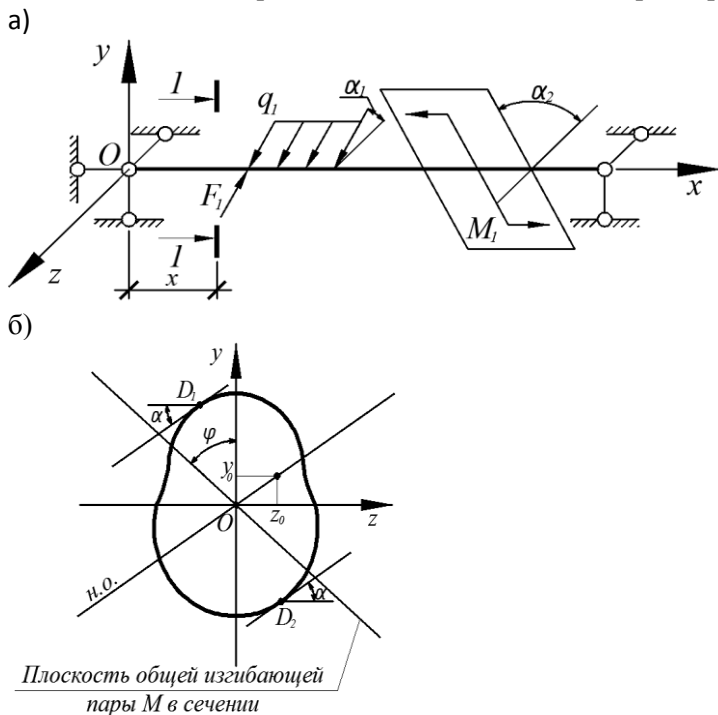


Рис. 3.20

Раскладывая нагрузки в главные плоскости инерции  $Y O X$ ,  $Z O X$ , можно рассматривать косой изгиб как сумму двух прямых изгибов стержня.

Нормальные напряжения в поперечных сечениях стержня равны:

$$\sigma(y, z) = \frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{M_y \cdot z}{I_y}, \quad (3.36)$$

где  $M_z, M_y$  – изгибающие моменты в главных плоскостях  $YOX, ZOY$ . Учитывая, что  $M_z = M \cos \varphi, M_y = M \sin \varphi$ , получим уравнение нейтральной оси (н.о.)  $\sigma(y_0, z_0) = 0$  в виде

$$\frac{y_0 \cos \varphi}{I_z} + \frac{z_0 \sin \varphi}{I_y} = 0.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_0}{z_0} = -\operatorname{tg} \varphi \frac{I_z}{I_y}. \quad (3.37)$$

Экстремальные нормальные напряжения в сечении возникают в точках  $D_1(y^{D_1}, z^{D_1}), D_2(y^{D_2}, z^{D_2})$ . Условия прочности по нормальным напряжениям при косом изгибе стержня имеют вид:

$$\text{а) } R_t = R_c = R, \max\left(\left|\sigma(y^{D_1}, z^{D_1})\right|, \left|\sigma(y^{D_2}, z^{D_2})\right|\right) \leq R; \quad (3.38)$$

$$\text{б) } R_t \neq R_c, \begin{cases} \sigma_{\max}^{\text{раст}} = \max\left(\left|\sigma(y^{D_1}, z^{D_1})\right|, \left|\sigma(y^{D_2}, z^{D_2})\right|\right) \leq R_t; \\ \left|\sigma_{\max}^{\text{сж}}\right| = \left|\min\left(\sigma(y^{D_1}, z^{D_1}), \sigma(y^{D_2}, z^{D_2})\right)\right| \leq R_c. \end{cases} \quad (3.39)$$

Условия (3.38), (3.39) используются для решения проектных задач при расчете стержня на прочность.

Изгиб с кручением (стержни круглого и кольцевого сечений).

Для стержней круглого и кольцевого сечений любая центральная ось сечения является главной центральной и плоскость общей изгибающей пары в сечении с моментом

$$M = M^b = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$$

также является главной центральной. Экстремальные нормальные напряжения возникают на контуре сечения и равны

$$\sigma_{\max}^{\pm} = \pm \frac{M^b}{W}, \quad (3.40)$$

где  $W = W^{\text{круг}} = \frac{\pi r^3}{4}$  – осевой момент сопротивления круглого сечения;

$W = W^{\text{кольц.}} = \frac{\pi r_{\text{ext}}^3}{4} (1 - \alpha^4)$  – осевой момент сопротивления

кольцевого сечения;  $r$  – радиус круглого сечения;  $r_{\text{ext}}, r_{\text{int}}$  – внешний и внутренний радиусы кольцевого сечения;  $\alpha = r_{\text{int}} / r_{\text{ext}}$ .

Пренебрегая касательными напряжениями от изгиба стержня, получим следующую величину максимальных касательных напряжений в точках внешнего контура сечения

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p}, \quad (3.41)$$

где  $W_p = W_p^{\text{крuc}} = \frac{\pi r^3}{2} = 2W^{\text{крuc}}$  – полярный момент сопротивления круглого сечения. Аналогично,  $W_p^{\text{кольц.}} = 2W^{\text{кольц.}}$ .

Условия прочности по третьей теории прочности в опасных точках контура записывается в виде:

$$\frac{1}{W} \sqrt{M_b^2 + M_t^2} \leq R. \quad (3.42)$$

Общий случай сложного сопротивления (стержни круглого и кольцевого сечений).

В общем случае сложного сопротивления стержней круглого и кольцевого сечений максимальные по абсолютной величине нормальные напряжения на контуре равны

$$|\sigma|_{\max} = \frac{M^b}{W} + \frac{|N|}{A}, \quad (3.43)$$

где  $N$  – продольная сила в сечении;  $A$  – площадь сечения. Условие прочности по 3-ей теории прочности имеет вид:

$$\sqrt{\left(\frac{M^b}{W} + \frac{|N|}{A}\right)^2 + \left(\frac{M_t}{W}\right)^2} \leq R, \quad (3.44)$$

где  $W$  – осевой момент сопротивления стержня (выражения представлены ранее);  $A = A^{\text{крuc}} = \pi r^2$ ;  $A = A^{\text{кольц.}} = \pi r_{\text{ext}}^2 (1 - \alpha^2)$ . При решении задачи подбора сечения в данном случае удобно использовать метод последовательных приближений.

Внецентренное растяжение - сжатие жестких стержней.

Данная форма сложного сопротивления стержня реализуется при нагружении прямого стержня, имеющего большую изгибную жесткость, силами параллельными продольной оси стержня, но не проходящими через центр тяжести сечения (рис. 3.21).

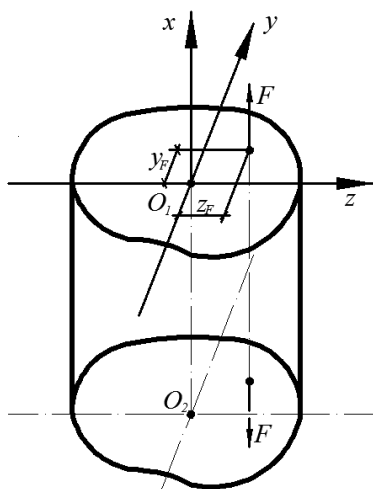


Рис. 3.21

Пусть стержень внецентренно нагружен силой  $F$ ;  $y_F, z_F$  – координаты точек приложения силы  $F$ . В том случае, если не учитываются (в силу малости) деформации изгиба, данную форму сложного сопротивления можно представить как линейную сумму осевого растяжения (сжатия) с продольной силой  $N = F$  и чистых косых изгибов стержня в плоскостях  $ХОУ$ ,  $ХОZ$  при действии изгибающих моментов  $M_z = F \cdot y_F$ ,  $M_y = F \cdot z_F$ .

Нормальные напряжения в точках поперечного сечения определяются согласно соотношению

$$\sigma(y, z) = \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_F \cdot y}{i_z^2} + \frac{z_F \cdot z}{i_y^2} \right), \quad (3.45)$$

где  $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$ ,  $i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$  – радиусы инерции сечения.

Уравнение нейтральной оси (н.о.)  $\sigma(y_0, z_0) = 0$  имеет вид:

$$1 + \frac{y_F \cdot y}{i_z^2} + \frac{z_F \cdot z}{i_y^2} = 0. \text{ Таким образом, в данном случае н.о. – прямая,}$$

не проходящая через начало координат. Определяя отрезки, отсекаемые ею на осях  $y, z$  (рис. 3.22.), получим:

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_F}; \quad a_z = -\frac{i_y^2}{z_F}. \quad (3.46)$$

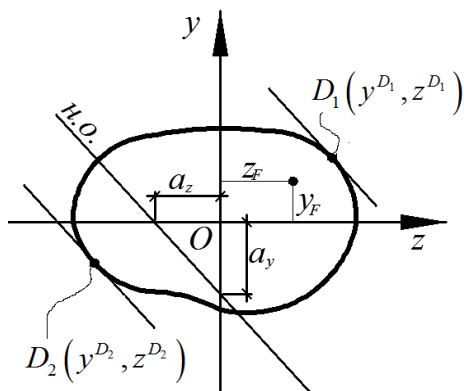


Рис. 3.22

Проводя касательные к сечению, параллельные н.о., найдем наиболее напряженные точки  $D_1, D_2$  в зонах растяжения и сжатия. Условия прочности стержня по нормальным напряжениям принимают следующий вид:

а)  $R_t = R_c = R$  – расчетное сопротивление материала стержня.

$$\max \left( \left| \sigma(y^{D_1}, z^{D_1}) \right|, \left| \sigma(y^{D_2}, z^{D_2}) \right| \right) \leq R; \quad (3.47)$$

$$\text{б) } R_t \neq R_c, \quad \sigma_{\max}^{\text{раст}} \leq R_t; \quad \left| \sigma_{\max}^{\text{сж}} \right| \leq R_c. \quad (3.48)$$

В том случае, если н.о. не пересекает сечения (напряжения в сечении имеют один знак), одно из условий (3.48) отсутствует.

Ядро сечения – область плоскости сечения, обладающая следующими свойствами: продольная нагрузка, приложенная в пределах этой области, вызывает во всем сечении напряжения одного знака. Координаты  $y_{FЯ}^j, z_{FЯ}^j$  точек границы ядра сечения определяются по формулам:

$$y_{FЯ}^j = -\frac{i_z^2}{a_y^j}, \quad z_{FЯ}^j = -\frac{i_y^2}{a_z^j}, \quad j=1, \dots, n, \quad (3.49)$$

где  $j$  – номер  $j$ -той точки касательной к сечению и соответствующей точки границы ядра сечения;  $a_z^j, a_y^j$  – отрезки, отсекаемые на координатной осях  $j$ -той касательной к сечению;  $n$  – число рассматриваемых касательных к сечению.

### 3.6.2. Задача 5.1.

Для пространственного ломаного стержня, варианты расчетных схем которого приведены на рис. 3.24 требуется:

1. построить эпюры внутренних усилий в поперечных сечениях стержня;
2. определить форму сопротивления стержня на участках;

3. подобрать сечение стержня на участках из условий прочности, приняв  $R = 210 \text{ МПа}$ ; при наличии кручения на участке принять сечение типа “Б” (рис. 3.23), в остальных случаях использовать сечение типа “А”, выбрав рациональную ориентацию главных центральных осей инерции сечения.

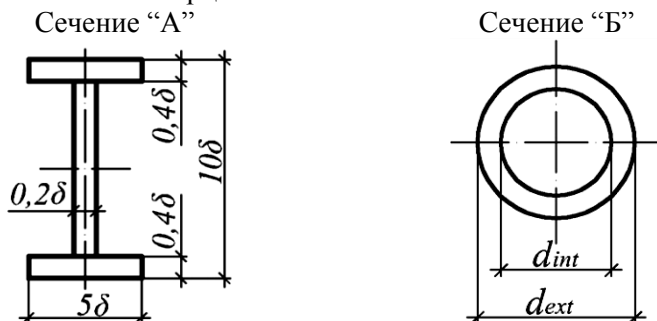
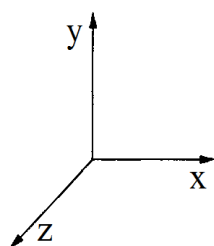


Рис. 3.23

Варианты исходных данных по задаче 5.1 приведены в таблице 5.1

Таблице 5.1

| Вид<br>исход-<br>ных<br>данных | Варианты исходных данных по задаче 5.1 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|--------------------------------|----------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|                                | 0                                      | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |
| $a$ (м)                        | 1,0                                    | 1,8  | 1,2  | 2,0  | 1,4  | 1,6  | 1,8  | 2,0  | 1,0  | 1,4  |
| $F_1$ (кН)                     | 30                                     | 25   | 28   | 22   | 24   | 32   | 40   | 26   | 30   | 36   |
| $F_2$ (кН)                     | 20                                     | 15   | 25   | 30   | 32   | 18   | 20   | 40   | 16   | 30   |
| $F_3$ (кН)                     | 800                                    | 900  | 1000 | 1200 | 900  | 1100 | 1000 | 800  | 1300 | 1400 |
| $q$ (кН/м)                     | 20                                     | 25   | 15   | 30   | 20   | 18   | 25   | 10   | 16   | 20   |
| $M_x, M_y,$<br>$M_z$<br>(кН*м) | 30                                     | 20   | 24   | 36   | 40   | 18   | 22   | 16   | 20   | 35   |
| $\frac{d_{int}}{d_{ext}}$      | 0,80                                   | 0,85 | 0,9  | 0,84 | 0,78 | 0,70 | 0,82 | 0,72 | 0,86 | 0,76 |



|           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|
| <p>1</p>  | <p>2</p>  | <p>3</p>  |
| <p>4</p>  | <p>5</p>  | <p>6</p>  |
| <p>7</p>  | <p>8</p>  | <p>9</p>  |
| <p>10</p> | <p>11</p> | <p>12</p> |

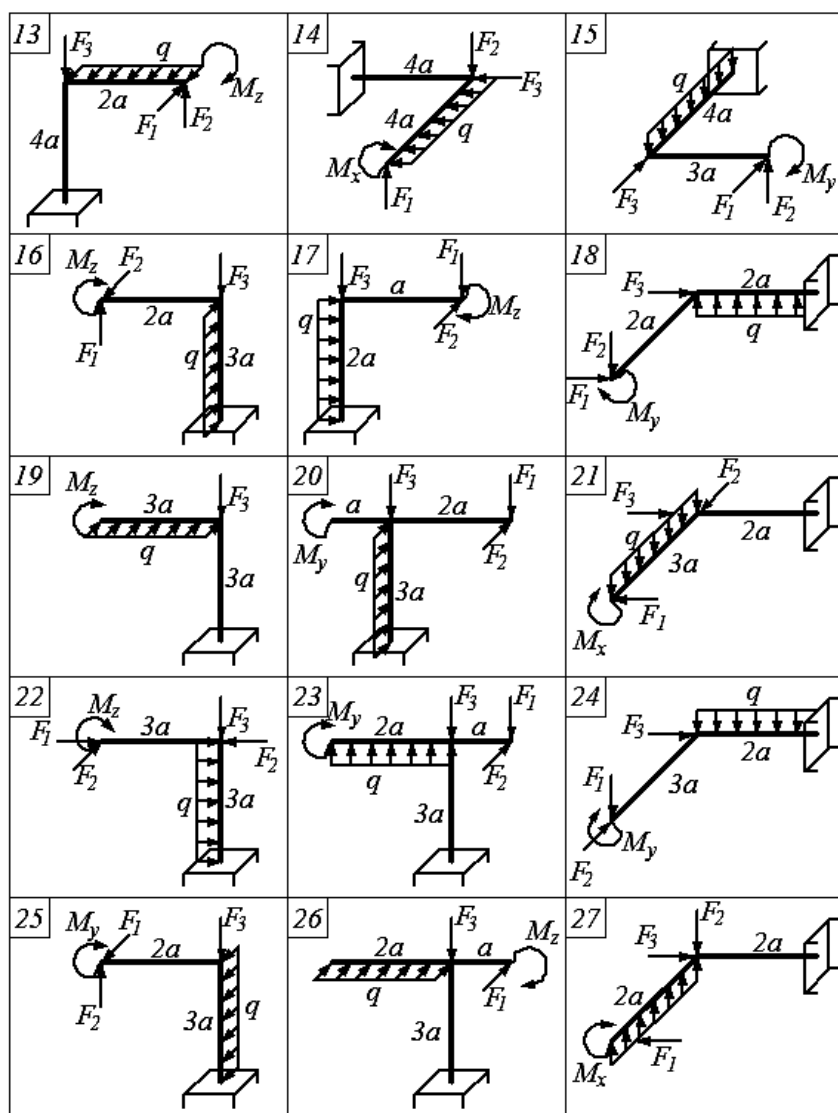


Рис. 3.24

Направления моментных нагрузок  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  на расчетных схемах заданы следующим образом: при взгляде с положительного конца соответствующей оси пара вращает по часовой стрелке.

### 3.6.3. Задача 5.2.

Короткий жесткий стержень, варианты поперечного сечения которого приведены на рис. 3.25, сжимается силой  $F$ , проходящей через заданную точку сечения и направленной параллельно продольной оси стержня.

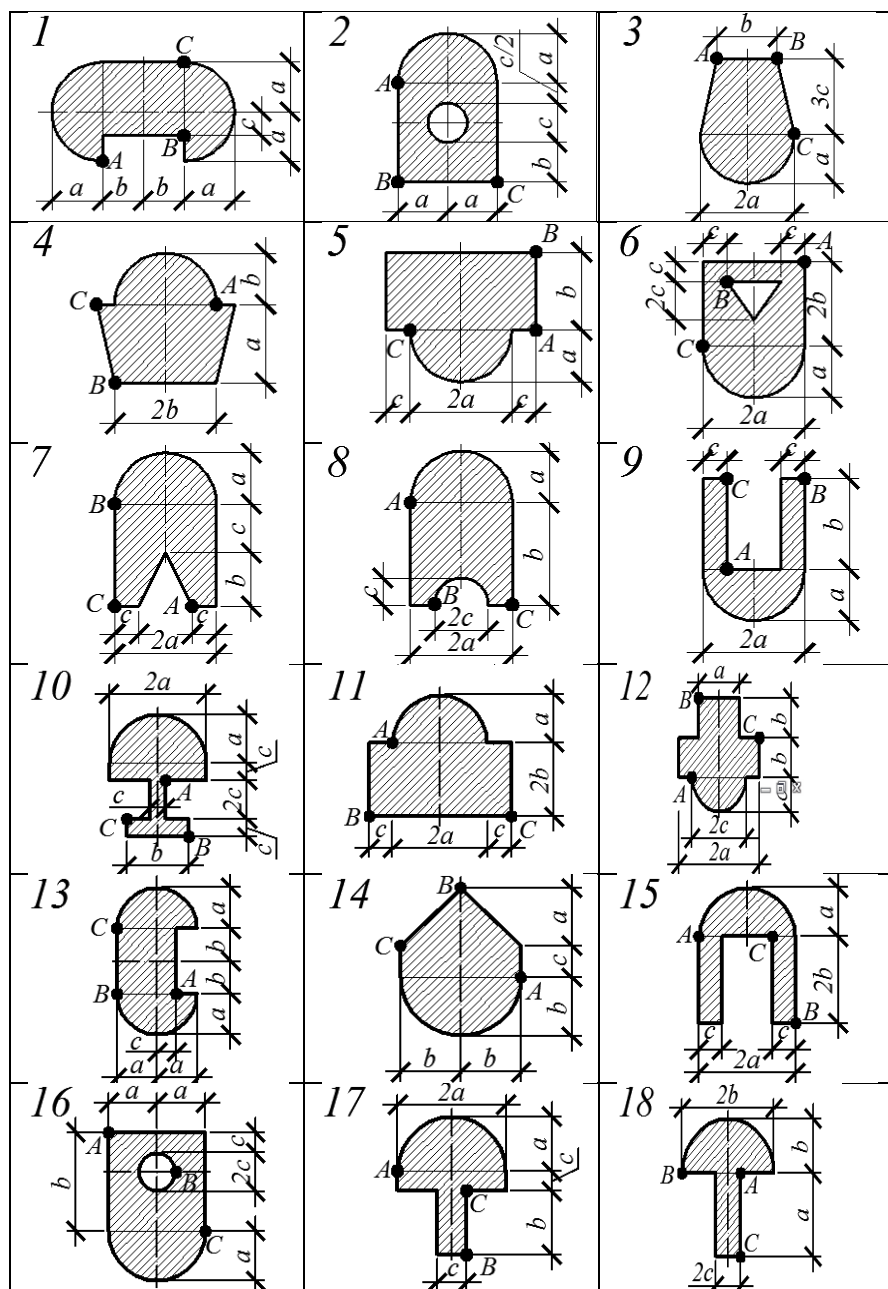
Требуется:

- 1) определить положение нейтральной оси заданного сечения, соответствующей заданному варианту нагружения;
- 2) из условия прочности определить величину допускаемой силы  $[F]$ ;
- 3) при силе, равной  $[F]$ , вычислить нормальные напряжения в точках сечения, наиболее удаленных от нейтральной оси в зонах растяжения и сжатия;
- 4) построить эпюру нормальных напряжений в поперечном сечении стержня;
- 5) построить ядро сечения.

Варианты исходных данных по задаче 5.2 приведены в таблице 5.2.

Таблице 5.2.

| Вид исходных данных       | Варианты исходных данных по задаче 5.2 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|---------------------------|----------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|                           | 0                                      | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |
| $a$ (см)                  | 30                                     | 26   | 20   | 48   | 48   | 45   | 36   | 64   | 56   | 55   |
| $b$ (см)                  | 24                                     | 22   | 16   | 34   | 30   | 30   | 24   | 40   | 42   | 35   |
| $c$ (см)                  | 12                                     | 14   | 10   | 18   | 16   | 20   | 16   | 20   | 12   | 10   |
| Точка приложения силы $F$ | А                                      | С    | В    | С    | А    | В    | В    | С    | А    | В    |
| $R_t$ (МПа)               | 2,2                                    | 4,2  | 5,4  | 3,5  | 2,8  | 3,6  | 2,4  | 4,3  | 2,6  | 3,8  |
| $R_c$ (МПа)               | 12,1                                   | 40,5 | 60,5 | 36,2 | 30,4 | 42,2 | 38,1 | 58,1 | 32,4 | 45,5 |



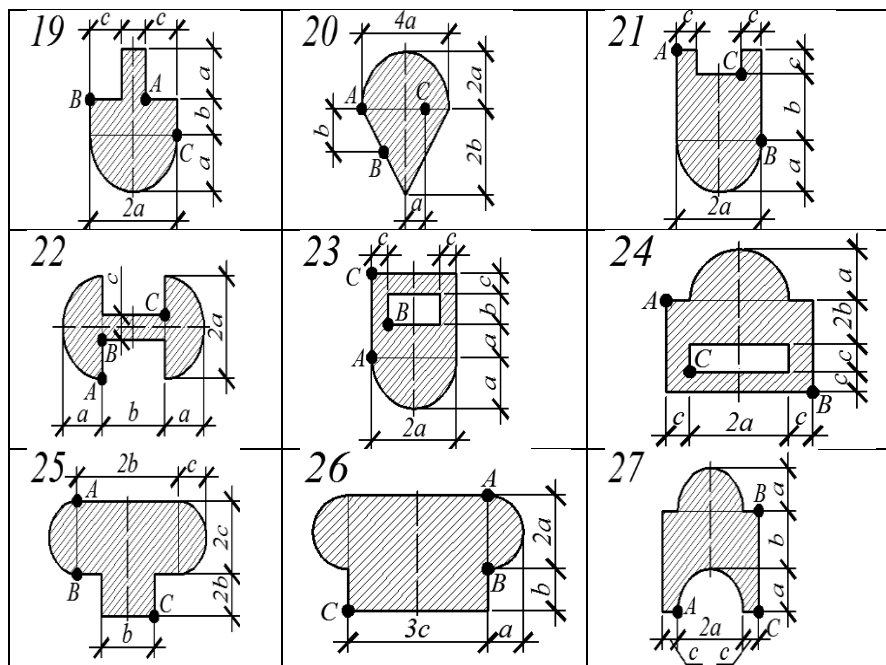


Рис. 3.25

**\* Примечания:** все криволинейные части контуров сечений являются дугой окружности; выбор варианта сечения при выполнении ИЗ (КР) проводится согласно методическим указаниям, приведенным в параграфе 3.1, аналогично выбору варианта расчетной схемы.

**3.7. Индивидуальное задание 6 (контрольная работа 6).**  
**Расчет центрально-сжатого стержня на устойчивость. Определение перемещений сечений плоских ломаных стержней и стержневых систем**

### 3.7.1. Краткие сведения из теории.

#### Расчет центрально-сжатого стержня на устойчивость

Центрально сжатый стержень силой  $F$  прямолинейный стержень находится в состоянии устойчивого равновесия, если после отклонения стержня от этого прямолинейного состояния и устранения причины, вызвавшей отклонение, стержень возвращается в исходное состояние. Наименьшее значение сжимающей силы  $F$ ,

при которой первоначальная прямолинейная форма равновесия становится неустойчивой, называется критической силой ( $F_{cr}$ ). При  $F = F_{cr}$  происходит раздвоение (бифуркация) форм равновесия.

Для обеспечения надежной работы конструкции сжатые стержни должны быть не только прочными и жесткими, но и находиться в состоянии устойчивого равновесия. Допускаемое значение сжимающей силы  $F_{adm}$  должно составлять лишь некоторую долю от критической силы  $F_{cr}$ :

$$F_{adm} = \frac{F_{cr}}{k_{st}}, \quad (3.50)$$

где  $k_{st} > 1$  - коэффициент запаса устойчивости.

В случае, когда потеря устойчивости наступает при упругой стадии работы материала стержня, т.е. при напряжениях меньше предела пропорциональности ( $\sigma_{pr}$ ), критическую сжимающую силу можно определять по формуле Эйлера

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l_0^2}, \quad (3.51)$$

где:  $E$  - модуль упругости первого рода;  $I_{\min}$  - минимальный момент инерции поперечного сечения стержня;  $l_0 = \mu \cdot l$ ,  $l$  - длина стержня;  $\mu$  - коэффициент приведенной длины, зависящий от способа закрепления концов стержня. Значения  $\mu$  для некоторых расчетных схем стержня приведены на рис. 3.26.

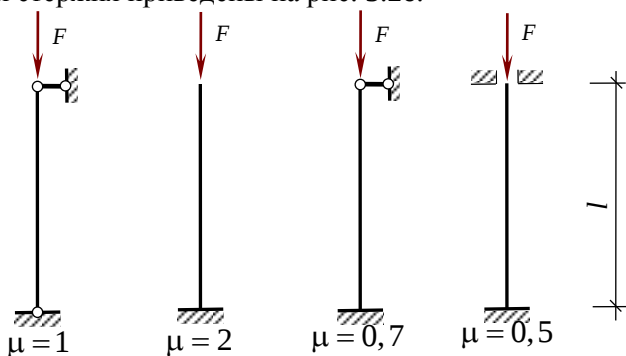


Рис. 3.26

Напряжение в поперечном сечении сжатого стержня, вызываемое критической силой  $F_{cr}$ , называется критическим:

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A_{br}}, \quad (3.52)$$

где  $A_{br}$  - площадь поперечного сечения брутто (без учета возможных ослаблений).

При критической силе, определяемой по формуле Эйлера (3.49), для критического напряжения получаем

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (3.53)$$

$$\text{где: } \lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} - \text{гибкость стержня}; \quad (3.54)$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A_{br}}} - \text{минимальный радиус инерции сечения.}$$

Формулу (3.53) для критического напряжения, как и формулу Эйлера, можно использовать лишь тогда, когда критические напряжения не превосходят предела пропорциональности материала. Из условия  $\sigma_{cr} = \sigma_{pr}$  находим предельную гибкость

$$\lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{pr}}}, \quad (3.55)$$

Так, например, для стержней из Ст3 ( $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{pr} \approx \sigma_e = 200 \text{ МПа}$ ) получаем  $\lambda_0 \approx 100$ .

Стержни, удовлетворяющие условию  $\lambda \geq \lambda_0$ , называются гибкими.

Для стержней, гибкость которых меньше некоторого значения  $\lambda_{\min}$  (жесткие стержни), критическое напряжение  $\sigma_{cr}$  может быть принято равным пределу текучести  $\sigma_s$  (пластичные материалы) или пределу прочности  $\sigma_u$  (хрупкие материалы). Для стержней средней гибкости  $\lambda_{\min} < \lambda \leq \lambda_0$  критическое напряжение может быть найдено приближенно по эмпирической формуле Ф. Ясинского

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda, \quad (3.56)$$

где  $a, b$  - коэффициенты, зависящие от материала стержня и имеющие размерность напряжения (приводятся в справочниках).

Зная критическое напряжение, можно найти и критическую силу

$$F_{cr} = \sigma_{cr} A_{br}, \quad (3.57)$$

Для практического расчета центрально сжатого стержня на устойчивость условие устойчивости удобно записать в виде

$$\sigma = \frac{N}{A_{br}} \leq \varphi R, \quad (3.58)$$

где  $N$  - продольная сила;  $R$  - расчетное сопротивление материала;  $\varphi$  коэффициент продольного изгиба (коэффициент уменьшения основного расчетного сопротивления при продольном изгибе). Коэффициент  $\varphi$  зависит от материала и гибкости стержня и приводится в таблицах. Пользуясь условием (3.58), можно решать следующие задачи:

- 1) делать проверочный расчет на устойчивость;
- 2) подбирать сечение стержня;
- 3) определять допускаемую нагрузку  $F_{adm}$ .

### **Определение перемещений сечений плоских ломаных стержней и стержневых систем**

Перемещения сечений плоских стержней и стержневых систем от заданной нагрузки (силовое воздействие) определяются по формуле Максвелла-Мора

$$\Delta_{iF} = \sum_{j=1}^m \int_0^{l_j} \frac{M_i \cdot M_F}{EI} ds + \sum_{j=1}^m \int_0^{l_j} k_{\tau} \frac{Q_i \cdot Q_F}{GA} ds + \sum_{j=1}^m \int_0^{l_j} \frac{N_i \cdot N_F}{EA} ds. \quad (3.59)$$

В этой формуле:  $m$  - число участков;  $l_j$  - длина  $j$ -го участка;  $M_F, Q_F, N_F$  - внутренние силовые факторы (внутренние усилия) в действительном состоянии стержня (от заданной нагрузки);  $M_i, Q_i, N_i$  - усилия во вспомогательном состоянии стержня от единичного воздействия;  $EI, GA, EA$  - жесткости сечений соответственно при изгибе, сдвиге, растяжении (сжатии);  $k_{\tau}$  - коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений в сечении при поперечном изгибе. Суммы берутся по всем участкам стержня.

Выбор вспомогательного единичного состояния зависит от того, какое перемещение требуется найти. Если определяется ли-

нейное перемещение какого-либо сечения по определенному направлению, то в этом сечении по заданному направлению прикладывается единичная безразмерная сосредоточенная сила ( $F_i = 1$ ). Если же требуется найти угол поворота какого-либо сечения, то в этом сечении прикладывается единичный сосредоточенный момент ( $M_i = 1$ ) также безразмерный.

При определении перемещений сечений плоских ломаных стержней и стержневых систем, преимущественно работающих на изгиб, влиянием поперечных и продольных сил пренебрегают и тогда формула (3.59) принимает вид

$$\Delta_{iF} = \sum_{j=1}^m \int_0^{l_j} \frac{M_i \cdot M_F}{EI} ds. \quad (3.60)$$

Будем рассматривать плоские ломаные стержни и стержневые системы, состоящие из прямолинейных элементов с постоянной жесткостью сечений при изгибе участков стержня. В этом случае получаем

$$\Delta_{iF} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{EI_j} \int_0^{l_j} M_i \cdot M_F dx. \quad (3.61)$$

Вычисление интегралов вида  $\int_0^{l_j} M_i \cdot M_F dx$  на участке длиной

$l_j$ , где в подынтегральное выражение входит произведение усилий  $M_i$  и  $M_F$ , являющихся ординатами эпюр изгибающих моментов, построенных для вспомогательного и действительного состояний, называют перемножением эпюр этих усилий.

Перемножение эпюр может быть выполнено по формуле Симпсона

$$\int_0^{l_j} M_i \cdot M_F dx = \frac{l_j}{6} (M_{bj,i} \cdot M_{bj,F} + 4M_{cj,i} \cdot M_{cj,F} + M_{ej,i} M_{ej,F}), \quad (3.62)$$

где  $M_{bj,i}, M_{ej,i}, M_{cj,i}$  - изгибающие моменты в единичном ( $i$ -ом) состоянии, действующие соответственно в начале, на конце и посередине  $j$ -го участка (в сечениях  $b_j, e_j, c_j$ );  $M_{bj,F}, M_{cj,F}, M_{ej,F}$  - изгибающие моменты в тех же сечениях в действительном (грузовом) состоянии  $F$ .

Отметим, что формула Симпсона даёт точное значение определенного интеграла, если подинтегральная функция – полином не выше третьей степени. В частности, формула Симпсона дает точный результат, если перемножается эпюра  $M_F$ , очерченная по квадратной параболе, с прямолинейной эпюрой  $M_i$ .

Произведение ординат перемножаемых эпюр в формуле (3.62) берется со знаком плюс, если перемножаемые ординаты имеют один и тот же знак, и минус – если разные знаки.

Перемножение эпюр  $M_i$  и  $M_F$  на участках с прямолинейной осью может быть выполнено и по правилу Верещагина в случае, когда одна из перемножаемых эпюр прямолинейна, а вторая может иметь любое очертание (прямолинейное, ломаное или криволинейное). Согласно этому правилу результат перемножения двух эпюр равен произведению площади одной из них на ординату другой (обязательно прямолинейной) эпюры, взятую под центром тяжести площади первой эпюры. В этом случае при  $EI_j = \text{const}$  получаем

$$\Delta_{iF} = \sum_{j=1}^m \int_0^{l_j} \frac{M_i \cdot M_F}{EI} dx = \sum_{j=1}^m \frac{\omega_j \cdot y_{cj}}{EI_j}, \quad (3.63)$$

где  $\omega_j$  - площадь одной из перемножаемых эпюр (прямолинейной, ломаной или криволинейной) на  $j$ -м участке;  $y_{cj}$  - ордината второй (обязательно прямолинейной) эпюры, взятая под центром тяжести первой эпюры. Если перемножаемые эпюры расположены по одну сторону от оси эпюры, то результат берется со знаком плюс, в противном случае – со знаком минус.

Положительный знак определяемого перемещения указывает на то, что это перемещение совпадает с принятым направлением силы  $F_i = 1$  и  $M_i = 1$ , а отрицательный знак – наоборот.

### 3.7.2. Задача 6.1.

Стойка, выполненная из материала Ст 3,  $R = 200 \text{ МПа}$ , подвергается центральному сжатию силой  $F$ . Варианты поперечного сечения стойки приведены на рис. 3.27. Остальные исходные данные приведены в таблице 6.1. Расчетные схемы стойки, соответствующие указанным значениям  $\mu$ , показаны на рис. 3.26.

Требуется:

1. С помощью таблицы коэффициентов продольного изгиба подобрать поперечное сечение стойки заданной формы.

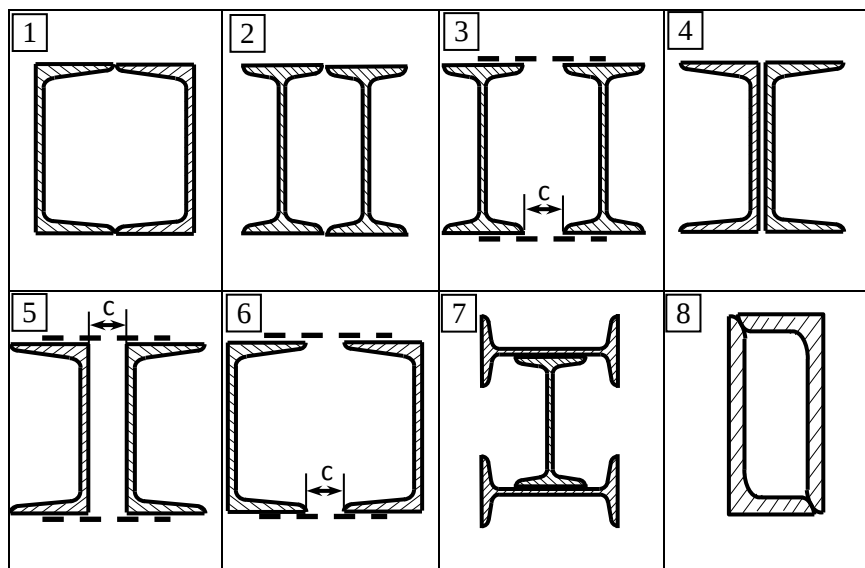
2. Подбранное сечение проверить на прочность при наличии ослабления  $A_{nt} = 0,85 \cdot A_{br}$ .

3. Определить критическую силу и коэффициент запаса устойчивости.

4. Для подбранного сечения построить график зависимости критической силы и критического напряжения от длины и гибкости стержня, изменяя гибкость от 0 до 200.

