



А.А. Крамаренко

ЛЕКЦИИ
ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ
СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Часть 2

СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

НОВОСИБИРСК 2002

УДК 624.041.1
ББК 38.112
К 777

Крамаренко А.А.

ЛЕКЦИИ ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ. Ч. 2. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ. – Новосибирск: НГАСУ, 2002. – 104 с.

ISBN-5-7795-0093-2

Пять лекций по строительной механике стержневых систем являются продолжением раздела курса "Статически определимые системы", включающего в себя расчёт трёхшарнирных и комбинированных систем и определение перемещений от силового, температурного и кинематического воздействий.

Лекции разработаны для студентов безотрывных форм обучения в соответствии с требованиями государственного стандарта высшего профессионального образования к обязательному минимуму содержания и уровню подготовки бакалавров по направлению 550100 "Строительство" и инженеров по специальностям 290300 "Промышленное и гражданское строительство", 290400 "Гидротехническое строительство", 290500 "Городское строительство и хозяйство", 291400 "Проектирование зданий". Отдельные лекции и параграфы могут быть рекомендованы студентам других специальностей направления 653500 "Строительство".

Чертежи выполнены кандидатом архитектуры, и.о. доцента кафедры архитектуры и градостроительства Е.В. Симагиной

Печатается по решению издательско-библиотечного совета НГАСУ

Рецензенты:

- В.А. Шутов, д.т.н., профессор, завкафедрой общетехнических дисциплин (НГАХА);
- В.К. Фёдоров, к.т.н., профессор кафедры инженерной геологии, оснований и фундаментов (НГАСУ)

ISBN-5-7795-0093-2

© НГАСУ, 2002

© Крамаренко А.А., 2002

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лекция восьмая. РАСЧЁТ ТРЁХШАРНИРНЫХ АРОК И РАМ	4
Лекция девятая. РАСЧЁТ КОМБИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ	33
Лекция десятая. ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ И ВОЗМОЖНАЯ РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ	54
Лекция одиннадцатая. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ СИЛОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ.....	69
Лекция двенадцатая. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ ОТ ТЕМПЕРАТУРНЫХ И КИНЕМАТИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ	91
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	103

ЛЕКЦИЯ ВОСЬМАЯ РАСЧЁТ ТРЁХШАРНИРНЫХ АРОК И РАМ

- 8.1. Предварительные замечания
- 8.2. Расчёт "ползучей" арки на произвольную нагрузку
- 8.3. Расчёт трёхшарнирной арки с пятовыми шарнирами на одном уровне на вертикальную нагрузку
- 8.4. Рациональная ось арки
- 8.5. Расчёт трёхшарнирных рамных систем
- 8.6. Линии влияния и матрицы влияния реакций опорных связей и внутренних усилий в трёхшарнирных системах
- 8.7. Вопросы для самопроверки
- 8.8. Рекомендуемая литература

8.1. Предварительные замечания

Трёхшарнирная арка — это система, состоящая из двух стержней с криволинейной осью, соединённых между собой ключевым цилиндрическим шарниром C и с диском "земля" (или другими геометрически неизменяемыми дисками) пятовыми цилиндрическим шарнирами A и B (рис. 8.1, а). Криволинейный стержень

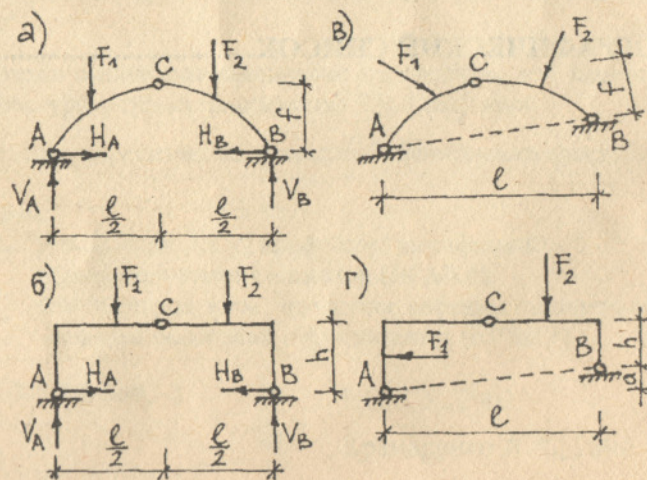


Рис. 8.1

может быть заменён стержнем с ломаной осью. В этом случае образуется трёхшарнирная рамная система (рис. 8.1, б). Простейшие трёхшарнирные системы рис. (8.1, а, б) являются геометрически неизменяемыми только тогда, когда шарниры A , B и C не лежат на одной прямой.

Пятовые шарниры A и B в трёхшарнирных системах, как правило, располагаются на одном уровне, а ключевой шарнир C — на оси симметрии (рис. 8.1, а, б). Когда пятовые шарниры A и B находятся на разных уровнях (рис. 8.1, в, г) трёхшарнирные системы (арки и рамы) называются "ползучими".

Трёхшарнирные системы являются распорными, так как от вертикальной нагрузки горизонтальные составляющие реакций пятовых шарниров H_A и H_B не равны нулю (см. п. 1.4 первой лекции). В системах, показанных на рис. 8.1, горизонтальные составляющие реакций шарниров (распор) воспринимаются опорными устройствами. Часто восприятие распора замыкается на саму систему и осуществляется отдельным элементом — затяжкой ab (рис. 8.2).

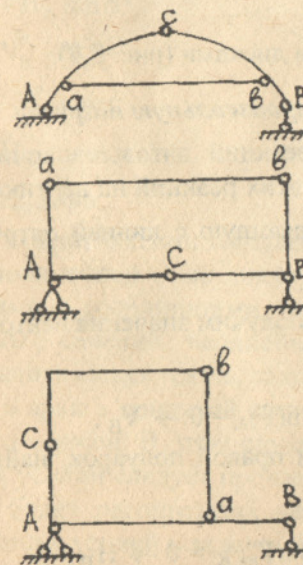


Рис. 8.2

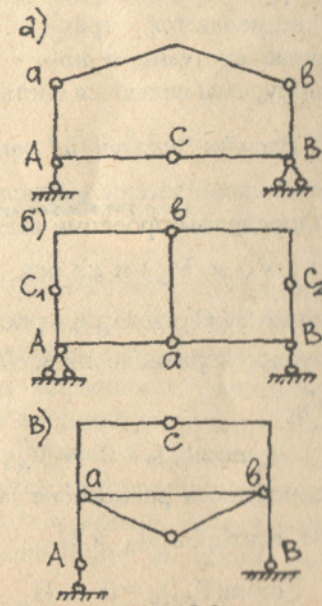


Рис. 8.3

Если полуарки и полурамы соединяются между собой ключевым шарниром С и затяжкой $ав$, ось которой не проходит через шарнир С, то образуется геометрически неизменяемый по своей внутренней структуре диск. К диску "земля" трёхшарнирная система в этом случае должна присоединяться тремя связями, оси которых не пересекаются в одной точке.

Затяжка в трёхшарнирных системах может иметь ломанную ось (рис. 8.3,а) и может быть общим элементом для двух трёхшарнирных систем (рис. 8.3,б). В отдельных случаях затяжка представляет собой составной геометрически неизменяемый диск (рис. 8.3,в).

В качестве расчётных схем сооружений довольно часто встречаются трёхшарнирные системы, в которых полурамы являются составными дисками (рис. 8.4).

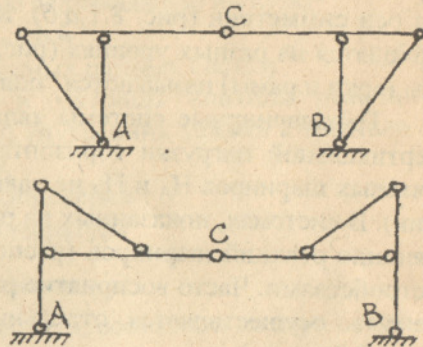


Рис. 8.4

8.2. Расчёт "ползучей" арки на произвольную нагрузку

Расчёт начинается с вычисления реакций пятовых шарниров А и В. Определим ~~составляющие~~ векторов этих реакций на вертикальную ось (V'_A и V'_B) и на ось, совпадающую с линией пятовых шарниров АВ (H'_A и H'_B), — рис. 8.5,а.

Из условия равновесия всей арки получим значения векторов V'_A и V'_B :

$$\sum \text{mom}(F)_B = 0 \rightarrow V'_A, \quad \sum \text{mom}(F)_A = 0 \rightarrow V'_B.$$

Рассматривая равновесие левой и правой полуарок, найдём значения векторов H'_A и H'_B :

$$\sum \text{mom}(F_{\text{лев}})_C = 0 \rightarrow H'_A, \quad \sum \text{mom}(F_{\text{пр}})_C = 0 \rightarrow H'_B.$$

Для проверки правильности вычисления реакций пятовых шарниров используем другие условия равновесия всей системы, а именно:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0.$$

При необходимости можно определить вертикальные и горизонтальные компоненты реакций пятовых шарниров (рис. 8.5,б):

$$\begin{aligned} V_A &= V'_A + V''_A = \\ &= V'_A + H'_A \sin \alpha; \\ V_B &= V'_B - V''_B = \\ &= V'_B - H'_B \sin \alpha; \end{aligned}$$

$$H_A = H'_A \cos \alpha;$$

$$H_B = H'_B \cos \alpha.$$

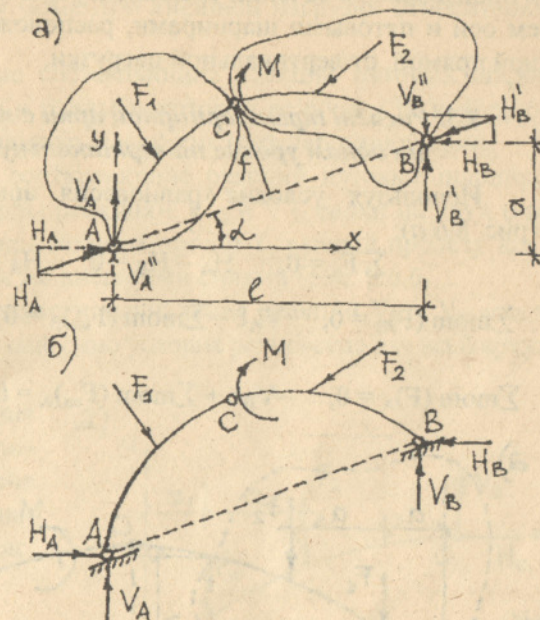


Рис. 8.5

В сопротивлении материалов было показано, что в стержнях с криволинейной осью аналитическая связь между внутренними усилиями и координатами, определяющими положение рассматриваемых сечений, нелинейна. Вид выражений, описывающих эту аналитическую связь, зависит от внешней нагрузки и уравнения оси арки в принятой системе координат и, как правило, достаточно сложен. В этом случае вычисление ординат эпюр внутренних усилий следует производить по сечениям. Чем больше сечений будет рассмотрено, тем точнее будут выявлены эпюры внутренних усилий в заданной арке.

В п. 8.3. настоящей лекции подробно рассматривается вычисление изгибающего момента, поперечной и продольной силы

в произвольном сечении трёхшарнирной арки с любым очертанием оси и пятовыми шарнирами, расположенной на горизонтальной прямой, от вертикальной нагрузки.