Таблица 6.1

| Вид исходных данных | Варианты исходных данных по задаче 6.1. |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|---------------------|-----------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|                     | 0                                       | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   |
| $l$ , м             | 6                                       | 5   | 4   | 6   | 5   | 4   | 3   | 4   | 5   | 3   |
| $F$ , кН            | 400                                     | 450 | 500 | 550 | 600 | 650 | 700 | 680 | 720 | 750 |
| $\mu$               | 0,5                                     | 0,7 | 1   | 2   | 0,5 | 0,7 | 1   | 2   | 0,5 | 0,7 |



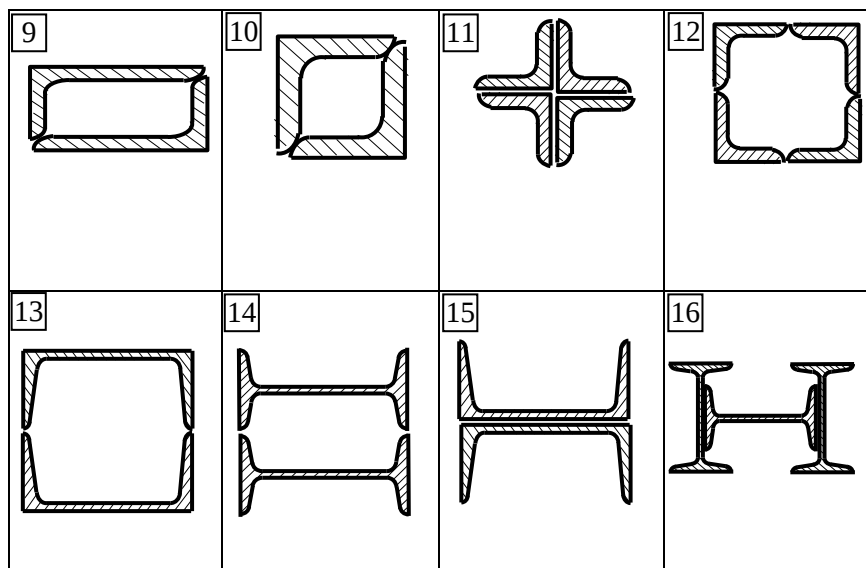


Рис. 3.27

**\*Примечание:** выбор варианта сечения при выполнении ИЗ (КР) проводится согласно методическим указаниям, приведенным в параграфе 3.1, аналогично выбору варианта расчетной схемы.

### 3.7.3. Задача 6.2.

Стойка прямоугольного сечения, выполненная из древесины (сосна), подвергается центральному сжатию силой  $F$ . Исходные данные по задаче 6.2 приведены в таблице 6.2. Расчетные схемы стойки, соответствующие указанным значениям  $\mu$ , показаны на рис. 3.26.

Требуется: из расчёта на устойчивость определить допустимое значение  $F_{adm}$  нагрузки.

### 3.7.4. Задача 6.3

Для данного статически определимого ломаного стержня, нагруженного заданной нагрузкой, требуется:

- 1) Построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил;
- 2) Определить вертикальное перемещение сечения 1-1 и угол поворота сечения 2-2.

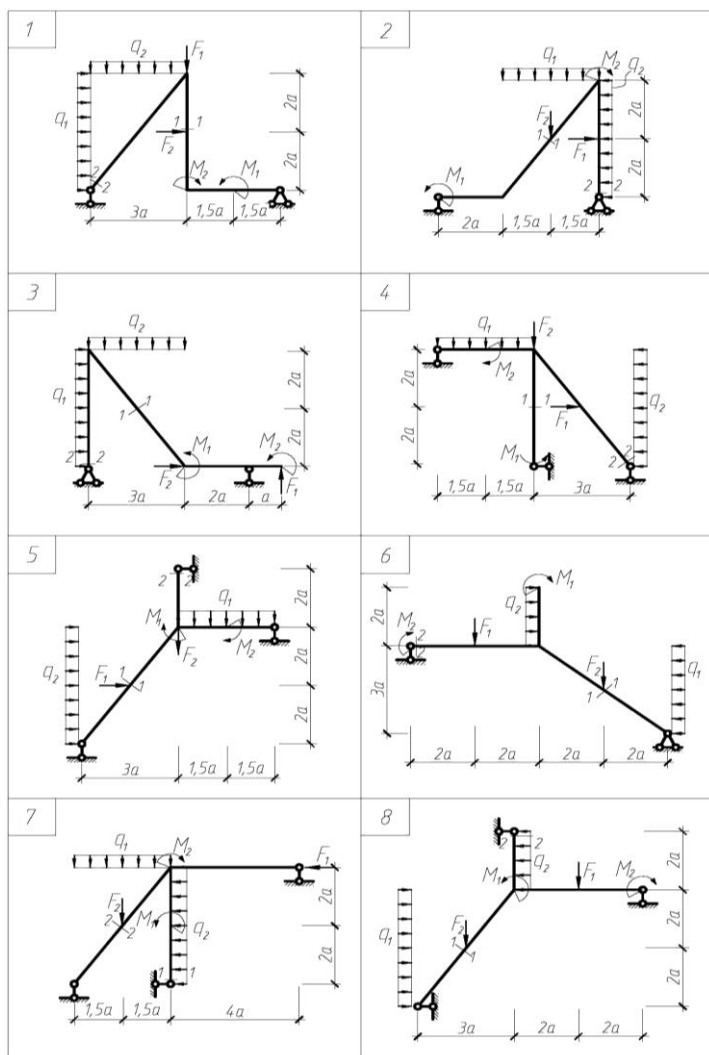
Расчетные схемы ломаного стержня приведены на рис. 3.28; числовые значения исходных данных в таблице 6.3.

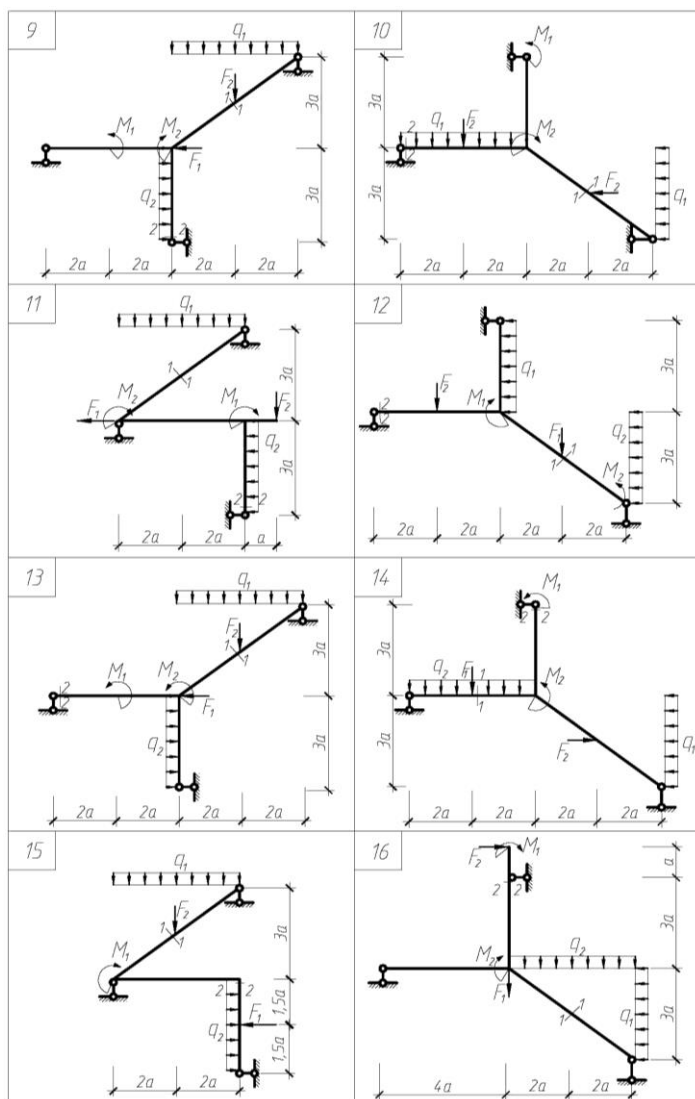
Таблица 6.2

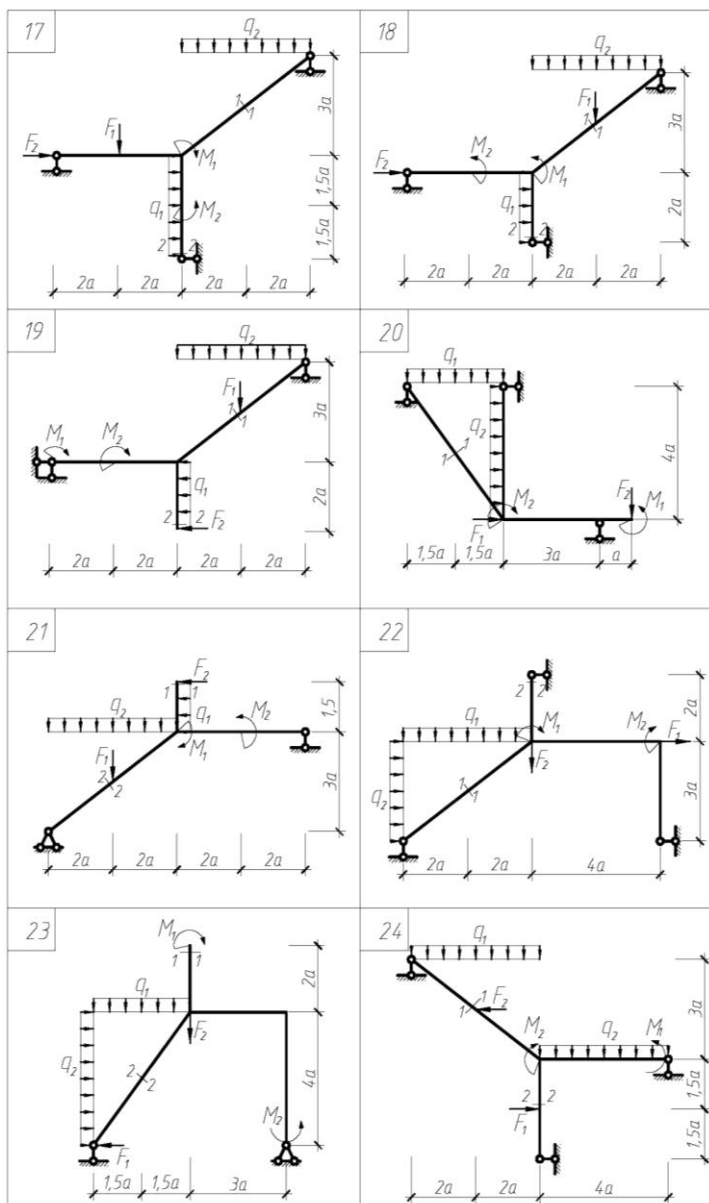
| Вид исходных данных | Варианты исходных данных по задаче 6.2. |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|---------------------|-----------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|                     | 0                                       | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   |
| $l, \text{ м}$      | 3                                       | 6   | 4   | 3   | 6   | 5   | 4   | 5   | 3   | 4   |
| $\mu$               | 0,5                                     | 0,7 | 1   | 2   | 0,5 | 0,7 | 1   | 2   | 0,5 | 0,7 |
| $k_{st}$            | 1,2                                     | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9 | 2   | 1,3 |
| $h / b$             | 1,5                                     | 2   | 2,5 | 3   | 3,5 | 4   | 1,5 | 2   | 2,5 | 2   |
| $b, \text{ см}$     | 10                                      | 20  | 30  | 5   | 10  | 20  | 20  | 20  | 5   | 10  |

Таблица 6.3

| Вид исходных данных | Варианты исходных данных по задаче 6.3 |      |    |     |     |     |     |     |     |    |
|---------------------|----------------------------------------|------|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|
|                     | 0                                      | 1    | 2  | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9  |
| $a, \text{ м}$      | 2                                      | 1.5  | 2  | 2.5 | 1.5 | 2   | 2.5 | 1.5 | 2   | 2  |
| $F_1, \text{ кН}$   | 0                                      | 20,0 | 0  | 15  | 0   | 10  | 0   | 16  | 0   | 0  |
| $F_2, \text{ кН}$   | 18                                     | 0    | 16 | 0   | 12  | 0   | 8   | 0   | 15  | 18 |
| $q_1, \text{ кН/м}$ | 0                                      | 8    | 0  | 6   | 0   | 4   | 0   | 8   | 0   | 0  |
| $q_2, \text{ кН/м}$ | 6                                      | 0    | 10 | 0   | 4   | 0   | 6   | 0   | 8   | 6  |
| $M_1, \text{ кН*м}$ | 0                                      | 12   | 0  | 10  | 0   | 16  | 0   | 10  | 0   | 0  |
| $M_2, \text{ кН*м}$ | 16                                     | 0    | 20 | 0   | 10  | 0   | 15  | 0   | 12  | 16 |
| $\frac{EI_2}{EI_1}$ | 4                                      | 2    | 3  | 4   | 1.5 | 1.5 | 3   | 2   | 1.5 | 4  |







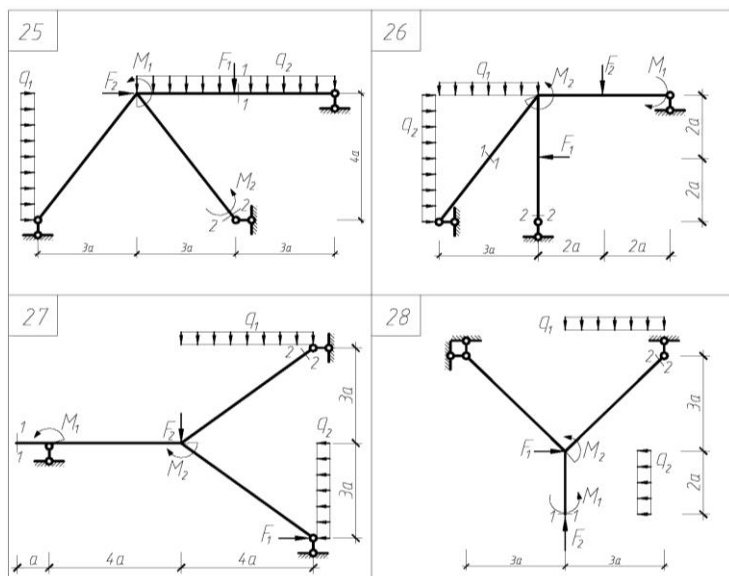


Рис. 3.28

**\*Примечания:**  $EI_1$  - жесткость сечений при изгибе горизонтальных и наклонных участков ломаного стержня;  $EI_2$  - жесткость сечений при изгибе вертикальных участков.

**\*Указание.** При вычерчивании расчетной схемы стержня следует оставлять только те нагрузки, значения которых не равны нулю.

### 3.7.5. Задача 6.4

Расчетные схемы статически определимых плоских стержневых систем представлены на рис. 3.29. Остальные исходные данные приведены в таблице 6.4.

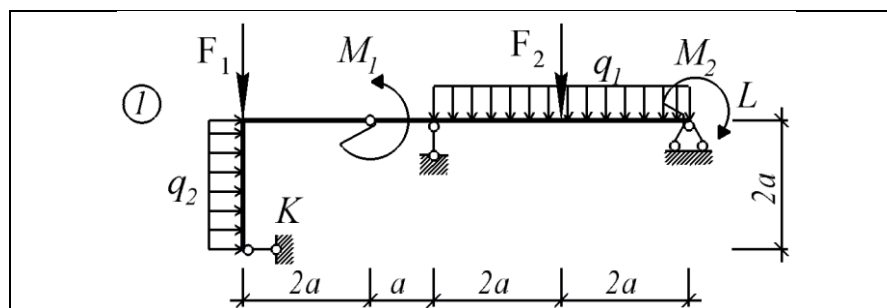
Требуется: \_

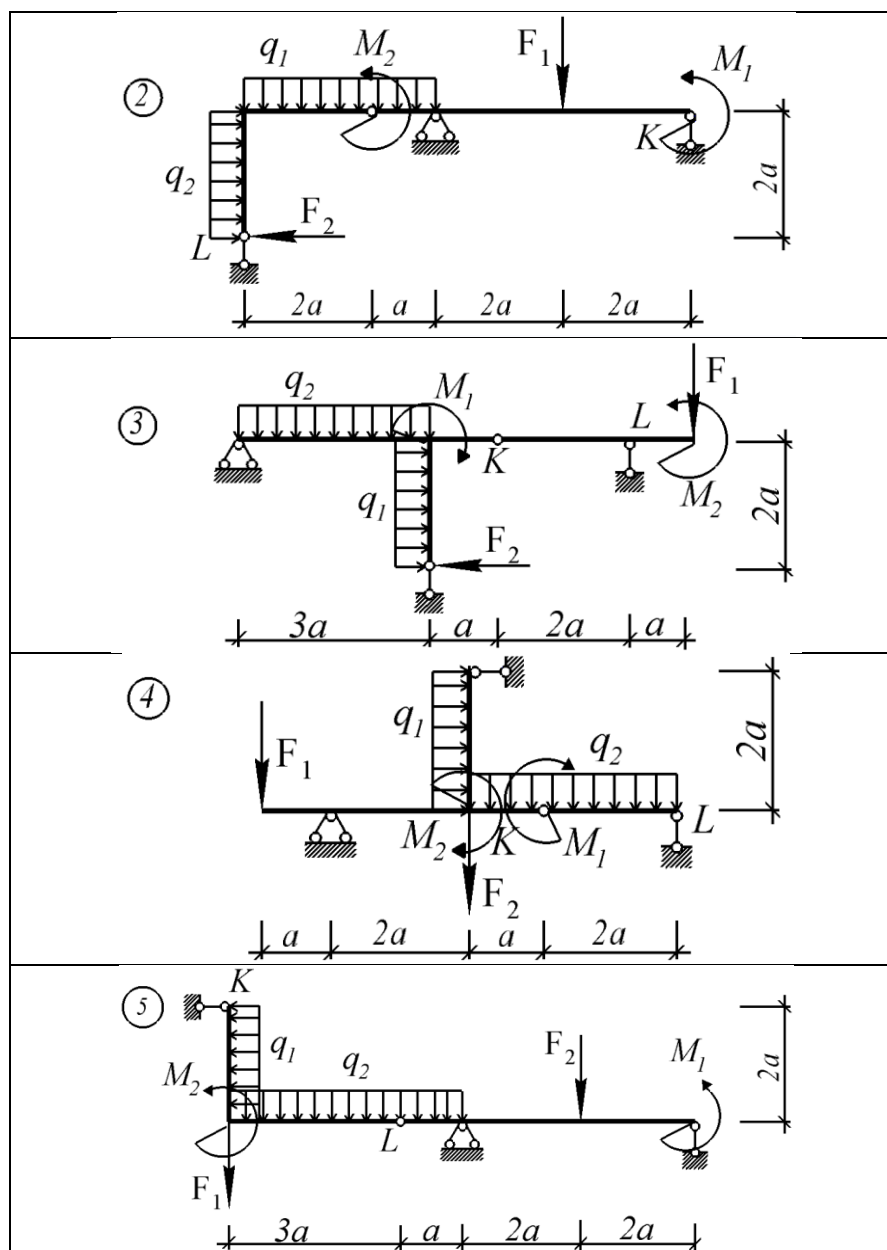
1. произвести кинематический анализ заданной стержневой системы;
2. построить рабочую (позтапную) схему стержневой системы, выделив главную и второстепенную части;
3. построить эпюры внутренних усилий в сечениях от заданной нагрузки;
4. выполнить проверку равновесия узлов и отсеченных частей системы;

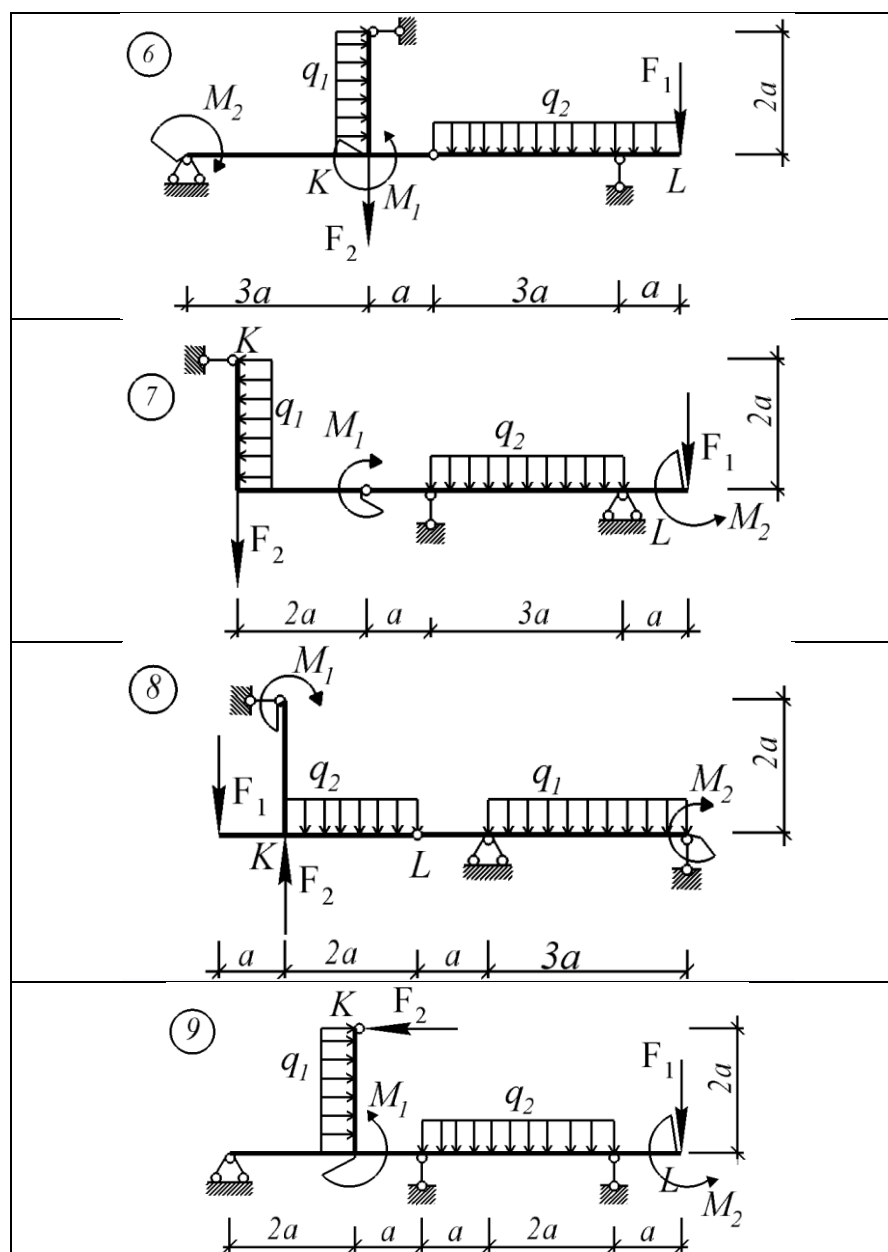
5. определить вертикальное перемещение сечения К, и угол поворота сечения L в заданной системе от заданной нагрузки.

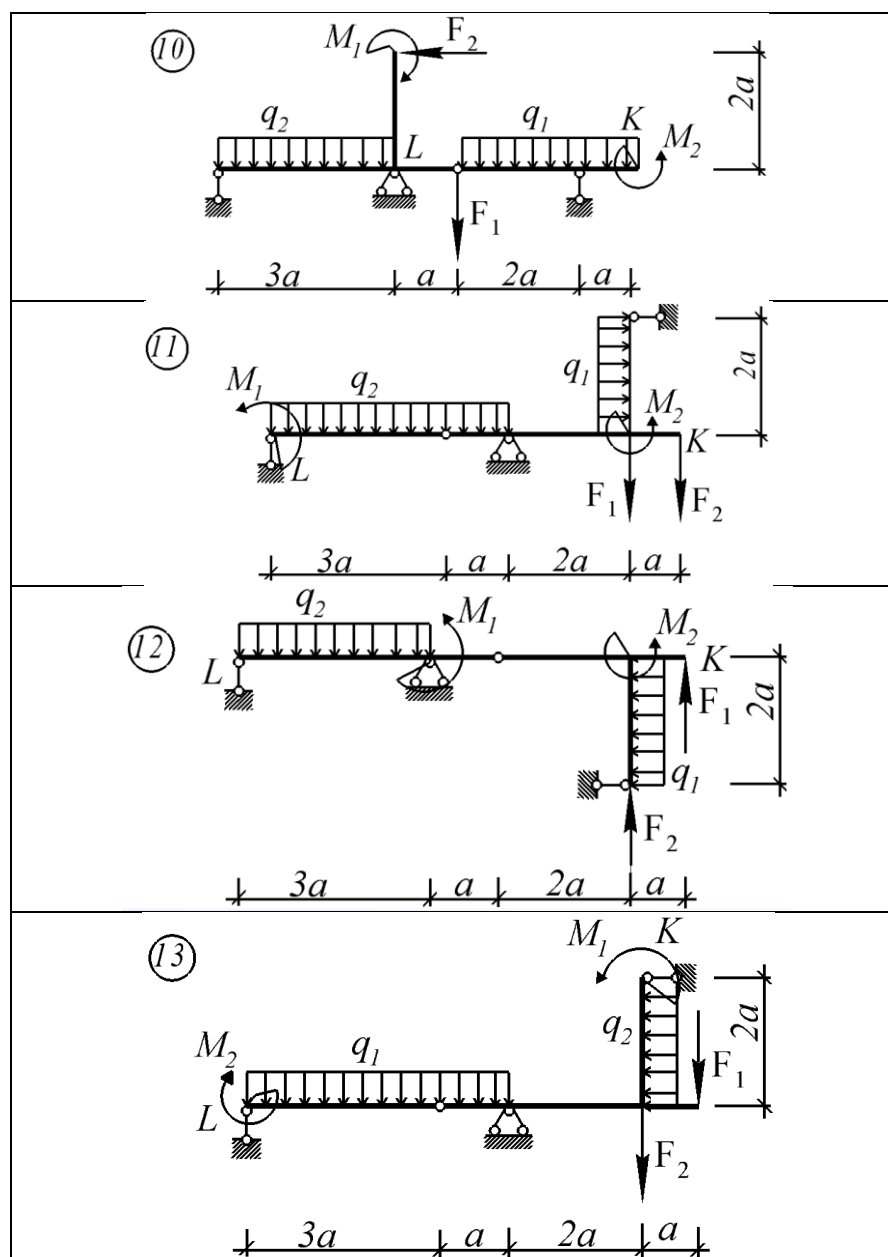
Таблица 6.4

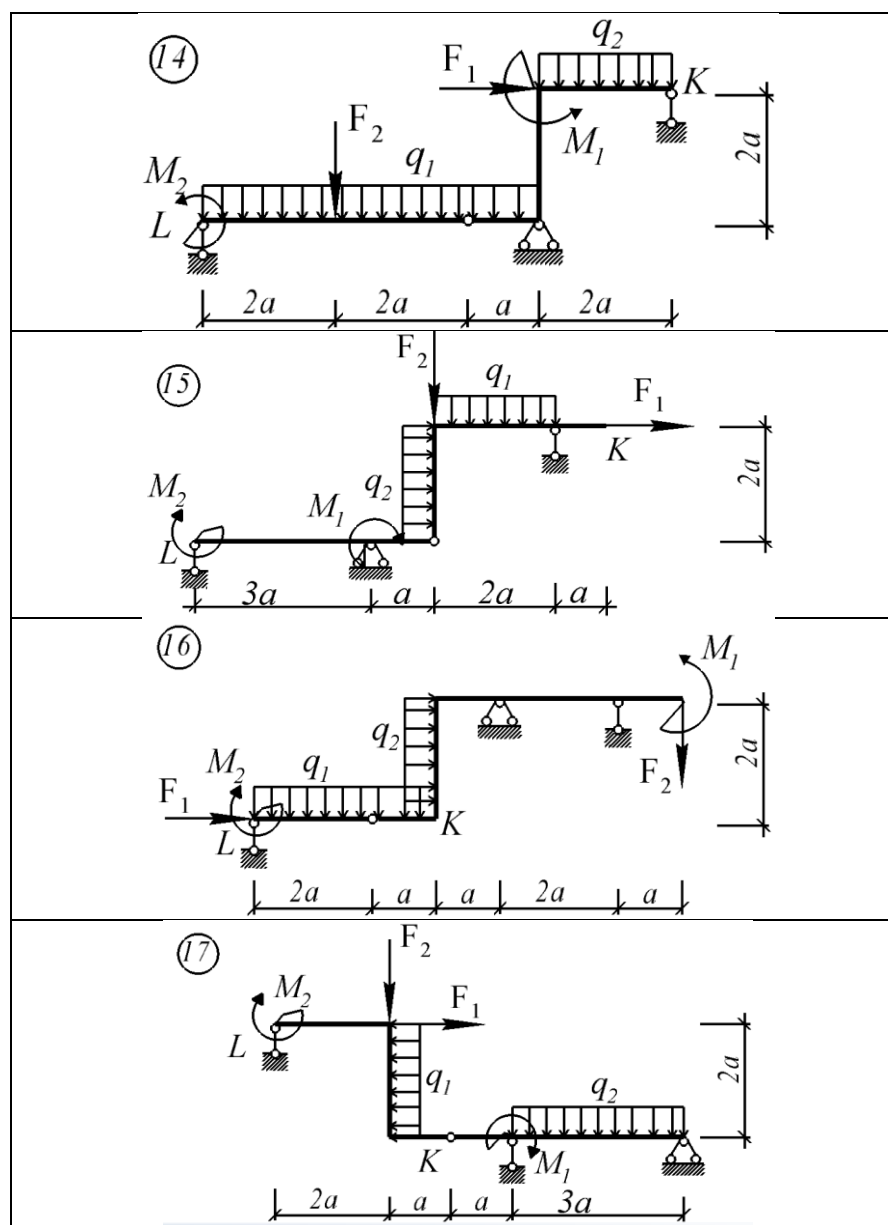
| Вид исходных данных | Варианты исходных данных по задаче 6.4 |    |     |    |     |    |     |    |     |    |
|---------------------|----------------------------------------|----|-----|----|-----|----|-----|----|-----|----|
|                     | 0                                      | 1  | 2   | 3  | 4   | 5  | 6   | 7  | 8   | 9  |
| $a, \text{ м}$      | 2.5                                    | 2  | 2.5 | 2  | 2.5 | 2  | 2.5 | 2  | 2.5 | 2  |
| $F_1, \text{ кН}$   | 0                                      | 6  | 0   | 15 | 0   | 8  | 0   | 10 | 0   | 20 |
| $F_2, \text{ кН}$   | 8                                      | 0  | 6   | 0  | 12  | 0  | 6   | 0  | 20  | 0  |
| $q_1, \text{ кН/м}$ | 0                                      | 10 | 0   | 12 | 0   | 16 | 0   | 20 | 0   | 12 |
| $q_2, \text{ кН/м}$ | 12                                     | 0  | 8   | 0  | 10  | 0  | 8   | 0  | 16  | 0  |
| $M_1, \text{ кН*м}$ | 0                                      | 12 | 0   | 12 | 0   | 18 | 0   | 12 | 0   | 16 |
| $M_2, \text{ кН*м}$ | 12                                     | 0  | 9   | 0  | 18  | 0  | 10  | 0  | 10  | 0  |
| $\frac{EI_2}{EI_1}$ | 2                                      | 3  | 4   | 2  | 3   | 4  | 2   | 3  | 4   | 2  |

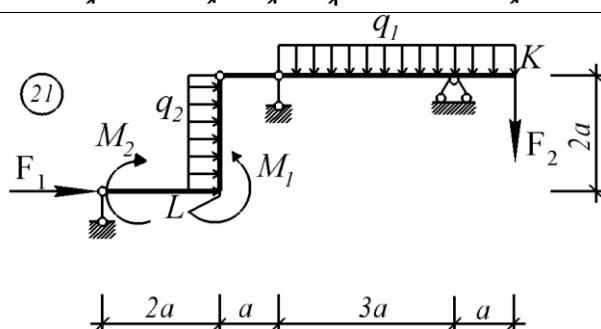
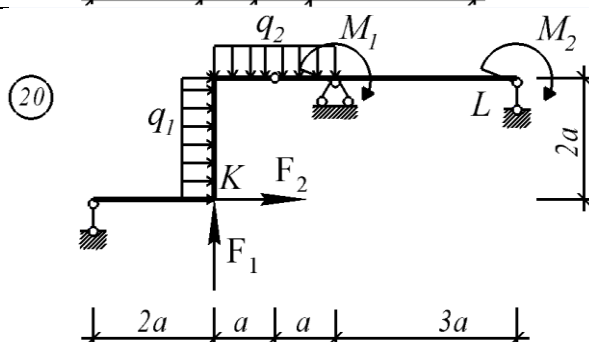
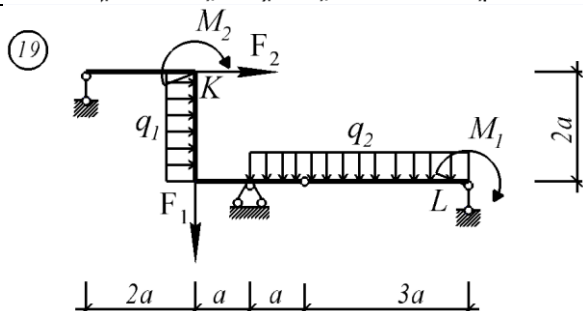
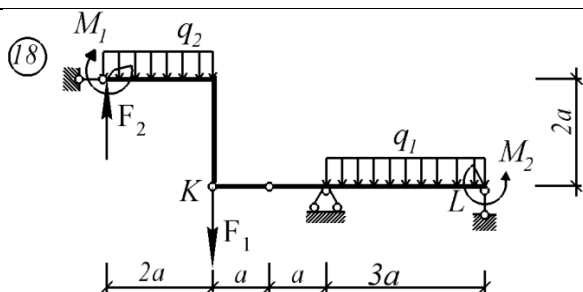


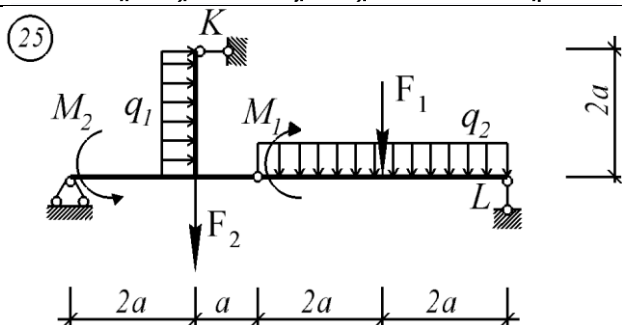
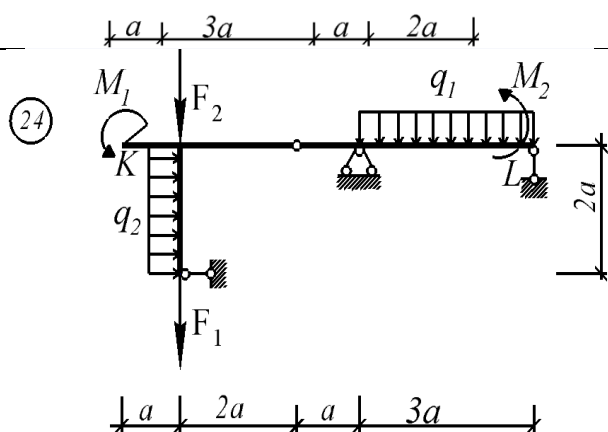
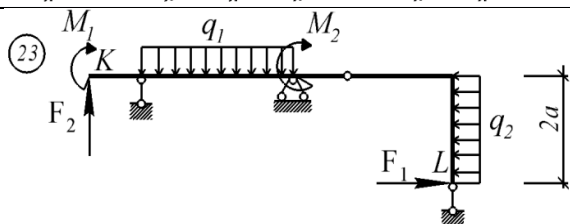
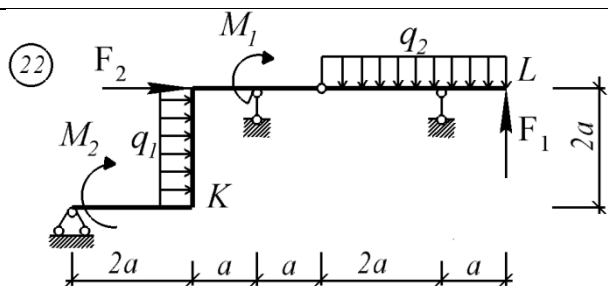












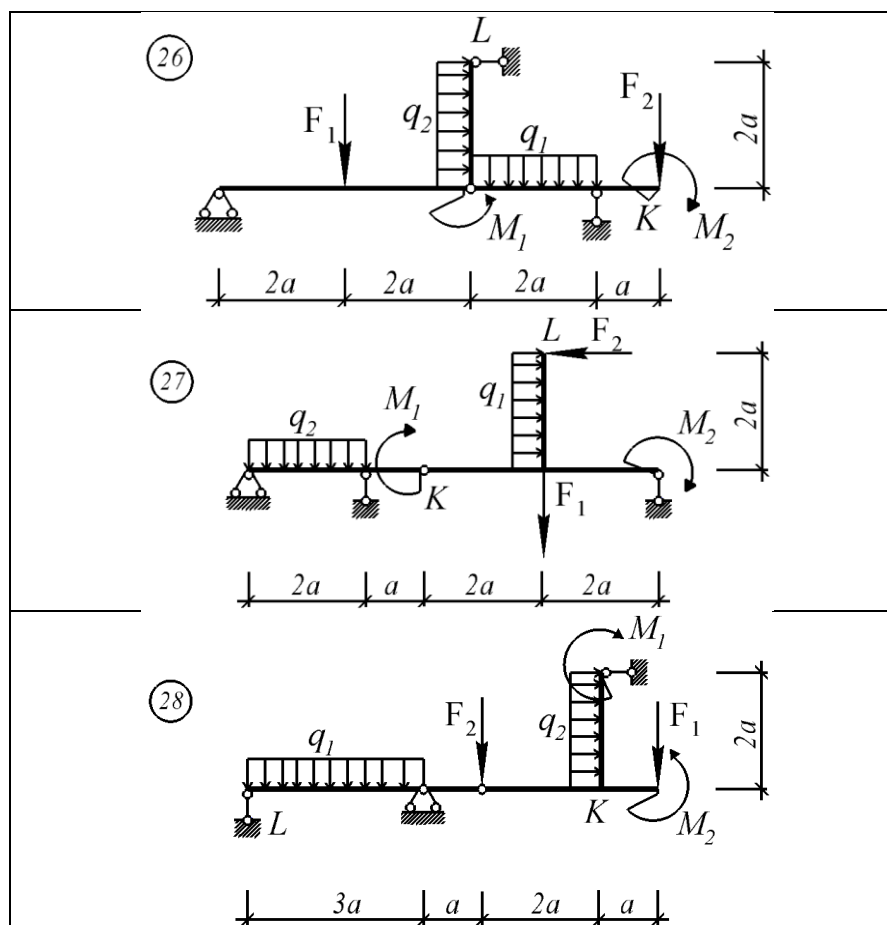


Рис. 3.29.

**\*Примечания:**

- при изображении заданной стержневой системы оставлять на ней только те нагрузки, значение которых отличны от нуля;
- жесткости поперечных сечений при изгибе горизонтальных элементов системы  $EI_1$ , а вертикальных  $EI_2$ .

## 4. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМАМ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ (КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ). КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ.

### 4.1. Осовое растяжение – сжатие стержней

#### 4. 1. 1. Задача 1. 1. Статически определимая система

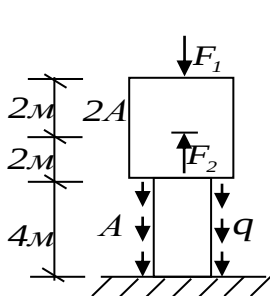


Рис. 4.1.

Дано: Стойка из бетона жёстко закреплена на нижнем конце и нагружена силами  $F_1$ ,  $F_2$  и  $q$ , действующими вдоль оси стержня.  $F_1 = 120 \text{ кН}$ ,  $F_2 = 150 \text{ кН}$ ,  $q = 40 \text{ кН/м}$ ,  $E = 0,27 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $R_t = 0,9 \text{ МПа}$ ,  $R_c = 12 \text{ МПа}$ .

Требуется:

1. Построить эпюру продольных сил  $N$ .
2. Определить требуемые площади поперечных сечений  $A$  из условий прочности и соблюдения при этом заданного соотношения площадей на различных участках.
3. Построить эпюру нормальных напряжений  $\sigma$ .
4. Построить эпюру перемещений сечений  $u$ .
5. Выполнить проверку жёсткости.  $[\Delta l] = (0,01 \div 0,02) l$ ,  $[u] = 0,001 l$ .

#### Решение

1. Построение эпюры продольных сил  $N$ .

Разобьём стержень на грузовые участки. Для построения эпюры необходимо на всех грузовых участках с использованием метода сечений получить выражения для функции продольной силы. При рассмотрении грузовых участков используем локальные системы координат (оси  $x$ ,  $y$ ).

Рассмотрим первый грузовой участок.

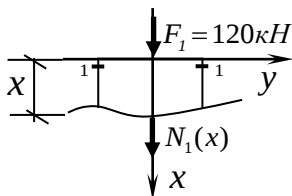
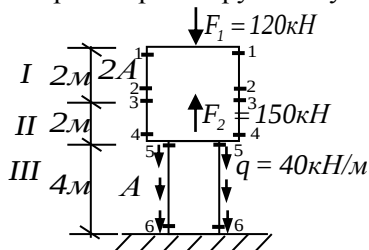
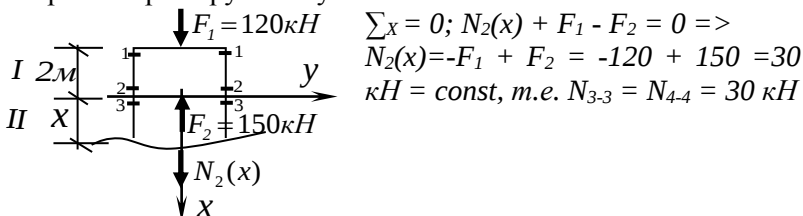


Рис. 4.2

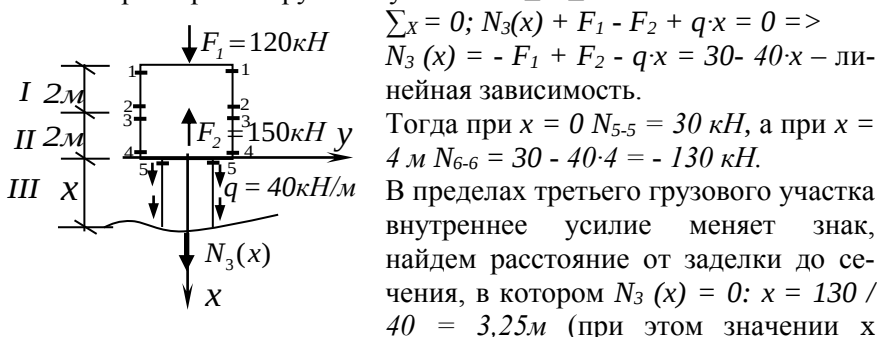
Вырезая верхнюю часть и составляя уравнение равновесия вырезанной части, получим:

$$\sum X = 0; N_1(x) + F_1 = 0 \Rightarrow N_1(x) = -F_1 = -120 \text{ кН} = \text{const}, N_{1-1} = N_{2-2} = -120 \text{ кН}.$$

Рассмотрим второй грузовой участок:



Рассмотрим третий грузовой участок.  $0 \leq x \leq 4 \text{ м}$



функция перемещений  $u_3(x)$  имеет экстремум).

Эп.  $N[\text{кН}]$

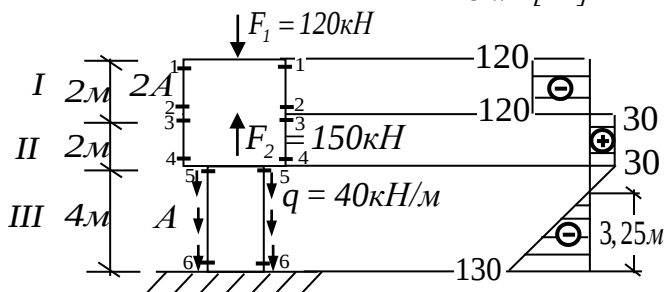


Рис. 4.3

2. Определение площади поперечных сечений  $A$  из условий прочности.

Зная, что при центральном сжатии (растяжении)  $\sigma = N(x) / A$  и учитывая заданное соотношение между площадями на грузовых

участках (I, II - 2A, III - A), построим эпюру напряжений через отношения  $N(x) / A$ . Эта эпюра строится с целью нахождения опасных сечений. Выполним необходимые вычисления.

$$\sigma_{1-1} = \sigma_{2-2} = N_{1-1} / 2A = -120 / 2 \cdot A = -60 / A;$$

$$\sigma_{3-3} = \sigma_{4-4} = N_{3-3} / 2A = 30 / 2 \cdot A = 15 / A;$$

$$\sigma_{5-5} = N_{5-5} / A = 30 / A;$$

$$\sigma_{6-6} = N_{6-6} / A = -130 / A.$$

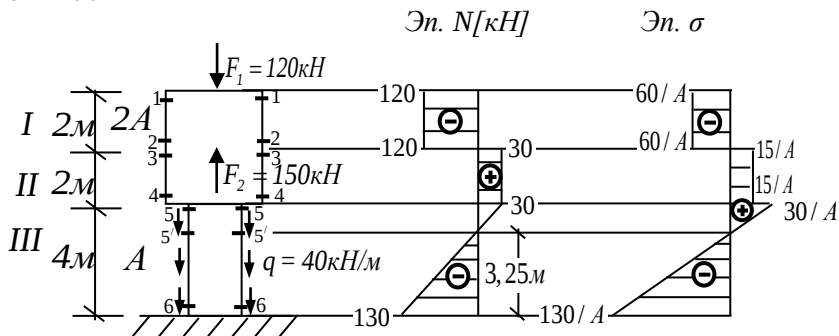


Рис. 4.4

С помощью эпюры напряжений ( $\text{Эн } \sigma = \text{Эн } N / A$ ) найдем опасные сечения. В настоящей задаче будет два опасных сечения, соответствующих экстремальным значениям напряжений ( $\sigma_{\min}$  и  $\sigma_{\max}$ ):

– опасное сечение в растянутой зоне  $\sigma_{\max} = \sigma_{5-5} = 30 / A$ ;

– опасное сечение в сжатой зоне  $\sigma_{\min} = \sigma_{6-6} = -130 / A$ .

Условие прочности при растяжении запишется как

$$\sigma_{\max} = \frac{30}{A} \leq R_t = 900 \text{ кН} / \text{м}^2. \text{ Отсюда } A \geq 0,0333 \text{ м}^2$$

Условие прочности при сжатии будет иметь вид

$$\sigma_{\min} = \frac{-130}{A} \leq R_c = -12000 \text{ кН} / \text{м}^2 \text{ Отсюда } A \geq 0,0108 \text{ м}^2$$

Сравнивая найденные величины параметра площади сечения, прием к последующему расчёту наибольшую, в данном случае найденную из условия прочности при растяжении:  $A = 0,0333 \text{ м}^2$ .

### 3. Построение эпюры нормальных напряжений $\sigma$ .

Используя найденную из условий прочности величину параметра площади сечения, определяем величины нормальных напряжений в поперечных сечениях стержня:

$$\sigma_{1-1} = \sigma_{2-2} = -60 / A = -60 / 0,333 = -1,8 \cdot 10^3 \text{ кПа} = -1,8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{3-3} = \sigma_{4-4} = 15 / A = 0,45 \cdot 10^3 \text{ кПа} = 0,45 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{5-5} = 30 / A = 0,9 \cdot 10^3 \text{ кПа} = 0,9 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{6-6} = -130 / A = -3,9 \cdot 10^3 \text{ кПа} = -3,9 \text{ МПа}.$$

#### 4. Построение эпюры перемещений $u$ .

Так как в данном случае стержень не подвергается температурному воздействию, выражение (3.5) для функции продольных перемещений сечений на участке  $i$  имеет вид

$$u_i(x) = u_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \int_{a_j}^{b_j} \left( \frac{N_j(x)}{A_j(x) E_j(x)} \right) dx + \int_{a_i}^x \left( \frac{N_i(x)}{A_i(x) E_i(x)} \right) dx \quad (4.1)$$

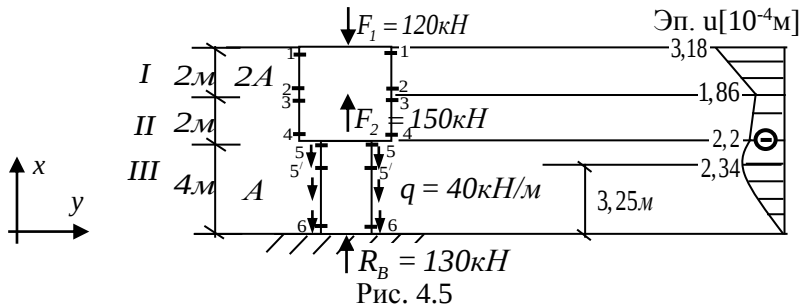
В данной задаче удобно за  $u_0$  принять перемещение в заделке, т.е.  $u_{6-6} = 0$ . Назначим начало координат в заделке, направим ось  $x$  вдоль стержня так, что положительные перемещения будут соответствовать положительному направлению оси. Определим опорную реакцию  $R_B$ .  $\sum X = 0$ ;  $R_B - F_1 + F_2 - q \cdot 4 = 0$ ;  $R_B = 130 \text{ кН}$ . Запишем выражения для продольной силы на каждом грузовом участке.  $N_3(x) = -R_B + q \cdot x = -130 + 40x$  — линейная зависимость.  $N_2(x) = -R_B + q \cdot 4 = -130 + 40 \cdot 4 = 30 \text{ кН} - \text{const}$ .  $N_1(x) = -R_B + q \cdot 4 - F_2 = -130 + 40 \cdot 4 - 150 = -120 \text{ кН} - \text{const}$ .

$$\begin{aligned} u_{5-5} = u_{4-4} = u_{6-6} + \int_0^4 \frac{(-130 + 40 \cdot x) dx}{E \cdot A} &= 0 + \frac{-130 \cdot 4 + (40 \cdot x^2/2)|_0^4}{E \cdot A} = \\ &= \frac{-520 + 320}{0,27 \cdot 10^8 \cdot 0,0333} = -2,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}. \\ u_{5'/5'} = u_{6-6} + \int_0^{3,25} \frac{(-130 + 40 \cdot x) dx}{E \cdot A} &= 0 + \frac{-130 \cdot 3,25 + (40 \cdot x^2/2)|_0^{3,25}}{E \cdot A} = \\ &= \frac{-422,5 + 211,25}{0,27 \cdot 10^8 \cdot 0,0333} = -2,34 \cdot 10^{-4} \text{ м}. \\ u_{3-3} = u_{2-2} = u_{5-5} + \int_0^2 \frac{30 dx}{E \cdot 2 \cdot A} &= -2,2 \cdot 10^{-4} + \frac{30 \cdot 2}{E \cdot 2 \cdot A} = \\ &= -2,2 \cdot 10^{-4} + \frac{60}{0,27 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 0,0333} = -1,86 \cdot 10^{-4} \text{ м}. \end{aligned}$$

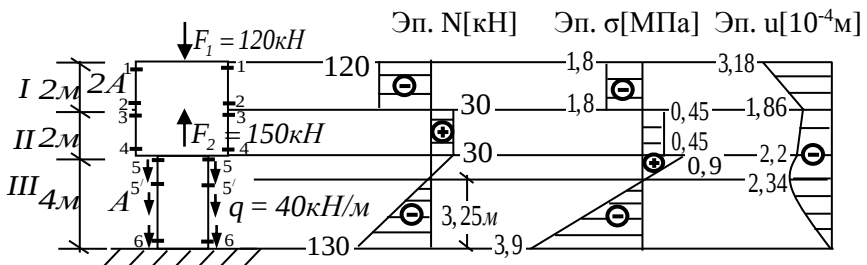
$$u_{1-1} = u_{2-2} + \int_0^2 \frac{-120dx}{E \cdot 2 \cdot A} = -1,86 \cdot 10^{-4} + \frac{120 \cdot 2}{E \cdot 2 \cdot A} =$$

$$= -2,2 \cdot 10^{-4} + \frac{240}{0,27 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 0,0333} = -3,18 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Найдя значения перемещений во всех сечениях (параболу строят по трем точкам) приступают к построению эпюры перемещений.



Окончательно результаты расчётов представлены на рис. 4.6.



## 5. Проверка жёсткости

Необходимо проверить выполнение условий жёсткости:  $\Delta l \leq [\Delta l]$ ,  $|u|_{\max} \leq [u]$ . Здесь  $\Delta l$  – абсолютная деформация, т.е. перемещение свободного конца стержня, а  $|u|_{\max}$  – максимальное по модулю перемещение сечения стержня, выбирается с помощью эпюры перемещений.

В данной задаче  $\Delta l = 3,18 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ ,  $|u|_{\max} = 3,18 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ , т.е. максимальное по модулю перемещение сечения и абсолютное изменение длины стержня совпадают.

$[Δl] = 0,02 \cdot l = 0,02 \cdot 8 = 0,16 \text{ м}$ ,  $[u] = 0,001 \cdot l = 0,001 \cdot 8 = 0,008 \text{ м}$ ,  
 тогда условия жёсткости имеют вид:  
 $0,000318 \text{ м} < 0,16 \text{ м}$ ,  $0,000318 \text{ м} < 0,008 \text{ м}$ .  
 Оба условия жёсткости выполняются.

#### 4.1.2. Задача 1.2. Статически неопределимая система

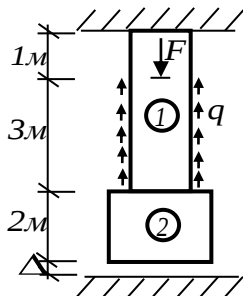


Рис. 4.7

Дано: Составной стержень жёстко закреплён на нижнем конце, нагружен силами  $F = 40 \text{ кН}$ ,  $q = 10 \text{ кН/м}$ , изготовлен из двух различных материалов:

$A_1 = 40 \text{ см}^2$ ,  $E_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,

$\alpha_1 = 12,5 \cdot 10^{-6} \text{ 1 / град}$ .  $A_2 = 80 \text{ см}^2$ ,

$E_2 = 1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $\alpha_2 = 16,5 \cdot 10^{-6} \text{ 1 / град}$ .

Требуется: 1. Определить опорные реакции при действии сил  $F$  и  $q$ , увеличении температуры на  $\Delta t = 60^\circ$  при наличии монтажного зазора между верхним концом бруса и опорой величиной  $\Delta = 0,1 \text{ мм} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ .

2. Построить эпюры продольных сил  $N$ , нормальных напряжений  $\sigma$  и перемещений  $u$ .

#### Решение

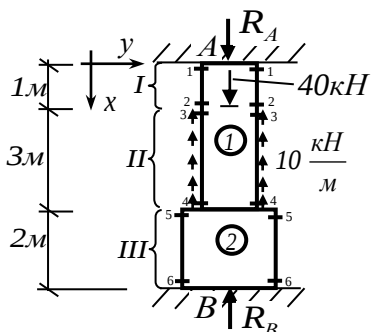


Рис. 4.8

Допустим, что под действием силы и при повышении температуры стержень удлиняется, и зазор  $\Delta = 10^{-4} \text{ м}$  закрывается. Тогда в точке  $B$  возникнет опорная реакция. Разобьём стержень на грузовые участки, выставим в начале и конце каждого участка сечения, назовём систему координат, направив при этом ось абсцисс вниз, так чтобы её положительное направление соответствовало положительной продольной силе, растягивающему напряжению и положительному перемещению.

#### 1. Определение опорных реакций

*Статическая сторона задачи.* Составим уравнение равновесия:  $\sum X = 0$ ;  $R_A - R_B + F = 0$ , определим степень статической

неопределимости как разницу между неизвестными опорными реакциями и количеством уравнений статики  $n_{st} = 2 - 1 = 1$  – задача один раз статически неопределимая и для раскрытия статической неопределимости требуется еще одно уравнение.

*Геометрическая сторона задачи.* В случае удлинения стержня перемещение свободного конца составит  $\Delta = 10^{-4}$  м.

$$u_B = \Delta l_I + \Delta l_{II} + \Delta l_{III} = \Delta = 10^{-4} \text{ м.}$$

*Физическая сторона задачи.* Абсолютную деформацию грузового участка, в зависимости от того, чем она вызвана, можно представить в виде следующих зависимостей:  $\Delta l^N = \int_{l_i} \frac{N(x)_i dx}{E_i A_i}$  (для

грузового участка, где действует равномерно распределённая нагрузка),  $\Delta l_i^N = \frac{N_i l_i}{E_i A_i}$  (для грузового участка с постоянным

внутренним усилием), деформация, вызванная температурным воздействием  $\Delta l_i^{\Delta t} = \alpha_i l_i \Delta t_i$ .

Подставим зависимости, полученные при рассмотрении физической стороны задачи, в уравнение для определения перемещения свободного конца стержня и получим уравнение совместности деформаций.

$$u_B = \frac{N_I l_I}{E_I A_I} + \alpha_I l_I \Delta t_I + \frac{1}{E_{II} A_{II}} \int_{l_{II}} N_{II}(x) dx + \alpha_{II} l_{II} \Delta t_{II} + \frac{N_{III} l_{III}}{E_{III} A_{III}} + \alpha_{III} l_{III} \Delta t_{III} = \Delta = 10^{-4} \text{ м.}$$

Запишем зависимости внутренних усилий на грузовых участках, отбросив при этом нижнюю заделку и заменим её влияние неизвестной опорной реакцией  $R_B$ :

$N_I(x) = -R_B + F - ql_{II} - \text{const}$ ,  $N_{II}(x) = -R_B - qx$  – линейная зависимость,  $N_{III}(x) = -R_B - \text{const}$ .

Подставим эти выражения в уравнение совместности деформаций и получим

$$u_B = \frac{(-R_B + F) \cdot l_I}{E_I A_I} + \alpha_I l_I \Delta t_I + \frac{1}{E_{II} A_{II}} \int_{l_{II}} (-R_B - q \cdot x) dx + \alpha_{II} l_{II} \Delta t_{II} + \frac{-R_B l_{III}}{E_{III} A_{III}} + \alpha_{III} l_{III} \Delta t_{III} = 10^{-4} \text{ м.}$$

После подстановки числовых значений имеем уравнение с одним неизвестным

$$\frac{(-R_B + 40) \cdot 1}{2 \cdot 10^8 \cdot 40 \cdot 10^{-4}} + 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 60 + \frac{1}{2 \cdot 10^8 \cdot 40 \cdot 10^{-4}} \int_0^3 (-R_B - 10 \cdot x) dx +$$

$$= 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 60 + \frac{-R_B \cdot 2}{1 \cdot 10^8 \cdot 80 \cdot 10^{-4}} + 16,5 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 60 = 10^{-4} \text{ м.}$$

После интегрирования функции внутреннего усилия на втором грузовом участке получим

$$\frac{-R_B + 40}{80 \cdot 10^4} + 1,44 \cdot 10^{-4} + \frac{1}{80 \cdot 10^4} \left( -R_B \cdot 3 - \frac{10 \cdot x^2}{2} \right) \Big|_0^3 + 22,5 \cdot 10^{-4} +$$

$$\frac{-R_B \cdot 2}{80 \cdot 10^4} + 19,8 \cdot 10^{-4} = 10^{-4} \text{ м.}$$

Умножим обе части уравнения на  $10^4$ , приведем к одному знаменателю, упростим, и, окончательно получим

$$\underbrace{-\frac{R_B}{80} + 8}_{\Delta I_I} - \underbrace{\frac{3 \cdot R_B}{80}}_{\Delta I_{II}} + \underbrace{22,5 - \frac{2 \cdot R_B}{80} + 20,3625}_{\Delta I_{III}} = 1.$$

Решая уравнение относительно  $R_B$ , получим  $R_B = 664,833 \text{ кН}$ . Значение опорной реакции положительное, значит под действием силы и при температурном расширении, стержень удлинился и зазор закрылся, как и было предположено раньше. Подставим значение  $R_B$  в последнее уравнение и умножим обе части на  $10^{-4}$ , в результате получим перемещение каждого грузового участка, последовательное суммирование которых дает перемещение всего стержня, равное величине зазора:

$$(-0,3104 - 2,4312 + 3,7416) \cdot 10^{-4} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

После определения опорной реакции  $R_B$  статическая неопределенность раскрыта, задача решается как статически определимая.

## 2. Построение эпюр

Построение эпюры продольной силы

$$N_I(x) = -R_B + F - q \cdot l_{II} = -664,833 + 40 - 10 \cdot 3 = 654,833 \text{ кН,}$$

$$N_{1-1} = N_{2-2} = -654,833 \text{ кН;}$$

$$N_{II}(x) = -R_B - q \cdot x = -664,833 - 10 \cdot x,$$

$$N_{3-3} = -694,833 \text{ кН, } N_{4-4} = -664,833 \text{ кН;}$$

$$N_{III}(x) = -R_B = -664,833 \text{ кН, } N_{5-5} = N_{6-6} = -664,833 \text{ кН.}$$

Построение эпюры напряжений

$$\sigma_{1-1} = \sigma_{2-2} = N_{1-1} / A_1 = (-664,833 \cdot 10^{-3}) / (40 \cdot 10^{-4}) = -163,708 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_{3-3} = N_{3-3} / A_1 = (-694,833) / (40 \cdot 10^{-4}) = -173,708 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_{4-4} = N_{4-4} / A_1 = (-664,833 \cdot 10^{-3}) / (40 \cdot 10^{-4}) = -166,208 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{5-5} = \sigma_{6-6} = N_{5-5} / A_2 = (-664,833 \cdot 10^{-3}) / (80 \cdot 10^{-4}) = -83,104 \text{ МПа}.$$

Построение эпюры перемещений

$$u_{2-2} = u_{3-3} = u_{1-1} + \Delta l_I = 0 - 0,3104 \cdot 10^{-4} = -0,3104 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$u_{4-4} = u_{5-5} = u_{3-3} + \Delta l_{II} = (-0,3104 - 2,4312) \cdot 10^{-4} = -2,7416 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$u_{6-6} = u_{5-5} + \Delta l_{III} = (-2,7416 + 3,7416) \cdot 10^{-4} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

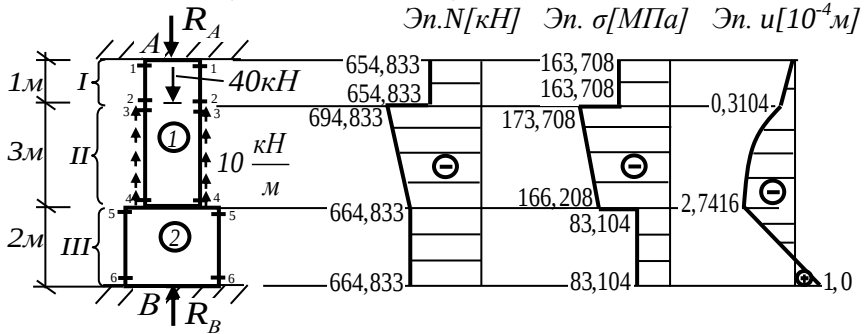


Рис. 4.9.

#### 4. 1. 3. Задача 1.3. Статически неопределимая стержневая система

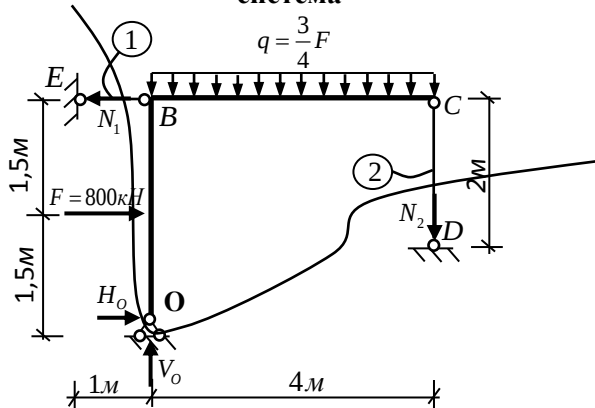


Рис. 4.10.

Дано:  $OBC$  – жёсткий стержень, стержень  $BE$ :  $E_{BE} = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $R_{BE} = 200 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{s,BE} = 300 \text{ МПа}$ , площадь поперечного сечения  $A$ ; стержень  $CD$ :  $E_{CD} = 1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $R_{CD} = 120 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{s,CD} = 180 \text{ МПа}$  и площадь поперечного сечения  $2A$ .

Требуется:

1. Определить усилия в стержнях при действии силы  $F$ .
2. Определить параметр площади поперечного сечения  $A$ .
3. Найти значение параметра нагрузки  $F_{lim}$  по методу предельного равновесия и допустимое значение силы  $F_{adm}$ . Сравнить  $F_{adm}$  с заданной нагрузкой. Принять коэффициент запаса прочности для обоих стержней  $k = 1,5$ .

#### Решение

1. Определение усилий  $N_1, N_2$  в стержнях.

*Статическая сторона задачи.*

Рассматриваемая задача один раз статически неопределима (четыре неизвестных реакций  $N_1, N_2, V_0, H_0$  в связях и три уравнения статики для определения этих реакций). Из трех уравнений равновесия системы в данном случае удобно использовать только уравнение моментов относительно т. О:

$$\sum m_O = 0; F \cdot 1,5 + q \cdot 4 \cdot 2 - N_1 \cdot 3 + N_2 \cdot 4 = 0 \quad (1)$$

Для раскрытия статической неопределимости требуется еще одно уравнение, которое составляется на основе рассмотрения двух других сторон задачи.

*Геометрическая сторона задачи*

Рассмотрение геометрической стороны задачи предполагает анализ возможной деформации системы и нахождение уравнения связи между деформациями стержней (102)

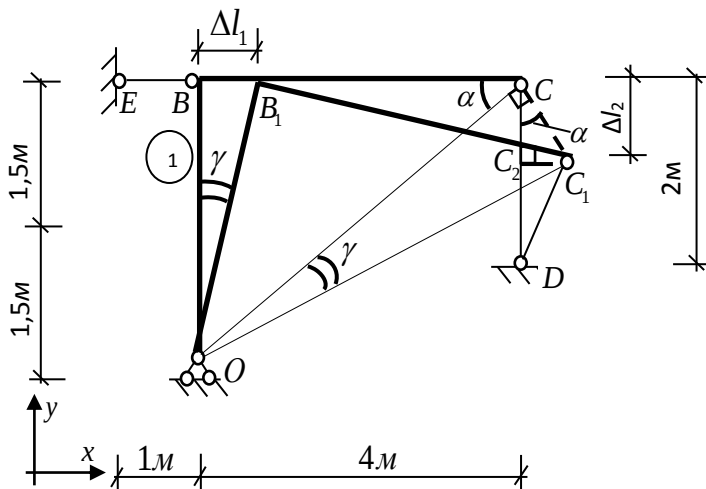


Рис. 4.11.

Примем в качестве возможной деформацию системы при повороте бесконечно жесткого стержня ОВС вокруг центра вращения О по часовой стрелке на бесконечно малый угол  $\gamma$  (рис. 4.11). В таком случае перемещения  $BB_1$ ,  $CC_1$  узлов системы перпендикулярны и пропорциональны радиусам вращения ОВ, ОС, а деформации стержней равны суммам проекций перемещений концов стержней на направления стержней:  $\Delta l_1 = BB_1$ ;  $\Delta l_2 = -CC_2$ . Так как  $CC_2 = CC_1 \cdot \cos \alpha = CC_1 \cdot 0,8$ , а  $BB_1 / CC_1 = OB / OC = 0,6$ , то отношение

$$\Delta l_1 / \Delta l_2 = BB_1 / -CC_2 = -0,75 \quad (a)$$

*Физическая сторона задачи.*

Абсолютная деформация стержней (при отсутствии температурного воздействия) определяется как:  $\Delta l_i = N_i \cdot l_i / EA_i$ . Отсюда следует:

$$\Delta l_1 = N_1 \cdot l_1 / EA_1 = N_1 \cdot 1 / (2 \cdot 10^8 \cdot A); \quad (б)$$

$$\Delta l_2 = N_2 \cdot l_2 / EA_2 = N_2 \cdot 2 / (1 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot A). \quad (в)$$

С учетом уравнения (а) и соотношений (б), (в) получим:

$(N_1 \cdot 1) / (2 \cdot 10^8 \cdot A) = -0,75 \cdot (N_2 \cdot 2) / (1 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot A)$ . После преобразований приходим к соотношению между усилиями:

$$N_1 = -1,5 N_2. \quad (2)$$

Решая систему уравнений (1), (2), получим:  $N_1 = 1058,8 \text{ кН}$ ;

$N_2 = -705,9 \text{ кН}$ . Статическая неопределимость задачи раскрыта

## 2. Определение параметра А для площадей поперечных сечений.

Из условий прочности для стержней  $BE$  и  $CD$

$$|\sigma|_{\max} = \left| \frac{N}{A} \right|_{\max} \leq R \Rightarrow A = \left| \frac{N}{R} \right|$$

:

найдем площадь для каждого стержня. Необходимо учесть при этом заданное по условию задачи соотношение площадей:  $A_{BE} = A = N_1 / R_{BE} = 1058,8 / (200 \cdot 10^3) = 52,9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \Rightarrow A = 52,9 \text{ см}^2$ ,

$A_{CD} = 2 A = N_2 / R_{CD} = 705,9 / (120 \cdot 10^3) = 58,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 58,8 \text{ см}^2 \Rightarrow A = 29,4 \text{ см}^2$ . Окончательно принимаем наибольшую площадь  $A = 52,9 \text{ см}^2$ .

## 3. Расчёт по предельной несущей способности

Найдем параметр  $F_{lim}$ , соответствующий предельному состоянию. Для этого используем уравнение (1), подставив в него уси-

для  $N_{1lim} = \sigma_{s,BE} \cdot A_{BE} = 300 \cdot 10^3 \cdot 52,9 \cdot 10^{-4}$ ,  $N_{2lim} = -\sigma_{s,CD} \cdot A_{CD} = -180 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 52,9 \cdot 10^{-4}$ , соответствующие предельному состоянию:

$$F_{lim} \cdot 1,5 + 3/4 F_{lim} \cdot 4 \cdot 2 - N_{1lim} \cdot 3 + N_{2lim} \cdot 4 = F_{lim} \cdot 1,5 + 3/4 F_{lim} \cdot 4 \cdot 2 - 300 \cdot 10^3 \cdot 52,9 \cdot 10^{-4} - 180 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 52,9 \cdot 10^{-4} = 0 \quad (3)$$

Из (3) получим:  $F_{lim} = 1653 \text{ кН}$ . Тогда  $F_{adm} = F_{lim} / k = 1653 / 1,5 = 1102 \text{ кН} > 800 \text{ кН}$ .

Таким образом, расчёт по предельной несущей способности дает большие значения допустимого параметра  $F_{adm}$  силовой нагрузки, чем расчёт с использованием условий прочности и расчетных сопротивлений.

#### 4.1.4. Контрольные вопросы для самопроверки

1. К какому виду сопротивления относят осевое растяжение-сжатие (простому или сложному)?
2. Какие гипотезы вводят при расчёте на осевое растяжение-сжатие?
3. Какое напряжённое состояние возникает в элементе объёма при данном виде сопротивления?
4. Сколько главных напряжений и какие отличны от нуля при центральном растяжении-сжатии?
5. Какие внутренние усилия возникают при осевом растяжении (сжатии) в поперечных сечениях стержня, как обозначаются, какую размерность имеют?
6. Какие напряжения возникают при осевом растяжении (сжатии) в поперечных сечениях стержня, как обозначаются, какую размерность имеют, по каким формулам определяются?
7. Какие факторы приводят к возникновению перемещений?
8. Какие перемещения возникают в случае центрального растяжения (сжатия), как их обозначают, какую размерность они имеют, по каким формулам определяются?
9. Какие правила знаков вводят для внутренних усилий, напряжений и перемещений при осевом растяжении (сжатии)?
10. Какие условия прочности используют в осевом растяжении (сжатии)?
11. Чем отличаются алгоритмы расчёта на прочность для хрупкого и пластичного материалов?
12. Какие условия жёсткости используют в случае центрального растяжения-сжатия?

13. Каков алгоритм расчёта статически неопределимой системы при осевом растяжении (сжатии)?
14. Какова разница расчёта на прочность при осевом растяжении (сжатии) по расчётным сопротивлениям и методу предельного равновесия?

#### 4.2. Напряжённо-деформированное состояние материала в точке. Геометрические характеристики сечений.

##### 4.2.1. Задача 2.1.

Дан элемент объема в плоском напряженном состоянии, материал – малоуглеродистая сталь (рис. 4.12а). Требуется:

1. Определить главные напряжения и положение главных площадок.
2. Найти экстремальные касательные напряжения и положение соответствующих им площадок.
3. Найти деформации в направлении заданных осей  $x$ ,  $y$  и главные деформации.
4. Проверить выполнение условий прочности по различным теориям прочности: 1) теория максимальных нормальных напряжений; 2) теория наибольших линейных деформаций; 3) теория максимальных касательных напряжений; 4) энергетическая теория; 5) теория прочности Кулона-Мора.

Решение

1. Согласно выбранным координатным осям  $x, y$   $\sigma_x = 120 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_y = -100 \text{ МПа}$ ,  $\tau_{yx} = -80 \text{ МПа}$ . Величины главных напряжений определяются выражением (3.13):

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{120 - 100}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(120 + 100)^2 + 4(-80)^2} = 10 \pm \frac{1}{2} \sqrt{(220)^2 + 4 \cdot 80^2}$$

$$\sigma_{\max} = 146,0147 \text{ МПа}, \quad \sigma_{\min} = -126,0147 \text{ МПа}$$

С учетом принятого правила индексации главных напряжений (3.12) в данном случае

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = 146,015 \text{ МПа}, \quad \sigma_3 = \sigma_{\min} = -126,015 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = 0.$$

При этом  $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 20 \text{ МПа}$ .