8.3. Расчёт трёхшарнирной арки с пятовыми шарнирами на одном уровне на вертикальную нагрузку

Используя условия равновесия арки в целом, получим (рис. 8.6, а):

$$\sum F_x = 0, \quad H_A - H_B = 0, \quad H_A = H_B = H;$$

$$\sum \text{mom}(F)_B = 0, \quad V_A \ell - \sum \text{mom}(F_{\text{вн}})_B = 0, \quad V_A = \frac{\sum \text{mom}(F_{\text{вн}})_B}{\ell};$$

$$\sum \text{mom}(F)_A = 0, \quad -V_B \ell + \sum \text{mom}(F_{\text{вн}})_A = 0, \quad V_B = \frac{\sum \text{mom}(F_{\text{вн}})_A}{\ell}.$$

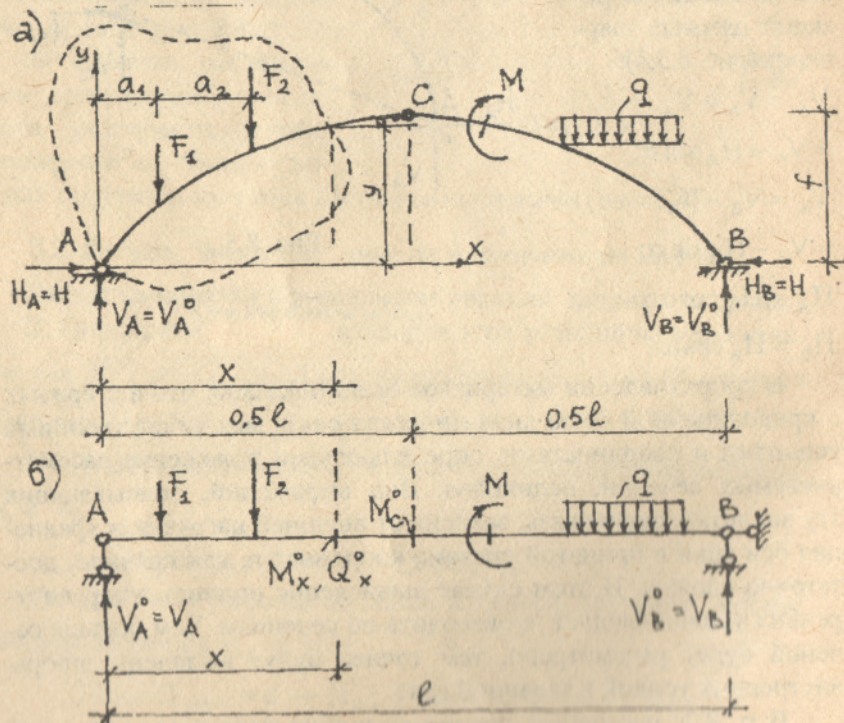


Рис. 8.6

Из приведенных соотношений, где $\sum \text{mom}(F_{\text{вн}})_B$ и $\sum \text{mom}(F_{\text{вн}})_A$ – суммы моментов внешней нагрузки относительно точек A и B, следует:

1. Горизонтальные составляющие реакций пятовых шарниров A и B одинаковы и равны некоторой величине H , которую в дальнейшем будем называть распором трехшарнирной арки.

2. Вертикальные составляющие реакций пятовых шарниров V_A и V_B численно равны реакциям V_A^0 и V_B^0 балки на двух шарнирных опорах, перекрывающей пролёт ℓ , равный пролёту арки, и загруженной такими же внешними силами (рис. 8.6, б).

Проверку правильности вычисления реакций V_A и V_B можно произвести, используя ещё одно условие равновесия для всей арки:

$$\sum F_y = 0.$$

Для определения распора H арки рассмотрим равновесие одной из полуарок, например, левой (рис. 8.7, а):

$$\sum \text{mom}(F_{\text{лев}})_C = 0,$$

$$[V_A^0 \cdot 0,5\ell - F_1(0,5\ell - a_1) - F_2(0,5\ell - a_1 - a_2)] - Hf = 0.$$

Выражение в квадратных скобках есть изгибающий момент M_C^0 в сечении вышеупомянутой балки на двух опорах (рис. 8.6, б), расположенном под ключевым сечением арки C.

$$M_C^0 - H \cdot f = 0,$$

$$H = \frac{M_C^0}{f}.$$

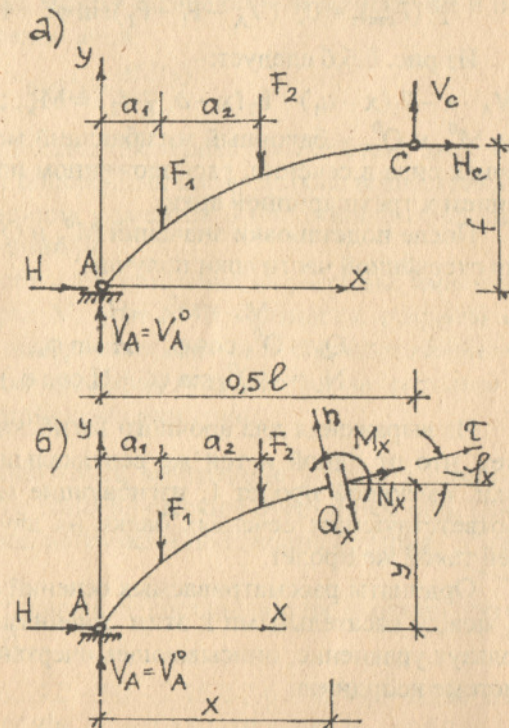


Рис. 8.7

Для контроля правильности вычисления H можно рассмотреть равновесие другой полуарки (правой), проверив выполнение следующего уравнения:

$$\sum \text{mom} (F_{\text{пр}})_C = 0.$$

Внутренние усилия в произвольном сечении арки определим, рассматривая равновесие любой отсечённой части, например, той, которая на рис. 8.6,а обведена пунктирной линией. Силы, действующие на отсечённую часть, включая положительный изгибающий момент M_x , положительные поперечную и продольную силы Q_x и N_x , показаны на рис. 8.7,б. Условия равновесия для отсечённой части запишутся:

$$\sum \text{mom} (F_{\text{отс}})_x = 0, \quad V_A x - F_1(x - a_1) - F_2(x - a_1 - a_2) - H y - M_x = 0;$$

$$\sum (F_{\text{отс}})_n = 0, \quad (V_A - F_1 - F_2) \cos \varphi_x - H \sin \varphi_x - Q_x = 0;$$

$$\sum (F_{\text{отс}})_t = 0, \quad (V_A - F_1 - F_2) \sin \varphi_x + H \cos \varphi_x + N_x = 0.$$

Из рис. 8.6,б следует:

$$V_A \cdot x - F_1(x - a_1) - F_2(x - a_1 - a_2) = M_x^0, \quad V_A - F_1 - F_2 = Q_x^0,$$

где M_x^0 и Q_x^0 – балочный изгибающий момент и балочная поперечная сила в сечении, расположенном под рассматриваемым сечением x трёхшарнирной арки.

После подстановки значений M_x^0 и Q_x^0 в условия равновесия для отсечённой части арки получим:

$$M_x = M_x^0 - H y, \quad (8.1)$$

$$Q_x = Q_x^0 \cos \varphi_x - H \sin \varphi_x, \quad (8.2)$$

$$N_x = -(Q_x^0 \sin \varphi_x + H \cos \varphi_x). \quad (8.3)$$

Из выражения для арочного изгибающего момента (8.1) следует, что от одной и той же вертикальной нагрузки в сечениях арки, имеющей пролёт ℓ , изгибающие моменты меньше, чем в соответствующих сечениях балки на двух опорах, перекрывающей такой же пролёт.

Ординаты рассматриваемых сечений арки y и значения углов φ_x между касательными к этим сечениям и осью x получим, используя уравнение, описывающее очертание оси арки в принятой системе координат:

$$y = \psi(x), \quad \text{tg } \varphi_x = \frac{dy}{dx} = \psi'(x).$$

Ординаты эпюр внутренних усилий, имеющих для трёхшарнирной арки нелинейный характер, в необходимом количестве сечений и с необходимой точностью могут быть вычислены как вручную, так и с помощью ПЭВМ по программе "ARKA", разработанной на кафедре строительной механики НГАСУ. По этой программе в ПЭВМ вводятся следующие данные: тип очертания оси симметричной арки (окружность, парабола и т.д.), длина пролёта и стрела подъёма арки, расстояния между сечениями, в которых должны быть вычислены внутренние усилия, абсциссы точек приложения сосредоточенных сил и сосредоточенных моментов, а также начал и концов равномерно распределённой нагрузки.

Для проверки правильности эпюр M и Q используют дифференциальную зависимость между изгибающими моментами и поперечными силами в сечении арки:

$$Q(s) = \frac{dM(s)}{ds}.$$

Эта зависимость позволяет проверить соответствие знаков и нулевых ординат эпюры поперечных сил участкам возрастания и убывания эпюры изгибающих моментов и положению сечений с их экстремальными значениями.

Необходимо также обратить внимание на разрывы, имеющие место на арочных эпюрах M , Q и N . В частности, разрывы на эпюрах продольных и поперечных сил под сосредоточенными силами равны величинам проекций этих сил на касательные и нормали к соответствующим сечениям арки.

ПРИМЕР 8.3.1. Определить внутренние усилия в сечении "а" трёхшарнирной арки с параболическим очертанием оси. Пролёт и стрела подъёма арки, нагрузка и положение сечения "а" показаны на рис. 8.8,а.

1. Определение вертикальных составляющих реакций пятовых шарниров (рис. 8.8,а).

$$\sum \text{mom} (F)_B = 0, \quad V_A \cdot 38 - 16 \cdot 34,2 - 60 - 2 \cdot 15,2 \cdot 7,6 = 0, \quad V_A = 22,06 \text{ кН};$$

$$\sum \text{mom} (F)_A = 0, \quad -V_B \cdot 38 + 16 \cdot 3,8 - 60 + 2 \cdot 15,2 \cdot 30,4 = 0, \quad V_B = 24,34 \text{ кН};$$

$$\sum F_y = 22,06 + 24,34 - 16 - 2 \cdot 15,2 = 0 \text{ (проверка)}.$$

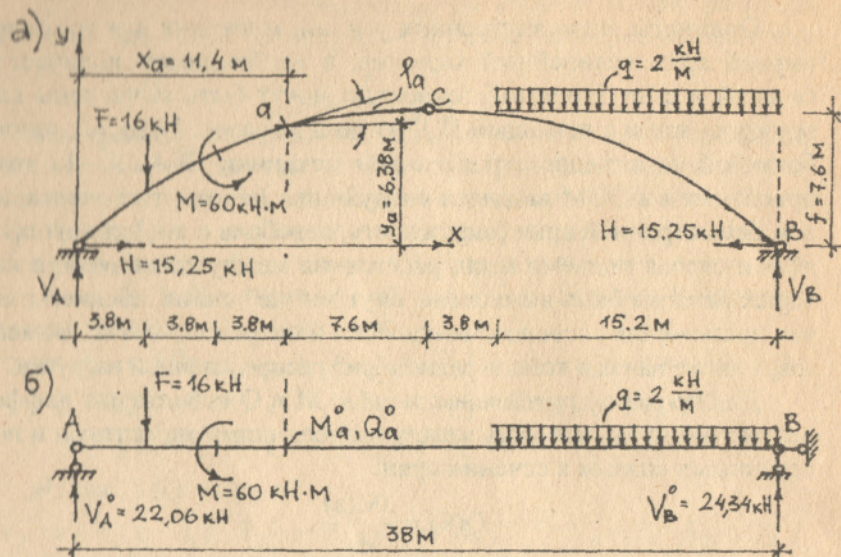


Рис. 8.8

2. Определение распора арки (рис. 8.8, а).

$$\sum_{\text{топ}} (F_{\text{пр}})_C = 0, -24,34 \cdot 19 + 2 \cdot 15,2 \cdot 11,4 + H \cdot 7,6 = 0, H = 15,25 \text{ кН};$$

$$\sum_{\text{топ}} (F_{\text{лев}})_C = 0, 22,06 \cdot 19 - 15,25 \cdot 7,6 - 16 \cdot 15,2 - 60 = 0 \text{ (проверка)}.$$

3. Вычисление геометрических характеристик сечения "а" (при $x = 11,4$ м).

$$y = \frac{4f}{l^2} (\ell - x)x, \quad y_a = \frac{4 \cdot 7,6}{38^2} (38 - 11,4) \cdot 11,4 = 6,38 \text{ м};$$

$$\text{tg } \varphi = y'(x) = \frac{4f}{l^2} (\ell - 2x), \quad \text{tg } \varphi_a = \frac{4 \cdot 7,6}{38^2} (38 - 2 \cdot 11,4) = 0,320;$$

$$\sin \varphi_a = 0,305, \quad \cos \varphi_a = 0,952.$$

4. Определение балочных внутренних усилий в сечении, расположенном под сечением "а" арки (рис. 8.8, б).

$$M_a^0 = 22,06 \cdot 11,4 - 16(11,4 - 3,8) - 60 = 69,88 \text{ кН·м};$$

$$Q_a^0 = 22,06 - 16 = 6,06 \text{ кН}.$$

5. Вычисление внутренних усилий в сечении "а" арки по формулам (8.1)–(8.3).

$$M_a = M_a^0 - H y_a = 69,88 - 15,25 \cdot 6,38 = 27,48 \text{ кН·м};$$

$$Q_a = Q_a^0 \cos \varphi_a - H \sin \varphi_a = 6,06 \cdot 0,952 - 15,25 \cdot 0,305 = 1,12 \text{ кН},$$

$$N_a = -(Q_a^0 \sin \varphi_a + H \cos \varphi_a) = -(6,06 \cdot 0,305 + 15,25 \cdot 0,952) = -16,37 \text{ кН}.$$

8.4. Рациональная ось арки

Рассмотрим случай действия произвольной вертикальной нагрузки, направленной вниз, на трёхшарнирную арку с пятовыми шарнирами, расположенными на горизонтальной прямой (рис. 8.9).