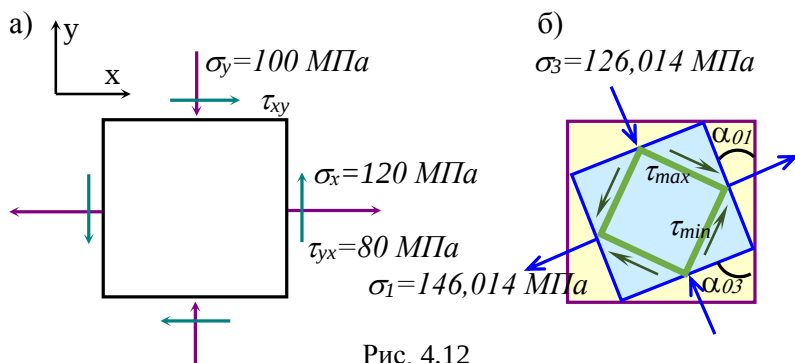


Рис. 4.12

Направления векторов  $\sigma_1, \sigma_3$  определяются углами  $\alpha_{01}, \alpha_{03}$ . Из (3.14) получим

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_{01} &= \frac{-80}{-100 - 146,015} = 0,32518, \quad \alpha_{01} = 18,014^\circ \\ \operatorname{tg} \alpha_{03} &= \frac{-80}{-100 + 126,015} = -3,075, \quad \alpha_{03} = -71,986^\circ \end{aligned}$$

Положения главных площадок показаны на рис. 4.12 (б).

2. Величины экстремальных касательных напряжений определяются формулой (3.15):

$$\begin{aligned} \tau_{\max/\min} &= \pm \frac{146,0147 - (-126,0147)}{2} = \pm 136,0147 \\ \tau_{\max} &= 136,0147 \text{ МПа}, \quad \tau_{\min} = -136,0147 \text{ МПа} \end{aligned}$$

Угол между главными площадками и площадками с экстремальными касательными напряжениями равен  $45^\circ$ . Экстремальные касательные напряжения направлены в сторону максимального главного напряжения, при этом  $\tau_{\max}$  действует по часовой стрелке,  $\tau_{\min}$  - против. Положения площадок и касательные напряжения показаны на рис. 4.12 б.

3. Линейные и угловые деформации определяются по закону Гука (3.16). Все механические характеристики выбираются по таблице П.1 из приложений.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2 \cdot 10^5} (120 - 0,25(-100 + 0)) = 72,5 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2 \cdot 10^5} (-100 - 0,25(120 + 0)) = -67,5 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2 \cdot 10^5} (0 - 0,25(120 - 100)) = -2,5 \cdot 10^{-5}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{80}{8 \cdot 10^4} = 1 \cdot 10^{-3}$$

Главные деформации определяются аналогично:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2 \cdot 10^5} (146,015 - 0,25(-126,015 + 0)) = 88,8 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2 \cdot 10^5} (-126,015 - 0,25(146,015 + 0)) = -81,3 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2 \cdot 10^5} (0 - 0,25(146,015 - 126,015)) = -2,5 \cdot 10^{-5}$$

4. Проверка выполнения условий прочности. Согласно первой теории прочности:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 = \sigma_{\text{max}} = 146,0147 \text{ МПа} < R = 200 \text{ МПа},$$

по первой теории прочность обеспечена.

Согласно второй теории прочности имеем:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \nu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) = 146,0147 - 0,25 \cdot (-126,015 + 0) = 177,52 \text{ МПа}$$

$$177,52 \text{ МПа} < R = 200 \text{ МПа},$$

по второй теории прочность обеспечена.

Согласно третьей теории прочности

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 146,015 - (-126,015) = 272,03 \text{ МПа} > R = 200 \text{ МПа}$$

по третьей теории прочность не обеспечена.

Согласно четвертой теории прочности имеем:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\frac{(146,015 - 0)^2 + (146,015 - (-126,015))^2 + (0 - (-126,015))^2}{2}} =$$

$$= 235,8 \text{ МПа} > R = 200 \text{ МПа}$$

по четвертой теории прочность не обеспечена.

Так как для малоуглеродистой стали, которая является пластичным материалом, используется третья или четвертая теории прочности, можно сделать вывод, что прочность материала в исследуемой точке не обеспечена.

### 4.2.2. Задача 2.2.

Для заданного поперечное сечение стержня (рис.4.13) требуется:

1. Определить координаты центра тяжести сечения и провести главные центральные оси.
2. Определить величины главных центральных моментов инерции.
3. Определить величины главных центральных радиусов инерции сечения.

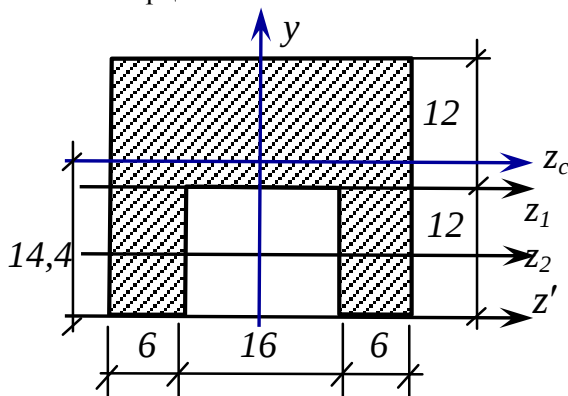


Рис. 4.13

Разбиваем сечения на простые фигуры и проводим их центральные оси  $z_1, z_2$  и  $y$ . Ось симметрии  $y$  является главной центральной осью данного сечения (рис.4.13).

Для определения положения второй главной центральной оси выбираем произвольную ось  $z'$ , перпендикулярную оси симметрии.

Определяем ординату  $y_c$  центра тяжести поперечного сечения по оси  $y$  по формуле (3.17):

$$y_c = \frac{S_{z'}}{A} = \frac{A_1 y_1 - A_2 y_2}{A_1 - A_2}, A_1 = 28 \cdot 24 = 672 \text{ см}^2; A_2 = 16 \cdot 12 = 192 \text{ см}^2$$

$$; A = A_1 - A_2 = 480 \text{ см}^2; y_1 = 12 \text{ см}, y_2 = 6 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{S_{z'}}{A} = \frac{A_1 y_1 - A_2 y_2}{A_1 - A_2} = \frac{672 \cdot 12 - 192 \cdot 6}{480} = 14,4 \text{ см}$$

Откладываем размер  $y_c$  вверх от оси  $z'$  и проводим вторую

главную центральную ось  $z$  (рис. 4.13).

Определяем осевые моменты инерции простых фигур относительно собственных центральных осей:

$$I_{z1} = \frac{28 \cdot 24^3}{12} = 32356 \text{ см}^4, I_{y1} = \frac{28^3 \cdot 24}{12} = 43904 \text{ см}^4,$$

$$I_{z2} = \frac{16 \cdot 12^3}{12} = 2304 \text{ см}^4, I_{y2} = \frac{16^3 \cdot 12}{12} = 4096 \text{ см}^4.$$

Вычисляем расстояние от центральных осей всего сечения  $z$  и  $y$  до центральных осей отдельных фигур (рис.4.13)

$$z_{01} = 0, y_{01} = y_1 - y_c = -2,4 \text{ см},$$

$$z_{02} = 0, y_{02} = y_2 - y_c = -8,4 \text{ см}.$$

Главные центральные моменты инерции вычисляются с использованием (3.18):

$$I_z = (32356 + 672 \cdot 2,4^2) - (2304 + 192 \cdot 8,4^2) = 20375,2 \text{ см}^4$$

$$I_y = (43904 + 672 \cdot 0) - (4096 + 192 \cdot 0) = 39808 \text{ см}^4$$

Центробежный момент инерции  $I_{zy}$  всего сечения равен нулю, так как ось  $y$  является осью симметрии, т.е. оси  $z$  и  $y$  являются главными центральными осями инерции сечения, а вычисленные осевые моменты инерции являются главными центральными моментами инерции:

$$I_{max} = I_z = 20375,2 \text{ см}^4, I_{min} = I_y = 39808 \text{ см}^4$$

Значения главных центральных радиусов инерции сечения

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{20375,2}{480}} = 6,52 \text{ см}, i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{39808}{480}} = 9,11 \text{ см}.$$

### 4.2.3. Задача 2.3.

Для заданного поперечного сечения (рис.4.14) требуется:

1. Определить координаты центра тяжести сечения и провести горизонтальную и вертикальную центральные оси.
2. Определить осевые и центробежный моменты инерции сечения относительно проведенных центральных осей.
3. Определить положение главных центральных осей инерции и показать их на чертеже.
4. Вычислить величины главных центральных моментов инерции.
5. Определить величины главных центральных радиусов инерции сечения.

Решение

Разбиваем сечение на прямоугольник  $24 \times 2$  и швеллер № 24 и проводим для каждой части главные центральные оси  $z_1, y_1$  и  $z_2, y_2$ .

Площадь прямоугольника  $A_1 = 24 \cdot 2 = 48 \text{ см}^2$ , характеристики швеллера определяем по сортаменту:  $A_2 = 30,6 \text{ см}^2, I_{z_2} = 2900 \text{ см}^4, I_{y_2} = 208 \text{ см}^4, z_{02} = 2,42 \text{ см}$ .

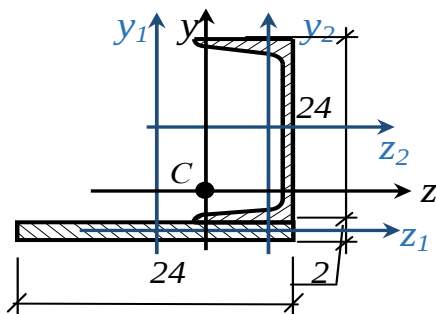


Рис. 4.14

Принимаем в качестве вспомогательных осей центральные оси первой фигуры (оси  $Y_1 Z_1$ ). Определяем координаты центра тяжести поперечного сечения по формулам (3.17):

$$y_{1c} = \frac{S_{z1}}{A} = \frac{24 \cdot 2 \cdot 0 + 30,6 \cdot 13}{48 + 30,6} = \frac{397,8}{78,6} = 5,06 \text{ см} - \text{расстояние}$$

между осями  $z_1$  и  $z$ ,

$$z_{1c} = \frac{S_{y1}}{A} = \frac{24 \cdot 2 \cdot 0 + 30,6 \cdot (12 - 2,42)}{48 + 30,6} = \frac{293,15}{78,6} = 3,73 \text{ см} - \text{рас-}$$

стояние между осями  $y_1$  и  $y$  (рис.4.14).

Моменты инерции относительно центральных осей  $z, y$  (рис.4.14):

$$I_z = \frac{24 \cdot 2^3}{12} + (5,06)^2 \cdot 48 + 2900 + (13 - 5,06)^2 \cdot 30,6 = 6074,1 \text{ см}^4$$

$$I_y = \frac{24^3 \cdot 2}{12} + (3,73)^2 \cdot 48 + 208 + (12 - 2,42 - 3,73)^2 \cdot 30,6 = 4227,03 \text{ см}^4$$

$$I_{zy} = 0 + (-5,06) \cdot (-3,73) \cdot 48 + 0 + (13 - 5,06) \cdot (12 - 2,42 - 3,73) \cdot 30,6 = 2327,28 \text{ см}^4$$

Величины главных центральных моментов инерции определяются с использованием формулы (3.20):

$$I_{u,v} = \frac{6074,1 + 4227,03}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(6074,1 - 4227,03)^2 + 4 \cdot 2327,28^2}$$

$$I_u = 7654,39 \text{ см}^4, I_v = 2646,74 \text{ см}^4$$

Важно:

$$I_z + I_y = I_u + I_v = 6074,1 + 4227,03 = 10301,13 \text{ см}^4.$$

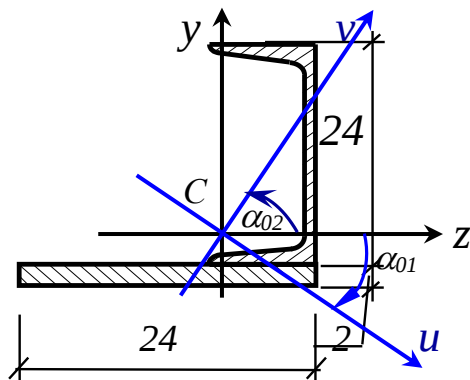


Рис. 4.15.

Положение главных центральных осей определяется с использованием формул (3.21):

$$\operatorname{tg} \alpha_{01} = \frac{I_{zy}}{I_y - I_u} = \frac{2327,28}{4227,03 - 7654,39} = -0,679$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{02} = \frac{I_{zy}}{I_y - I_v} = \frac{2327,28}{4227,03 - 2646,74} = 1,473$$

Тогда угол между осями  $z$  и  $u$  будет отрицательным

$$\alpha_{01} = -\operatorname{arctg} 0,679 = -34,17^\circ,$$

откладывается по часовой стрелке (рис. 4.14). Угол между осями  $z$  и  $v$  будет положительным:

$\alpha_{02} = \operatorname{arctg} 1,473 = 55,83^\circ$ . Положение главных центральных осей показано на рис. 4.15. Главные центральные радиусы инерции равны:

$$i_u = \sqrt{\frac{7654,39}{78,6}} = 9,87 \text{ см}, i_v = \sqrt{\frac{2646,74}{78,6}} = 5,8 \text{ см}$$

#### 4.2.4. Контрольные вопросы для самопроверки

1. Что называют напряженно-деформированным состоянием в точке?
2. Какие напряжения называют главными?
3. Какие напряженные состояния называют линейным, плоским и объемным?
4. Как обозначают главные напряжения?
5. Что такое закон парности касательных напряжений?
6. Какое напряженное состояние называют чистым сдвигом?
7. Как записать обобщенный закон Гука?
8. Какие деформации называются главными и как их определить?
9. Что называется гипотезами прочности?
10. Сформулировать основные теории прочности.
11. Что называют статическим моментом сечения?
12. Может ли статический момент быть отрицательным или равным нулю?
13. Какие оси называют центральными?
14. Чему равны статические моменты относительно центральных осей?
15. Что называют осевым моментом инерции сечения?
16. Может ли осевой момент инерции быть отрицательным или равным нулю?
17. Что называют центробежным моментом инерции сечения?
18. Может ли центробежный момент инерции быть отрицательным или равным нулю?
19. Чему равен центробежный момент инерции относительно осей, одна из которых является осью симметрии сечения?
20. Какова размерность моментов инерции?
21. Какие оси называют главными осями?
22. Какие оси называют главными центральными осями?
23. Как определить положение главных центральных осей, если известны моменты инерции относительно некоторых двух взаимно перпендикулярных осей?
24. Каким свойством обладают моменты инерции относительно главных центральных осей?
25. Что называется радиусом инерции сечения?

### 4.3. Расчёт прямых стержней при деформации кручения.

#### 4.3.1. Задача 3.1.

Для стержня, изображенного на рис. 4.16, требуется:

1. построить эпюру  $M_t$  от заданной расчетной нагрузки;
2. подобрать поперечное сечение стержня в трех вариантах (см. рис. 3.15) из условия прочности;
3. построить эпюру углов закручивания сечения при постоянной жесткости стержня, т.е.  $GI_p = \text{const.}$ ;
4. подобрать кольцевое сечение стержня из условия жесткости, считая нормативную нагрузку равной расчетной;
5. выбрать кольцевое сечение стержня из условий прочности и жесткости.

Исходные данные:

$$R_s = 100 \text{ МПа}; \quad G = 0,8 \times 10^5 \text{ МПа}; \quad D = \frac{d_{\text{int}}}{d_{\text{ext}}} = 0,9;$$

$$\frac{h}{b} = 2; \quad [\varphi] = 0,01 \text{ рад.}$$

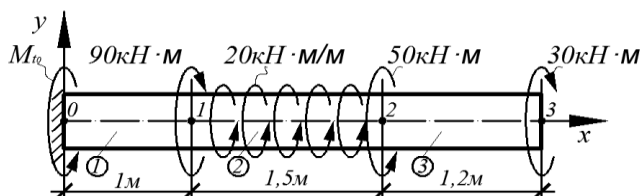


Рис. 4.16.

Решение.

1. Определение опорной реакции  $M_{t0}$ .

Составляем уравнение равновесия стержня:

$$\sum m_x = M_{t0} - 90 + 20 \cdot 1,5 + 50 - 30 = 0. \quad (4.2)$$

Из (4.2) получим  $M_{t0} = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

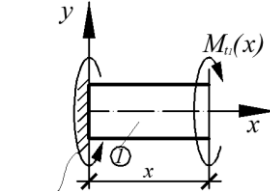
2. Построение эпюры крутящих моментов в сечениях.

Разобьём стержень на 3 участка: ①, ②, ③ (см. рис. 4.16).

Выбирая произвольное сечение на участке «i», отсекая какую-либо часть стержня (например, часть левее выбранного стержня), со-

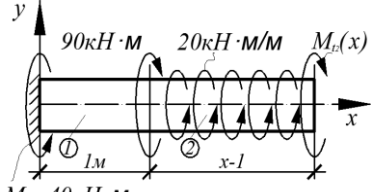
ставляем далее уравнение равновесия остальной части стержня. Из полученного уравнения находим выражения  $M_{ti}(x)$ .

Участок ①:  $0 \leq x \leq 1$  м:  $1 \text{ м} \leq x \leq 2,5$  м:

$$\sum m_x = 40 - M_{t1}(x) = 0, \quad M_{t1}(x) = \text{const} = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}. \quad (\text{а})$$


$M_{t0} = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$

Участок ②:  $1 \text{ м} \leq x \leq 2,5$  м:

$$\sum m_x = 40 - 90 + 20(x-1) - M_{t2}(x) = 0, \quad M_{t2}(x) = -50 + 20(x-1) \text{ кН} \cdot \text{м}. \quad (\text{б})$$


$M_{t0} = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$

Аналитически находим  $M_{t3}(x) = \text{const} = 30 \text{ кН} \cdot \text{м}$ . (в)

Используя полученные выражения (а), (б), (в), строим эпюру  $M_t$

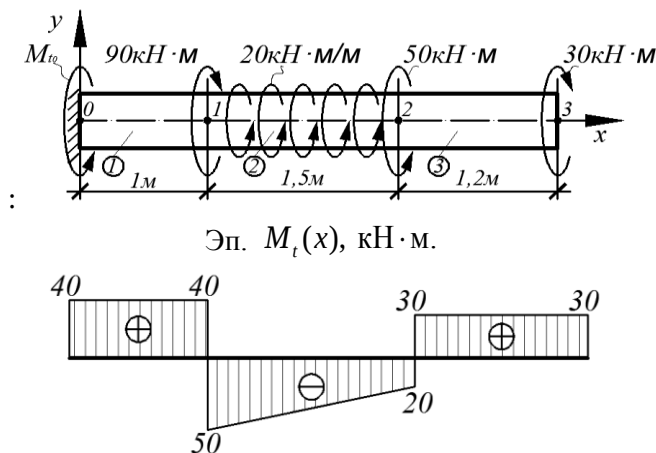


Рис. 4.16.

3. Подбор сечений (в трех вариантах) из условия прочности.

Так как стержень выполнен из одного материала и имеет постоянное сечение, условие прочности записывается в виде:

$$\frac{\max_{0 \leq x \leq l} |M_t(x)|}{W_p \text{ (или } W_t)} \leq R_s. \quad (4.3)$$

Анализируя эпюру  $M_t$ , находим:  $\max_{0 \leq x \leq l} |M_t(x)| = 50 \text{ кН} \cdot \text{м}$ . Рассмотрим различные варианты сечений стержня (рис. 3.15.).

а) Круглое сечение.

Условие (4.3) имеет вид:

$$\frac{50}{\frac{\pi d^3}{16}} \leq 100 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}.$$

$$\text{Отсюда получим: } d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 50}{3,14 \cdot 100 \cdot 10^3}} = 0,1367 \text{ м.}$$

$$A_{\text{круг.}} = \frac{\pi d^2}{4} = 0,01467 \text{ м}^2.$$

б) Кольцевое сечение.

Условие (2) имеет вид:

$$\frac{50}{\frac{\pi d_{\text{ext}}^3 (1 - 0,9^4)}{16}} \leq 100 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}.$$

$$\text{Отсюда получим: } d_{\text{ext}} \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 50}{3,14 \cdot (1 - 0,9^4) \cdot 10^5}} = 0,19524 \text{ м.}$$

$$A_{\text{кольц.}} = \frac{\pi d_{\text{ext}}^2 (1 - 0,9^2)}{4} = 0,00568 \text{ м}^2.$$

б) Прямоугольное сечение.

Условие (2) имеет вид:

$$\frac{50}{\alpha \cdot h \cdot b^2} \leq 100 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}. \text{ Согласно исходным данным } \frac{h}{b} = 2.$$

По таблице П... принимаем  $\alpha = 0,246$ .

Записываем условие прочности в виде

$$\frac{50}{0,246 \cdot 2b^3} \leq 100 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}. \text{ Отсюда получим:}$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{50}{0,246 \cdot 2 \cdot 10^5}} = 0,10054 \text{ м.} \quad A_{\text{кв.}} = 2b^2 = 0,0202 \text{ м}^2.$$

Таким образом, наиболее предпочтительным при кручении является кольцевое сечение.

4. Построение эпюры углов закручивания сечений при постоянной жесткости стержня  $GI_p = \text{const}$ .

Будем полагать, что нормативная нагрузка совпадает с расчетной. Тогда при определении  $\varphi_i(x)$  на участках ①, ②, ③ можно использовать полученные соотношения (а), (б), (в) для  $M_{ti}(x)$ . При выбранной системе координат  $\varphi_0 = \varphi_1(0) = 0$ . Тогда

$$\varphi_1(x) = \int_0^x \frac{40}{GI_p} dx = \frac{40}{GI_p} x; \quad (\text{г})$$

$$\varphi_2(x) = \frac{40 \cdot 1}{GI_p} + \int_1^x \frac{(-50 + 20(x-1))}{GI_p} dx;$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{GI_p} \left( 40 - 50(x-1) + 20 \frac{(x-1)^2}{2} \right); \quad (\text{д})$$

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{GI_p} \left( 40 - 50 \cdot 1,5 + 20 \frac{1,5^2}{2} + 30(x-2,5) \right); \quad (\text{е})$$

Учитывая полученное соотношение (г), (д), (е), строим эпюру углов закручивания сечений:

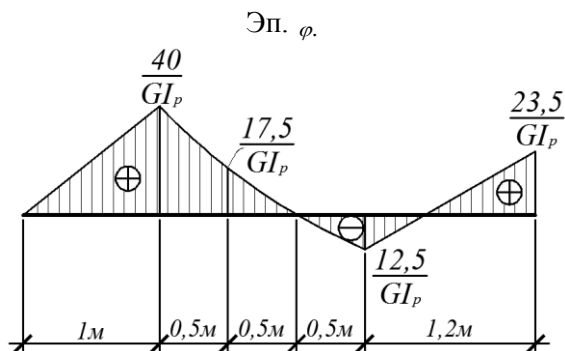


Рис. 4.17.

5. Подбор кольцевого сечения из условия жесткости.  
Условие жесткости (3.25) в данном случае имеет вид:

$$|\varphi|_{\max} = \frac{40}{GI_p} \leq [\varphi] = 0,01 \text{ рад.}$$

Учитывая, что  $G = 0,8 \times 10^5$  МПа,

$$I_p = \frac{\pi d_{\text{ext}}^4}{32} (1 - D^4) = \frac{3,14 \cdot d_{\text{ext}}^4}{32} (1 - 0,9^4) = 0,033756 \cdot d_{\text{ext}}^4,$$

получим:

$$d_{\text{ext}} \geq \sqrt[4]{\frac{40}{0,8 \cdot 10^8 \cdot 0,033756 \cdot 0,01}} = 0,19618 \text{ м.}$$

Сравнивая величины  $d_{\text{ext}}$ , полученные при расчете на прочность и жесткость, принимаем окончательно:  $d_{\text{ext}} \geq 0,19618 \text{ м.}$

Таким образом, в данном случае размер кольцевого сечения необходимо принимать из условия жесткости.

#### 4.3.2. Задача 3.2.

Для стержня, расчетная схема которого изображена на рис. 4.18 требуется:

1. построить эпюру  $M_t$  в предположении линейно упругой работы материала;
2. по условию прочности (расчет по несущей способности) подобрать круглое поперечное сечение стержня;
3. подобрать круглое поперечное сечение стержня из условия расчета по предельной нагрузке;
4. сравнить результаты расчетов по расчетному сопротивлению (несущей способности) и по предельной нагрузке.

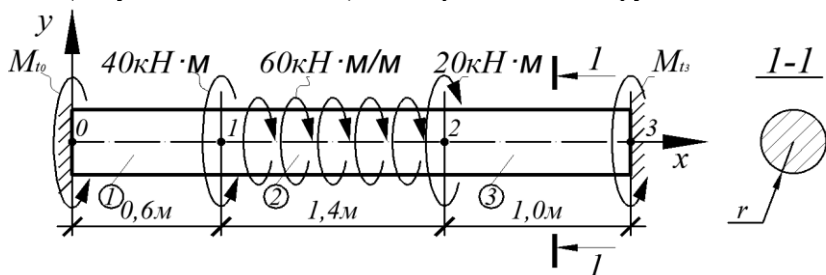


Рис. 4.18.

Исходные данные: расчетное сопротивление материала при сдвиге  $R_s = 100$  МПа; предел текучести при сдвиге  $\tau_s = 150$  МПа ;

коэффициент запаса прочности по нагрузке  $k = 1,5$ .

Решение.

1. Построение эпюры  $M_t$  в предположении линейно упругой работы материала.

Система, изображенная на рис. 4.18, один раз статически неопределима. Для раскрытия статической неопределимости (определения реакции  $M_{t0}$ ,  $M_{t3}$ ) необходимо рассмотреть три стороны задачи.

Статическая сторона задачи.

Отсекая стержень от опор, оставим уравнение равновесия всего стержня:

$$\sum m_x = M_{t0} + 40 - 20 + M_{t3} = 0 \quad (4.4)$$

Геометрическая сторона задачи.

Так как опоры 0, 3 – недеформируемые, то углы закручивания начального сечения 0 и конечного 3 равны нулю, т.е.

$$\text{при } x = 0, \quad \varphi_1(0) = \varphi_0 = 0; \quad (a)$$

$$\text{при } x = 3, \quad \varphi_3(0) = 0. \quad (б)$$

Условия (а), (б) характеризуют геометрическую сторону данной задачи.

Физическая сторона задачи.

Будем полагать, что при деформировании стержня справедлив закон Гука (линейно упругое деформирование). Тогда, используя выражение (3.26) для функции углов закручивания сечения на участке, а также условия (а), (б), получаем:

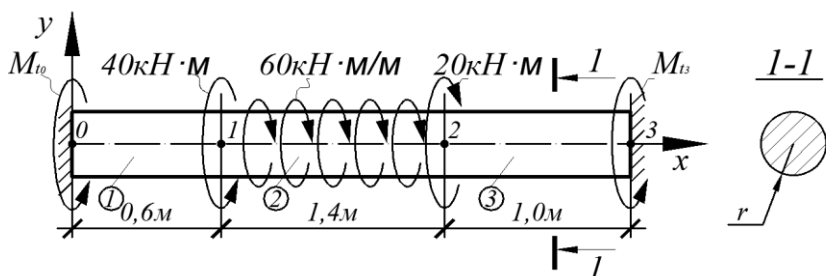
$$\varphi_3(3) = \int_0^{0,6} \frac{M_{t1}(x)}{GI_\rho} dx + \int_{0,6}^2 \frac{M_{t2}(x)}{GI_\rho} dx + \int_2^3 \frac{M_{t3}(x)}{GI_\rho} dx = 0. \quad (4.5)$$

Выделяя левые (по отношению к текущему сечению) части стержня, найдем выражения для крутящих моментов в сечениях на участках:

$$M_{t1}(x) = M_{t0}; \quad M_{t2}(x) = M_{t0} + 40 - 60(x - 0,6); \quad (в)$$

$$M_{t3}(x) = M_{t0} + 40 - 60 \cdot 1,4 - 20 = M_{t0} - 64;$$

Подставляя (в) в (4.5), после сокращения  $GI_\rho$  и интегрирования получим:  $3M_{t0} - 66,8 = 0$ ;  $M_{t0} = 22,267 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .



Эп.  $M_t(x)$ , кН·м.

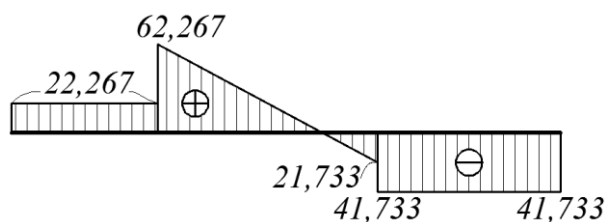


Рис. 4.19.

2. Подбор круглого поперечное сечение стержня из условия расчета по несущей способности.

Условие прочности стержня при расчете по несущей способности (расчетному сопротивлению) имеет вид:  $|\tau|_{\max} = \frac{|M_t|_{\max}}{W_p} \leq R_s$ .

Учитывая, что  $|M_t|_{\max} = M_{t2}(0,6) = 62,267$  кН·м,  $W_p^{кр} = \frac{\pi r^3}{2}$ ,

$R_s = 100 \cdot 10^3$  кН/м<sup>2</sup>, получим условие

$$\frac{2 \cdot 62,267}{\pi \cdot r^3} \leq 10^5.$$

Отсюда

$$r \geq \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 62,267}{\pi \cdot 10^5}} = 0,07365.$$

Площадь поперечного сечения равна

$$A' = \pi \cdot 0,07365^2 = 0,01704 \text{ м}^2.$$

3. Подбор круглого поперечного сечение стержня из условия расчета по предельной нагрузке.

Выразим нагрузку на стержень через один параметр – интенсивность распределенного закрученного закручивающего момента  $m = 60$  кН·м/м. Тогда

$$M_1 = \frac{2}{3}m, \quad M_2 = \frac{1}{3}m.$$

Предельный крутящий момент для круглого сечения равен

$$M_{t \lim} = \frac{4}{3} \frac{\pi r^3}{2} \tau_s.$$

Увеличивая параметр нагрузки до предельного значения  $m_{\lim}$ , приходим к предельному состоянию стержня, характеризующегося следующей эпюрой  $M_t$ :

Эп.  $M_t(x)$  (в предельном состоянии)

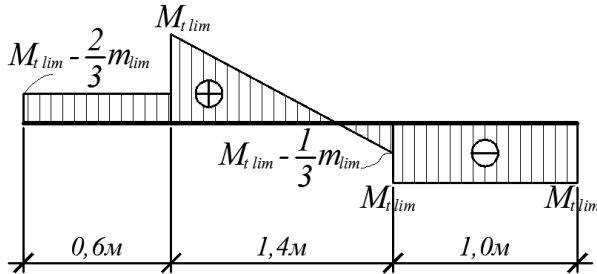


Рис. 4.20

Анализируя полученную эпюру  $M_t$ , приходим к уравнению для определения  $m_{\lim}$ :

$$M_{t \lim} - 1,4m_{\lim} = -\left(M_{t \lim} - \frac{1}{3}m_{\lim}\right) \quad (4.6)$$

Отсюда

$$m_{\lim} = \frac{2M_{t \lim}}{1,733} = \frac{2 \cdot 1,33\pi r^3}{1,733 \cdot 2} \tau_s = \frac{1,33\pi r^3}{1,733} \tau_s.$$

Условие расчета по предельной нагрузке имеет вид:

$$m = 60 \leq \frac{m_{\lim}}{k} = \frac{1,33\pi r^3}{1,733} \cdot \frac{150000}{1,5}$$

Отсюда

$$r \geq \sqrt[3]{\frac{60 \cdot 1,733 \cdot 1,5}{\pi \cdot 1,33 \cdot 150000}} = 0,063 \text{ м.}$$

Площадь полученного сечения равна

$$A'' = \pi \cdot 0,063^2 = 0,0125 \text{ м}^2.$$

4. Сравнение результатов расчетов по расчетному сопротивлению (несущей способности) и по предельной нагрузке.

Определим величину

$$\frac{A' - A''}{A'} 100\% = \frac{0,01704 - 0,0125}{0,01704} 100\% = 26,64\%.$$

Таким образом, при расчете по предельной нагрузке экономия материала составила, в данном случае, 26,64% по сравнению с проектом, найденным из условия расчета по несущей способности (расчетному сопротивлению). При этом коэффициенты запаса прочности были одинаковы и равнялись 1,5.

#### 4.3.3. Контрольные вопросы для самопроверки

1. При каком нагружении прямой стержень испытывает только деформацию кручения?
2. Какие напряжения возникают в поперечном сечении стержня при деформации кручения и как они определяются?
3. Как распределяются касательные напряжения в круглом и круглом кольцевом поперечных сечениях стержня при кручении?
4. Как распределяются касательные напряжения в прямоугольном поперечном сечении стержня при кручении?
5. Как записывается условие расчета по несущей способности (условие прочности) для стержня круглого или кольцевого сечения при кручении?
6. Как записывается условие расчета по несущей способности (условие прочности) для стержня прямоугольного сечения при кручении?
7. Как записывается условие расчета по предельной нагрузке для стержня круглого сечения?
8. Какие перемещения поперечных сечений определяются при кручении?
9. Как записывается условие жесткости при кручении прямых стержней?
10. Каков порядок расчета статически неопределимых систем при кручении?

## Прямой поперечный изгиб балок.

### 4.4.1. Задача 4.1.

Требуется из расчета на прочность определить размеры поперечного сечения балки (рис. 4.21) в двух вариантах: "а" и "б" (рис. 3.18), а затем проверить балку, имеющую поперечное сечение "а", на жесткость.

Принять:

$$M = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}; q = 20 \text{ кН/м};$$

$$F = 50 \text{ кН}; R = 200 \text{ МПа}; R_s = 120 \text{ МПа};$$

$$\sigma_s = 240 \text{ МПа}; k = 1,2 \text{ (коэффициент запаса прочности).}$$

#### Расчет балки на прочность.

Определение реакций опор.

$$\sum X = 0; H_A = 0. \quad \sum m_A = 0; 4 \cdot M - q \cdot 6 \cdot 3 - M + R_B \cdot 8 - F \cdot 10 = 0;$$

$$80 - 20 \cdot 6 \cdot 3 - 20 + R_B \cdot 8 - 50 \cdot 10 = 0; \quad R_B = 100 \text{ кН}.$$

$$\sum Y = 0; R_A - q \cdot 6 + R_B - F = 0; R_A - 20 \cdot 6 + 100 - 50 = 0; R_A = 70 \text{ кН}.$$

Проверка:

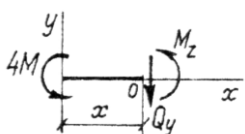
$$\sum m_B = 0; 80 - 70 \cdot 8 + 20 \cdot 6 \cdot 5 - 20 - 50 \cdot 2 = 0; \quad 0 = 0.$$

(Верно)

Построение эпюр  $Q_y$ ,  $M_z$ .

Балка имеет четыре грузовых участка.

1 грузовой участок:  $0 \leq x \leq 2 \text{ м}$ .

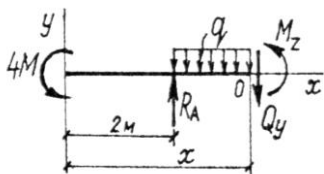


$$\sum Y = 0; \quad Q_y = 0.$$

$$\sum m_O = 0; \quad 4 \cdot M + M_z = 0;$$

$$M_z = -4 \cdot M = -80 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

2 грузовой участок:  $2 \text{ м} \leq x \leq 8 \text{ м}$ .



$$\sum Y = 0;$$

$$R_A - q \cdot (x - 2) - Q_y = 0;$$

$$Q_y = R_A - q \cdot (x - 2) = 70 - 20 \cdot (x - 2);$$

$$x = 2 \text{ м}, Q_y = 70 \text{ кН};$$

$$x = 8 \text{ м}, Q_y = -50 \text{ кН}$$

(т.к.  $Q_y$  на участке меняет знак, то  $M_z$  – имеет экстремум)

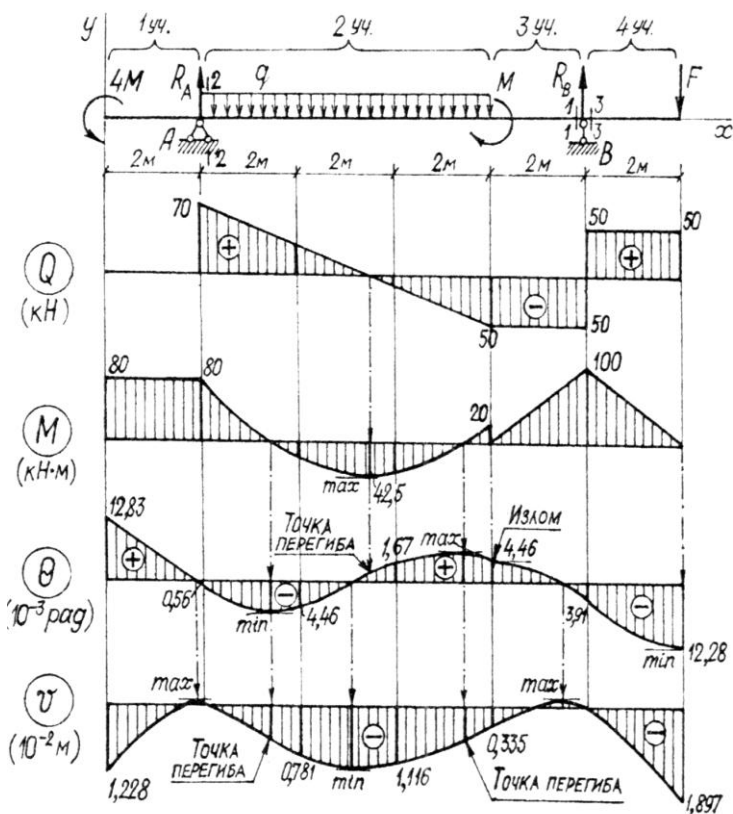


Рис. 4.21.

$$\sum m_O = 0; \quad 4 \cdot M - R_A \cdot (x-2) + q \cdot \frac{(x-2)^2}{2} + M_z = 0.$$

$$M_z = -4 \cdot M + R_A \cdot (x-2) - q \cdot \frac{(x-2)^2}{2} =$$

$$= -80 + 70 \cdot (x-2) - \frac{20 \cdot (x-2)^2}{2}.$$

Найдём положение экстремума.

$$dM_z / dx = 70 - 20 \cdot (x-2) = 0, \quad x = 5,5 \text{ м.}$$

$$x = 2 \text{ м,} \quad M_z = -80 \text{ кН·м;}$$

$$x = 5,5 \text{ м,} \quad M_z = 42,5 \text{ кН·м;}$$

$$x = 8 \text{ м,} \quad M_z = -20 \text{ кН·м.}$$

Для грузовых участков 3 и 4 вычисление  $M_z$  и  $Q_y$  выполнять аналогично, рассматривая правую отсеченную часть балки.

Эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  показаны на рис. 4.21.

*Определение положения опасных сечений.*

1-е опасное сечение:  $|M_z|_{\max} = 100 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;

2-е опасное сечение:  $|Q_y|_{\max} = 70 \text{ кН}$ ;

3-е опасное сечение:  $M_z = -100 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $Q_y = 50 \text{ кН}$ .

*Определение размеров поперечных сечений балки.*

Из условия прочности по нормальным напряжениям в опасных точках D (рис. 4.22, 4.23) 1-го опасного сечения определим требуемый момент сопротивления:

$$W_z = \frac{|M_z|_{\max}}{R} = \frac{100}{200 \cdot 10^3} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 500 \text{ см}^3, \quad W_z = 500 \text{ см}^3.$$

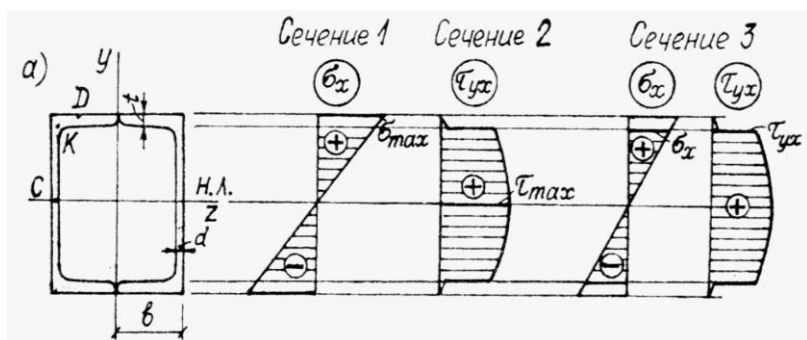


Рис. 4.22.

Поперечное сечение варианта "а" (рис. 4.22), состоит из двух швеллеров. Для одного швеллера  $W_z = \frac{500}{2} = 250 \text{ см}^3$ .

По ГОСТ 8240-89 находим: [N 24,  $W_z = 242 \text{ см}^3$ ;

2 [N 24,  $W_z = 484 \text{ см}^3$ .

Проверяем прочность принятого сечения по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_z} = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{242 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = 206,6 \text{ МПа} > R = 200 \text{ МПа}.$$

Перенапряжение

$$\frac{\sigma_{\max} - R}{R} \cdot 100 \% = \frac{206,6 - 200}{200} \cdot 100 \% = 3,3\% < 5 \%,$$

что допустимо.

Проверка прочности по касательным напряжениям в опасной точке С (рис. 3.4) 2-го опасного сечения (чистый сдвиг):

$$\tau_{yx, \max} = \frac{|Q_y|_{\max}}{I_z} \cdot \left| \frac{S_z}{b} \right|_{\max} \leq R_s,$$

$$\tau_{yx, \max} = \frac{70 \cdot 10^{-3} \cdot 139 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{2900 \cdot 2 \cdot 10^{-8} \cdot 0,56 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 30 \text{ МПа} < 120 \text{ МПа}.$$

Значение  $S_z$  для точки С, расположенной на нейтральной оси, берем из того же ГОСТа 8240-89.

Проверка прочности в опасной точке К (рис. 4.22) 3-го опасного сечения, где имеет место плоское напряжённое состояние:

$$\sigma_x = -\frac{M_z \cdot y}{I_z} = \frac{-100 \cdot 10^{-3} \cdot 11 \cdot 10^{-2}}{2900 \cdot 2 \cdot 10^{-8}} = 189,7 \text{ МПа};$$

$$\tau_{yx} = \frac{Q_y \cdot |S_z|}{I_z \cdot b} = \frac{50 \cdot 10^{-3} \cdot |9 \cdot 11,5 \cdot 2 \cdot 10^{-6}|}{2900 \cdot 2 \cdot 10^{-8} \cdot 0,56 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 15,9 \text{ МПа}.$$

По гипотезе прочности наибольших касательных напряжений имеем:  $\sigma_1 - \sigma_3 \leq R$ . Для балки при прямом поперечном изгибе полу-

чим:  $\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{yx}^2} \leq R$ ;

$$\sqrt{(189,7)^2 + 4 \cdot (15,9)^2} = 192,4 \text{ МПа} < 200 \text{ МПа}.$$

По энергетической гипотезе прочности имеем:

$$\sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{yx}^2} \leq R;$$

$$\sqrt{(189,7)^2 + 3 \cdot (15,9)^2} = 191,7 \text{ МПа} < 200 \text{ МПа}.$$

Следовательно, прочность материала балки во всех точках обеспечена.

Рассмотрим расчет сварной балки – вариант "б" с поперечным сечением, показанным на рис. 4.23.



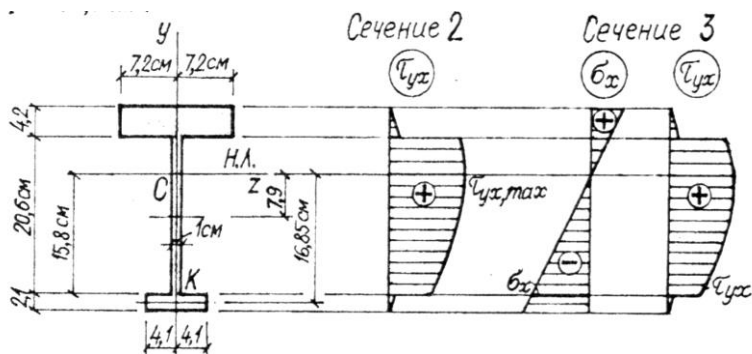


Рис. 4.24.

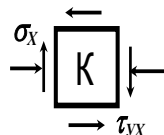
$$|\tau_{yx}|_{\max} = \frac{Q_y|_{\max}}{I_z} \left| \frac{S_z}{b} \right|_{\max} \leq R_s.$$

$$|S_z| = |8,2 \cdot 2,1 \cdot (-16,85) + 15,8 \cdot 1 \cdot (-7,9)| = 415 \text{ см}^3; \quad b = 1,0 \text{ см}.$$

$$\tau_{yx, \max} = \frac{70 \cdot 10^{-3} \cdot 415 \cdot 10^{-6}}{9017,6 \cdot 10^{-8} \cdot 1 \cdot 10^{-2}} = 32,2 \text{ МПа} < 120$$

т.е. условие прочности в точке С выполнено.

Проверка прочности в опасной точке К (рис. 4.24) 3-го опасного сечения, где имеет место плоское напряженное состояние:



$$\sigma_x = -\frac{M_z \cdot y}{I_z} = -\frac{100 \cdot 10^{-3} \cdot (-15,8 \cdot 10^{-2})}{9017,6 \cdot 10^{-8}} = -175,2 \text{ МПа},$$

$$\tau_{yx} = \frac{Q_y \cdot |S_z|}{I_z \cdot b} = \frac{50 \cdot 10^{-3} \cdot |8,2 \cdot 2,1 \cdot (-16,85) \cdot 10^{-6}|}{9017,6 \cdot 10^{-8} \cdot 1,1 \cdot 10^{-2}} = 16,1 \text{ МПа}.$$

По гипотезе прочности наибольших касательных напряжений имеем:

$$\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{yx}^2} \leq R;$$

$$\sqrt{(175,2)^2 + 4 \cdot (16,1)^2} = 178,1 \text{ МПа} < 200 \text{ МПа}.$$

По энергетической теории прочности получим:

$$\sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{yx}^2} \leq R;$$

$$\sqrt{(175,2)^2 + 3 \cdot (16,1)^2} = 177,4 \text{ МПа} < 200 \text{ МПа}.$$

Условие прочности в точке  $K$  выполнено.

Расчет по предельной несущей способности (поперечное сечение приведено на рис. 4.25).

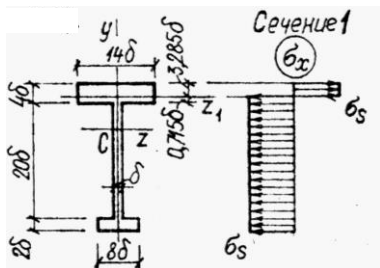


Рис. 4.25

Дано:  $\sigma_s = 240 \text{ МПа}$ ;  $k=1,2$ .

Определить размер  $\delta$ .

Площадь поперечного сечения равна

$$A = 14\delta \cdot 4\delta + \delta \cdot 20\delta + 8\delta \cdot 2\delta = 92\delta^2$$

Нейтральная ось  $z_1$  не проходит через центр тяжести сечения и делит площадь поперечного сечения  $A$  на две равновеликие площади:

$$A_1 = A_2 = \frac{A}{2} = \frac{92\delta^2}{2} = 46\delta^2.$$

Предельный момент в пластическом шарнире имеет выражение:

$$M_{np} = \sigma_s \cdot W_s.$$

Пластический момент сопротивления

$$W_s = S_1 + S_2 = 14\delta \cdot 3,285\delta \cdot \frac{3,285\delta}{2} + 14\delta \cdot 0,715\delta \cdot \frac{0,715\delta}{2} + \\ + \delta \cdot 20\delta \cdot 10,715\delta + 8\delta \cdot 2\delta \cdot 21,715\delta = 640,86\delta^3; W_s = 640,86\delta^3.$$

Из условия прочности

$$|M_z|_{\max} \cdot k = \sigma_s \cdot W_s; 100 \cdot 1,2 = 240 \cdot 10^3 \cdot 640,86\delta^3;$$

$$\delta^3 = 0,780 \text{ см}^3; \delta = 0,920 \text{ см}.$$

Сопоставив результаты расчетов методами расчетного сопротивления ( $\delta = 1,025 \text{ см}$ ) и предельной несущей способности ( $\delta = 0,920 \text{ см}$ ), видим, что более экономичное сечение получается при расчете методом предельного равновесия.

### Расчет балки на жесткость методом начальных параметров

Рассчитаем балку (рис. 4.21), с поперечным сечением (рис.4.22) из двух швеллеров №24 по ГОСТ 8240-89. Жесткость сечения балки при изгибе

$$EI_z = 2,06 \cdot 10^8 \cdot 2900 \cdot 2 \cdot 10^{-8} = 11948 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

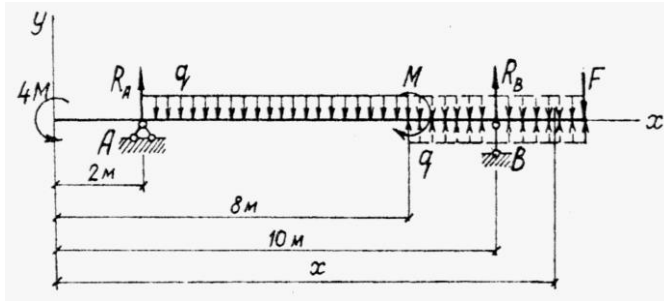


Рис. 4.26.

Уравнения метода начальных параметров для заданной балки (рис. 4.26) имеют вид:

$$EI_z v = EI_z v_0 + \frac{EI_z \theta_0 x}{1!} + \frac{M_0 x^2}{2!} + \frac{Q_0 x^3}{3!} + \frac{M(x-8)^2}{2!} + \frac{R_A(x-2)^3}{3!} + \frac{R_B(x-10)^3}{3!} - \frac{q(x-2)^4}{4!} + \frac{q(x-8)^4}{4!};$$

$$EI_z \theta = EI_z \theta_0 + \frac{M_0 x}{1!} + \frac{Q_0 x^2}{2!} + \frac{M(x-8)}{1!} + \frac{R_A(x-2)^2}{2!} + \frac{R_B(x-10)^2}{2!} - \frac{q(x-2)^3}{3!} + \frac{q(x-8)^3}{3!}.$$

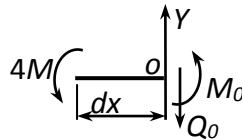
*Определение начальных параметров.*

Из условия равновесия элемента на левом конце балки находим:

$$M_0 = -4M; \quad Q_0 = 0.$$

Кинематические граничные условия имеют вид:

$$1) x = 2 \text{ м}, \quad v = 0; \quad 2) x = 10 \text{ м}, \quad v = 0.$$



Используя первое условие, получим

$$EI_z \nu_0 + EI_z \theta_0 \cdot 2 - \frac{4M \cdot 2^2}{2} = 0.$$

Используя второе условие, будем иметь:

$$EI_z \nu_0 + EI_z \theta_0 \cdot 10 - \frac{4M \cdot 10^2}{2} + \frac{R_A(10-2)^3}{6} - \frac{q(10-2)^4}{24} + \\ + \frac{M(10-8)^2}{2} + \frac{q(10-8)^4}{24} = 0.$$

Решая полученную систему уравнений, находим:

$$EI_z \nu_0 = -146,7 \text{ кН} \cdot \text{м}^3, \quad \nu_0 = -0,01228 \text{ м};$$

$$EI_z \theta_0 = 153,3 \text{ кН} \cdot \text{м}^2, \quad \theta_0 = 0,01283 \text{ рад}.$$

Определим прогиб сечения на расстоянии  $x = 6 \text{ м}$

$$\nu(6) = \frac{1}{EI_z} \left( EI_z \nu_0 + EI_z \theta_0 \cdot 6 - \frac{4M \cdot 6^2}{2!} + \frac{R_A(6-2)^3}{3!} - \frac{q(6-2)^4}{4!} \right) = \\ = \frac{1}{11948} \cdot \left( -146,7 + 153,3 \cdot 6 - \frac{80 \cdot 6^2}{2!} + \frac{70(6-2)^3}{6} - \frac{20(6-2)^4}{24} \right) = \\ = -0,011 \text{ м},$$

и угол поворота сечения на расстоянии  $x = 12 \text{ м}$  от начала координат

$$\theta(12) = \frac{1}{EI_z} \left( EI_z \theta_0 - \frac{4M \cdot 12}{1!} + \frac{R_A(12-2)^2}{2!} - \frac{q(12-2)^3}{3!} + \frac{M(12-6)}{1!} + \right. \\ \left. + \frac{q(12-8)^3}{3!} + \frac{R_B(12-10)^2}{2!} \right) = \frac{1}{11948} \cdot \left( 153,3 - \frac{80 \cdot 12}{1} + \frac{70 \cdot 10^2}{2} - \frac{20 \cdot 10^3}{6} + \right. \\ \left. + \frac{20 \cdot 4}{1} + \frac{20 \cdot 4^3}{6} + \frac{100 \cdot 2^3}{2} \right) = -0,01228 \text{ рад}.$$

Аналогично можно найти прогибы и углы поворота других сечений и по полученным данным построить эпюры  $\nu$  и  $\theta$ . Дальнейшие расчеты выполняются с применением ЭВМ.

*Исходные данные для расчета на ЭВМ по программе "IZGIB"*

- SH312 – номер группы и варианта нагрузки;  
L 12 – длина балки (м);  
EI<sub>z</sub>11948 – жесткость сечения балки ( $\kappa H \cdot m^2$ );  
N 6 – число равных отрезков, на которые разбита балка;  
NO 2 – число опор;  
ПО 0 – условие закрепления балки в начале координат:  
0 – свободный конец, 1 – шарнирная опора, 2 – защемление;  
ПН 0 – условие закрепления балки на конце, противоположном началу координат;  
L(i),D(i) 2, 0 – первая цифра – расстояние от начала координат до опоры, вторая – податливость опоры;  
F<sub>x</sub> 0 – продольная сила;  
NM 2 – количество сосредоточенных моментов;  
NF1 – количество сосредоточенных сил, не считая реакций опор;  
NQ 2 – количество равномерно распределенных нагрузок, учитывающая разгружающие нагрузки;  
AM, M 0, –80 – расстояние от начала координат до точки приложения сосредоточенного момента, знак и величина момента.  $M > 0$ , если растягивает нижние волокна;  
AF, F 12, –50 – расстояние от начала координат до точки приложения сосредоточенной силы, знак и величина сосредоточенной силы.  $F > 0$ , если создает момент, растягивающий нижние волокна;  
AQ, Q 2, –20 – расстояние от начала координат до распределенной нагрузки, знак и величина распределенной нагрузки; интенсивность  $q > 0$ , если создает момент, растягивающий нижние волокна.  
OM 1 – расчет на прямой поперечный изгиб.

ШИФР 312  
Результаты расчета по программе "IZGIB"

Начальные параметры

$$\nu_0 = -.01228 \text{ м}, \quad \theta_0 = .01283 \text{ рад};$$

$$M_0 = -80.00 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad Q_0 = .00 \text{ кН}.$$

Реакции опор (кН)

$$R(1) = 70.00$$

$$R(2) = 100.00$$

| № сечений | Координаты сечений $x$ (м) | Прогибы $\nu$ (м) | Углы поворота сечений $\theta$ (рад) | Изгибающие моменты $M$ (кН·м) | Поперечные силы $Q$ (кН) |
|-----------|----------------------------|-------------------|--------------------------------------|-------------------------------|--------------------------|
| 0         | 0.000                      | -.01228           | .01283                               | -80.00                        | .00                      |
| 1         | 2.000                      | .00000            | -.00056                              | -80.00                        | .00                      |
| 2         | 2.000                      | .00000            | -.00056                              | -80.00                        | 70.00                    |
| 3         | 4.000                      | -.00781           | -.00446                              | 20.00                         | 30.00                    |
| 4         | 6.000                      | -.01116           | .00167                               | 40.00                         | -10.00                   |
| 5         | 8.000                      | -.00335           | .00446                               | -20.00                        | -50.00                   |
| 6         | 8.000                      | -.00335           | .00446                               | .00                           | -50.00                   |
| 7         | 10.000                     | .00000            | -.00391                              | -100.00                       | -50.00                   |
| 8         | 10.000                     | .00000            | -.00391                              | -100.00                       | 50.00                    |
| 9         | 12.000                     | -.01897           | -.01228                              | .00                           | 50.00                    |

По результатам расчета на ЭВМ построены эпюры прогибов  $\nu$  и углов поворота  $\theta$  (рис. 4.21).

Проверим выполнение условия жесткости  $|\nu|_{\max} \leq [\nu]$ , где допускаемый прогиб  $[\nu] = (1/400)l = 8/400 = 0,020 \text{ м}$ .

Максимальный по модулю прогиб определяем по эпюре прогибов (рис. 4.21):

$$|\nu|_{\max} = 0,01897 \text{ м}.$$

Условие жесткости  $0,01897 \text{ м} < 0,020 \text{ м}$  выполнено.

#### **4.4.2. Контрольные вопросы для самопроверки**

1. Какие моменты инерции поперечного сечения используются при расчете балки на прочность и жесткость и как они определяются?
2. Что называется грузовым участком?
3. Каковы особенности эпюр  $Q$  и  $M$ ?
4. Как расположена нейтральная ось при прямом поперечном изгибе в упругой стадии?
5. По каким формулам определяются напряжения в точках поперечного сечения балки при прямом изгибе?
6. Как определить положение нейтральной оси при расчете балки по методу предельной несущей способности?
7. Как определяется пластический момент сопротивления сечения стержня при изгибе?
8. Какие дифференциальные зависимости между силовыми факторами при изгибе Вы знаете?
9. Какие начальные параметры входят в выражения для перемещений, найденные по методу начальных параметров?
10. Из каких условий определяются начальные параметры?

#### **4.5. Сложное сопротивление стержней.**

##### **4.5.1. Задача 5.1.**

Для консольного ломаного стержня, расчетная схема которого показана на рис. 4.27, требуется:

1. построить эпюры внутренних усилий в поперечных сечениях стержня;
2. определить форму сопротивления стержня на участках;
3. подобрать сечения стержня на участках (рис. 4.27) из условий прочности; при наличии кручения на участке принять сечение типа «б»; при отсутствии кручения на участке принять сечение типа «а», выбрав рациональную ориентацию главных центральных осей инерции сечения. Расчетное сопротивление материала стержня на участках принять равным 200 МПа.

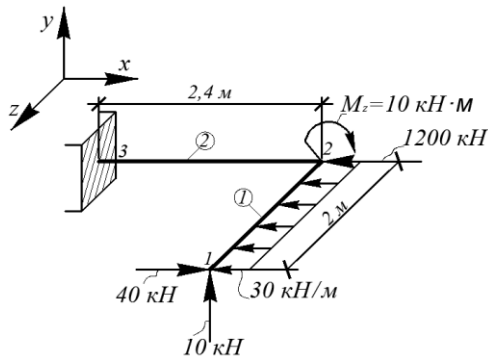


Рис. 4.27.

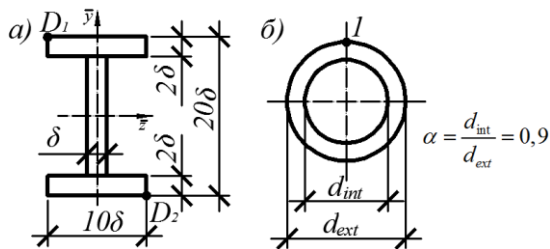


Рис. 4.28.

### Решение.

1. Построение эпюр внутренних усилий в поперечных сечениях стержня.

Обозначим узлы 1, 2, 3 рассматриваемого пространственного ломанного стержня и разделим его на участки ①, ② (см. рис. 4.27).

Рассмотрим каждый из участков, используя локальные системы координат  $x_i, y_i, z_i, i = 1, 2$ , ось  $x_i$  направлена вдоль продольной оси соответственного участка  $i$ .

Участок ①,  $0 \leq x_1 \leq 2$  м:

На рис. 4.29 а), б) изображена отсеченная часть стержня с заданно положительными продольными и поперечными силами  $N_1(x_1), Q_{y_1}(x_1), Q_{z_1}(x_1)$ , а также моментными усилиями – изгибающими моментами  $M_{z_1}(x_1), M_{y_1}(x_1)$  и крутящим моментом  $M_{x_1}(x_1) = M_t(x_1)$  в произвольном сечении  $\kappa_1$  на участке ①.

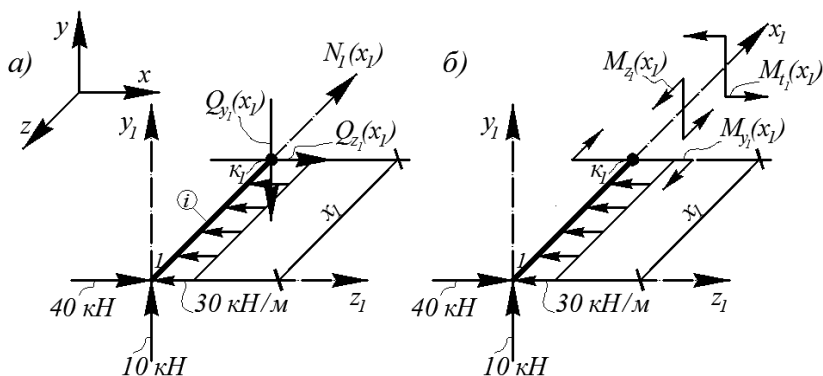


Рис. 4.29.

Используя уравнения равновесия отсеченной части стержня (или соответствующее рабочее правило [3]), получим (единицы измерения в  $\kappa\text{H}$  и  $\kappa\text{H}^*\text{м}$ ):

$$\begin{cases} N_1(x_1) = 0, \\ Q_{y_1}(x_1) = 10, \\ Q_{z_1}(x_1) = -40 + 30 \cdot x; \end{cases} \quad \begin{cases} M_{t_1}(x_1) = 0, \\ M_{y_1}(x_1) = 40 \cdot x_1 - 30 \frac{x_1^2}{2}, \\ M_{z_1}(x_1) = 10 \cdot x_1. \end{cases} \quad (4.7)$$

Участок ②,  $0 \leq x_2 \leq 2,4 \text{ м}$ :

Выбирая произвольное сечение  $\kappa_2$  на участке ② и отсекая свободную часть консоли (рис. 4.30), получим:

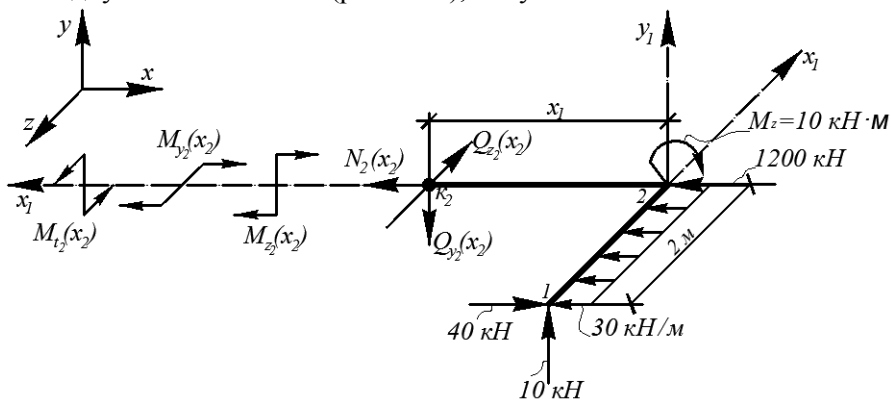


Рис. 4.30.

$$\begin{cases} N_2(x_2) = -1220, \\ Q_{y_2}(x_2) = 10, \\ Q_{z_2}(x_1) = \emptyset; \end{cases} \quad \begin{cases} M_{t_2}(x_2) = -20, \\ M_{y_2}(x_2) = 20, \\ M_{z_2}(x_2) = -10 + 10 \cdot x_2. \end{cases} \quad (4.8)$$

Используя полученные выражения (4.7), (4.8), строим эпюру внутренних усилий в сечениях пространственного ломанного стержня (эпюры  $Q_{y_i}(x_i)$ ,  $Q_{z_i}(x_i)$  показаны на эпюре  $Q$ ; эпюры  $M_{y_i}(x_i)$ ,  $M_{z_i}(x_i)$  совмещены и показаны на эпюре  $M$ ).

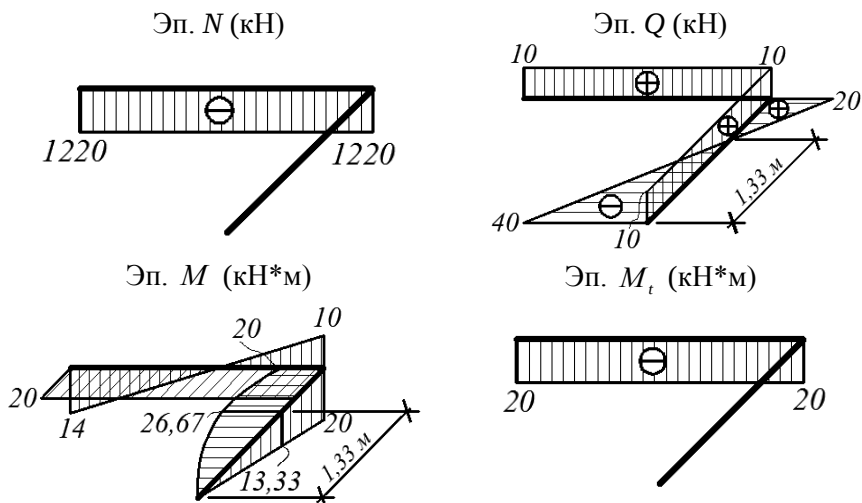


Рис. 4.31.

## 2. Определение формы сопротивления стержня на участках.

Участок ①: стержень подвергается косому изгибу.

Участок ②: стержень испытывает общий случай сложного сопротивления (косой изгиб с кручением и осевым сжатием).

## 3. Подбор сечений стержня на участках.

Участок ①. Стержень подвергается косому изгибу.

Сечения, подозреваемые на опасные:

$$x_1 = 1,33 \text{ м}; \quad M_{y_1} = 26,67 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_{z_1} = 13,33 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$x_2 = 2 \text{ м}; \quad M_{y_1} = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_{z_1} = 20 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

Для сечения с координатой  $x_1 = 1,33 \text{ м}$   $M_{y_1} > M_{z_1}$ . Поэтому рациональной ориентацией главных центральных осей инерции сечения типа «а» на участке ① будет такая, при которой ось, отно-

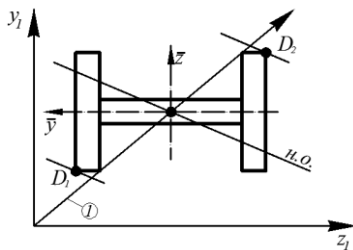
сительно которой момент сопротивления сечения максимален, параллельна оси  $y_1$ . Определим моменты инерции и моменты сопротивления сечения типа «а» относительно осей  $\bar{y}, \bar{z}$ .

$$I_{\bar{y}} = 2 \cdot \frac{2\delta \cdot (10\delta)^3}{12} + \frac{20\delta \cdot \delta^3}{12} = 335\delta^4;$$

$$I_{\bar{z}} = 2 \cdot \left( \frac{10\delta \cdot (2\delta)^3}{12} + 20\delta^2 \cdot (11\delta)^2 \right) + \frac{\delta \cdot (20\delta)^3}{12} = 5640\delta^4;$$

$$W_{\bar{y}} = \frac{I_{\bar{y}}}{z_{\max}} = \frac{335\delta^4}{5\delta} = 67\delta^3; \quad W_{\bar{z}} = \frac{I_{\bar{z}}}{y_{\max}} = \frac{5640\delta^4}{12\delta} = 470\delta^3;$$

Таким образом, на участке ① при рассмотрении сечения с координатой  $x_1 = 1,33$  м ось  $\bar{z}$  должна быть параллельна оси  $y_1$  (рис. 4.32).



Условие прочности по максимальным нормальным напряжениям в одной из опасных точек  $D_1, D_2$  имеет вид:

$$\frac{M_{y_1}}{W_{\bar{z}}} + \frac{M_{z_1}}{W_{\bar{y}}} \leq R; \quad (4.9)$$

Рис. 4.32.

После подстановок получим

$$\frac{26,67}{470\delta^3} + \frac{11,33}{67\delta^3} \leq 200 \cdot 10^3.$$

Отсюда

$$\delta' \geq \sqrt[3]{\frac{26,67}{470} + \frac{11,33}{67} / 200 \cdot 10^3} = 0,0104 \text{ м.}$$

Для сечения с координатой  $x_1 = 2$  м  $M_{y_1} = M_{z_1} = 20$  кН·м, поэтому расположение главных осей не имеет значения. Из условия (4.9) получим

$$\frac{20}{470\delta^3} + \frac{20}{67\delta^3} \leq 200 \cdot 10^3.$$

Отсюда

$$\delta'' \geq \sqrt[3]{\frac{20}{470} + \frac{20}{67} / 200 \cdot 10^3} = 0,011947 \text{ м.}$$

Таким образом, сечение с координатой  $x_1 = 2$  м оказалось более опасным. Окончательно выбираем параметр размеров

$$\delta = \max(\delta', \delta'') = 0,011947 \text{ м.}$$

Участок ②. Стержень испытывает случай сложного сопротивления (при отсутствии  $Q_{z_2}$ ). Усилия в опасном сечении с координатой  $x_1 = 2,4$  м равны:

$$M_{y_2} = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_{z_2} = 14 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_t = 20 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$Q_{y_2}(x_2) = 10 \text{ кН}; \quad Q_{z_2}(x_1) = \emptyset; \quad N_2(x_2) = -1220 \text{ кН.}$$

Максимальные по модулю нормальные и касательные напряжения (без учета составляющей от изгиба) в опасной точке на контуре сечения типа б) определяется соотношениями

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|N|}{A} + \frac{M^b}{W}, \quad \tau_{\max} = \frac{M_t}{W_\rho} \quad (4.10)$$

где  $A = \frac{\pi d_{\text{ext}}^2}{4}(1 - \alpha^2)$ ;  $W = \frac{\pi d_{\text{ext}}^3}{32}(1 - \alpha^4)$ ;  $W_\rho = 2W$ ,

$$M^b = \sqrt{M_{y_2}^2 + M_{z_2}^2} = 24,43 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Условие прочности по 3-й теории прочности записывается в виде

$$\sqrt{(|\sigma|_{\max})^2 + 4\tau_{\max}^2} \leq R. \quad (4.11)$$

Учитывая соотношения (4.10) и найденные значения внутренних усилий, запишем условие прочности (4.11) в виде:

$$f(d_{\text{ext}}) = \sqrt{\left( \frac{1220}{\frac{\pi d_{\text{ext}}^2}{4}(1-0,81)} + \frac{24,4}{\frac{\pi d_{\text{ext}}^3}{32}(1-0,6561)} \right)^2 + \left( \frac{20}{\frac{\pi d_{\text{ext}}^3}{32}(1-0,6561)} \right)^2} - 200 \cdot 10^3 \leq 0. \quad (4.12)$$

Вычисляя  $f(d_{\text{ext}})$  при различных значениях  $d_{\text{ext}}$  получим  $f(0,1) = 394847$ ;  $f(0,2) = 103942,7$ ;  $f(0,3) = -80342,5$ . Используя линейную аппроксимацию функции  $f(d_{\text{ext}})$  в интервале  $[103942,7, -80342,5]$ , получим приближенно корень уравнения (4.12), т.е. требуемый размер

$$d_{\text{ext}} = 0,2 + \frac{103942,7 \cdot 0,1}{103942,7 + 80342,5} = 0,2564 \text{ м.}$$

Полученное решение можно уточнить, вычисляя значения функции  $f(0,2564)$  и проводя повторную линеаризацию  $f(d_{ext})$  в уточненном интервале, на концах которого функция  $f(d_{ext})$  имеет значения разного знака.

#### 4.5.2. Задача 5.2.

Короткий жесткий стержень, поперечное сечение которого изображено на рис. 4.33, сжимается силой  $F$ , параллельной продольной оси стержня и проходящей через точку  $A$  поперечного сечения стержня. Стержень выполнен из материала, разносопротивляющегося растяжению и сжатию  $R_t = 2 \text{ МПа}$ ,  $R_c = 15 \text{ МПа}$ .

Требуется:

- 1) найти положение нейтральной оси поперечного сечения стержня;
- 2) из условий прочности найти величину допускаемой нагрузки  $[F]$ ;
- 3) при действии допускаемой нагрузки  $[F]$  построить эпюру  $\sigma$  в поперечном сечении стержня;
- 4) построить ядро рассматриваемого поперечного сечения.

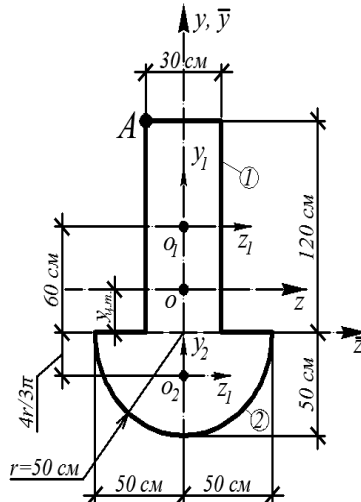


Рис. 4.33.

Решение

- ### 1. Определение положения центра тяжести сечения.

Рассматриваемое сечение имеет одну ось симметрии (ось  $y$ ). Следовательно, ось  $y$  проходит через центр тяжести сечения и является главной центральной осью инерции. Для определения второй главной центральной оси инерции найдем положение центра тяжести сечения. Выберем вспомогательную систему координат  $\bar{z}, \bar{y}$  (ось  $\bar{z}$  направлена вдоль горизонтального диаметра полукруга, ось  $\bar{y}$  совмещена с осью  $y$ ).

Разобьем сечение на две части: ① – прямоугольник  $120 \times 30$  см ② – полукруг с радиусом  $r = 50$  см;  $O_1, O_2$  – центры тяжести фигур ①, ②. Пусть  $\bar{z}_c, \bar{y}_c$  – координаты центра тяжести  $O$  всего сечения. В силу симметрии  $\bar{z}_c = 0$ . Координата  $\bar{y}_c$  определяется по формуле (3.17):

$$\bar{y}_c = \frac{S_{\bar{z}}}{A} = \frac{120 \cdot 30 \cdot 60 - \pi \frac{50^2}{2} \cdot \frac{4 \cdot 50}{3 \cdot \pi}}{120 \cdot 30 + \pi \frac{50^2}{2}} = 17,625 \text{ см}$$

2. Определение главных центральных моментов инерции сечения.