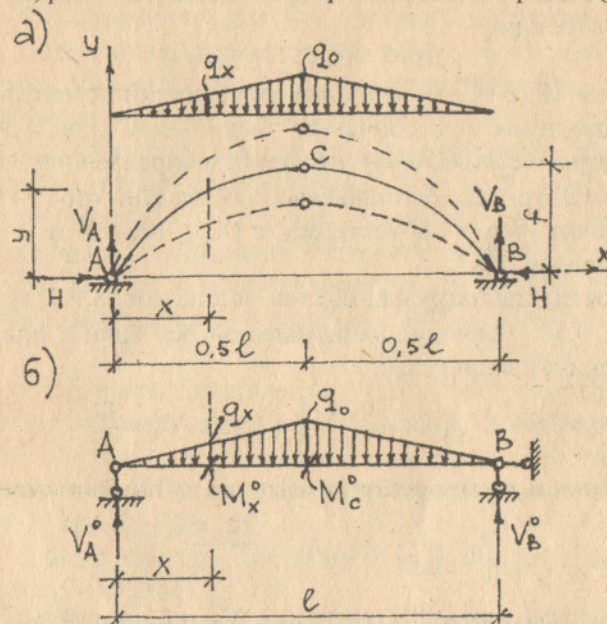


Рис. 8.9

В соотношении

$$M_x = M_x^0 - H y \quad (8.1)$$

очертание оси арки $y = \psi(x)$ может быть подобрано так, что во всех её сечениях изгибающие моменты будут равны нулю. В этом случае ось арки называется рациональной.

Покажем, что ось арки для конкретной нагрузки является рациональной, если ординаты оси арки пропорциональны соответствующим ординатам балочной эпюры изгибающих моментов M_x^0 , т.е. если

$$y = k \cdot M_x^0 \quad (8.4)$$

где k – коэффициент пропорциональности.

После подстановки (8.4) в (8.1) получим:

$$M_x = M_x^0 - k H M_x^0 = M_x^0 (1 - k H). \quad (8.5)$$

Зависимость (8.5) справедлива при любом x , в том числе и при $x = x_C$, т.е. абсциссе, определяющей положение ключевого шарнира C , где в сечениях, расположенных на бесконечно малых расстояниях слева и справа от него, изгибающий момент равен нулю. Следовательно,

$$M_C = M_C^0 (1 - k H) = 0. \quad (8.6)$$

В формуле (8.6) M_C^0 – балочный изгибающий момент в сечении, расположенном под ключевым шарниром C (рис. 8.9,б). В случае действия вертикальной нагрузки, направленной в одну сторону, $M_C^0 \neq 0$. Тогда из соотношения (8.6) следует, что $(1 - k H) = 0$, а это значит, что, в соответствии с (8.5), $M_x = 0$ и ось арки является рациональной.

В частности, для нагрузки, показанной на рис. 8.9,а, в интервале $0 < x \leq 0,5\ell$ уравнение рациональной оси арки в принятой системе координат запишется:

$$y = k M_x^0 = k \left(V_A^0 \cdot x - \frac{q_x x}{2} \cdot \frac{1}{3} x \right), \text{ где } V_A^0 = \frac{q_0 \ell}{4}. \quad (8.7)$$

Интенсивность распределённой нагрузки q_x выразим через q_0 :

$$\frac{q_x}{q_0} = \frac{x}{0,5\ell}, \quad q_x = \frac{2q_0 x}{\ell}.$$

После подстановки в (8.7) значений V_A^0 и q_x получим:

$$y = k \left(\frac{q_0 \ell}{4} x - \frac{2q_0 x}{\ell} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{3} x \right) = k \left(\frac{q_0 \ell}{4} x - \frac{q_0 x^3}{3\ell} \right), \quad (8.8)$$

т.е. уравнение рациональной оси арки в интервале $0 \leq x \leq 0,5\ell$ описывается алгебраическим полиномом третьей степени.

Коэффициент пропорциональности k выделяет из множества кривых, описываемых уравнением (8.8) и проходящих через пятовые шарниры A и B , ту, которая удовлетворяет условию:

$$\text{при } x = 0,5\ell \quad y = f,$$

т.е. проходит через заданное положение ключевого шарнира C (рис. 8.9,а). Для нашего случая:

$$f = k \left(\frac{q_0 \ell^2}{8} - \frac{q_0 \ell^2}{24} \right) = k \frac{q \ell^2}{12}, \quad k = \frac{12f}{q \ell^2}.$$

8.5. Расчёт трёхшарнирных рамных систем

В трёхшарнирных рамных системах, состоящих из двух полурам, с пятовыми шарнирами на одном уровне (рис. 8.1,б) или на разных уровнях (рис. 8.1,з) определение составляющих реакций опорных шарниров производится аналогично изложенному в пп. 8.2–8.3 настоящей лекции для трёхшарнирных арок.

В геометрически неизменяемых по своей внутренней структуре трёхшарнирных системах, закреплённых к диску "земля" тремя связями, определение опорных реакций осуществляется только с помощью условий равновесия для всей системы в целом. Например, для рамы с затяжкой (рис. 8.10,а) имеем:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow H_D, \quad \sum \text{mom} (F)_E = 0 \rightarrow V_A,$$

$$\sum \text{mom} (F)_K = 0 \rightarrow V_B, \quad \sum F_y = 0 \text{ (проверка)}.$$

После определения опорных реакций расчленим систему на части по шарнирам и определяем силы взаимодействия этих частей между собой. Рассмотрим эту операцию на примере рамы с затяжкой (рис. 8.10,а).

В первую очередь записываем условия равновесия для затяжки $ав$ (рис. 8.10,б):

$$\sum \text{mom} (F)_a = 0 \rightarrow V_a, \quad \sum \text{mom} (F)_b = 0 \rightarrow V_a,$$

$$\sum F_y = 0 \text{ (проверка); } \sum F_x = 0, -H_a + H_b = 0, H_a = H_b = H.$$

В дальнейшем рассматриваем равновесие левой полурамы (рис. 8.10,в), на которую действуют заданная нагрузка, реакция V_A опоры A , реакции V_C и H_C ключевого шарнира C , а также переданные с противоположными знаками реакции V_a и H_a шарнира a :

$$\sum \text{mom} (F_{\text{лев}})_C = 0 \rightarrow H, \quad \sum F_x = 0 \rightarrow H_C, \quad \sum F_y = 0 \rightarrow V_C.$$

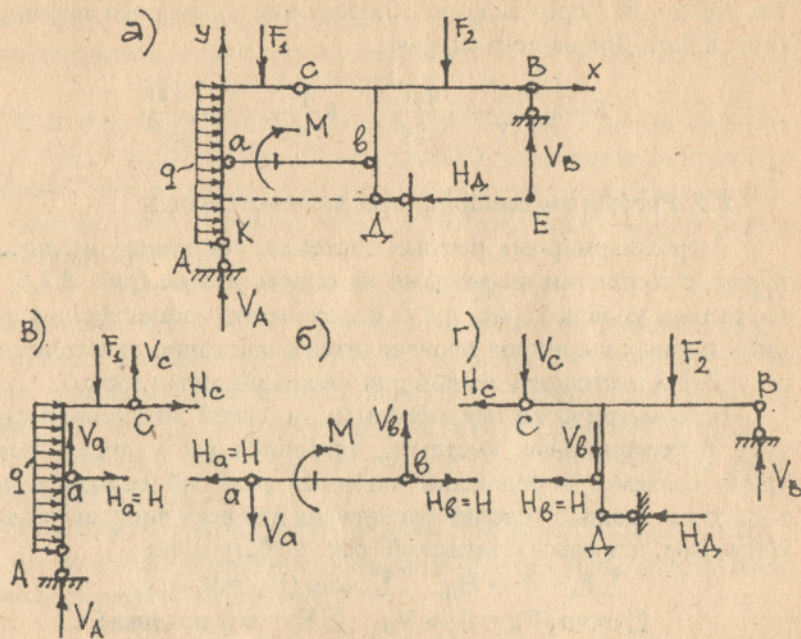


Рис. 8.10

Правая полурама (рис. 8.10,в) находится под действием внешней нагрузки, реакций V_B и H_D опор B и D и переданных с противоположным знаком реакций V_C , H_C , V_a , H_a шарниров C и a . Так как все силы, действующие на правую полураму, известны, можно, используя условия её равновесия, произвести проверку предыдущих вычислений:

$$\sum \text{mom} (F_{\text{пр}})_C = 0, \quad \sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0.$$

Из условий равновесия затяжки $ав$ (рис. 8.11) вытекают следующие выводы:

1. В незагруженной внешними силами затяжке $V_a = V_a = 0$, $H_a = H_a = H$ (рис. 8.11,а).
2. В затяжке, загруженной силами, линии действия которых перпендикулярны её оси, $H_a = H_a = H$ (рис. 8.11,б).
3. При произвольной внешней нагрузке горизонтальные компоненты H_a и H_a шарниров a и a различны, т.е. $H_a \neq H_a$. Меж-

ду этими компонентами существует связь, в частности, для случая, показанного на рис. 8.11,б, имеем:

$$\sum F_x = 0, \quad -H_a + F \cos \alpha + H_a = 0, \quad H_a = H_a + F \cos \alpha.$$

Порядок расчёта трёхшарнирной рамы другого типа, когда полурама является составным диском, подробно рассмотрен в примере 8.5.1 (см. ниже).

Часто расчёту трёхшарнирных систем предшествует построение их рабочих схем, т.е. выявление главных и второстепенных частей у таких систем. В этом случае определение сил взаимодействия отдельных частей между собой и построение эпюр внутренних усилий начинается с самой второстепенной части и заканчивается главной частью. На рис. 8.12,а,в показаны такие трёхшарнирные рамные системы, а на рис. 8.12,б,г – их рабочие схемы и порядок расчёта.

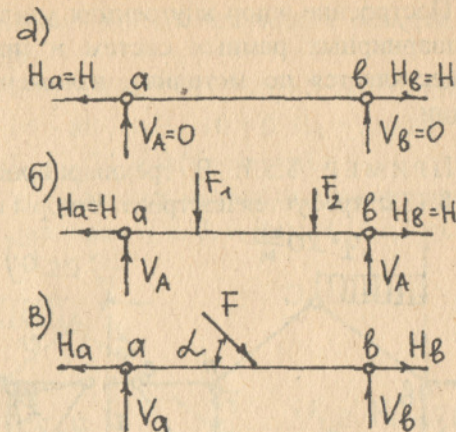


Рис. 8.11

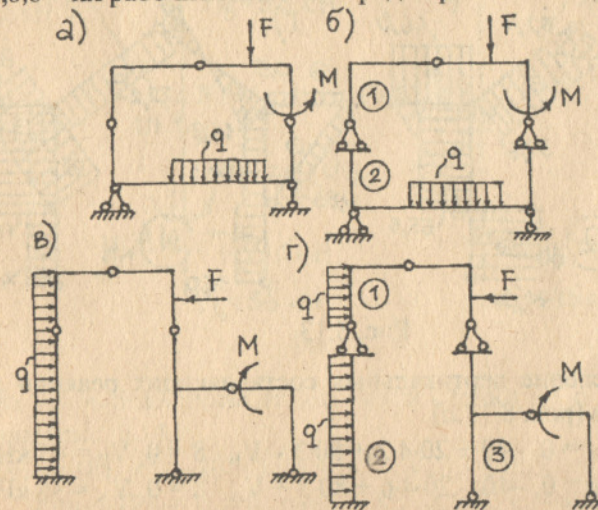


Рис. 8.12

Построение эпюр внутренних усилий для отдельных частей трёхшарнирных рамных систем и проверка их правильности осуществляется по методике, изложенной в пп. 5.2–5.4 пятой лекции.

ПРИМЕР 8.5.1. В трёхшарнирной раме, показанной на рис. 8.13,а, требуется построить эпюры внутренних усилий.

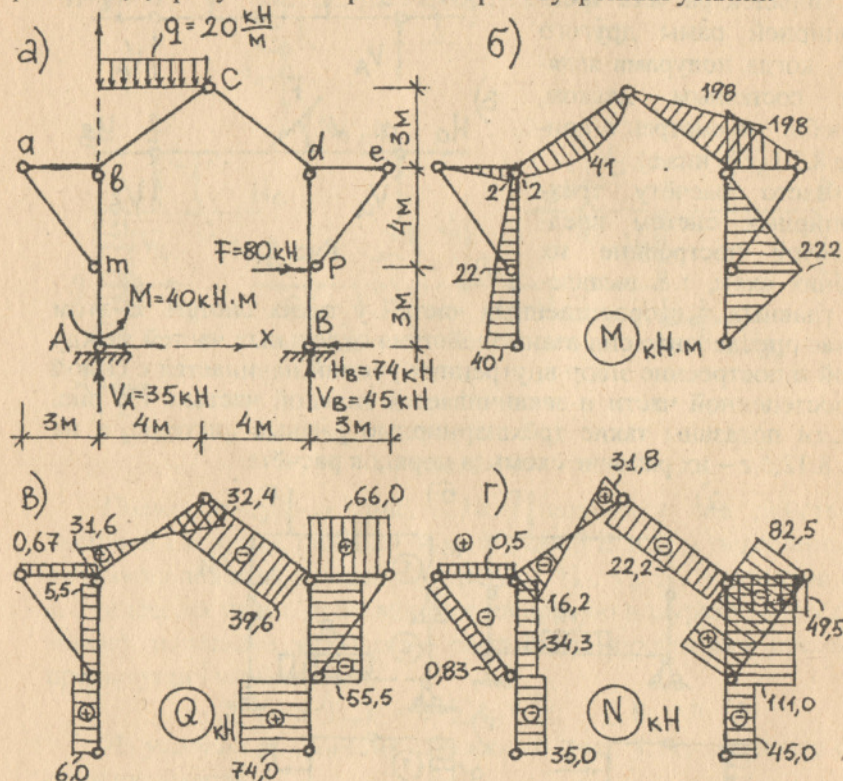


Рис. 8.13

1. Определение вертикальных составляющих реакций пятых шарниров (рис. 8.13,а).

$$\sum \text{mom} (F)_A = 0, -40 + 20 \cdot 4 \cdot 2 + 80 \cdot 3 - V_B \cdot 8 = 0, V_B = 45 \text{ кН};$$

$$\sum \text{mom} (F)_B = 0, -40 - 20 \cdot 4 \cdot 6 + 80 \cdot 3 + V_A \cdot 8 = 0, V_A = 35 \text{ кН};$$

$$\sum F_y = 0, -20 \cdot 4 + 35 + 45 = 0 \text{ (проверка)}.$$

2. Определение горизонтальных составляющих реакций пятых шарниров (рис. 8.13,а).

$$\sum \text{mom} (F_{\text{лев}})_C = 0, 35 \cdot 4 - 40 - 20 \cdot 4 \cdot 2 + H_A \cdot 10 = 0, H_A = 6 \text{ кН};$$

$$\sum \text{mom} (F_{\text{пр}})_C = 0, -45 \cdot 4 - 80 \cdot 7 + H_B \cdot 10 = 0, H_B = 74 \text{ кН};$$

$$\sum F_x = 0, 80 - 6 - 74 = 0 \text{ (проверка)}.$$

3. Построение эпюры изгибающих моментов. Расчленим раму на отдельные части по шарнирам а, в, d, е (рис. 8.14,а,б,в).

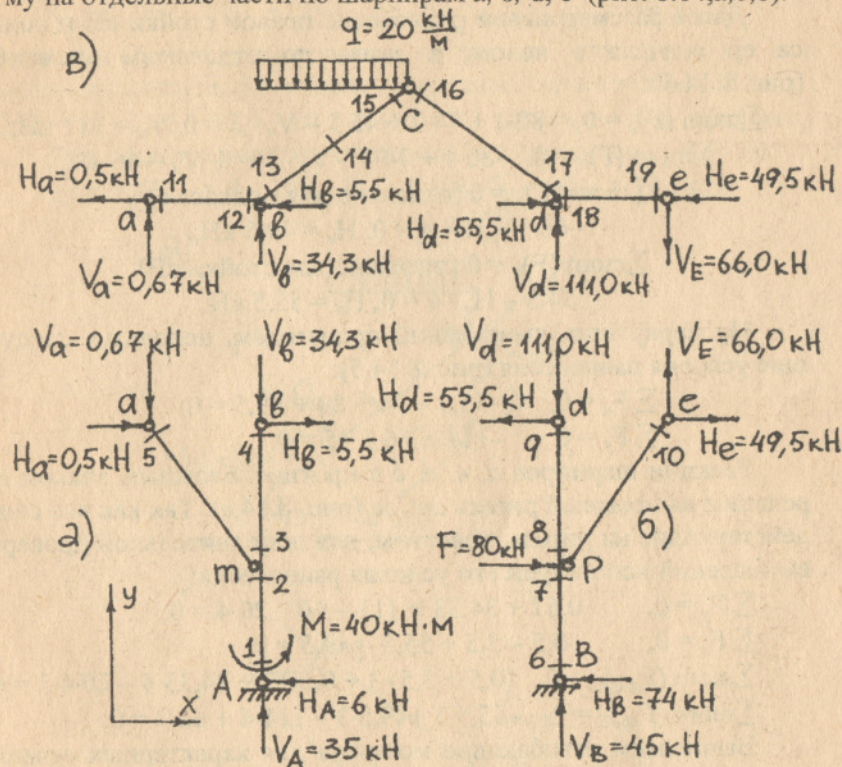


Рис. 8.14

Из условий равновесия для левой стойки вА с подкосом аm получим (рис. 8.14,а):

$$\sum \text{mom} (F)_a = 0, -40 - 35 \cdot 3 + 6 \cdot 7 + V_a \cdot 3 = 0, V_a = 34,33 \text{ кН};$$

$$\sum \text{mom} (F)_a = 0, -40 + 6 \cdot 7 - V_a \cdot 3 = 0, V_a = 0,67 \text{ кН};$$

$$\sum \text{mom} (F)_m = 0 \text{ (отдельно для подкоса am)},$$

$$-0,67 \cdot 3 + H_a \cdot 4 = 0, H_a = 0,5 \text{ кН};$$

$$\sum \text{мом} (F)_m = 0 \text{ (отдельно для стойки вА),}$$

$$-40 + 6 \cdot 3 + H_e \cdot 4 = 0, H_e = 5,5 \text{ кН}.$$

Проверочные условия равновесия для части рамы, изображённой на рис. 8.14,а, имеют вид:

$$\sum F_x = 0, 0,5 + 5,5 - 6 = 0;$$

$$\sum F_y = 0, -0,67 - 34,33 + 35 = 0.$$

Далее рассматриваем равновесие правой стойки dB и подкоса ер сначала в целом, а затем по отдельным элементам (рис. 8.14,б).

$$\sum \text{мом} (F)_e = 0, -80 \cdot 4 + 74 \cdot 7 + 45 \cdot 3 - V_d \cdot 3 = 0, V_d = 111 \text{ кН};$$

$$\sum \text{мом} (F)_d = 0, -80 \cdot 4 + 74 \cdot 7 - V_e \cdot 3 = 0, V_e = 66 \text{ кН};$$

$$\sum \text{мом} (F)_p = 0 \text{ (отдельно для подкоса ер),}$$

$$-66 \cdot 3 + H_e \cdot 4 = 0, H_e = 49,5 \text{ кН};$$

$$\sum \text{мом} (F)_p = 0 \text{ (отдельно для стойки dB),}$$

$$74 \cdot 3 - H_d \cdot 4 = 0, H_d = 55,5 \text{ кН}.$$

Проверку этих вычислений произведём, используя следующие условия равновесия (рис. 8.14,б):

$$\sum F_x = 0, -55,5 - 74 + 80 + 49,5 = 0;$$

$$\sum F_y = 0, -111 + 66 + 45 = 0.$$

Реакции шарниров а, в, d, е с противоположным знаком передадим на ломаный ригель авCde (рис. 8.14,в). Так как все силы, действующие на ригель, известны, для дополнительной проверки вычислений используем его условия равновесия:

$$\sum F_y = 0, 0,67 + 34,33 + 111 - 66 - 20 \cdot 4 = 0;$$

$$\sum F_x = 0, -0,5 - 5,5 + 55,5 - 49,5 = 0;$$

$$\sum \text{мом} (F_{\text{лев}})_C = 0, (0,5 + 5,5) \cdot 3 + 0,67 \cdot 7 + 34,33 \cdot 4 - 20 \cdot 4 \cdot 2 = 0;$$

$$\sum \text{мом} (F_{\text{пр}})_C = 0, -55,5 \cdot 3 + 49,5 \cdot 3 - 111 \cdot 4 + 66 \cdot 7 = 0.$$

Вычисляем изгибающие моменты для характерных сечений рамы (рис. 8.14,а,б,в):

$$M_1 = -40 \text{ кН}\cdot\text{м}, M_2 = M_3 = -40 + 6 \cdot 3 = -22 \text{ кН}\cdot\text{м}, M_4 = M_5 = 0,$$

$$M_6 = M_9 = M_{10} = 0, M_7 = M_8 = 74 \cdot 3 = 222 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_{11} = M_{15} = M_{16} = M_{19} = 0, M_{12} = M_{13} = 0,67 \cdot 3 = 2 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_{14} = 0,67 \cdot 5 + (0,5 + 5,5) \cdot 1,5 + 34,3 \cdot 2 - 20 \cdot 2 \cdot 1 = 41 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_{17} = M_{18} = -66 \cdot 3 = -198 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 8.13,б.

4. Построение эпюры поперечных сил. Поперечные силы в характерных сечениях грузовых участков можно определить, рассматривая условия их равновесия (см. п. 5.4 пятой лекции).

Для грузового участка 13–15 с равномерно распределённой нагрузкой имеем (рис. 8.15,а):

$$\sum \text{мом} (F)_{15} = 0, 2 - 20 \cdot 4 \cdot 2 + Q_{13} \cdot 5 = 0, Q_{13} = 31,6 \text{ кН};$$

$$\sum \text{мом} (F)_{13} = 0, 2 + 20 \cdot 4 \cdot 2 - Q_{15} \cdot 5 = 0, Q_{15} = 32,4 \text{ кН}.$$

Значения Q_{13} и Q_{15} получились со знаком "плюс", т.е. мы правильно задались направлением поперечных сил в сечениях 13 и 15.

$$\sum F_n = 0, 31,6 + 32,4 - 20 \cdot 2 \cos \alpha = 0, \text{ где } \cos \alpha = 0,8 \text{ (проверка).}$$

Для незагруженного участка 16–17 получим (рис. 8.15,б):

$$\sum \text{мом} (F)_{16} = 0, 198 - Q_{17} \cdot 5 = 0, Q_{17} = Q_{16} = 39,6 \text{ кН}.$$

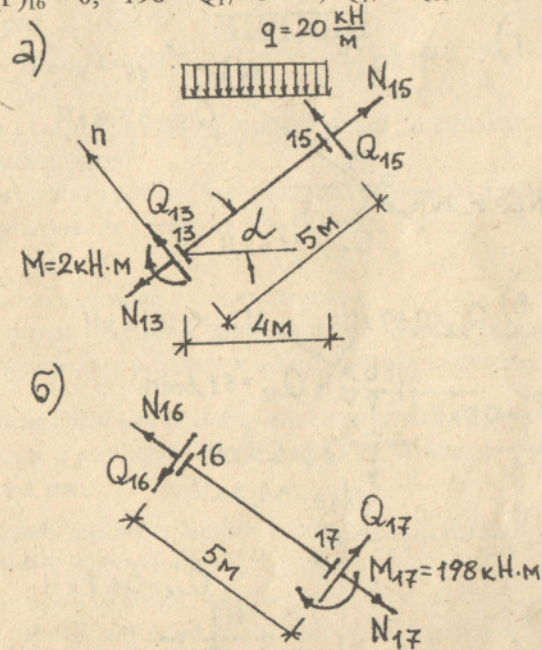


Рис. 8.15

Читателям предлагается вычислить поперечные силы в концевых сечениях остальных грузовых участков.