Оси  $y, z$  – главные центральные. Используя известные формулы для моментов инерции прямоугольника и полукруга, а также формулы перехода при параллельном переносе осей (см. параграф 3.3.1.), получим:

$$\begin{aligned} I_y &= \frac{120 \cdot 30^3}{12} + \frac{\pi \cdot 50^4}{8} = 2724369,3 \text{ см}^4; \\ I_z &= \frac{30 \cdot 120^3}{12} + (60 - 17,625)^2 \cdot 30 \cdot 120 + \frac{\pi \cdot 50^4}{8} + 2 \cdot 17,625 \cdot \frac{\pi \cdot 50^2}{2} \cdot \frac{4 \cdot 50}{3 \cdot \pi} + \\ &\quad + 17,625^2 \cdot \frac{\pi \cdot 50^2}{2} = 17396058,4 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

3. Определение нейтральной оси поперечного сечения стержня.

Квадраты радиусов инерции рассматриваемого сечения равны:

$$\begin{aligned} i_y^2 &= \frac{I_y}{A} = \frac{2724369,3}{120 \cdot 30 + \frac{\pi \cdot 50^2}{2}} = 361,95 \text{ см}^2; \\ i_z^2 &= \frac{I_z}{A} = \frac{17396058,4}{7527} = 2311,15 \text{ см}^2; \end{aligned}$$

Согласно рис. 4.33  $y_F = 120 - 17,625 = 102,375 \text{ см}$ ,  $z_F = -15 \text{ см}$ . Отрезки, отсекаемые нейтральной осью, на координатных осях вычисляются согласно соотношениям (3.46):

$$a_y = -\frac{2311,15}{102,375} = -22,75 \text{ см}; \quad a_z = -\frac{361,95}{-15} = 24,12 \text{ см}.$$

Положение нейтральной оси (н.о.) показано на рис. 4.34.

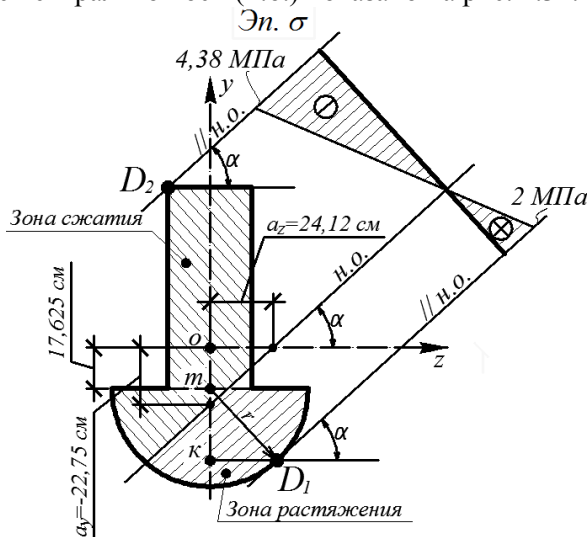


Рис. 4.34.

4. Определение величины допускаемой силы  $[F]$  из условий прочности.

Проводя касательные к сечению, параллельные нейтральной оси, находим наиболее удаленные от нейтральной оси (а, значит, и наиболее направленные) точки  $D_1$ ,  $D_2$  сечения в зонах растяжения и сжатия. Из рис. 4.34 следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|a_y|}{a_z} = \frac{22,75}{24,12} = 0,9432;$$

$\alpha = 43,325^\circ$ ;  $\sin \alpha = 0,686$ ;  $\cos \alpha = 0,727$ . Координаты опасных точек  $D_1$ ,  $D_2$  равны соответственно:

$$y^{D_1} = -OM - r \cdot \cos \alpha = -17,625 - 50 \cdot 0,727 = -53,975 \text{ см};$$

$$z^{D_1} = r \cdot \sin \alpha = 50 \cdot 0,686 = 34,3 \text{ см};$$

$$y^{D_2} = y_F = 102,375 \text{ см}; \quad z^{D_2} = z_F = -15 \text{ см}.$$

Условия прочности в опасных точках  $D_1, D_2$  записывается в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_{\max}^{расм} = \sigma^{D_1} &= \frac{-F}{A} \left( 1 + \frac{y_F \cdot y^{D_1}}{i_z^2} + \frac{z_F \cdot z^{D_1}}{i_y^2} \right) = \\ &= \frac{-F}{120 \cdot 30 + \frac{\pi \cdot 50^2}{2}} \left( 1 + \frac{102,375 \cdot (-53,975)}{2311,15} + \frac{(-15) \cdot 34,3}{361,95} \right) \leq R_t; \\ \frac{F \cdot 2,81}{7527 \text{ см}^2} &\leq 2 \text{ МПа} = 0,2 \text{ кН/см}^2; \quad (a) \\ |\sigma_{\max}^{сж}| &= |\sigma^{D_2}| = \left| \frac{-F}{A} \left( 1 + \frac{y_F \cdot y^{D_2}}{i_z^2} + \frac{z_F \cdot z^{D_2}}{i_y^2} \right) \right| = \\ &= \frac{-F}{7527 \text{ см}^2} \left( 1 + \frac{102,375^2}{2311,15} + \frac{(-15)^2}{361,95} \right) \leq R_c; \\ \frac{F \cdot 6,15}{7527 \text{ см}^2} &\leq 12 \text{ МПа} = 1,2 \text{ кН/см}^2;\end{aligned}$$

Из соотношений (а), (б) получим следующие условия для выбора допускаемой сжимающей силы:

$$[F]' \leq \frac{0,2 \cdot 7527}{2,81} = 535,73 \text{ кН}; \quad [F]'' \leq \frac{1,2 \cdot 7527}{6,15} = 1468,68 \text{ кН}.$$

Принимаем окончательно  $[F] = \min([F]', [F]'') = 535,73 \text{ кН}$ .

Эпюра нормальных напряжений в сечениях при найденной допускаемой силе  $[F] = 535,73 \text{ кН}$  представлена на рис. 4.34. Как следует из рисунка, материал стержня в зоне сжатия существенно недогружен.

5. Построение ядра рассматриваемого поперечного сечения стержня.

Алгоритм построения ядра сечения заключается в следующем.

1) Сечение описывается семейством касательных, для каждой из которых находятся отрезки  $a_z^j, a_y^j$   $j = 1, \dots, n$  ( $n$  – число касательных), отсекаемые ею на координатных осях.

2) Для каждой из касательных (в предположении, что она является нейтральной осью) находятся координаты  $z_{Fj}^j, y_{Fj}^j$  точки

приложения силы  $F$ , то есть точки границы ядра сечения по формуле (3.49). Результаты вычислений удобно заносить в таблицу.

3) Соединяя полученные точки, построим границу ядра сечения, а следовательно, и само ядро сечения.

Касательные к рассматриваемому сечению показаны на рис. 4.35. В качестве примера на рис. 4.35 показаны отрезки, отсекаемые касательными 1, 2 на координатных осях.

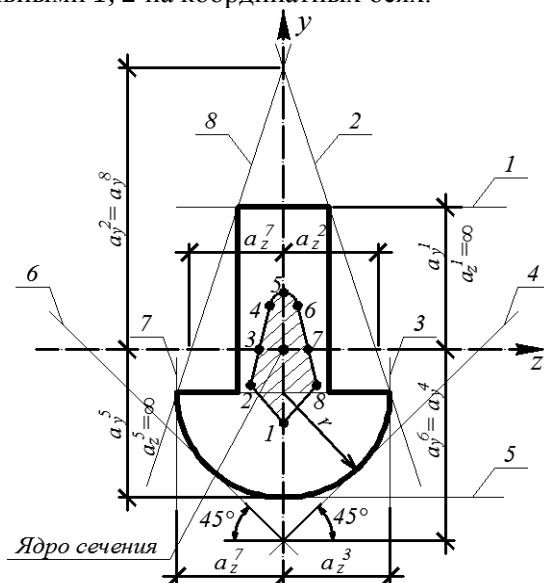


Рис. 4.35.

Результаты вычислений  $a_z^j$ ,  $a_y^j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , приведены в таблице 4.1. Точки границы ядра сечения, соответствующие касательным  $j = 1, \dots, n$ , на рис. 4.35, имеют те же номера.

Таблица 4.1.

| № касат | $a_y^j$ см | $a_z^j$ см | $y_{FЯ}^j$ см | $z_{FЯ}^j$ см |
|---------|------------|------------|---------------|---------------|
| 1       | 102,375    | $\infty$   | -22,57        | 0             |
| 2       | 153,8      | 29,86      | -15,03        | -12,12        |
| 3       | $\infty$   | 50         | 0             | -7,24         |
| 4       | -88,36     | 88,36      | 26,15         | -4,1          |
| 5       | -67,625    | $\infty$   | 34,15         | 0             |
| 6       | -88,36     | -88,36     | 26,15         | 4,1           |
| 7       | $\infty$   | -50        | 0             | 7,24          |
| 8       | 153,8      | -29,86     | -15,03        | 12,12         |

Ядро рассматриваемого сечения – заштрихованная фигура на рис. 4.35. В том случае, когда при переходе касательной  $j$  в положение  $j + 1$  она вращается вокруг полюса (например, при переходе касательной 1 в положение касательной 2), линия границы ядра сечения – прямая. В силу симметрии сечения точки 2 и 8, 3 и 7, 4 и 6 расположены симметрично относительно оси  $y$ .

#### **4.5.3. Контрольные вопросы для самопроверки**

1. Какой случай сложного сопротивления стержня называется косым изгибом?
2. Какие напряжения возникают в поперечном сечении стержня при косом изгибе и как они определяются?
3. Как определяется положение нейтральной оси при косом изгибе?
4. В каких точках поперечного сечения возникают наибольшие нормальные напряжения при косом изгибе?
5. Как определяются перемещения поперечных сечений и проводится расчет балок на жесткость при косом изгибе?
6. Какой случай напряженного состояния реализуется в точках контура круглого сечения при изгибе с кручением?
7. Какие случаи напряженного состояния реализуется в точках контура прямоугольного сечения при изгибе с кручением?
8. Как определяются перемещения поперечных сечений и проводится расчет балок на жесткость при изгибе с кручением?
9. Какой знак имеют нормальные напряжения в центре тяжести сечения при внецентренном растяжении или сжатии?
10. Как определяется очертание и положение нейтральной оси при внецентренном растяжении-сжатии стержня?
11. Как проводится подбор размеров круглого и круглого кольцевого поперечных сечений в общем случае сложного сопротивления стержня?
12. Как проводится подбор размеров прямоугольного поперечного сечения в общем случае сложного сопротивления стержня?

## 4. 6. Расчёт центрально-сжатого стержня на устойчивость. Построение эпюр внутренних усилий и определение перемещений сечений плоского ломаного стержня и стержневой системы.

### 4. 6.1. Задача 6.1.

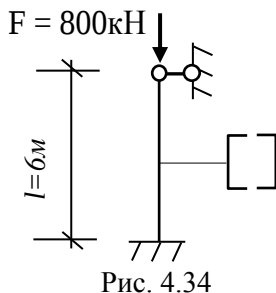


Рис. 4.34

Сжатая стойка, расчетная схема которой представлена на рис.4.34, выполнена из прокатных элементов, материал Ст 3,  $R = 200 \text{ МПа}$ .

Требуется:

1. С помощью таблицы коэффициентов продольного изгиба подобрать поперечное сечение стойки заданной формы.
2. Подбранное сечение проверить на прочность при наличии ослабления  $A_{nt} = 0,85 \cdot A_{br}$ .
3. Определить критическую силу и коэффициент запаса устойчивости.
4. Для выбранного сечения построить график зависимости критической силы и критического напряжения от длины и гибкости стержня, изменяя гибкость от 0 до 200.

### Решение

Расчёт центрально сжатого стержня на устойчивость производится методом последовательных приближений.

1. Зададим коэффициент продольного изгиба в первом приближении  $\varphi = 0,6$ . Выразим из условия устойчивости (3.58) площадь поперечного сечения стойки:

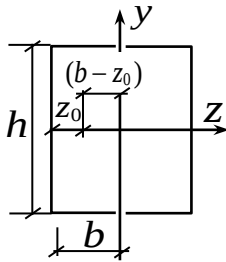
$$A = \frac{F}{\varphi R} = \frac{800 \cdot 10^4}{0,6 \cdot 200 \cdot 10^3} = 66,7 \text{ см}^2 \Rightarrow \frac{A}{2} = \frac{66,7}{2} = 33,35 \text{ см}^2.$$

По сортаменту выбираем швеллер с ближайшим значением площади, а именно 2[№27:  $A = 35,2 \text{ см}^2$ ,  $I_y = 262 \text{ см}^4$ ,  $i_z = 10,9 \text{ см}$ ,  $b = 95 \text{ мм}$ ,  $z_0 = 2,47 \text{ см}$ .

В данном случае потеря устойчивости будет происходить в плоскости  $xOy$ , т.к. очевидно, что  $I_y < I_z \Rightarrow i_y < i_z$ .

$$I_y = 2 \cdot (262 + 35,2 \cdot (9,5 - 2,47)^2) = 4003,2 \text{ см}^4,$$

$$i_y = \sqrt{\frac{4003,2}{2 \cdot 35,2}} = 7,54 \text{ см}, i_y < i_z.$$



$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 600}{7,54} = 55,7.$$

С помощью СНиП определяется значение коэффициента продольного изгиба  $\varphi$ .

$$\lambda = 50 \quad \varphi = 0,869,$$

$$\lambda = 60 \quad \varphi = 0,827.$$

Для  $\lambda = 55,7$  определим  $\varphi$  с помощью интерполяции:

Рис. 4.35.

$$\varphi = 0,827 + \frac{(0,869 - 0,827)}{10} (60 - 55,7) = 0,827 + 0,0044(4,3) = 0,846.$$

Выполним проверку условия устойчивости (3.58):

$$\frac{800 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 35,2 \cdot 10^{-4}} \leq 0,846 \cdot 200,$$

$$113,62 \text{ МПа} < 169,2 \text{ МПа},$$

условие (3.58) выполняется, но имеет место большое недонапряжение. Выполним еще одну итерацию. Во втором приближении коэффициент продольного изгиба находится как среднеарифметическое значение между заданным в начале предыдущей итерации ( $\varphi = 0,6$ ) и вычисленным для швеллера №27 ( $\varphi = 0,846$ ).

$$\varphi = \frac{0,6 + 0,846}{2} = 0,723. \text{ Последующие вычисления аналогичны}$$

вычислениям, изложенным выше.

$$A = \frac{F}{\varphi \cdot R} = \frac{800 \cdot 10^4}{0,723 \cdot 200 \cdot 10^3} = 55,33 \text{ см}^2 \Rightarrow \frac{A}{2} = \frac{55,33}{2} = 27,7 \text{ см}^2.$$

По сортаменту выбираем швеллер с ближайшим значением площади, а именно 2[N222]:  $A = 26,7 \text{ см}^2$ ,  $I_y = 151 \text{ см}^4$ ,

$$i_z = i_x = 8,89 \text{ см}, b = 82 \text{ мм}, z_0 = 2,21 \text{ см}.$$

Определим значение момента инерции относительно оси  $y$

$$I_y = 2 \cdot (151 + 26,7 \cdot (8,2 - 2,21)^2) = 2 \cdot 1109 \text{ см}^4,$$

$$i_y = \sqrt{\frac{2 \cdot 1109}{2 \cdot 26,7}} = 6,5 \text{ см} \Rightarrow i_y < i_z.$$

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 600}{6,5} = 64,6.$$

С помощью СНиП определяется значение коэффициента продольного изгиба  $\varphi$ .

$$\lambda = 60 \quad \varphi = 0,827,$$

$$\lambda = 70 \quad \varphi = 0,782.$$

Для  $\lambda = 64,6$  определим  $\varphi$  с помощью интерполяции:

$$\varphi = 0,782 + \frac{(0,827 - 0,782)}{10}(70 - 64,6) = 0,806.$$

Выполним проверку условия устойчивости (3.58):

$$\frac{800 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 26,7 \cdot 10^{-4}} \leq 0,806 \cdot 200,$$

$$150 \text{ МПа} < 161,2 \text{ МПа},$$

условие (3.58) выполняется, но имеет место небольшое недонапряжение. Проверим 2/№20:  $A = 23,4 \text{ см}^2$ ,  $I_y = 113 \text{ см}^4$ ,  $i_z = i_x = 8,07 \text{ см}$ ,  $b = 76 \text{ мм}$ ,  $z_0 = 2,07 \text{ см}$ .

Определим значение момента инерции относительно оси  $y$

$$I_y = 2 \cdot (113 + 23,4 \cdot (7,6 - 2,07)^2) = 2 \cdot 728,8 \text{ см}^4,$$

$$i_y = \sqrt{\frac{2 \cdot 728,8}{2 \cdot 23,4}} = 5,58 \text{ см} \Rightarrow i_y < i_z.$$

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 600}{5,58} = 75,3.$$

С помощью СНиП определяется значение коэффициента продольного изгиба  $\varphi$ .

$$\lambda = 70 \quad \varphi = 0,782,$$

$$\lambda = 80 \quad \varphi = 0,734.$$

Для  $\lambda = 75,3$  определим  $\varphi$  с помощью интерполяции:

$$\varphi = 0,734 + \frac{(0,782 - 0,734)}{10}(80 - 75,3) = 0,757.$$

Выполним проверку условия (3.58):

$$\frac{800 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 23,4 \cdot 10^{-4}} \leq 0,757 \cdot 200,$$

$$170,9 \text{ МПа} > 151,4 \text{ МПа}.$$

Таким образом, условие устойчивости (3.58) не выполняется для 2/№20, поэтому окончательно принимаем 2/№22. Расчет на устойчивость закончен.

2. Выполним проверку прочности выбранного сечения при наличии ослабления  $A_{nt} = 0,85 \cdot A_{br}$ .

$$\sigma = \frac{F}{0,85 \cdot A} = \frac{800 \cdot 10^{-3}}{0,85 \cdot 2 \cdot 26,7 \cdot 10^{-4}} = 176 \text{ МПа} < 200 \text{ МПа}.$$

Сечение, выбранное из условия устойчивости, удовлетворяет условию прочности, корректировку сечения проводить не требуется.

3. Определение критической силы и коэффициента запаса устойчивости.

Предельная гибкость для Ст 3.

$$\lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{pr}}} = 3,14 \sqrt{\frac{2,006 \cdot 10^5}{200}} \approx 100.$$

Сравним гибкость, найденную в п.1. расчета на устойчивость с предельной гибкостью:  $\lambda = 64,6 < 100$ . В случае, когда гибкость стержня меньше предельной гибкости, определение критической силы производят с помощью эмпирической зависимости Ясинского (3.56):

$$\sigma_{cr} = a - b \cdot \lambda = 310 - 1,16 \cdot 64,6 = 235,064 \text{ МПа},$$

$$F_{cr} = \sigma_{cr} \cdot A = 235,064 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 26,7 \cdot 10^{-4} = 1255,2 \text{ кН}.$$

Определим коэффициент запаса устойчивости.

$$k_{st} = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{1255,2}{800} = 1,6.$$

4. Для выбранного сечения построим график зависимости критической силы и критического напряжения от длины и гибкости стержня, изменяя гибкость от 0 до 200 (рис. 4.36).

Поперечное сечение состоит из двух прокатных профилей 2/№22: площадь одного профиля  $A = 26,7 \text{ см}^2$ , минимальный момент инерции всего сечения, состоящего из двух профилей  $I_{min} = 2218 \text{ см}^4$  и минимальный радиус инерции  $i_{min} = 6,5 \text{ см}$ .

Задавая гибкость стержня 62,4 ( $\lambda_{min}$  для Ст 3.), 100, 150, 200 будем получать соответствующую этим гибкостям длину стержня.

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{min}} \Rightarrow l = \frac{\lambda \cdot i_{min}}{\mu}.$$

В интервале  $61,4 \leq \lambda \leq 100$  определение критических значений следует производить с помощью формулы Ясинского:

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda, F_{cr} = \sigma_{cr} A.$$

В интервале  $100 \leq \lambda \leq 200$  определение критических значений следует производить с помощью формулы Эйлера.

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}.$$

Для удобства сведём результаты расчёта в таблицу 4.2.

Таблица 4.2.

| $\lambda$ | $l$ [м] | $\sigma_{cr}$ [МПа] | $F_{cr}$ [кН] |
|-----------|---------|---------------------|---------------|
| 61,4      | 5,7     | 240                 | 1281,6        |
| 64,6      | 6       | 235,04              | 1255,2        |
| 100       | 9,3     | 196                 | 1046,6        |
| 150       | 13,95   | 85,9                | 458,7         |
| 200       | 18,6    | 48,3                | 258           |

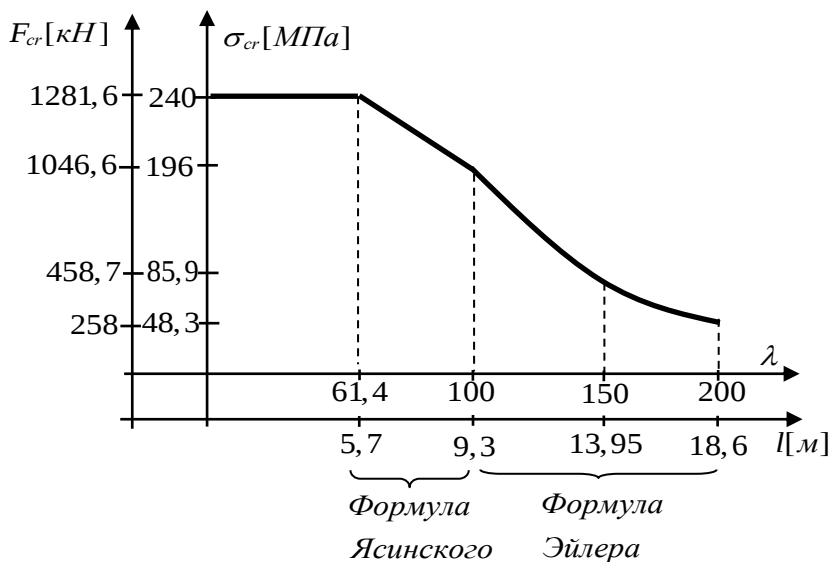


Рис. 4.36.

#### 4. 6. 2. Задача 6. 2.

Сжатая стойка, расчетная схема и поперечное сечение которой показаны на рисунке 4.37., выполнена из материала Ст 3. Коэффициент запаса устойчивости  $k_{st} = 1,3$ .

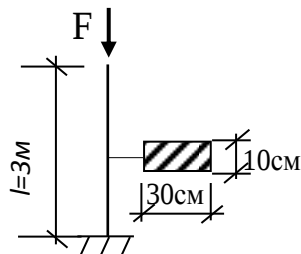


Рис. 4.37

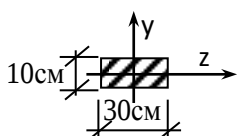
Требуется: из расчёта на устойчивость определить допустимое значение нагрузки  $F$ .

Решение

Допустимое значение нагрузки находят по формуле

$$F_{adm} = \frac{F_{cr}}{k_{st}}.$$

Критическую силу  $F_{cr}$  находим либо по формуле Эйлера (3.51), либо с помощью зависимости Ясинского (3.56). Выбор формулы зависит от величины гибкости стержня.



$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}}.$$

Определим минимальный радиус инерции заданного сечения. Очевидно, что  $i_z < i_y$ , т.к. ось  $z$  перпендикулярна короткой стороне сечения.

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{30 \cdot 10^3}{12} = 2500 \text{ см}^4, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{2500}{10 \cdot 30}} = 2,886 \text{ см}.$$

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 300}{2,886} = 207,9.$$

Предельная гибкости для Ст 3.  $\lambda_0 \approx 100$ . Отсюда  $\lambda > \lambda_0$ , тогда критическую силу определим с помощью формулы Эйлера.

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}.$$

В данном случае для СТ 3  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

$$F_{cr} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 2500 \cdot 10^{-8}}{(2 \cdot 3)^2} = 1369,4 \text{ кН}.$$

Осталось определить только допустимое значение нагрузки.

$$F_{adm} = \frac{F_{cr}}{k_{st}} = \frac{1369,4}{1,3} = 1053,4 \text{ кН}.$$

### 6.3. Задача 6.3

Для ломаного стержня, расчетная схема которого приведена на рис 4.38, построить эпюры внутренних усилий и определить полное линейное перемещение сечения 1-1 и угол поворота сечения 2-2 от заданной нагрузки.

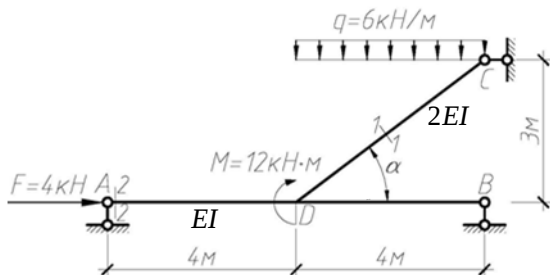


Рис. 4.38.

1. Построение эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил от заданной нагрузки.

Отбросив опорные связи и заменив их реакциями этих связей, (рис. 4.39) составляем уравнения равновесия, из которых находим реакции опор.

$$\sum M_0 = 0: -V_B \cdot 8 - F \cdot 3 + q \cdot 4 \cdot 6 + M = 0;$$

$$V_B = \frac{-F \cdot 3 + q \cdot 4 \cdot 6 + M}{8} = \frac{-4 \cdot 3 + 6 \cdot 4 \cdot 6 + 12}{8} = \frac{114}{8} = 14,25 \text{ (кН)};$$

$$\sum M_c = 0: -V_A \cdot 8 - F \cdot 3 + q \cdot 4 \cdot 2 - M = 0;$$

$$V_A = \frac{-F \cdot 3 + q \cdot 4 \cdot 2 + M}{8} = \frac{-4 \cdot 3 + 6 \cdot 4 \cdot 2 - 12}{8} = \frac{48}{8} = 6 \text{ (кН)};$$

$$\sum X = 0: F - H_c = 0; \quad H_c = F = 4 \text{ (кН)}.$$

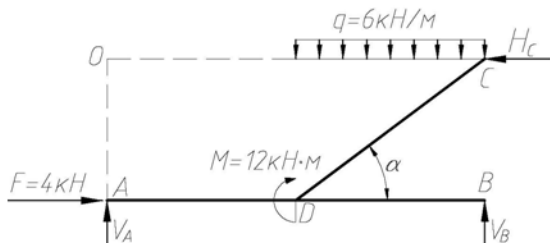


Рис. 4.39.

При действии заданной нагрузки ломаный стержень имеет 3 грузовых участка AD, BD, CD. Для построения эпюр внутренних усилий на участке CD, применяя метод сечений, рассмотрим равновесие отсеченной части, показанной на рис. 4.40. Выберем начало координат в точке C, ось x локальной системы координат направим вдоль наклонного участка CD, влево. Тогда для рассматриваемого

участка  $0 \leq x \leq 5 \text{ м}$ . Заменяв в сечении действие отброшенной части внутренними усилиями  $M_F(x)$ ,  $Q_F(x)$ ,  $N_F(x)$  положительного направления, составим уравнения равновесия для оставленной части

$$\sum m_0 = 0; \sum x_0 = 0; \sum Y_0 = 0,$$

из которых находим:

$$M_F(x) = H_c x \sin \alpha - q \frac{(x \cos \alpha)^2}{2};$$

$$Q_F(x) = -H_c \sin \alpha + q(x \cos \alpha) \cos \alpha;$$

$$N_F(x) = -H_c \cos \alpha - q(x \cos \alpha) \sin \alpha.$$

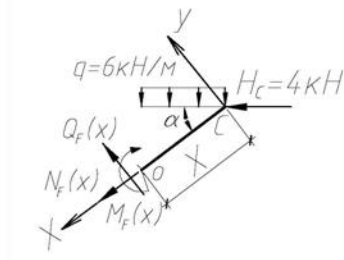


Рис. 4.40.

Из полученных выражений видно, что эпюра  $M_F(x)$  на участке очерчивается квадратной параболой, а эпюры  $Q_F(x)$ ,  $N_F(x)$ , - наклонными прямыми. Находим значения внутренних усилий в характерных сечениях участка, учитывая, что  $\sin \alpha = 0,6$ ;  $\cos \alpha = 0,8$ .

$$x = 0, M_F = 0;$$

При

$$Q_F = -4 \cdot 0,6 = -2,4 \text{ (кН)}; \quad N_F = -4 \cdot 0,8 = -3,2 \text{ (кН)}.$$

При

$$x = 2,5 \text{ м} \quad M_F = 4 \cdot 2,5 \cdot 0,6 - 6 \frac{(2,5 \cdot 0,8)^2}{2} = 6 - 12 = -6 \text{ (кН} \cdot \text{м)}.$$

При

$$x = 5 \text{ м} \quad M_F = 4 \cdot 5 \cdot 0,6 - 6 \frac{(5 \cdot 0,8)^2}{2} = 12 - 48 = -36 \text{ (кН} \cdot \text{м)};$$

$$Q_F = -4 \cdot 0,6 + 6(5 \cdot 0,8)0,8 = -2,4 + 19,2 = 16,8 \text{ (кН)};$$

$$N_F = -4 \cdot 0,8 - 6(5 \cdot 0,8)0,6 = -3,2 - 14,4 = -17,6 \text{ (кН)}.$$

По найденным значениям строятся эпюры внутренних усилий на участке  $CD$ . Аналогично определяются изгибающие моменты, поперечные и продольные силы на остальных участках. Эпюры  $M_F(x)$ ,  $Q_F(x)$  и  $N_F(x)$  приведены на рис. 4.41. Отметим, что эпюра изгибающих моментов строится на растянутых волокнах и знаки на ней не ставятся.

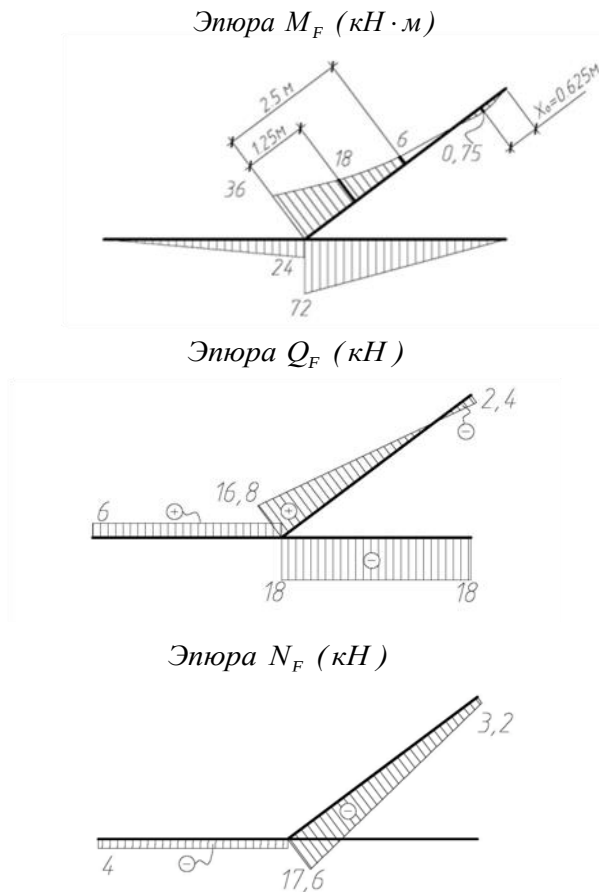


Рис. 4.41.

Проверка равновесия узла  $D$  показана на рис. 4.42.

ж.)

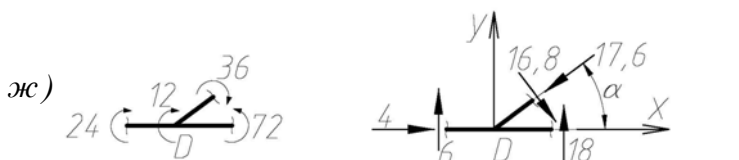


Diagram showing a beam segment with moments 24, 12, 36, and 72. A coordinate system (X, Y) is shown with a force vector (16,8, 17,6) at an angle  $\alpha$  to the X-axis. The beam has a horizontal span of 4 units and a vertical height of 6 units.

$$\sum m_D = 24 + 12 + 36 - 72 = 72 - 72 = 0.$$

$$\sum X = 4 + 16,8 \cdot \sin \alpha - 17,6 \cdot \cos \alpha = 4 + 16,8 \cdot 0,6 - 17,6 \cdot 0,8 = 14,08 - 14,08 = 0;$$

$$\sum Y = 6 + 18 - 16,8 \cdot \cos \alpha - 17,6 \cdot \sin \alpha = 24 - 16,8 \cdot 0,8 - 17,6 \cdot 0,6 = 24 - 24 = 0.$$

Рис. 4.42.

## 2. Определение линейного перемещения сечения 1-1

Перемещения определяем, пренебрегая влиянием поперечных и продольных сил. Поэтому для вспомогательных единичных состояний строим только эпюры изгибающих моментов.

Полное линейное перемещение сечения 1-1 может быть вычислено, если будут найдены горизонтальная и вертикальная составляющие этого перемещения.

Чтобы найти значение горизонтальной составляющей полного перемещения сечения 1-1, рассматриваем вспомогательное единичное состояние ломаного стержня (состояние  $i=1$ ), прикладывая горизонтальную силу  $F_1=1$  в сечении 1-1 (рис. 4.43).

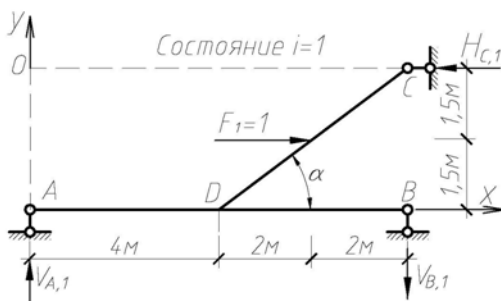


Рис. 4.43.

Находим опорные реакции:

$$\sum M_0 = 0: V_{B,1} \cdot 8 - F_1 \cdot 1,5 = 0; V_{B,1} = \frac{1 \cdot 1,5}{8} = 0,1875.$$

$$\sum M_c = 0: V_{A,1} \cdot 8 - F_1 \cdot 1,5 = 0; V_{A,1} = \frac{1 \cdot 1,5}{8} = 0,1875.$$

$$\sum X = 0: F_1 - H_{c,1} = 0; \quad H_{c,1} = F_1 = 1.$$

Строим эпюру изгибающих моментов  $M_1$  (рис. 4.44), проверяем равновесие узла  $D$  по моментам (рис. 4.45).

Эпюра  $M_1$  (м)

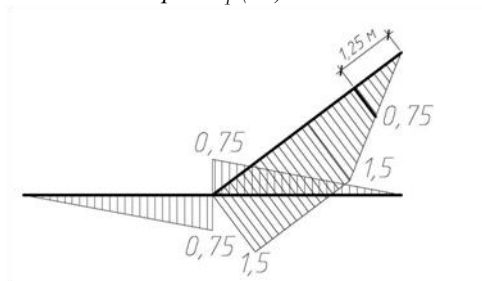


Рис. 4.44.

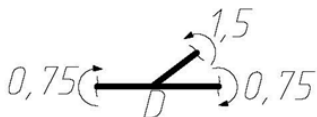


Рис 4.45.

Определяем горизонтальные перемещения сечения 1-1, перемножая эпюру  $M_F$  (рис. 4.41) с эпюрой  $M_1$  (рис. 4.44), учитывая заданное соотношение жесткостей сечений элементов при изгибе (при вычислении интегралов используется как формула Симпсона, так и правило Верещагина). Отметим, что на наклонном элементе ломаного стержня, учитывая характер эпюры  $M_1$ , следует рассматривать два грузовых участка.

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= \sum_{j=1}^4 \int_0^{l_j} \frac{M_1 \cdot M_F}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,75 - \frac{1}{2} \cdot 72 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,75 \right) + \\ &+ \frac{2,5}{6 \cdot 2EI} (-36 \cdot 1,5 - 4 \cdot 18 \cdot 1,5 - 6 \cdot 1,5) + \frac{2,5}{6 \cdot 2EI} (-6 \cdot 1,5 - 4 \cdot 0 \cdot 0,75 + 0) = \\ &= \frac{1}{EI} (24 - 72) + \frac{2,5}{6 \cdot 2EI} (-54 - 108 - 9 - 9) = -\frac{48}{EI} - \frac{75}{2EI} = -\frac{85,5}{EI}. \end{aligned}$$

Знак «минус» полученного значения показывает, что горизонтальное перемещение сечения 1-1 противоположно направлению  $F_1=1$ , т.е. направлено влево.

Для определения значения вертикальной составляющей полного перемещения сечения 1-1 рассматриваем вспомогательное единичное состояние ломаного стержня (состояние  $i=2$ ), прикладывая вертикальную силу  $F_2=1$  в сечении 1-1 (рис. 4.46).