Эпюра поперечных сил изображена на рис. 8.13,в.

5. Построение эпюры продольных сил. Рассматривая последовательно равновесие узлов $a, e, C, в, d, т, p$, вычислим продольные силы в сечениях 1, 2, 6, 7. При отсутствии ошибок в расчётах величины продольных сил в этих сечениях получим равными по абсолютной величине вертикальным составляющим реакций пятых шарниров А и В.

Приведём условия равновесия для вычисления продольных сил, действующих на узлы C, a и $в$ (рис. 8.16, а, б, в).

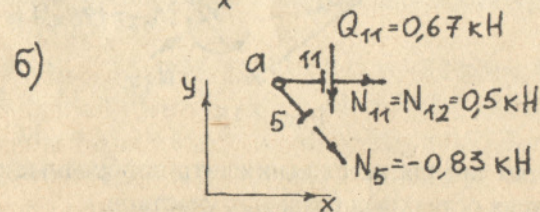
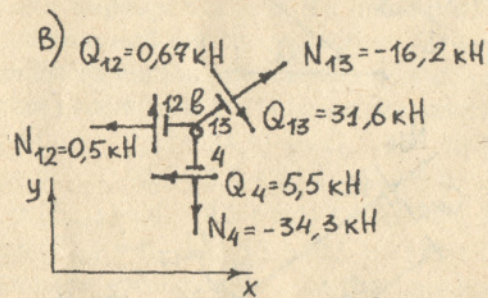
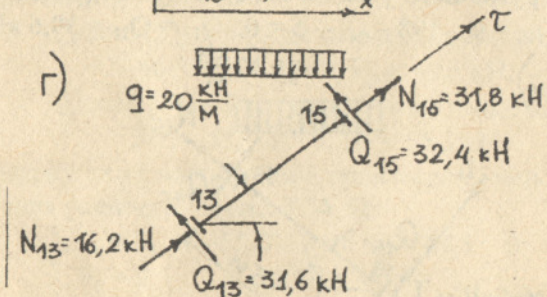
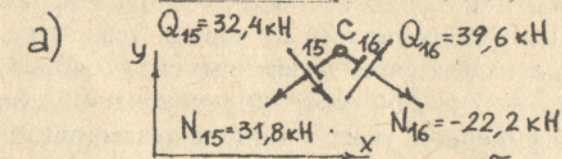


Рис. 8.16

Узел C (рис. 8.16, а):

$$\sum (F_C)_x = 0, -N_{15} \cdot 0,8 + N_{16} \cdot 0,8 + 32,4 \cdot 0,6 + 39,6 \cdot 0,6 = 0;$$

$$\sum (F_C)_y = 0, -N_{15} \cdot 0,6 - N_{16} \cdot 0,6 - 32,4 \cdot 0,8 + 39,6 \cdot 0,8 = 0.$$

$$-N_{15} + N_{16} + 54,0 = 0,$$

$$-N_{15} - N_{16} + 9,6 = 0.$$

$$N_{15} = 31,8 \text{ кН}, N_{16} = -22,2 \text{ кН (сжимающее усилие)}.$$

Узел a (рис. 8.16, б):

$$\sum (F_a)_y = 0, -0,67 - N_5 \cdot 0,8 = 0;$$

$$N_5 = -0,83 \text{ кН (сжимающее усилие)}$$

$$\sum (F_a)_x = 0, -0,83 \cdot 0,6 + N_{11} = 0, N_{11} = N_{12} = 0,5 \text{ кН}.$$

Узел $в$ (рис. 8.16, в):

$$\sum (F_в)_x = 0, -0,5 - 5,5 + 31,6 \cdot 0,6 + N_{13} \cdot 0,8 = 0, N_{13} = -16,2 \text{ кН};$$

$$\sum (F_в)_y = 0, 0,67 - 31,6 \cdot 0,8 - 16,2 \cdot 0,6 - N_4 = 0, N_4 = -34,33 \text{ кН}.$$

Продольные усилия N_{13} и N_{14} , полученные со знаком "минус", являются сжимающими.

Проверку этой группы вычислений можно осуществить, рассматривая равновесие стержня 13–15 (рис. 8.16, г):

$$\sum F_\tau = 0, 16,2 + 31,8 - 20 \cdot 4 \cdot 0,6 = 0,$$

где τ – ось, совпадающая с осью стержня.

Рассматривая равновесие остальных узлов, читатели могут определить продольные усилия в остальных сечениях.

8.6. Линии влияния и матрицы влияния реакций опорных связей и внутренних усилий в трёхшарнирных системах

Построение линий влияния реакций опорных связей и внутренних усилий в трёхшарнирных рамных и арочных системах целесообразно производить кинематическим способом. Порядок построения линий влияния этим способом рассмотрен в п. 3.3 третьей лекции. Следует только отметить, что для стержней с криволинейной осью построению линий влияния поперечных и продольных сил в сечении k (рис. 8.17, а) предшествует удаление связей, препятствующих взаимному перемещению близко распо-

ложенных друг от друга сечений, соответственно, в направлении нормали к рассматриваемому сечению (рис. 8.17,б — для поперечной силы) и в направлении касательной к оси стержня в сечении к (рис. 8.17,в — для продольной силы).

Матрицы влияния в трёхшарнирных системах могут быть сформированы по строкам с помощью линий влияния соответствующих величин и по столбцам — по эпюрам этих величин, построенных от фиксированных положений единичной силы (см. п. 3.4 третьей лекции).

Практическое использование линий и матриц влияния для расчёта сооружений, включая трёхшарнирные арочные и рамные системы, подробно изложено в п. 4.4 четвёртой лекции.

Ниже приводятся примеры построения линий влияния различных величин в трёхшарнирных системах.

ПРИМЕР 8.6.1. Построить линию влияния вертикальной составляющей опорной реакции пятового шарнира В — V_B (рис. 8.18,а).

На опоре В удалим вертикальную связь (рис. 8.18,б). Механизму с одной степенью свободы зададим возможные перемещения с помощью мгновенных центров вращения, показанных на рис. 8.18,б. Читателям предлагается обосновать положение абсолютного мгновенного центра вращения 20 диска 2.

Диск 2 повернём вокруг 20 против часовой стрелки, т.е. по направлению положительного

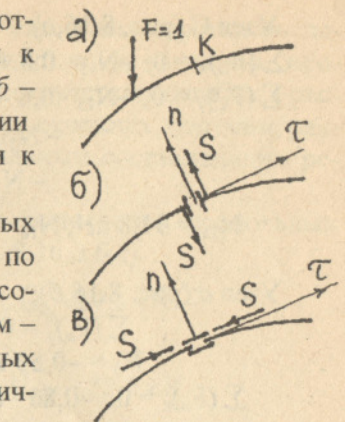


Рис. 8.17

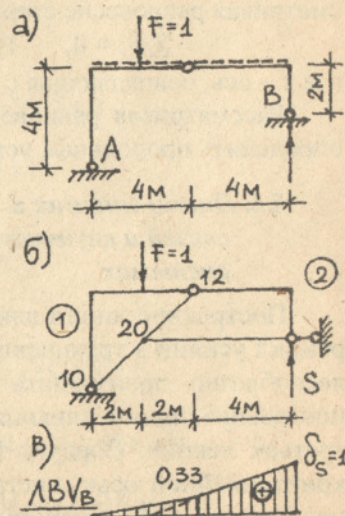


Рис. 8.18

усилия S . Диск 1 имеет общее перемещение с диском 2 под относительным мгновенным центром вращения 12 и повернётся вокруг своего абсолютного центра 10. Замерив ординаты полученной эпюры возможных вертикальных перемещений сечений, находящихся на маршруте движения силы $F = 1$, в масштабе $\delta_s = 1$, получим ЛВ V_B (рис. 8.18,в). Ординаты ЛВ V_B , расположенные выше оси отсчёта, будут положительными, так как перемещение диска 2 задано по направлению положительного усилия S .

ПРИМЕР 8.6.2. Построить линию влияния распора арки. Маршрут движения вертикальной силы $F = 1$ показан на рис. 8.19,а.

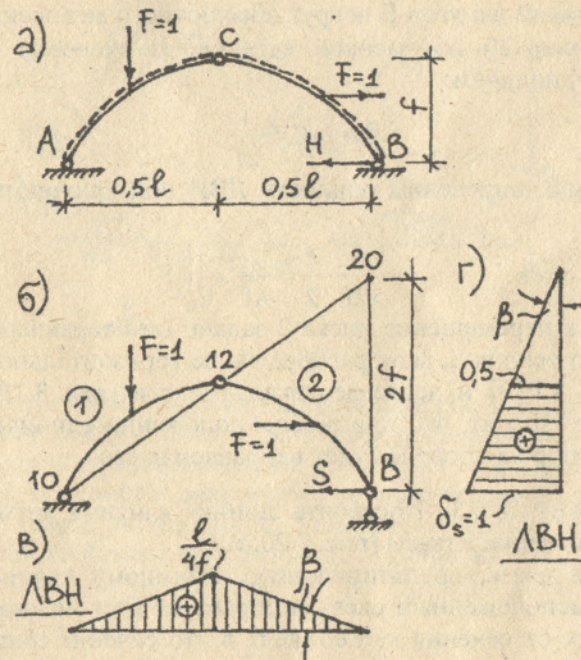


Рис. 8.19

Механизм, образовавшийся после удаления горизонтальной связи правого пятового шарнира В, изображён на рис. 8.19,б. На этом же рисунке представлены необходимые для решения задачи мгновенные центры вращения 10, 12 и 20, положение которых предлагается обосновать читателям.

По направлению положительного усилия S диску 2 зададим перемещение, повернув его по часовой стрелке на угол β . Положение диска 1 на эпюре возможных вертикальных перемещений сечений арки (рис. 8.19,в) определится с помощью мгновенных центров 12 и 10.

Ординаты этой эпюры возможных вертикальных перемещений в масштабе $\delta_s = 1$ измерить нельзя, так как в этом случае δ_s — это горизонтальное перемещение шарнира В в направлении усилия S . Задача может быть решена, если будет найдено значение угла β (рис. 8.19,в). Для этого построим эпюру возможных горизонтальных перемещений сечений правой полуарки, повернув диск 2 на такой же угол β вокруг абсолютного мгновенного центра вращения 20 по часовой стрелке. Из условия $\delta_s = 1$ (рис. 8.19,з) получим:

$$\beta \approx \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2f}.$$

Зная $\operatorname{tg} \beta$, определим ординату ЛВН под ключевым шарниром С:

$$\frac{1}{2f} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{4f}.$$

Так как перемещение диска 2 задано по направлению положительного усилия S , знак распора выше горизонтальной оси отсчёта (рис. 8.19,в) и левее вертикальной оси (рис. 8.19,з) будет "плюс". Это значит, что при любом положении единичной силы на арке распор на опоре В будет направлен влево.

ПРИМЕР 8.6.3. Построить линию влияния изгибающего момента в сечении к рамы (рис. 8.20,а).

Удалив связь, препятствующую взаимному повороту двух сечений, расположенных слева и справа на бесконечно близких расстояниях от сечения к, т.е. введя в это сечение цилиндрический шарнир, получим механизм с одной степенью свободы (рис. 8.20,б). Абсолютные мгновенные центры вращения 10 и 30 дисков 1 и 3 совпадают с пятowymi опорами А и В. Абсолютный мгновенный центр вращения 20 диска 2 расположен на пересечении прямых, проходящих через точки 10, 12 и 30, 23. Положение абсолютного центра вращения 40 диска 4 определено на рис. 8.20,б.

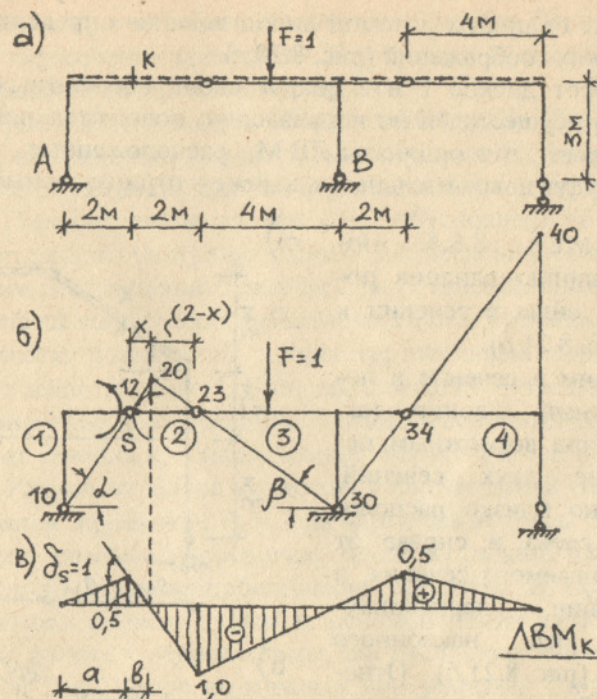


Рис. 8.20

Повернём диск 1 против часовой стрелки, т.е. по направлению положительного усилия S , вокруг абсолютного центра 10. Диск 2, имея общее перемещение с диском 1 под относительным центром 12, повернётся вокруг абсолютного центра 20 по часовой стрелке. Аналогично на эпюре возможных вертикальных перемещений сечений рамы определим положение дисков 3 и 4.

Вычислим длину отрезка x из треугольника 12–20–23 (рис. 8.20,б):

$$x \operatorname{tg} \alpha = (2 - x) \operatorname{tg} \beta, \quad x \cdot \frac{2}{3} - (2 - x) \frac{3}{4}, \quad x = \epsilon = 0,67 \text{ м.}$$

Из условия $\delta_s = 1$ ордината линии влияния изгибающего момента в сечении к под относительным центром 12 равна (см. рис. 3.9 третьей лекции):

$$\frac{a\epsilon}{a + \epsilon} = \frac{2 \cdot 0,67}{2 + 0,67} = 0,5.$$

Остальные ординаты искомой линии влияния определим из геометрических соображений (рис. 8.20, в).

Поворот дисков 1 и 2 вокруг своих абсолютных центров вращения осуществлён по направлению положительного усилия S . Это значит, что ординаты ЛВ M_k , расположенные выше оси отсчёта будут положительными, а ниже — отрицательными.

ПРИМЕР 8.6.4. Построить линию влияния поперечной силы в сечении k рамы (рис. 8.21, а).

Вводим в сечение k поступательный шарнир так, чтобы стало возможным перемещение двух сечений, бесконечно близко расположенных слева и справа от рассматриваемого сечения, в направлении, перпендикулярном оси наклонного стержня (рис. 8.21, б). Относительный мгновенный центр вращения 12 дисков 1 и 2 находится в бесконечности по оси наклонного элемента. Положение центров 30, 23, 14, 34 очевидно. В соответствии с теоремой о мгновенных центрах вращения трёх дисков относительный центр 13 дисков 1 и 3 находится на пересечении прямых, проходящих через центры 23, 12 и 14, 34. Абсолютный центр вращения 10 диска 1 определится на пересечении прямой, проходящей через 30 и 13, с осью левой шарнирно-подвижной

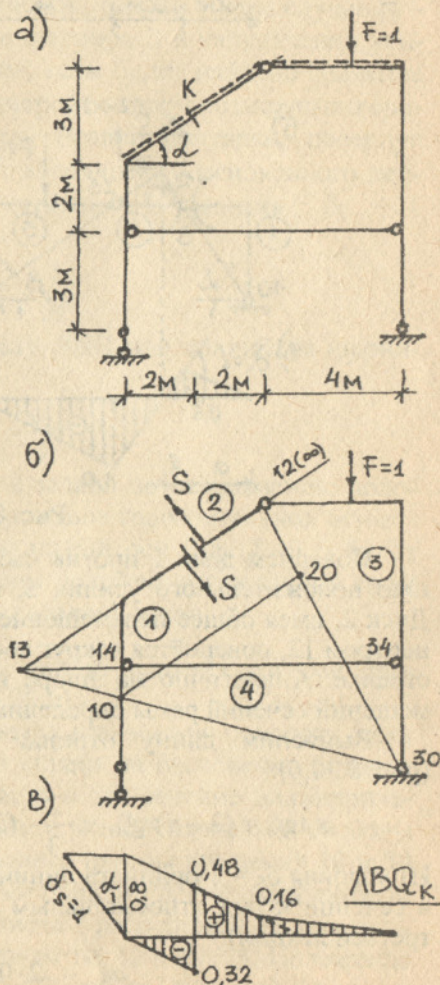


Рис. 8.21

опоры. Наконец, положение абсолютного центра 20 диска 2 получим на пересечении прямой 30–23 и прямой, проходящей через 10 параллельно оси наклонного стержня.

Повернём диск 1 вокруг абсолютного центра 10 по часовой стрелке в направлении положительного усилия S . Диск 2 вокруг 20 повернётся также по часовой стрелке, оставаясь параллельным диску 1. Параллельность дисков 1 и 2 обусловлена положением их относительного центра вращения 12 в бесконечности. Диск 3, имея общее перемещение с диском 2 под относительным центром 23, повернётся вокруг своего абсолютного центра вращения 30.

Ординаты полученной эпюры вертикальных перемещений измерим в масштабе $\delta_s = 1$. В нашем случае δ_s — это относительное перемещение двух соседних сечений, расположенных по обе стороны от сечения k , в направлении нормали к оси наклонного стержня. Разрыв на эпюре возможных перемещений под сечением k является проекцией $\delta_s = 1$ на вертикальную ось. Зная величину этого разрыва, определим масштаб линии влияния Q_k (рис. 8.21, в). В этом масштабе измерим ординаты ЛВ Q_k .

Выше оси отсчёта ординаты искомой линии влияния положительные, а ниже — отрицательные, так как направление поворота дисков 1 и 2 на эпюре возможных перемещений соответствует направлению усилия S в удалённой связи.

ПРИМЕР 8.6.5. Построить линию влияния продольной силы в сечении k (рис. 8.22, а).

Удалим связь, препятствующую взаимному перемещению двух соседних сечений, расположенных по обе стороны от сечения k , в направлении оси стержня (рис. 8.22, б). Относительный центр вращения 12 дисков 1 и 2 находится в бесконечности по направлению нормали к оси наклонного стержня. Положение центров 10, 23 и 30 показано на рис. 8.22, б. Так как прямая 30–23 и прямая, проходящая через абсолютный центр 10 и параллельная нормали к оси наклонного стержня, пересекаются далеко за пределами чертежа, для построения эпюры возможных перемещений воспользуемся относительным центром 13 дисков 1 и 3. Этот центр будет находиться на пересечении прямой 10–30 с прямой, проходящей через 23 и параллельной нормали к оси наклонного стержня.

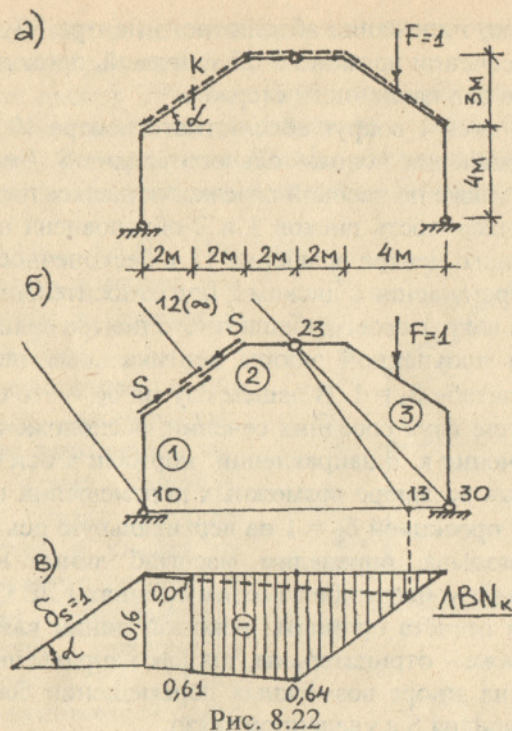


Рис. 8.22

По направлению положительного усилия S вокруг 10 повернём диск 1 по часовой стрелке. Диск 3 повернётся вокруг абсолютного центра 30 и пересечётся с диском 1 под относительным центром 13, где диски 1 и 3 имеют общее перемещение. Диск 2 имеет общее перемещение с диском 3 под относительным центром 23 и должен быть параллелен диску 1, так как относительный центр 12 находится в бесконечности. Это позволяет определить положение диска 2 на эпюре возможных перемещений.

Разрыв под сечением k на эпюре перемещений есть проекция на вертикаль масштабного отрезка $\delta_s = 1$, параллельного оси наклонного стержня (рис. 8.22, в). Измерив ординаты эпюры возможных вертикальных перемещений сечений ломанного ригеля рамы в масштабе $\delta_s = 1$, получим линию влияния продольной силы в сечении k . Перемещения механизму заданы по направлению положительного усилия S . Это значит, что ординаты искомой ли-

нии влияния, расположенные ниже оси отсчёта будут отрицательными.

8.7. Вопросы для самопроверки

1. Что называется трёхшарнирной системой (арочной или рамной)?
2. Как определяются опорные реакции в трёхшарнирных арках и рамах с пятовыми шарнирами на разных уровнях от произвольной нагрузки? Каким образом производится проверка правильности вычисления опорных реакций?
3. Как определяются опорные реакции в трёхшарнирных арках и рамах с пятовыми шарнирами на одном уровне от вертикальной нагрузки? Каким образом производится проверка правильности вычисления опорных реакций?
4. Сформулируйте общие правила определения внутренних усилий в трёхшарнирных арках от произвольно действующей нагрузки.
5. Как определяются внутренние усилия в произвольном сечении трёхшарнирной арки с пятовыми шарнирами на одном уровне от вертикальной нагрузки?
6. Объясните, почему при одинаковой вертикальной нагрузке в трёхшарнирной арке с пятовыми шарнирами на одном уровне изгибающие моменты меньше, чем в балке на двух опорах, перекрывающей такой же пролёт?
7. Что называется рациональной осью арки?
8. Как находится уравнение рациональной оси арки с пятовыми шарнирами на одном уровне в случае действия вертикальной нагрузки при известном положении ключевого шарнира?
9. Заданы трёхшарнирные рамные системы, несущие произвольную нагрузку (рис. 8.23). Можно ли в этих системах выделить главные и второстепенные части и построить рабочую схему? Как в этих системах определяются опорные реакции и внутренние усилия в сечении k ?
10. Изложите общий порядок построения линий влияния реакций опорных связей и внутрен-

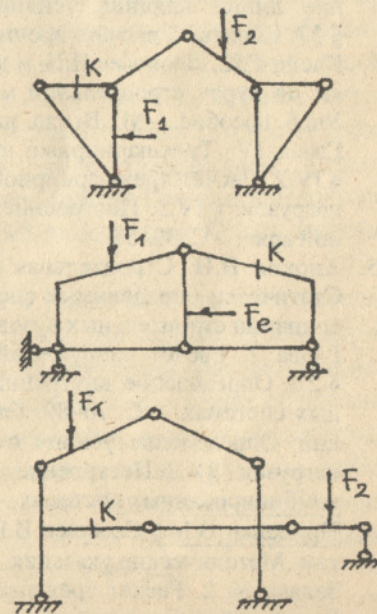


Рис. 8.23

них усилий в трёхшарнирных системах кинематическим методом.