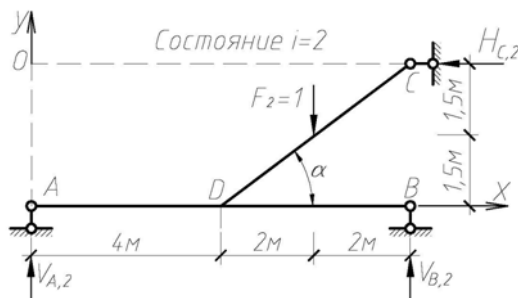


Рис. 4.46.

Находим опорные реакции:

$$\sum M_0 = 0: -V_{B,2} \cdot 8 + F_2 \cdot 6 = 0; \quad V_{B,2} = \frac{1 \cdot 6}{8} = 0,75.$$

$$\sum M_c = 0: V_{A,2} \cdot 8 - F_2 \cdot 2 = 0; \quad V_{A,2} = \frac{1 \cdot 2}{8} = 0,25.$$

$$\sum X = 0: H_{c,2} = 0;$$

$$\text{Проверка } \sum Y = 0,75 + 0,25 - 1 \equiv 0.$$

Этюра  $M_2$  (м)

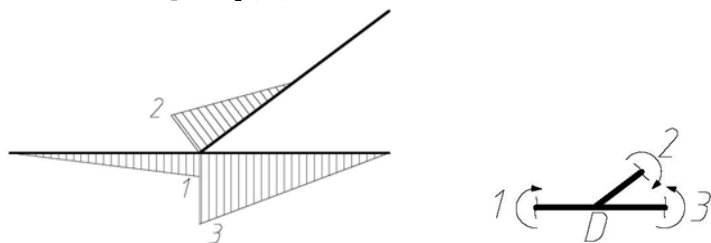


Рис. 4.47

Строим эюру  $M_2$  и проверяем по моментам равновесие узла D (рис 4.47).

Перемножая эюры  $M_2$  и  $M_F$  получаем:

$$\Delta_{2F} = \sum_{j=1}^4 \int_0^{l_j} \frac{M_2 \cdot M_F}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 72 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) +$$

$$\frac{2,5}{6 \cdot 2EI} (36 \cdot 2 + 4 \cdot 18 \cdot 1) = \frac{1}{EI} (32 + 288) + \frac{60}{2EI} = \frac{320}{EI} + \frac{30}{EI} = \frac{350}{EI}.$$

Направление вертикальной составляющей полного перемещения совпадает с направлением  $F_2=1$ , т.е. направлено вниз.

Значение полного линейного перемещения сечения 1-1 равно:

$$\Delta_{1-1} = \sqrt{\Delta_{1F}^2 + \Delta_{2F}^2} = \frac{1}{EI} \sqrt{85,5^2 + 350^2} = \frac{360,61}{EI}.$$

### 3. Определение угла поворота сечения 2-2.

Для определения угла поворота сечения 2-2 рассматриваем вспомогательное единичное состояние ломаного стержня (состояние  $i=3$ ), прикладывая в сечении 2-2 момент  $M_3=1$  (рис. 4.48).

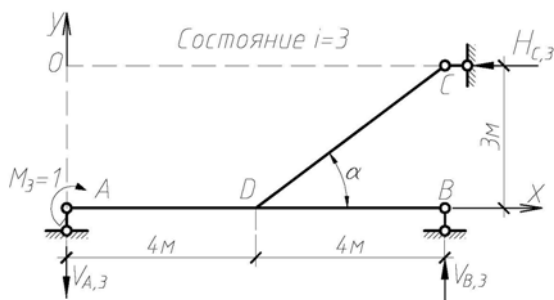


Рис. 4.48.

Находим опорные реакции:

$$\sum M_0 = 0: -V_{B,3} \cdot 8 + M_3 = 0; V_{B,3} = \frac{1}{8} = 0,125 \text{ (м}^{-1}\text{)}.$$

$$\sum M_c = 0: -V_{A,3} \cdot 8 + M_3 = 0; V_{A,3} = \frac{1}{8} = 0,125 \text{ (м}^{-1}\text{)}.$$

$$\sum X = 0: H_{C,3} = 0.$$

Строим эпюру изгибающих моментов  $M_3$  (рис. 4.49). Определяем искомое угловое перемещение:

$$\theta_{2-2} = \Delta_{3F} = \sum_{j=1}^3 \int_0^{l_j} \frac{M_3 \cdot M_F}{EI} ds = \frac{4}{6EI} (0 \cdot 1 + 4 \cdot 0,75 \cdot 12 + 0,5 \cdot 24) +$$

$$\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 72 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 = \frac{1}{EI} \cdot \frac{2}{3} (36 + 12) + \frac{48}{EI} = \frac{80}{EI}.$$

Этюра  $M_3$

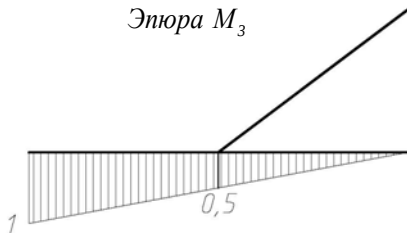


Рис. 4.49.

Знак «плюс»  $\theta_{2-2}$  показывает, что направление поворота сечения 2-2 совпадает с выбранным направлением  $M_3=1$ , т.е. происходит по часовой стрелке.

#### 4.6.4. Задача 6.4

Для плоской стержневой системы, расчетная схема которой приведена на рис. 4.50, требуется:

- 1) построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил;
- 2) определить вертикальное перемещение сечения 1-1 и угол поворота сечения 2-2.

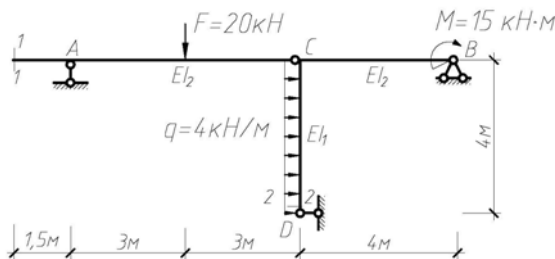


Рис. 4.50.

Выполним кинематический анализ заданной системы. Проверим выполнение необходимого условия геометрической неизменяемости

$$W = 3D - 2H - C - C_0 \leq 0.$$

Система состоит из двух дисков ( $D=2$ ), соединенных между собой примыкающим шарниром С (связью второго типа), т.е.

$H=1$ . Линейные связи между дисками системы отсутствуют ( $C=0$ ). С неподвижным диском «земля» диски системы связаны четырьмя линейными связями (связями первого типа), т.е.  $C_0=4$ . Определяем  $W=3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 0 - 4 = 0$ , т.е. необходимое условие геометрической неизменяемости выполняется.

Делаем структурный анализ. Диск  $BCD$  присоединен к «земле» тремя линейными связями (одна в точке  $D$  и две в точке  $B$ ), оси которых не параллельны между собой и не пересекаются в одной точке (рис. 4.51). Следовательно, диск  $BCD$  вместе с диском «земля» образуют один диск. К этому неподвижному диску присоединен диск  $KAC$  с помощью линейной связи в точке  $A$  и шарниром в точке  $C$ , причем ось линейной связи не проходит через шарнир  $C$ . Таким образом, заданная система является геометрически неизменяемой, неподвижной и статически определимой ( $W=0$ ). На рис. 4.51 показана рабочая схема системы: на главную часть  $BCD$  опирается второстепенная часть  $KAC$ .

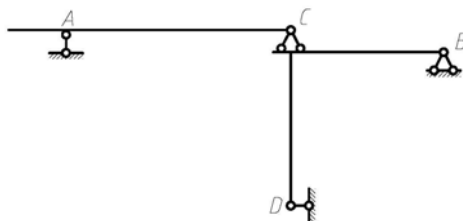


Рис. 4.51.

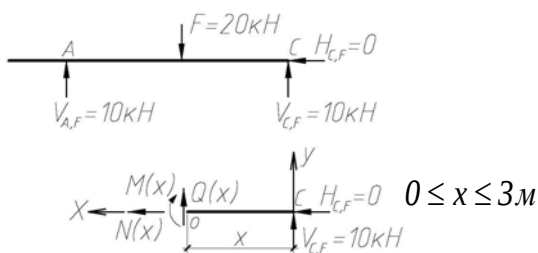


Рис. 4.52.

Расчет системы ведется в следующей последовательности. Сначала рассчитываем второстепенную часть на приложенную к ней нагрузку (рис. 4.52), а затем главную часть, загружая ее как приложенной к ней заданной нагрузкой, так и давлением со стороны второстепенной части в шарнире  $C$  (рис. 4.53).

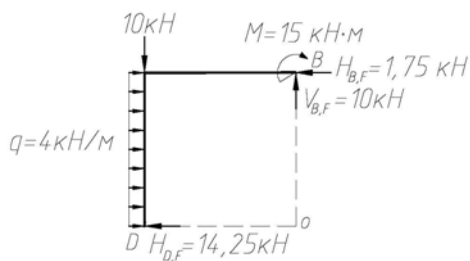


Рис. 4.53.

На рис. 4.52 и 4.53 показаны и выписаны значения реакций, найденных из уравнений равновесия второстепенной и главной частей. Окончательно эпюры  $M$ ,  $Q$  и  $N$  для заданной системы приведены на рис. 4.54.

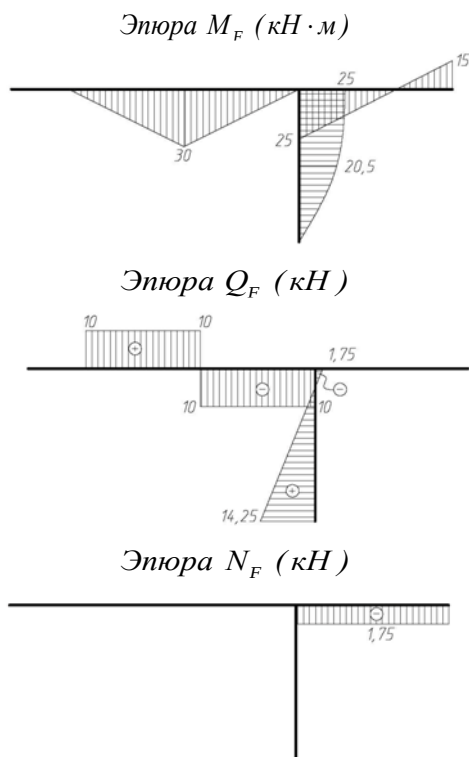


Рис. 4.54.

Выполним проверку равновесия всей системы (рис. 4.55).

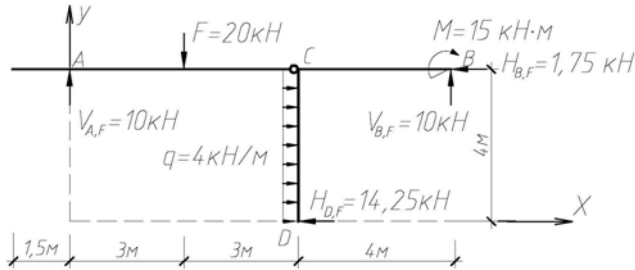


Рис. 4.55.

$$\sum X = q \cdot 4 - H_{B,F} - H_{D,F} = 4 \cdot 4 - 1,75 - 14,25 = 16 - 16 \equiv 0.$$

$$\sum Y = -F + V_{A,F} + V_{B,F} = -20 + 10 + 10 = -20 + 20 \equiv 0.$$

$$\begin{aligned} \sum m_k &= -V_{A,F} \cdot 1,5 + F \cdot 4,5 + H_{D,F} \cdot 4 + M - q \cdot 4 \cdot 2 - V_{B,F} \cdot 11,5 = \\ &= -10 \cdot 1,5 + 20 \cdot 4,5 + 14,25 \cdot 4 + 15 - 4 \cdot 4 \cdot 2 - 10 \cdot 11,5 = \\ &= 162 - 162 \equiv 0. \end{aligned}$$

Для определения вертикального перемещения сечения 1-1 рассматриваем вспомогательное (единичное) состояние системы, прикладывая в сечении 1-1 вертикальную единичную силу ( $F_1=1$ ). Выполняя расчет системы в той же последовательности, что и на заданную нагрузку (рис. 4.56, б, в), строим для этого состояния эпюру изгибающих моментов  $M_1$  (рис. 4.56, г). Далее по формуле Максвелла-Мора, разбив систему на участки, перемножаем эпюры  $M_1$  и  $M_F$ , учитывая заданное соотношение жесткостей сечений при изгибе. При перемножении эпюр используем как правило Верещагина, так и формулу Симпсона. Получаем

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= \sum \int \frac{M_1 \cdot M_F}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{1}{2,5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,5 + \right. \\ &+ \frac{4}{6 \cdot 2,5} \left( -1 \cdot 25 - 4 \cdot \frac{25-15}{2} \cdot 0,5 \right) + \frac{4}{6} \cdot \left( -1 \cdot 25 - 4 \cdot 0,5 \cdot 20,5 \right) \Big] = \\ &= \frac{-27 - 9,33 - 44}{EI} = \frac{-80,33 (\text{кН} \cdot \text{м}^3)}{EI}. \end{aligned}$$

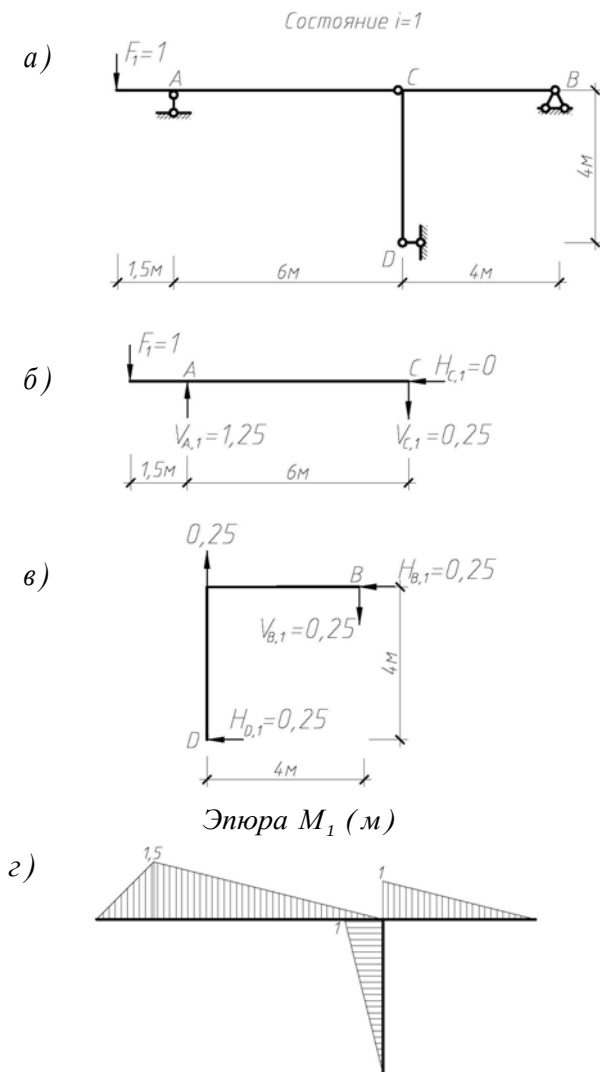


Рис. 4.56.

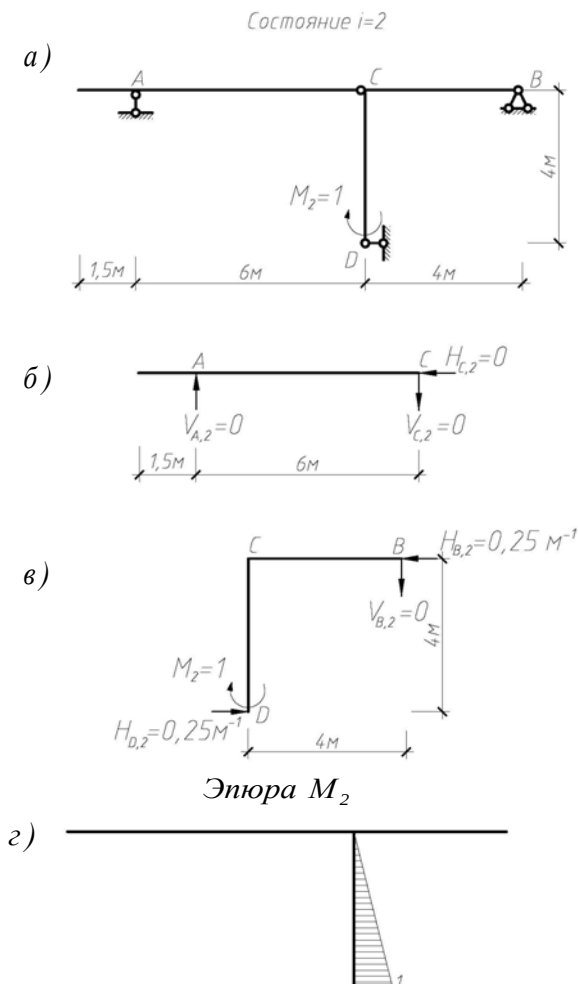


Рис. 4.57.

Для определения угла поворота сечения 2-2 рассматриваем вспомогательное (единичное) состояние системы, прикладывая в сечении 2-2 единичный момент  $M_2=1$  (рис. 4.57). Построив эпюру изгибающих моментов  $M_2$  (рис. 4.57, г), перемножаем ее с эпюрой  $M_F$ , также учитывая жесткости сечений при изгибе. Получаем

$$\Delta_{2F} = \sum \int \frac{M_2 \cdot M_F}{EI} ds = \frac{1}{EI} \cdot \frac{4}{6} (4 \cdot 0,5 \cdot 20,5) = \frac{27,33 (\kappa H \cdot m^2)}{EI}.$$

#### **4. 6. 4. Контрольные вопросы для самопроверки**

1. В чём заключается явление потери устойчивости равновесного состояния стержня?
2. Влияет ли форма поперечного сечения стержня на критическую силу стержня?
3. Какое влияние оказывают на критическую силу упругие и прочностные характеристики материала при потере устойчивости стержня в упругой стадии?
4. В чём различие постановок задач об устойчивости стержня в упругопластической стадии Кармана, Энгессера и Шенли?
5. Какой физический смысл имеет понятие приведённой длины стержня?
6. В каком интервале изменяется коэффициент продольного изгиба и от чего зависит?
7. Каковы пределы применимости формулы Эйлера?
8. Как влияют способы закрепления концов стержня на значение критической силы?
9. Запишите формулу Ясинского. Какую размерность имеют коэффициенты в этой формуле?
10. Как записывается формула Максвелла-Мора для определения перемещений от заданной нагрузки?
11. Опишите порядок определения перемещений по формуле Максвелла-Мора. Как выбирается вспомогательное единичное состояние?
12. Какие практические приемы используются при вычислении интегралов Максвелла-Мора?
13. Как записывается формула Симпсона для перемножения эпюр на участке? Как определяется знак слагаемых в этой формуле? В каком случае формула Симпсона дает точное значение интеграла?
14. Сформулируйте правило Верещагина вычисления интегралов Максвелла-Мора. Когда можно применять это правило? Как определяется знак произведения при перемножении эпюр?
15. Как определяется истинное направление перемещения?

## ПРИЛОЖЕНИЯ

Модули упругости, коэффициенты Пуассона и расчетные сопротивления некоторых материалов

Таблица П.1

| Материал                     | E<br>(МПа)        | G<br>(МПа)       | $\nu$ | R <sub>c</sub><br>(МПа) | R <sub>t</sub><br>(МПа) |
|------------------------------|-------------------|------------------|-------|-------------------------|-------------------------|
| Чугун серый                  | $1,3 \cdot 10^5$  | $4,4 \cdot 10^4$ | 0,25  | 120                     | 30                      |
| Углеродистая сталь           | $2 \cdot 10^5$    | $8,0 \cdot 10^4$ | 0,25  | 200                     |                         |
| Дерево (сосна вдоль волокон) | $1,0 \cdot 10^5$  | $5,5 \cdot 10^2$ | -     | 10                      | 110                     |
| Медь прокатанная             | $1,1 \cdot 10^5$  | $4,0 \cdot 10^4$ | 0,32  | 100                     |                         |
| Алюминий катаный             | $0,7 \cdot 10^5$  | $2,6 \cdot 10^4$ | 0,35  | 60                      |                         |
| Бетон                        | $0,15 \cdot 10^5$ | $4,4 \cdot 10^4$ | 0,16  | 0,9                     | 12                      |
| Стекло                       | $5,5 \cdot 10^4$  | $2,2 \cdot 10^4$ | 0,25  |                         |                         |
| Кладка из кирпича            | $2,6 \cdot 10^3$  | -                | -     | 0,2                     | 20                      |

Коэффициенты Сен-Венана  
(при расчете брусьев прямоугольного сечения на кручение)

Таблица П.2.

| h/b      | 1,0   | 1,5   | 1,75  | 2,0   | 2,5   | 3,0   | 4,0   | 6,0   | 8,0   | 10,0  | $\infty$ |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| $\alpha$ | 0,208 | 0,231 | 0,239 | 0,246 | 0,256 | 0,267 | 0,282 | 0,299 | 0,307 | 0,313 | 0,333    |
| $\beta$  | 0,141 | 0,196 | 0,214 | 0,229 | 0,249 | 0,263 | 0,281 | 0,299 | 0,307 | 0,313 | 0,333    |
| $\gamma$ | 1,0   | 0,859 | 0,820 | 0,795 | 0,766 | 0,753 | 0,745 | 0,743 | 0,742 | 0,742 | 0,743    |

Коэффициенты  $\varphi$  продольного изгиба  
(по СНиП 11-23-81 – для сталей)

Таблица П.3.

| $\lambda$ – гибкость | Материал                                     |       |       |       |                   |                    |               |             |                     |
|----------------------|----------------------------------------------|-------|-------|-------|-------------------|--------------------|---------------|-------------|---------------------|
|                      | Сталь с расчетным сопротивлением $R_y$ , Мпа |       |       |       | Серый чугун<br>СЧ | Алюм. сплав<br>АМг | Тяжелый бетон | Железобетон | Дерево (сосна, ель) |
|                      | 200                                          | 240   | 280   | 320   |                   |                    |               |             |                     |
| 10                   | 0,988                                        | 0,987 | 0,985 | 0,984 | 0,97              | 0,97               | 1,0           | 1,0         | 0,99                |
| 20                   | 0,967                                        | 0,962 | 0,959 | 0,955 | 0,91              | 0,94               | 0,96          | 1,0         | 0,97                |
| 30                   | 0,939                                        | 0,931 | 0,924 | 0,917 | 0,81              | 0,92               | 0,90          | 1,0         | 0,93                |
| 40                   | 0,906                                        | 0,894 | 0,883 | 0,873 | 0,69              | 0,87               | 0,84          | 1,0         | 0,87                |
| 50                   | 0,869                                        | 0,852 | 0,836 | 0,822 | 0,57              | 0,77               | 0,76          | 1,0         | 0,80                |
| 60                   | 0,827                                        | 0,805 | 0,785 | 0,766 | 0,44              | 0,68               | 0,70          | 0,83        | 0,71                |
| 70                   | 0,782                                        | 0,754 | 0,724 | 0,687 | 0,34              | 0,60               | 0,63          | 0,73        | 0,61                |
| 80                   | 0,734                                        | 0,696 | 0,641 | 0,602 | 0,26              | 0,53               | 0,57          | 0,64        | 0,49                |
| 90                   | 0,665                                        | 0,612 | 0,565 | 0,522 | 0,20              | 0,46               | 0,51          | 0,57        | 0,38                |
| 100                  | 0,599                                        | 0,542 | 0,493 | 0,448 | 0,16              | 0,42               | 0,45          | 0,52        | 0,31                |
| 110                  | 0,537                                        | 0,478 | 0,427 | 0,381 | –                 | 0,36               | –             | –           | 0,25                |
| 120                  | 0,479                                        | 0,419 | 0,366 | 0,321 | –                 | 0,33               | –             | –           | 0,22                |
| 130                  | 0,425                                        | 0,364 | 0,313 | 0,276 | –                 | 0,30               | –             | –           | 0,18                |
| 140                  | 0,376                                        | 0,315 | 0,272 | 0,240 | –                 | 0,26               | –             | –           | 0,16                |
| 150                  | 0,328                                        | 0,276 | 0,239 | 0,211 | –                 | 0,24               | –             | –           | 0,14                |
| 160                  | 0,290                                        | 0,244 | 0,212 | 0,187 | –                 | –                  | –             | –           | 0,12                |
| 170                  | 0,259                                        | 0,218 | 0,189 | 0,167 | –                 | –                  | –             | –           | 0,11                |
| 180                  | 0,233                                        | 0,196 | 0,170 | 0,150 | –                 | –                  | –             | –           | 0,10                |
| 190                  | 0,210                                        | 0,177 | 0,154 | 0,136 | –                 | –                  | –             | –           | 0,09                |
| 200                  | 0,191                                        | 0,161 | 0,140 | 0,124 | –                 | –                  | –             | –           | 0,08                |
| 210                  | 0,174                                        | 0,147 | 0,128 | 0,113 | –                 | –                  | –             | –           | –                   |
| 220                  | 0,160                                        | 0,135 | 0,118 | 0,104 | –                 | –                  | –             | –           | –                   |

Таблица П.4.

Определение критической силы при напряжениях,  
превышающих предел пропорциональности  
(формулы Ф.С. Ясинского)

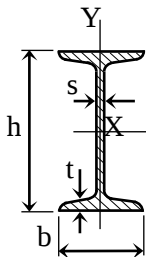
Для чугуна  $\sigma_{cr} = a - b\lambda + c\lambda^2$ .  
 Для других материалов  $\sigma_{cr} = a - b\lambda$ .  
 $N_{cr} = \sigma_{cr} \cdot A_{br}$ .

Значения эмпирических постоянных коэффициентов  $a$ ,  $b$  и  $c$  для некоторых материалов (Писаренко Г. С. Сопротивление материалов. – Киев, 1973)

| Материал              | $\lambda_{пред}$ | $a$ ,<br>МПа | $b$ ,<br>МПа | $c$ ,<br>МПа |
|-----------------------|------------------|--------------|--------------|--------------|
| Ст2, Ст3              | 100              | 310          | 1,16         | –            |
| Ст5                   | 100              | 464          | 2,64         | –            |
| Сталь 40              | 90               | 321          | 1,16         | –            |
| Сталь кремни-<br>стая | 100              | 589          | 3,82         | –            |
| Дерево (сосна)        | 110              | 29,3         | 0,194        | –            |
| Чугун                 | 80               | 776          | 12,0         | 0,05<br>3    |

**Таблица П.5.. Сортамент стального проката**

**Двутавры стальные горячекатаные по ГОСТ 8239-89**

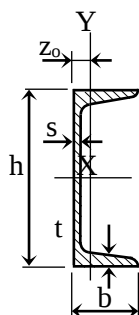


$h$  – высота двутавра;  $b$  – ширина полки;  
 $s$  – толщина стенки;  
 $t$  – средняя толщина полки  
 $A$  – площадь поперечного сечения;  
 $I$  – момент инерции  
 $W$  – момент сопротивления;  
 $S$  – статический момент полусечения;  
 $i$  – радиус инерции;

Таблица П5.1

| Но-<br>мер<br>дву-<br>тав-<br>ра | Мас<br>са<br>$I$ м,<br>кг | Размеры,<br>мм |     |     |      | $A$ ,<br>см <sup>2</sup> | $I_x$ ,<br>см <sup>4</sup> | $W_x$ ,<br>см <sup>3</sup> | $i_x$ ,<br>см | $S_x$ ,<br>см <sup>3</sup> | $I_y$ ,<br>см <sup>4</sup> | $W_y$ ,<br>см <sup>3</sup> | $i_y$ ,<br>см |
|----------------------------------|---------------------------|----------------|-----|-----|------|--------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------|
|                                  |                           | $h$            | $b$ | $s$ | $t$  |                          |                            |                            |               |                            |                            |                            |               |
| 10                               | 9,46                      | 100            | 55  | 4,5 | 7,2  | 12                       | 198                        | 39,7                       | 4,06          | 23                         | 17,9                       | 6,49                       | 1,22          |
| 12                               | 11,5                      | 120            | 64  | 4,8 | 7,3  | 14,7                     | 350                        | 58,4                       | 4,88          | 33,7                       | 27,9                       | 8,72                       | 1,38          |
| 14                               | 13,7                      | 140            | 73  | 4,9 | 7,5  | 17,4                     | 572                        | 81,7                       | 5,73          | 46,8                       | 41,9                       | 11,5                       | 1,55          |
| 16                               | 15,9                      | 160            | 81  | 5   | 7,8  | 20,2                     | 873                        | 109                        | 6,57          | 62,3                       | 58,6                       | 14,5                       | 1,7           |
| 18                               | 18,4                      | 180            | 90  | 5,1 | 8,1  | 23,4                     | 1290                       | 143                        | 7,42          | 81,4                       | 82,6                       | 18,4                       | 1,88          |
| 20                               | 21,0                      | 200            | 100 | 5,2 | 8,4  | 26,8                     | 1840                       | 184                        | 8,28          | 104                        | 115                        | 23,1                       | 2,07          |
| 22                               | 24,0                      | 220            | 110 | 5,4 | 8,7  | 30,6                     | 2550                       | 232                        | 9,13          | 131                        | 157                        | 28,6                       | 2,27          |
| 24                               | 27,3                      | 240            | 115 | 5,6 | 9,5  | 34,8                     | 3460                       | 289                        | 9,97          | 163                        | 198                        | 34,5                       | 2,37          |
| 27                               | 31,5                      | 270            | 125 | 6   | 9,8  | 40,2                     | 5010                       | 371                        | 11,2          | 210                        | 260                        | 41,5                       | 2,54          |
| 30                               | 36,5                      | 300            | 135 | 6,5 | 10,2 | 46,5                     | 7080                       | 472                        | 12,3          | 268                        | 337                        | 49,9                       | 2,69          |
| 33                               | 42,2                      | 330            | 140 | 7   | 11,2 | 53,8                     | 9840                       | 597                        | 13,5          | 339                        | 419                        | 59,9                       | 2,79          |
| 36                               | 48,6                      | 360            | 145 | 7,5 | 12,3 | 61,9                     | 13380                      | 743                        | 14,7          | 423                        | 516                        | 71,1                       | 2,89          |
| 40                               | 57,0                      | 400            | 155 | 8,3 | 13   | 72,6                     | 19062                      | 953                        | 16,2          | 545                        | 667                        | 86,1                       | 3,03          |
| 45                               | 66,5                      | 450            | 160 | 9   | 14,2 | 84,7                     | 27696                      | 1231                       | 18,1          | 708                        | 808                        | 101                        | 3,09          |
| 50                               | 78,5                      | 500            | 170 | 10  | 15,2 | 100                      | 39727                      | 1589                       | 19,9          | 919                        | 1043                       | 123                        | 3,23          |
| 55                               | 92,6                      | 550            | 180 | 11  | 16,5 | 118                      | 55962                      | 2035                       | 21,8          | 1181                       | 1356                       | 151                        | 3,39          |
| 60                               | 108,0                     | 600            | 190 | 12  | 17   | 138                      | 76806                      | 2560                       | 23,6          | 1491                       | 1725                       | 182                        | 3,54          |

## Швеллеры стальные горячекатаные по ГОСТ 8240-89

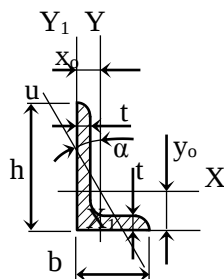


$h$  – высота швеллера;  $b$  – ширина полки;  
 $s$  – толщина стенки;  $t$  – средняя толщина полки;  
 $A$  – площадь поперечного сечения;  
 $S$  – статический момент полусечения;  
 $I$  – момент инерции;  
 $i$  – радиус инерции;  $W$  – момент сопротивления;  
 $z_0$  – расстояние от оси  $Y$  до наружной грани стенки.

Таблица П5.2

| Но-<br>мер<br>швел-<br>лера | Мас-<br>са<br>$l$ м,<br>кг | Размеры,<br>мм |     |     |      | $A$ ,<br>$см^2$ | $I_x$ ,<br>$см^4$ | $W_x$ ,<br>$см^3$ | $i_x$ ,<br>$см$ | $S_x$ ,<br>$см^3$ | $I_y$ ,<br>$см^4$ | $W_y$ ,<br>$см^3$ | $i_y$ ,<br>$см$ | $z_0$ ,<br>$см$ |
|-----------------------------|----------------------------|----------------|-----|-----|------|-----------------|-------------------|-------------------|-----------------|-------------------|-------------------|-------------------|-----------------|-----------------|
|                             |                            | $h$            | $b$ | $s$ | $t$  |                 |                   |                   |                 |                   |                   |                   |                 |                 |
| 5                           | 4,84                       | 50             | 32  | 4,4 | 7,0  | 6,16            | 22,8              | 9,1               | 1,92            | 5,59              | 5,61              | 2,75              | 0,95            | 1,16            |
| 6,5                         | 5,9                        | 65             | 36  | 4,4 | 7,2  | 7,51            | 48,6              | 15                | 2,54            | 9,0               | 8,7               | 3,68              | 1,08            | 1,24            |
| 8                           | 7,05                       | 80             | 40  | 4,5 | 7,4  | 8,98            | 89,4              | 22,4              | 3,16            | 13,3              | 12,8              | 4,75              | 1,19            | 1,31            |
| 10                          | 8,59                       | 100            | 46  | 4,5 | 7,6  | 10,9            | 174               | 34,8              | 3,99            | 20,4              | 20,4              | 6,64              | 1,37            | 1,44            |
| 12                          | 10,4                       | 120            | 52  | 4,8 | 7,8  | 13,3            | 304               | 50,6              | 4,78            | 29,6              | 31,2              | 8,52              | 1,53            | 1,54            |
| 14                          | 12,3                       | 140            | 58  | 4,9 | 8,1  | 15,6            | 491               | 70,2              | 5,6             | 40,8              | 45,4              | 11,0              | 1,7             | 1,67            |
| 16                          | 14,2                       | 160            | 64  | 5,0 | 8,4  | 18,1            | 747               | 93,4              | 6,42            | 54,1              | 63,3              | 13,8              | 1,87            | 1,8             |
| 16a                         | 15,3                       | 160            | 68  | 5,0 | 9,0  | 19,5            | 823               | 103               | 6,49            | 59,4              | 78,8              | 16,4              | 2,01            | 2,0             |
| 18                          | 16,3                       | 180            | 70  | 5,1 | 8,7  | 20,7            | 1090              | 121               | 7,24            | 69,8              | 86                | 17,0              | 2,04            | 1,94            |
| 18a                         | 17,4                       | 180            | 74  | 5,1 | 9,3  | 22,2            | 1190              | 132               | 7,32            | 76,1              | 105               | 20,0              | 2,18            | 2,13            |
| 20                          | 18,4                       | 200            | 76  | 5,2 | 9,0  | 23,4            | 1520              | 152               | 8,07            | 87,8              | 113               | 20,5              | 2,2             | 2,07            |
| 22                          | 21                         | 220            | 82  | 5,4 | 9,5  | 26,7            | 2110              | 192               | 8,89            | 110               | 151               | 25,1              | 2,37            | 2,21            |
| 24                          | 24                         | 240            | 90  | 5,6 | 10,0 | 30,6            | 2900              | 242               | 9,73            | 139               | 208               | 31,6              | 2,6             | 2,42            |
| 27                          | 27,7                       | 270            | 95  | 6   | 10,5 | 35,2            | 4160              | 308               | 10,9            | 178               | 262               | 37,3              | 2,73            | 2,47            |
| 30                          | 31,8                       | 300            | 100 | 6,5 | 11,0 | 40,5            | 5810              | 387               | 12,0            | 224               | 327               | 43,6              | 2,84            | 2,52            |
| 33                          | 36,5                       | 330            | 105 | 7   | 11,7 | 46,5            | 7980              | 484               | 13,1            | 281               | 410               | 51,8              | 2,97            | 2,59            |
| 36                          | 41,9                       | 360            | 110 | 7,5 | 12,6 | 53,4            | 10820             | 601               | 14,2            | 350               | 513               | 61,7              | 3,1             | 2,68            |
| 40                          | 48,3                       | 400            | 115 | 8   | 13,5 | 61,5            | 15220             | 761               | 15,7            | 444               | 642               | 73,4              | 3,23            | 2,75            |

# **Уголки стальные горячекатаные неравнополочные ( по ГОСТ 8510-86 )**



$B$  – ширина большей полки;  
 $b$  – ширина меньшей полки;  
 $t$  – толщина полки;  $u$  – ось min;  
 $A$  – площадь поперечного сечения;  
 $I$  – момент инерции;  $i$  – радиус инерции;  
 $\alpha$  – угол наклона главной центральной оси;  
 $I_{xy}$  – центробежный момент инерции;  
 $x_0, y_0$  – расстояния от центра тяжести до наружных граней полок.