8.8. Рекомендуемая литература

1. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем: Учеб. для вузов. – М.: Изд-во ассоциации строительных вузов, 1996. – 541 с.
Глава 4. Расчёт типичных статически определимых стержневых систем. § 4.2. Расчёт трёхшарнирных арок. – С. 70–76.
2. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика: Учеб. для вузов. – М.: Высш. шк., 1986. – 607 с.
Глава 3. Трёхшарнирные арки и рамы. § 3.1. Понятие об арке и сравнение её с балкой. § 3.2. Аналитический расчёт трёхшарнирной арки. С. 70–82. § 3.4. Уравнение рациональной оси трёхшарнирной арки. § 3.5. Расчёт трёхшарнирных арок на подвижную нагрузку. – С. 87–95.
3. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лашенков Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Стержневые системы: Учеб. для вузов. – М.: Стройиздат, 1981. – 512 с.
Глава VII. Распорные системы. § 33. Трёхшарнирные арки и рамы. § 34. Определение усилий в трёхшарнирных системах при неподвижной нагрузке. § 35. Рациональное очертание арки. § 36. Построение линий влияния усилий в трёхшарнирных рамах и арках. § 37. Понятие о расчёте арок ферм. – С. 182–200.
4. Клейн Г.К., Леонтьев Н.Н. и др. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. Статика стержневых систем: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 1980. – 384 с.
Глава IV. Трёхшарнирные арки и рамы. § IV.1. Общие сведения. § IV.2. Расчёт трёхшарнирной арки на неподвижную вертикальную нагрузку. § IV.3. Построение линий влияния усилий в трёхшарнирной арке. – С. 39–58.
5. Анохин Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах. Ч. 1. Статически определимые системы: Учеб. пособие. – М.: Изд-во ассоциации строительных вузов, 1999. – 334 с.
Глава 2. Расчёт сооружений на действие неподвижной нагрузки. § 2.3. Определение внутренних усилий в трёхшарнирных и составных системах. – С. 76–89. Глава 4. Построение линий влияния усилий. Определение усилий от действия неподвижной и подвижной нагрузок. § 4.3. Построение линий влияния усилий в распорных и комбинированных системах. – С. 221–224, 227–229, 231–233.
6. [Проценко В.М.], Себешев В.Г. Расчёт статически определимых систем: Методические указания. – Новосибирск: НИСИ, 1990. – 52 с.
Задача № 2. Расчёт трёхшарнирной арки. – С. 12–18. Приложение. Расчёт трёхшарнирной арки с применением ЭВМ. – С. 48–51.

ЛЕКЦИЯ ДЕВЯТАЯ

РАСЧЁТ КОМБИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ

- 9.1. Предварительные замечания
- 9.2. Расчёт гибкой нити с балкой жёсткости на неподвижную вертикальную нагрузку
- 9.3. Расчёт гибкой нити с балкой жёсткости на подвижную нагрузку
- 9.4. Расчёт шпренгельной балки
- 9.5. Расчёт рамы со сквозным ригелем
- 9.6. Вопросы для самопроверки
- 9.7. Рекомендуемая литература

9.1. Предварительные замечания

В широком смысле комбинированные системы – это сооружения, расчётные схемы которых имеют элементы двух типов: элементы, испытывающие изгиб или изгиб с растяжением – сжатием, и незагруженные элементы с прямолинейной осью, имеющие на своих концах цилиндрические шарниры и работающие только на растяжение – сжатие (как в фермах при узловой передаче нагрузок, см. п. 6.1 лекции № 6, рис. 6.4). С учётом этого признака к комбинированным системам можно отнести трёхшарнирную раму с затяжкой в виде простейшей фермы (рис. 9.1,а), раму со сквозным ригелем (рис. 9.1,б), шпренгельную балку (рис. 9.12,а), арку с балкой жёсткости (рис. 9.1,в), гибкую нить с такой же балкой (рис. 9.2,а).

К комбинированным системам в узком смысле в строительной механике относят также и системы, расчётные схемы которых представляют собой сочетание сооружений, рассмотренных ранее: балок, арок и ферм (см. лекции № 5–8). Такие сочетания нередко могут состоять только из элементов, в сечениях которых изгибающие моменты и поперечные силы равны нулю, т.е. работающих только на растяжение – сжатие. Примером комбинированной системы такого типа является гибкая нить с фермой жёсткости (рис. 9.1,з) при узловой передаче нагрузок.

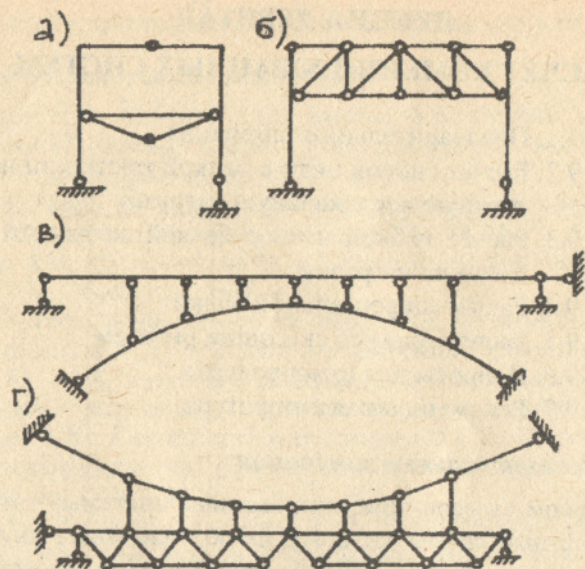


Рис. 9.1

В настоящей лекции рассматривается расчёт статически определимых комбинированных систем: гибкой нити (или гибкой арки) с балкой жёсткости, шпренгельной балки и рамы со сквозным ригелем.

9.2. Расчёт гибкой нити с балкой жёсткости на неподвижную вертикальную нагрузку

1. Определение реакций опорных связей

В сечениях крайних элементов гибкой нити $1K'$ и $8P'$ возникают только продольные усилия. Следовательно, вертикальная и горизонтальная составляющие реакций шарниров K' и P' есть проекции продольных усилий в элементах $1K'$ и $8P'$ на вертикальную и горизонтальные оси. С учётом этого обстоятельства разложение продольных усилий крайних элементов на составляющие V_k, H_k, V_p, H_p произведём в точках K и P , расположенных на вертикалях, проходящих через опоры A и B балки жёсткости (рис. 9.2, а).

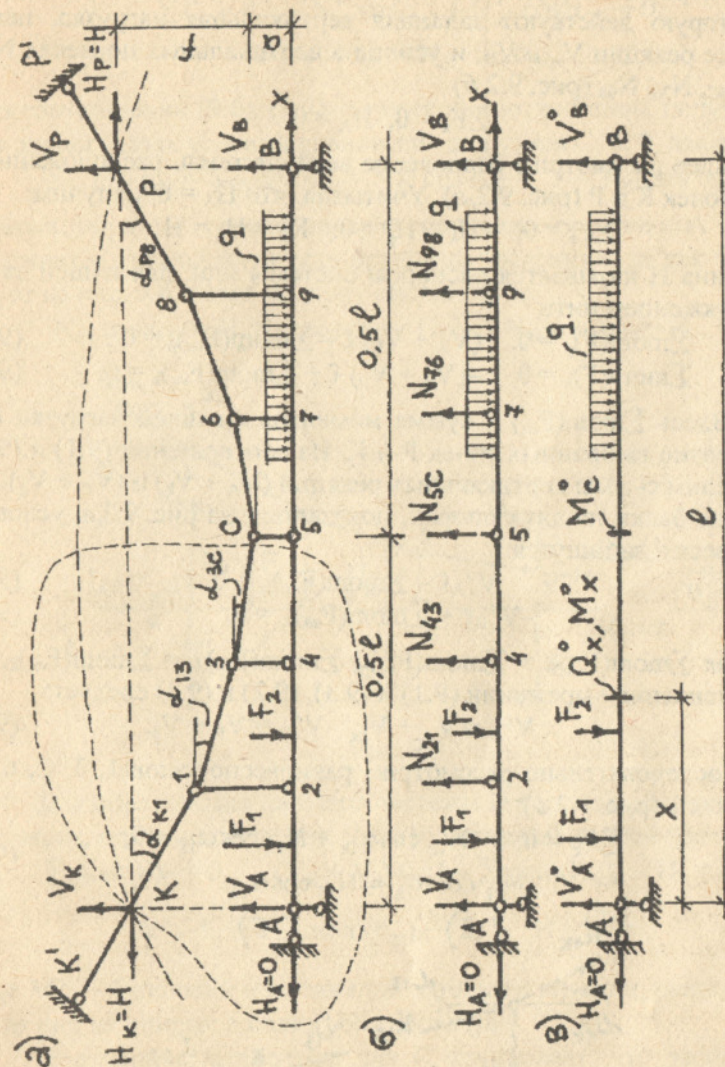


Рис. 9.2

В первую очередь рассмотрим равновесие балки жёсткости, на которую действуют заданная вертикальная нагрузка, неизвестные реакции V_A и V_B и усилия в вертикальных подвесах N_{21} , N_{43} , N_{5C} , N_{76} , N_{98} (рис. 9.2, б)

$$\sum F_x = 0, H_A = 0.$$

Далее рассмотрим равновесие всей системы, расположенной ниже точек К и Р (рис. 9.2, а). Учитывая, что $H_A = 0$, получим:

$$\sum F_x = 0, -H_K + H_P = 0, H_K = H_P = H.$$

Величина H называется распором системы или, для нашей задачи, натяжением нити

$$\sum \text{mom}(F)_{\text{P}} = 0, (V_A + V_K) \cdot \ell - \sum \text{mom}(F_{\text{вн}})_{\text{P}} = 0; \quad (9.1)$$

$$\sum \text{mom}(F)_{\text{K}} = 0, -(V_B + V_P) \cdot \ell + \sum \text{mom}(F_{\text{вн}})_{\text{K}} = 0. \quad (9.2)$$

Здесь $\sum \text{mom}(F_{\text{вн}})$ – сумма моментов внешней нагрузки относительно выбранных точек Р и К. Из соотношений (9.1) и (9.2) определим суммы вертикальных реакций $(V_A + V_K)$ и $(V_B + V_P)$.

Для балки на двух опорах, показанной на рис. 9.2, в, условия равновесия запишутся:

$$V_A^0 \ell - \sum \text{mom}(F_{\text{вн}})_B = 0, \quad (9.3)$$

$$-V_B^0 \ell + \sum \text{mom}(F_{\text{вн}})_A = 0. \quad (9.4)$$

Так как $\sum \text{mom}(F_{\text{вн}})_B = \sum \text{mom}(F_{\text{вн}})_P$, $\sum \text{mom}(F_{\text{вн}})_A = \sum \text{mom}(F_{\text{вн}})_K$, из сопоставления выражений (9.1) и (9.3), (9.2) и (9.4) следует:

$$V_A^0 = V_A + V_K, \quad V_B^0 = V_B + V_P. \quad (9.5)$$

Последовательно рассмотрим равновесие узлов 1, 3, С, 6, 8.

Для узла 1 (рис. 9.3, а):

$$\sum F_x = 0, -N_{1K} \cos \alpha_{1K} + N_{13} \cos \alpha_{13} = 0, \quad (9.6)$$

$$N_{1K} \cos \alpha_{1K} = N_{13} \cos \alpha_{13}.$$

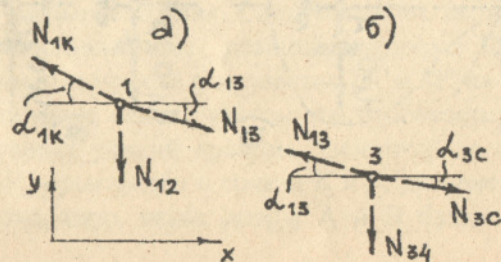


Рис. 9.3

Для узла 3 (рис. 9.3, б):

$$\sum F_x = 0, -N_{13} \cos \alpha_{13} + N_{3C} \cos \alpha_{3C} = 0, \quad (9.7)$$

$$N_{13} \cos \alpha_{13} = N_{3C} \cos \alpha_{3C}.$$

Из соотношений (9.6), (9.7), а также из соотношений, полученных из аналогичных условий равновесия для узлов С, 6, 8, имеем:

$$N_{1K} \cos \alpha_{1K} = N_{13} \cos \alpha_{13} = N_{3C} \cos \alpha_{3C} = \dots = N_{8P} \cos \alpha_{8P},$$

Таким образом, горизонтальная проекция продольных усилий элементов гибкой нити есть величина постоянная и, как это следует из рис. 9.4, равна распору системы, т.е.

$$N_{1K} \cos \alpha_{1K} = H, N_{13} \cos \alpha_{13} = H, \dots, N_{8P} \cos \alpha_{8P} = H. \quad (9.8)$$

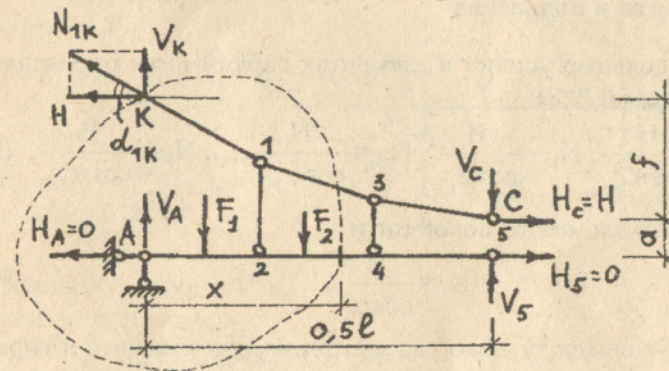


Рис. 9.4

Для определения распора системы H рассмотрим равновесие ее части, показанной на рис. 9.2, а пунктирной линией (рис. 9.4)

$$\sum \text{mom}(F)_C = 0, (V_A + V_K) \cdot 0,5\ell - \sum \text{mom}(F_{\text{вн}})_C - Hf = 0;$$

$$V_A^0 \cdot 0,5\ell - \sum \text{mom}(F_{\text{вн}})_C = M_C^0, H = \frac{M_C^0}{f},$$

где M_C^0 – балочный изгибающий момент в сечении, расположенном под шарниром 5 балки жёсткости (рис. 9.2, в).