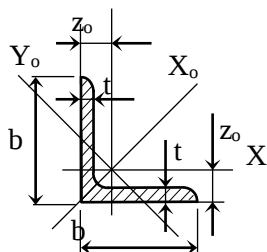
Таблица П5. 3

| Но-<br>мер<br>угол<br>ка | Ма<br>сса<br>1<br>м,<br>кг | Разме-<br>ры,<br>мм |     |     | $A$ ,<br>см <sup>2</sup> | $I_x$ ,<br>см <sup>4</sup> | $i_x$ ,<br>см | $I_y$ ,<br>см <sup>4</sup> | $i_y$ ,<br>см | $I_u$ ,<br>(mi<br>n)<br>см <sup>4</sup> | $i_u$ ,<br>(mi<br>n)<br>см | $\text{tg}\alpha$ | $I_{xy}$ ,<br>см <sup>4</sup> | $x_0$ ,<br>см | $y_0$ ,<br>см |
|--------------------------|----------------------------|---------------------|-----|-----|--------------------------|----------------------------|---------------|----------------------------|---------------|-----------------------------------------|----------------------------|-------------------|-------------------------------|---------------|---------------|
|                          |                            | $B$                 | $b$ | $t$ |                          |                            |               |                            |               |                                         |                            |                   |                               |               |               |
| 1                        | 2                          | 3                   | 4   | 5   | 6                        | 7                          | 8             | 9                          | 10            | 11                                      | 12                         | 13                | 14                            | 15            | 16            |
| 2,5/<br>1,6              | 0,9                        | 25                  | 16  | 3   | 1,16                     | 0,7                        | 0,78          | 0,2                        | 0,44          | 0,13                                    | 0,34                       | 0,392             | 0,22                          | 0,42          | 0,86          |
| 3/2*                     | 1,1                        | 30                  | 20  | 3   | 1,43                     | 1,3                        | 0,94          | 0,4                        | 0,56          | 0,26                                    | 0,43                       | 0,427             | 0,43                          | 0,51          | 1,00          |
|                          | 1,5                        |                     |     | 4   | 1,86                     | 1,6                        | 0,93          | 0,6                        | 0,55          | 0,34                                    | 0,43                       | 0,421             | 0,54                          | 0,54          | 1,04          |
| 3,2/<br>2                | 1,2                        | 32                  | 20  | 3   | 1,49                     | 1,5                        | 1,01          | 0,5                        | 0,55          | 0,28                                    | 0,43                       | 0,382             | 0,47                          | 0,49          | 1,08          |
|                          | 1,5                        |                     |     | 4   | 1,94                     | 1,9                        | 1,00          | 0,6                        | 0,54          | 0,35                                    | 0,43                       | 0,374             | 0,59                          | 0,53          | 1,12          |
| 4/2,<br>5                | 1,5                        | 40                  | 25  | 3   | 1,89                     | 3,1                        | 1,27          | 0,9                        | 0,70          | 0,56                                    | 0,54                       | 0,385             | 0,96                          | 0,59          | 1,32          |
|                          | 1,9                        |                     |     | 4   | 2,47                     | 3,9                        | 1,26          | 1,2                        | 0,69          | 0,71                                    | 0,54                       | 0,381             | 1,22                          | 0,63          | 1,37          |
|                          | 2,4                        |                     |     | 5   | 3,03                     | 4,7                        | 1,25          | 1,4                        | 0,68          | 0,86                                    | 0,53                       | 0,374             | 1,44                          | 0,66          | 1,41          |
| 4/3                      | 2,1                        | 40                  | 30  | 4   | 2,67                     | 4,2                        | 1,25          | 2,0                        | 0,87          | 1,09                                    | 0,64                       | 0,544             | 1,68                          | 0,78          | 1,28          |
|                          | 2,6                        |                     |     | 5   | 3,28                     | 5,0                        | 1,24          | 2,4                        | 0,86          | 1,33                                    | 0,64                       | 0,539             | 2,00                          | 0,82          | 1,32          |
| 4,5/<br>2,8              | 1,7                        | 45                  | 28  | 3   | 2,14                     | 4,4                        | 1,43          | 1,3                        | 0,79          | 0,79                                    | 0,61                       | 0,382             | 1,38                          | 0,64          | 1,47          |
|                          | 2,2                        |                     |     | 4   | 2,80                     | 5,7                        | 1,42          | 1,7                        | 0,78          | 1,02                                    | 0,60                       | 0,379             | 1,77                          | 0,68          | 1,51          |
| 5/3,<br>2                | 1,9                        | 50                  | 32  | 3   | 2,42                     | 6,2                        | 1,60          | 2,0                        | 0,91          | 1,18                                    | 0,70                       | 0,403             | 2,01                          | 0,72          | 1,60          |
|                          | 2,5                        |                     |     | 4   | 3,17                     | 8,0                        | 1,59          | 2,6                        | 0,90          | 1,52                                    | 0,69                       | 0,401             | 2,59                          | 0,76          | 1,65          |
| 5,6/<br>3,6              | 2,8                        | 56                  | 36  | 4   | 3,58                     | 11,4                       | 1,78          | 3,7                        | 1,02          | 2,19                                    | 0,78                       | 0,406             | 3,74                          | 0,84          | 1,82          |
|                          | 3,5                        |                     |     | 5   | 4,41                     | 13,8                       | 1,77          | 4,5                        | 1,01          | 2,65                                    | 0,78                       | 0,404             | 4,50                          | 0,88          | 1,87          |

Примечание: Уголки, отмеченные звездочкой (\*) изготавливают по требованию потребителя

|             |      |    |    |     |      |      |      |      |      |       |      |       |       |      |      |
|-------------|------|----|----|-----|------|------|------|------|------|-------|------|-------|-------|------|------|
| 1           | 2    | 3  | 4  | 5   | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 11    | 12   | 13    | 14    | 15   | 16   |
| 6,5/<br>5*  | 4,4  | 65 | 50 | 5   | 5,56 | 23,4 | 2,05 | 12,1 | 1,47 | 6,41  | 1,07 | 0,576 | 9,77  | 1,26 | 2,00 |
|             | 5,2  |    |    | 6   | 6,60 | 27,5 | 2,04 | 14,1 | 1,46 | 7,52  | 1,07 | 0,575 | 11,5  | 1,30 | 2,04 |
|             | 6,0  |    |    | 7   | 7,62 | 31,3 | 2,03 | 16,1 | 1,45 | 8,60  | 1,06 | 0,571 | 12,9  | 1,34 | 2,08 |
|             | 6,8  |    |    | 8   | 8,62 | 35,0 | 2,02 | 18,9 | 1,44 | 9,65  | 1,06 | 0,570 | 13,6  | 1,37 | 2,12 |
| 7/4,<br>5   | 4,4  | 70 | 45 | 5   | 5,59 | 27,8 | 2,23 | 9,1  | 1,27 | 5,34  | 0,98 | 0,406 | 9,1   | 1,05 | 2,28 |
| 7,5/<br>5   | 4,79 | 75 | 50 | 5   | 6,11 | 34,8 | 2,39 | 12,5 | 1,43 | 7,24  | 1,09 | 0,436 | 12,00 | 1,17 | 2,39 |
|             | 5,7  |    |    | 6   | 7,25 | 40,9 | 2,38 | 14,6 | 1,42 | 8,48  | 1,08 | 0,435 | 14,1  | 1,21 | 2,44 |
|             | 6,6  |    |    | 7*  | 8,37 | 46,8 | 2,36 | 16,6 | 1,41 | 9,69  | 1,08 | 0,435 | 16,2  | 1,25 | 2,48 |
|             | 7,4  |    |    | 8*  | 9,47 | 52,4 | 2,35 | 18,5 | 1,40 | 10,9  | 1,07 | 0,430 | 17,8  | 1,29 | 2,52 |
| 8/5         | 5,0  | 80 | 50 | 5   | 6,3  | 41,6 | 2,56 | 12,7 | 1,41 | 7,57  | 1,09 | 0,387 | 13,2  | 1,13 | 2,60 |
|             | 5,9  |    |    | 6   | 7,55 | 49,0 | 2,55 | 14,8 | 1,40 | 8,88  | 1,08 | 0,386 | 15,5  | 1,17 | 2,65 |
| 8/6*        | 6,4  | 80 | 60 | 6   | 8,15 | 52,1 | 2,53 | 25,2 | 1,76 | 13,6  | 1,29 | 0,547 | 21,0  | 1,49 | 2,47 |
|             | 7,4  |    |    | 7   | 9,42 | 59,6 | 2,52 | 28,7 | 1,75 | 15,6  | 1,29 | 0,546 | 24,0  | 1,53 | 2,52 |
|             | 8,4  |    |    | 8   | 10,7 | 66,9 | 2,50 | 32,2 | 1,74 | 17,5  | 1,28 | 0,544 | 26,8  | 1,57 | 2,56 |
| 9/5,6       | 6,2  | 90 | 56 | 5,5 | 7,86 | 65,3 | 2,88 | 19,7 | 1,58 | 11,8  | 1,22 | 0,384 | 20,5  | 1,2  | 2,92 |
|             | 6,7  |    |    | 6   | 8,54 | 70,6 | 2,88 | 21,2 | 1,58 | 12,7  | 1,22 | 0,384 | 22,5  | 1,28 | 2,95 |
| 10/6,3      | 7,53 | 10 | 63 | 6   | 9,58 | 98,3 | 3,2  | 30,6 | 1,78 | 18,2  | 1,38 | 0,393 | 31,5  | 1,42 | 3,23 |
|             | 8,7  | 0  |    | 7   | 11,1 | 113  | 3,19 | 35,0 | 1,78 | 20,8  | 1,37 | 0,392 | 36,1  | 1,46 | 3,28 |
|             | 9,87 |    |    | 8   | 12,6 | 127  | 3,18 | 39,2 | 1,77 | 23,4  | 1,36 | 0,391 | 40,5  | 1,50 | 3,32 |
|             | 12,1 |    |    | 10  | 15,5 | 153  | 3,15 | 47,2 | 1,75 | 28,3  | 1,35 | 0,387 | 48,6  | 1,58 | 3,40 |
| 10/<br>6,5* | 8,81 | 10 | 65 | 7   | 11,2 | 114  | 3,19 | 38,3 | 1,85 | 22,8  | 1,41 | 0,415 | 38,0  | 1,52 | 3,24 |
|             | 9,99 | 0  |    | 8   | 12,7 | 138  | 3,18 | 43,0 | 1,84 | 25,2  | 1,41 | 0,414 | 42,6  | 1,56 | 3,28 |
|             | 12,3 |    |    | 10  | 15,7 | 155  | 3,15 | 51,7 | 1,82 | 30,6  | 1,40 | 0,410 | 51,2  | 1,64 | 3,37 |
| 11/7        | 9,0  | 11 | 70 | 6,5 | 11,4 | 142  | 3,53 | 45,6 | 2,00 | 26,9  | 1,53 | 0,402 | 46,8  | 1,58 | 3,55 |
|             | 10,9 | 0  |    | 8   | 13,9 | 172  | 3,51 | 54,6 | 1,98 | 32,3  | 1,52 | 0,400 | 55,9  | 1,64 | 3,61 |
| 12,5<br>8   | 11,0 | 12 | 80 | 7   | 14,1 | 227  | 4,01 | 73,7 | 2,29 | 43,4  | 1,76 | 0,407 | 74,7  | 1,8  | 4,01 |
|             | 12,6 | 5  |    | 8   | 16,0 | 256  | 4,00 | 83,0 | 2,28 | 48,8  | 1,75 | 0,406 | 84,1  | 1,84 | 4,05 |
|             | 15,5 |    |    | 10  | 19,7 | 312  | 3,98 | 100  | 2,26 | 59,3  | 1,74 | 0,404 | 102,0 | 1,92 | 4,14 |
|             | 18,3 |    |    | 12  | 23,4 | 365  | 3,95 | 116  | 2,24 | 68,5  | 1,72 | 0,400 | 118,0 | 2,00 | 4,22 |
| 14/9        | 14,1 | 14 | 90 | 8   | 18,0 | 364  | 4,49 | 120  | 2,58 | 70,3  | 1,98 | 0,411 | 121,0 | 2,03 | 4,49 |
|             | 17,5 | 0  |    | 10  | 22,2 | 444  | 4,47 | 146  | 2,56 | 85,5  | 1,96 | 0,409 | 147,0 | 2,12 | 4,58 |
| 16/1<br>0   | 18,0 | 16 | 10 | 9   | 22,9 | 606  | 5,15 | 186  | 2,85 | 110,0 | 2,20 | 0,391 | 194,0 | 2,24 | 5,19 |
|             | 19,8 | 0  | 0  | 10  | 25,3 | 667  | 5,13 | 204  | 2,84 | 121,0 | 2,19 | 0,390 | 213,0 | 2,28 | 5,23 |
|             | 23,6 |    |    | 12  | 30,0 | 784  | 5,11 | 239  | 2,82 | 142,0 | 2,18 | 0,388 | 249,0 | 2,36 | 5,32 |
|             | 27,3 |    |    | 14  | 34,7 | 897  | 5,08 | 271  | 2,80 | 162,0 | 2,16 | 0,385 | 282,0 | 2,43 | 5,40 |
| 20/<br>12,5 | 27,4 | 20 | 12 | 11  | 34,9 | 1449 | 6,45 | 446  | 3,58 | 264,0 | 2,75 | 0,392 | 465,0 | 2,79 | 6,50 |
|             | 29,7 | 0  | 5  | 12  | 37,9 | 1568 | 6,43 | 482  | 3,57 | 285,0 | 2,74 | 0,392 | 503,0 | 2,83 | 6,54 |
|             | 34,4 |    |    | 14  | 43,9 | 1801 | 6,41 | 551  | 3,54 | 327,0 | 2,73 | 0,390 | 573,0 | 2,91 | 6,62 |
|             | 39,1 |    |    | 16  | 49,8 | 2026 | 6,38 | 617  | 3,52 | 367,0 | 2,72 | 0,388 | 643,0 | 2,99 | 6,71 |

# **Уголки стальные горячекатаные равнополочные** (по ГОСТ 8509-86)



$b$  – ширина полки;  $t$  – толщина полки;  
 $A$  – площадь поперечного сечения;  
 $I$  – момент инерции;  
 $I_{xy}$  – центробежный момент инерции;  
 $i$  – радиус инерции;  
 $Z_0$  – расстояние от центра тяжести до наружной грани полки.

Таблица П5. 4

| Но<br>ме<br>р<br>уго<br>л<br>ка | Мас<br>са<br>1м,<br>кг | Раз-<br>меры,<br>мм |    | А,<br>см <sup>2</sup> | I <sub>x</sub> ,<br>см <sup>4</sup> | i <sub>x</sub> ,<br>см | I <sub>x0</sub> ,<br>(max)<br>см <sup>4</sup> | i <sub>x0</sub> ,<br>(max)<br>см | I <sub>y0</sub> ,<br>(min)<br>см <sup>4</sup> | i <sub>y0</sub> ,<br>(min)<br>см | I <sub>xy</sub> ,<br>см <sup>4</sup> | Z <sub>0</sub> ,<br>см |
|---------------------------------|------------------------|---------------------|----|-----------------------|-------------------------------------|------------------------|-----------------------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------------------|----------------------------------|--------------------------------------|------------------------|
|                                 |                        | b                   | t  |                       |                                     |                        |                                               |                                  |                                               |                                  |                                      |                        |
| 1                               | 2                      | 3                   | 4  | 5                     | 6                                   | 7                      | 8                                             | 9                                | 10                                            | 11                               | 12                                   | 13                     |
| 2                               | 0,89                   | 20                  | 3  | 1,13                  | 0,40                                | 0,59                   | 0,63                                          | 0,75                             | 0,17                                          | 0,39                             | 0,23                                 | 0,60                   |
|                                 | 1,15                   |                     | 4  | 1,46                  | 0,50                                | 0,58                   | 0,78                                          | 0,73                             | 0,22                                          | 0,38                             | 0,28                                 | 0,64                   |
| 2,5                             | 1,12                   | 25                  | 3  | 1,43                  | 0,81                                | 0,75                   | 1,29                                          | 0,95                             | 0,34                                          | 0,49                             | 0,47                                 | 0,73                   |
|                                 | 1,46                   |                     | 4  | 1,86                  | 1,03                                | 0,74                   | 1,62                                          | 0,93                             | 0,44                                          | 0,48                             | 0,59                                 | 0,76                   |
|                                 | 1,78                   |                     | 5* | 2,27                  | 1,22                                | 0,73                   | 1,91                                          | 0,92                             | 0,53                                          | 0,48                             | 0,69                                 | 0,80                   |
| 2,8                             | 1,27                   | 28                  | 3  | 1,62                  | 1,16                                | 0,85                   | 1,84                                          | 1,07                             | 0,48                                          | 0,55                             | 0,68                                 | 0,80                   |
| 3                               | 1,36                   | 30                  | 3  | 1,74                  | 1,45                                | 0,91                   | 2,30                                          | 1,15                             | 0,60                                          | 0,59                             | 0,85                                 | 0,85                   |
|                                 | 1,78                   |                     | 4  | 2,27                  | 1,84                                | 0,90                   | 2,92                                          | 1,13                             | 0,77                                          | 0,58                             | 1,08                                 | 0,89                   |
|                                 | 2,18                   |                     | 5* | 2,78                  | 2,20                                | 0,89                   | 3,97                                          | 1,12                             | 0,94                                          | 0,58                             | 1,27                                 | 0,93                   |
| 3,2                             | 1,46                   | 32                  | 3  | 1,86                  | 1,77                                | 0,97                   | 2,80                                          | 1,23                             | 0,74                                          | 0,63                             | 1,03                                 | 0,89                   |
|                                 | 1,91                   |                     | 4  | 2,43                  | 2,26                                | 0,96                   | 3,58                                          | 1,21                             | 0,94                                          | 0,62                             | 1,32                                 | 0,94                   |
| 3,5                             | 1,60                   | 35                  | 3  | 2,04                  | 2,35                                | 1,07                   | 3,72                                          | 1,35                             | 0,97                                          | 0,69                             | 1,37                                 | 0,97                   |
|                                 | 2,10                   |                     | 4  | 2,17                  | 3,01                                | 1,06                   | 4,76                                          | 1,33                             | 1,25                                          | 0,68                             | 1,75                                 | 1,01                   |
|                                 | 2,58                   |                     | 5  | 3,28                  | 3,61                                | 1,05                   | 5,71                                          | 1,32                             | 1,52                                          | 0,68                             | 2,10                                 | 1,05                   |
| 4                               | 1,85                   | 40                  | 3  | 2,35                  | 3,55                                | 1,2                    | 5,63                                          | 1,55                             | 1,47                                          | 0,79                             | 2,08                                 | 1,09                   |
|                                 | 2,42                   |                     | 4  | 3,08                  | 4,58                                | 3                      | 7,26                                          | 1,53                             | 1,90                                          | 0,78                             | 2,68                                 | 1,13                   |
|                                 | 2,98                   |                     | 5  | 3,79                  | 5,53                                | 1,22                   | 8,57                                          | 1,52                             | 2,30                                          | 0,78                             | 3,22                                 | 1,17                   |
|                                 | 3,52                   |                     | 6* | 4,48                  | 6,41                                | 1,21                   | 10,13                                         | 1,50                             | 2,70                                          | 0,78                             | 3,72                                 | 1,21                   |
|                                 |                        |                     |    |                       |                                     | 1,2                    |                                               |                                  |                                               |                                  |                                      |                        |

Примечание: Уголки, отмеченные звездочкой (\*) изготавливают по требованию потребителя

| 1   | 2     | 3  | 4   | 5     | 6      | 7    | 8      | 9    | 10    | 11   | 12    | 13   |
|-----|-------|----|-----|-------|--------|------|--------|------|-------|------|-------|------|
| 5   | 2,32  | 50 | 3   | 2,96  | 7,11   | 1,55 | 11,27  | 1,95 | 2,95  | 1,00 | 4,16  | 1,33 |
|     | 3,05  |    | 4   | 3,89  | 9,21   | 1,54 | 14,6   | 1,94 | 3,8   | 0,99 | 5,42  | 1,38 |
|     | 3,77  |    | 5   | 4,8   | 11,20  | 1,53 | 17,77  | 1,92 | 4,63  | 0,98 | 6,57  | 1,42 |
|     | 4,47  |    | 6   | 5,69  | 13,07  | 1,52 | 20,72  | 1,91 | 5,43  | 0,98 | 7,65  | 1,46 |
|     | 5,15  |    | 7*  | 6,56  | 14,84  | 1,50 | 23,47  | 1,89 | 6,21  | 0,97 | 8,63  | 1,50 |
|     | 5,82  |    | 8*  | 7,41  | 16,51  | 1,49 | 26,03  | 1,87 | 6,98  | 0,97 | 9,52  | 1,53 |
| 5,6 | 3,44  | 56 | 4   | 4,38  | 13,1   | 1,73 | 20,8   | 2,18 | 5,41  | 1,11 | 7,69  | 1,52 |
|     | 4,25  |    | 5   | 5,41  | 16     | 1,72 | 25,4   | 2,16 | 6,59  | 1,1  | 9,41  | 1,57 |
| 6*  | 3,71  | 60 | 4   | 4,72  | 16,21  | 1,85 | 25,69  | 2,33 | 6,72  | 1,19 | 9,48  | 1,62 |
|     | 4,68  |    | 5   | 5,33  | 19,79  | 1,84 | 31,40  | 2,32 | 8,18  | 1,18 | 11,61 | 1,66 |
|     | 5,43  |    | 6   | 6,92  | 23,21  | 1,83 | 36,81  | 2,31 | 9,60  | 1,18 | 13,60 | 1,70 |
|     | 7,10  |    | 8   | 9,04  | 29,55  | 1,81 | 46,77  | 2,27 | 12,34 | 1,17 | 17,22 | 1,78 |
|     | 8,70  |    | 10  | 11,09 | 35,32  | 1,79 | 55,64  | 2,24 | 15,00 | 1,16 | 20,32 | 1,85 |
|     |       |    |     |       |        |      |        |      |       |      |       |      |
| 6,3 | 3,90  | 63 | 4   | 4,96  | 18,9   | 1,95 | 20,9   | 2,45 | 7,81  | 1,25 | 11    | 1,69 |
|     | 4,81  |    | 5   | 6,13  | 23,1   | 1,94 | 36,8   | 2,44 | 9,52  | 1,25 | 13,7  | 1,74 |
|     | 5,72  |    | 6   | 7,28  | 27,1   | 1,93 | 42,9   | 2,43 | 11,2  | 1,24 | 15,9  | 1,78 |
| 6,5 | 5,91  | 65 | 6   | 7,52  | 29,85  | 1,99 | 47,38  | 2,51 | 12,32 | 1,28 | 17,53 | 1,83 |
|     | 7,73  |    | 8   | 9,84  | 38,13  | 1,97 | 60,42  | 2,48 | 15,85 | 2,48 | 22,29 | 1,90 |
| 7   | 4,87  | 70 | 4,5 | 6,2   | 29,04  | 2,16 | 46,03  | 2,72 | 12,04 | 1,39 | 17,00 | 1,88 |
|     | 5,38  |    | 5   | 6,86  | 31,94  | 2,16 | 50,67  | 2,72 | 13,22 | 1,39 | 18,70 | 1,90 |
|     | 6,39  |    | 6   | 8,15  | 37,58  | 2,15 | 59,64  | 2,71 | 15,52 | 1,38 | 22,10 | 1,94 |
|     | 7,39  |    | 7   | 9,42  | 42,98  | 2,14 | 68,19  | 2,69 | 17,77 | 1,37 | 25,20 | 1,99 |
|     | 8,37  |    | 8   | 10,67 | 48,16  | 2,12 | 76,35  | 2,68 | 19,97 | 1,37 | 28,20 | 2,02 |
|     | 10,29 |    | 10* | 13,11 | 57,90  | 2,10 | 91,52  | 2,64 | 24,27 | 1,36 | 33,60 | 2,10 |
|     |       |    |     |       |        |      |        |      |       |      |       |      |
| 7,5 | 5,80  | 75 | 5   | 7,39  | 39,5   | 2,31 | 62,6   | 2,91 | 16,4  | 1,49 | 23,1  | 2,02 |
|     | 6,89  |    | 6   | 8,78  | 46,6   | 2,3  | 73,9   | 2,9  | 19,3  | 1,48 | 27,3  | 2,06 |
|     | 7,96  |    | 7   | 10,1  | 53,3   | 2,29 | 84,6   | 2,89 | 22,1  | 1,48 | 31,2  | 2,1  |
|     | 9,02  |    | 8   | 11,50 | 59,84  | 2,28 | 94,89  | 2,87 | 24,80 | 1,47 | 35,00 | 2,15 |
|     | 10,08 |    | 9   | 12,83 | 66,10  | 2,27 | 104,79 | 2,86 | 27,48 | 1,46 | 38,00 | 2,18 |
|     |       |    |     |       |        |      |        |      |       |      |       |      |
| 8   | 6,78  | 80 | 5,5 | 8,63  | 52,7   | 2,47 | 83,6   | 3,11 | 21,8  | 1,59 | 30,9  | 2,17 |
|     | 7,36  |    | 6   | 9,38  | 57     | 2,47 | 90,4   | 3,11 | 23,5  | 1,58 | 33,4  | 2,19 |
|     | 8,51  |    | 7   | 10,8  | 65,3   | 2,45 | 104,0  | 3,09 | 27,0  | 1,58 | 38,3  | 2,23 |
|     | 9,65  |    | 8   | 12,30 | 73,36  | 2,44 | 116,39 | 3,08 | 30,32 | 1,57 | 43,00 | 2,27 |
|     | 11,88 |    | 10* | 15,14 | 88,58  | 2,42 | 140,31 | 3,04 | 36,85 | 1,56 | 56,70 | 2,35 |
|     | 14,05 |    | 12* | 17,90 | 102,74 | 2,40 | 162,39 | 3,01 | 43,21 | 1,55 | 59,50 | 2,42 |
|     |       |    |     |       |        |      |        |      |       |      |       |      |

|      | 2     | 3       | 4   | 5     | 6      | 7    | 8       | 9    | 10     | 11   | 12    | 13        |
|------|-------|---------|-----|-------|--------|------|---------|------|--------|------|-------|-----------|
| 10   | 10,06 | 10<br>0 | 6,5 | 12,82 | 122,10 | 3,09 | 193,46  | 3,89 | 50,73  | 1,99 | 71,40 | 2,68      |
|      | 10,79 |         | 7   | 13,75 | 130,59 | 3,08 | 207,01  | 3,88 | 54,16  | 1,98 | 76,40 | 2,71      |
|      | 12,25 |         | 8   | 15,60 | 147,19 | 3,07 | 233,46  | 3,87 | 60,92  | 1,98 | 86,30 | 2,75      |
|      | 15,10 |         | 10  | 19,24 | 178,95 | 3,05 | 283,83  | 3,84 | 74,08  | 1,96 | 110,0 | 2,83      |
|      | 17,90 |         | 12  | 22,80 | 208,90 | 3,03 | 330,95  | 3,81 | 86,84  | 1,95 | 122,0 | 2,91      |
|      | 20,63 |         | 14  | 26,28 | 237,15 | 2,99 | 374,98  | 3,78 | 99,32  | 1,94 | 138,0 | 2,99      |
|      | 21,97 |         | 15* | 27,99 | 250,68 | 2,98 | 395,87  | 3,76 | 105,48 | 1,94 | 145,0 | 3,03      |
|      | 23,30 |         | 16  | 29,68 | 263,82 | 3,40 | 416,04  | 3,74 | 111,61 | 1,94 | 152,0 | 3,06      |
| 11   | 11,89 | 11<br>0 | 7   | 15,2  | 175,61 | 3,4  | 279     | 4,29 | 72,7   | 2,19 | 106   | 2,96      |
|      | 13,50 |         | 8   | 17,2  | 198,17 | 3,39 | 315     | 4,28 | 81,8   | 2,18 | 116   | 3         |
| 12*  | 14,76 | 12<br>0 | 8   | 18,80 | 259,75 | 3,72 | 412,45  | 4,68 | 107,04 | 2,39 | 153,0 | 3m,<br>25 |
|      | 18,24 |         | 10  | 23,24 | 317,16 | 3,69 | 503,79  | 4,66 | 130,54 | 2,37 | 187,0 | 3,33      |
|      | 21,67 |         | 12  | 27,60 | 371,80 | 3,67 | 590,28  | 4,62 | 153,33 | 2,36 | 218,0 | 3,44      |
|      | 26,68 |         | 15  | 33,99 | 448,90 | 3,63 | 711,32  | 4,57 | 186,48 | 2,34 | 262,0 | 3,52      |
| 12,5 | 15,46 | 12<br>5 | 8   | 19,69 | 294,36 | 3,87 | 466,76  | 4,87 | 121,96 | 2,49 | 172,0 | 3,36      |
|      | 17,30 |         | 9   | 22,00 | 327,48 | 3,86 | 520,0   | 4,86 | 135,88 | 2,48 | 192,0 | 3,4       |
|      | 19,10 |         | 10  | 24,33 | 359,82 | 3,85 | 571,04  | 4,84 | 148,59 | 2,47 | 211,0 | 3,45      |
|      | 22,68 |         | 12  | 28,89 | 422,23 | 3,82 | 670,02  | 4,82 | 174,43 | 2,46 | 248,0 | 3,53      |
|      | 26,20 |         | 14  | 33,37 | 481,76 | 3,80 | 763,90  | 4,78 | 199,62 | 2,45 | 282,0 | 3,61      |
|      | 29,65 |         | 16  | 37,77 | 538,56 | 3,78 | 852,84  | 4,75 | 224,29 | 2,44 | 315,0 | 3,68      |
| 14   | 19,41 | 14<br>0 | 9   | 24,72 | 466,0  | 4,34 | 739,42  | 5,47 | 192,0  | 2,79 | 274,0 | 3,78      |
|      | 21,45 |         | 10  | 27,33 | 512,0  | 4,33 | 813,62  | 5,46 | 211,0  | 2,78 | 301,0 | 3,82      |
|      | 25,50 |         | 12  | 32,49 | 602,0  | 4,31 | 956,98  | 5,43 | 248,0  | 2,76 | 354,0 | 3,9       |
| 15*  | 23,02 | 15<br>0 | 10  | 29,33 | 634,76 | 4,65 | 1008,56 | 5,86 | 260,97 | 2,98 | 374,0 | 4,07      |
|      | 27,39 |         | 12  | 34,89 | 747,48 | 4,63 | 1187,86 | 5,83 | 307,09 | 2,97 | 440,0 | 4,15      |
|      | 33,82 |         | 15  | 43,08 | 908,38 | 4,59 | 1442,60 | 5,79 | 374,17 | 2,95 | 534,0 | 4,27      |
|      | 40,11 |         | 18  | 51,09 | 1060,1 | 4,56 | 1680,92 | 5,74 | 439,24 | 2,93 | 621,0 | 4,38      |
| 16   | 24,67 | 16<br>0 | 10  | 31,43 | 774,2  | 4,96 | 1229,0  | 6,25 | 319,4  | 3,19 | 455,0 | 4,3       |
|      | 27,02 |         | 11  | 34,42 | 844,2  | 4,95 | 1340,7  | 6,24 | 347,8  | 3,18 | 496,0 | 4,35      |
|      | 29,35 |         | 12  | 37,39 | 912,9  | 4,94 | 1450,0  | 6,23 | 375,8  | 3,17 | 537,0 | 4,39      |
|      | 33,97 |         | 14  | 43,57 | 1046,5 | 4,92 | 1662,0  | 6,20 | 431,8  | 3,16 | 615,0 | 4,47      |
|      | 38,52 |         | 16  | 49,07 | 1175,2 | 4,89 | 1865,7  | 6,17 | 484,6  | 3,14 | 690,0 | 4,55      |
|      | 43,01 |         | 18  | 54,79 | 1290,2 | 4,87 | 2061,0  | 6,13 | 537,5  | 3,13 | 771,0 | 4,63      |
|      | 47,44 |         | 20  | 60,40 | 1418,8 | 4,85 | 2248,3  | 6,10 | 589,4  | 3,12 | 830,0 | 4,70      |

| 1  | 2      | 3       | 4   | 5      | 6      | 7    | 8       | 9    | 10     | 11   | 12     | 13   |
|----|--------|---------|-----|--------|--------|------|---------|------|--------|------|--------|------|
| 18 | 30,47  | 18<br>0 | 11  | 38,80  | 1216,4 | 5,60 | 1933,1  | 7,06 | 499,8  | 3,59 | 716,0  | 4,85 |
|    | 33,12  |         | 12  | 42,19  | 1316,6 | 5,59 | 2092,8  | 7,04 | 540,5  | 3,58 | 776,0  | 4,89 |
|    | 40,96  |         | 15* | 52,18  | 1607,4 | 5,55 | 2555,0  | 7,00 | 659,7  | 3,56 | 948,0  | 5,01 |
|    | 48,66  |         | 18* | 61,99  | 1884,1 | 5,51 | 2992,7  | 6,95 | 775,4  | 3,54 | 1108,0 | 5,13 |
|    | 53,72  |         | 20* | 68,43  | 2061,1 | 5,49 | 3271,3  | 6,91 | 850,9  | 3,53 | 1210,0 | 5,20 |
| 20 | 36,97  | 20<br>0 | 12  | 47,10  | 1822,8 | 6,22 | 2806,2  | 7,84 | 749,4  | 3,99 | 1073,0 | 5,37 |
|    | 39,92  |         | 13  | 50,85  | 1960,8 | 6,21 | 3116,2  | 7,83 | 805,4  | 3,98 | 1156,0 | 5,42 |
|    | 42,80  |         | 14  | 54,60  | 2097,0 | 6,20 | 3333,0  | 7,81 | 861,6  | 3,97 | 1236,0 | 5,46 |
|    | 48,65  |         | 16  | 61,98  | 2362,6 | 6,17 | 3755,4  | 7,78 | 980,7  | 3,96 | 1393,0 | 5,54 |
|    | 54,40  |         | 18* | 69,30  | 2620,6 | 6,15 | 4164,5  | 7,75 | 1076,7 | 3,94 | 1544,0 | 5,62 |
|    | 60,08  |         | 20  | 76,54  | 2871,5 | 6,12 | 4560,4  | 7,72 | 1181,9 | 3,93 | 1689,0 | 5,70 |
|    | 71,26  |         | 24* | 90,78  | 3350,7 | 6,08 | 5313,6  | 7,65 | 1387,7 | 3,91 | 1936,0 | 5,85 |
|    | 74,02  |         | 25  | 94,29  | 3466,2 | 6,06 | 5494,0  | 7,63 | 1438,4 | 3,91 | 2028,0 | 5,89 |
|    | 87,56  |         | 30  | 111,5  | 4019,6 | 6,00 | 6351,1  | 7,55 | 1698,2 | 3,87 | 2332,0 | 6,07 |
| 22 | 47,40  | 22<br>0 | 14  | 60,38  | 2814,4 | 6,83 | 4470,2  | 8,60 | 1158,6 | 4,38 | 1655,0 | 5,91 |
|    | 53,83  |         | 16  | 68,58  | 3175,4 | 6,80 | 5045,4  | 8,58 | 1305,0 | 4,36 | 1862,0 | 6,02 |
| 25 | 61,55  | 25<br>0 | 16  | 78,40  | 4717,1 | 7,76 | 7492,1  | 9,78 | 1942,1 | 4,98 | 2775,0 | 6,75 |
|    | 68,56  |         | 18  | 87,72  | 5247,2 | 7,73 | 8336,7  | 9,75 | 2157,8 | 4,96 | 3089,0 | 6,83 |
|    | 76,11  |         | 20  | 96,96  | 5764,9 | 7,71 | 9159,7  | 9,72 | 2370,0 | 4,94 | 3395,0 | 6,91 |
|    | 87,31  |         | 22  | 106,10 | 6270,3 | 7,69 | 9961,6  | 9,69 | 2579,0 | 4,93 | 3691,0 | 7,00 |
|    | 93,97  |         | 25  | 119,70 | 7006,4 | 7,65 | 1125,5  | 9,64 | 2887,3 | 4,91 | 4119,0 | 7,11 |
|    | 104,50 |         | 28  | 133,10 | 7716,9 | 7,61 | 12243,8 | 9,59 | 3189,9 | 4,90 | 4527,0 | 7,23 |
|    | 11,40  |         | 30  | 142,00 | 8176,5 | 7,59 | 12964,7 | 9,56 | 3389,0 | 4,89 | 4788,0 | 7,31 |
|    | 128,50 |         | 35  | 163,70 | 9281,0 | 7,53 | 14682,7 | 9,47 | 3879,4 | 4,87 | 5402,0 | 7,49 |

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров А.В. Сопротивление материалов/ А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин. – М.: «Высшая школа». – 2007. – 560с.
2. Ахметзянов М.Х. Сопротивление материалов/ М.Х. Ахметзянов, П.В. Грес, И.Б. Лазарев. – М.: «Высшая школа». – 2007. – 334с.
3. Гребенюк Г.И. Определение внутренних усилий в поперечных сечениях стержней/ Г.И. Гребенюк, Ф.С. Валиев, Е.В. Янков. – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин). – 2003. – 48с.
4. Чаплинский И.А. Прямой поперечный изгиб призматических балок. Метод. указания по сопротивлению материалов / И.А. Чаплинский, Г.Б. Лебедев, Л.И. Татарова. – Новосибирск: НГАС, 1998, 2003, 2005 г.г.
5. Гребенюк, Г. И. Сопротивление материалов. Основы теории и примеры решения задач / Г. И Гребенюк, Ф.С.Валиев. – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2006. Ч.2. – 140 с.
6. Гребенюк, Г. И. Сопротивление материалов Ч. 1/ Г. И. Гребенюк, И. В. Кучеренко. Новосибирск : НГАСУ(Сибстрин), 2010, 148 с.