Полученное выражение для H показывает, что распор рассматриваемой комбинированной системы равен распору трёхшарнирной арки, повторяющей очертание гибкой нити К, 1, 3, С,

39

строить арочную эпюру поперечных сил от нагрузок, аналогичных приложенным к балке жёсткости, и её ординаты разделить на косинус угла наклона элемента гибкой нити, расположенного между рассматриваемыми подвесками.

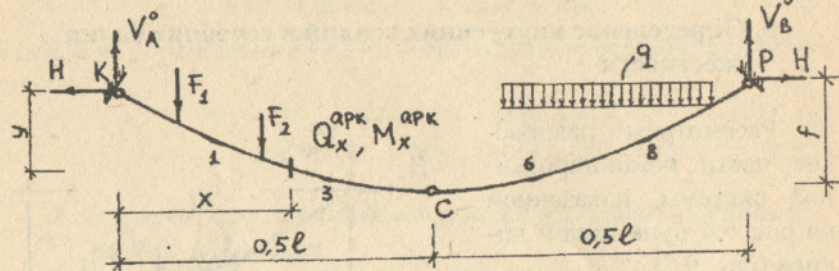


Рис. 9.6

Используем третье условие равновесия для отсеченной части рассматриваемого сооружения (рис. 9.5).

$$\sum \text{mom} (F)_x = 0,$$

$$(V_A + V_K)x - \sum \text{mom} (F_{\text{вн}})_x - H(y + a_x) + Na_x - M_x = 0.$$

После подстановки

$$V_A + V_K = V_A^o, \quad M_x^o = V_A^o x - \sum \text{mom} (F_{\text{вн}})_x$$

и приведения подобных членов получим:

$$M_x = M_x^o - Hy = M_x^{\text{apk}}, \quad (9.16)$$

где M_x^o – балочный изгибающий момент в сечении x (рис. 9.2, в).

Соотношение (9.16) показывает, что эпюры изгибающих моментов балки жёсткости и трёхшарнирной арки, повторяющей очертание гибкой нити между сечениями K и P (рис. 9.6), от одной и той же нагрузки совпадают.

ПРИМЕР 9.2.1. Для комбинированной системы, показанной на рис. 9.7, а, построить эпюры внутренних усилий.

1. Определение балочных опорных реакций V_A^o и V_B^o (рис. 9.7, б).

$$\sum \text{mom} (F)_A = 0, \quad 80 + 20 \cdot 6 + 2 \cdot 10 \cdot 15 - 20 V_B^o = 0, \quad V_B^o = 25 \text{ кН};$$

$$\sum \text{mom} (F)_B = 0, \quad 80 - 20 \cdot 14 - 2 \cdot 10 \cdot 5 + 20 V_A^o = 0, \quad V_A^o = 15 \text{ кН};$$

$$\sum F_y = 0, \quad 25 + 15 - 20 - 2 \cdot 10 = 0 \text{ (проверка)}.$$

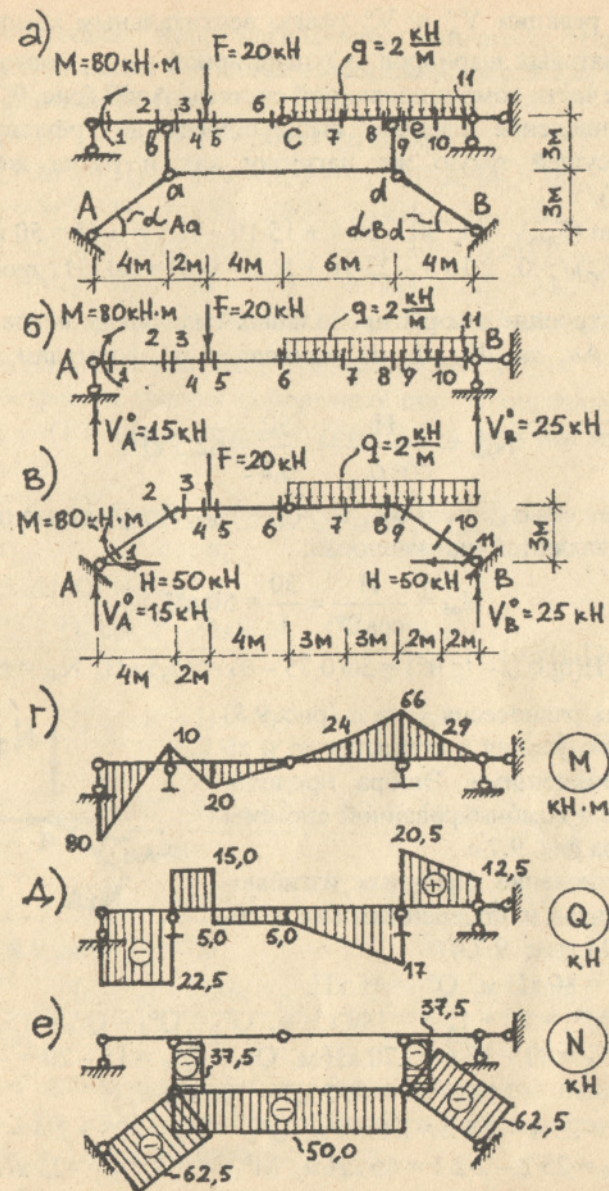


Рис. 9.7

Балочные реакции V_A^0 и V_B^0 равны вертикальным компонентам реакций пятых шарниров трёхшарнирной рамы, повторяющей очертание части комбинированной системы AaDВ (рис. 9.7, в).

2. Вычисление распора вышеупомянутой трёхшарнирной рамы, несущей такую же нагрузку как и балка жёсткости (рис. 9.7, в).

$$\sum \text{мом} (F_{\text{лев}})_C = 0, 80 - 20 \cdot 4 + 15 \cdot 10 - H \cdot 3 = 0, H = 50 \text{ кН};$$

$$\sum \text{мом} (F_{\text{пр}})_C = 0, 2 \cdot 10 \cdot 5 - 25 \cdot 10 + H \cdot 3 = 0, H = 50 \text{ кН (проверка)}.$$

3. Построение эпюры продольных сил. Продольные силы в стержнях Aa, ad, dB, ab, de вычисляем по формулам (9.13) и (9.14).

$$N_{Aa} = \frac{H}{\cos \alpha_{Aa}} = \frac{50}{0,8} = 62,5 \text{ кН}.$$

Так как $\cos \alpha_{Aa} = \cos \alpha_{dB}$, то $N_{Aa} = N_{dB}$. Полученные продольные силы являются сжимающими.

$$N_{ad} = \frac{H}{\cos 0^\circ} = \frac{50}{1} = 50 \text{ кН},$$

$$N_{ab} = H(\tan \alpha_{Aa} - \tan 0^\circ) = 50(0,75 - 0) = 37,5 \text{ кН}, N_{ab} = N_{de}.$$

Из условия равновесия узла a (рис. 9.8) следует, что усилия в стержнях ad и ab будут сжимающими. Эпюра продольных сил для комбинированной системы показана на рис. 9.7, е.

4. Вычисление балочных изгибающих моментов и поперечных сил в сечениях 1–11 (рис. 9.7, б).

$$M_1^0 = 80 \text{ кН} \cdot \text{м}, Q_1^0 = 15 \text{ кН},$$

$$M_2^0 = M_3^0 = 80 + 15 \cdot 4 = 140 \text{ кН} \cdot \text{м}, Q_2^0 = Q_3^0 = Q_4^0 = 15 \text{ кН},$$

$$M_4^0 = M_5^0 = 80 + 15 \cdot 6 = 170 \text{ кН} \cdot \text{м}, Q_5^0 = Q_6^0 = 15 - 20 = -5 \text{ кН},$$

$$M_7^0 = 25 \cdot 7 - 2 \cdot 7 \cdot 3,5 = 126 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_8^0 = M_9^0 = 25 \cdot 4 - 2 \cdot 4 \cdot 2 = 84 \text{ кН} \cdot \text{м}, Q_8^0 = Q_9^0 = -25 + 2 \cdot 4 = -17 \text{ кН},$$

$$M_{10}^0 = 25 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = 46 \text{ кН} \cdot \text{м}, M_{11}^0 = 0, Q_{11}^0 = -25 \text{ кН}.$$

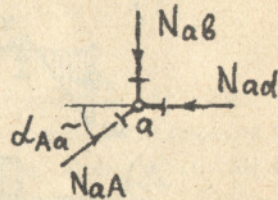


Рис. 9.8

5. Построение эпюр изгибающих моментов. Изгибающие моменты в сечениях 1–11 балки жёсткости (рис. 9.7, а) определяются по формуле (9.16).

$$M_1 = M_1^0 - H y_1 = 80 - 50 \cdot 0 = 80 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = M_2^0 - H y_2 = 140 - 50 \cdot 3 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}, M_3 = M_2,$$

$$M_4 = M_4^0 - H y_4 = 170 - 50 \cdot 3 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}, M_5 = M_4,$$

$$M_6 = 0, M_7 = M_7^0 - H y_7 = 126 - 50 \cdot 3 = -24 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_8 = M_8^0 - H y_8 = 84 - 50 \cdot 3 = -66 \text{ кН} \cdot \text{м}, M_9 = M_8,$$

$$M_{10} = M_{10}^0 - H y_{10} = 46 - 50 \cdot 1,5 = -29 \text{ кН} \cdot \text{м}, M_{11} = 0.$$

Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 9.7, з.

6. Построение эпюры поперечных сил. Поперечные силы в сечениях 1–11 балки жёсткости (рис. 9.7, а) получим из соотношения (9.15).

$$Q_1 = \frac{Q_1^{\text{арк}}}{\cos \alpha_{Aa}} = \frac{Q_1^0 \cos \alpha_{Aa} - H \sin \alpha_{Aa}}{\cos \alpha_{Aa}} = \frac{15 \cdot 0,8 - 50 \cdot 0,6}{0,8} = -22,5 \text{ кН}, Q_2 = Q_1,$$

$$Q_3 = \frac{Q_3^{\text{арк}}}{\cos 0^\circ} = \frac{Q_3^0 \cos 0^\circ - H \sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{15 \cdot 1 - 50 \cdot 0}{1} = 15 \text{ кН}, Q_4 = Q_3,$$

$$Q_5 = \frac{Q_5^{\text{арк}}}{\cos 0^\circ} = \frac{Q_5^0 \cos 0^\circ - H \sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{-5 \cdot 1 - 50 \cdot 0}{1} = -5 \text{ кН}, Q_6 = Q_5,$$

$$Q_8 = \frac{Q_8^{\text{арк}}}{\cos 0^\circ} = \frac{Q_8^0 \cos 0^\circ - H \sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{-17 \cdot 1 - 50 \cdot 0}{1} = -17 \text{ кН},$$

$$Q_9 = \frac{Q_9^{\text{арк}}}{\cos \alpha_{Bd}} = \frac{Q_9^0 \cos \alpha_{Bd} - H \sin \alpha_{Bd}}{\cos \alpha_{Bd}} = \frac{-17 \cdot 0,8 - 50 \cdot (-0,6)}{0,8} = 20,5 \text{ кН},$$

$$Q_{11} = \frac{Q_{11}^{\text{арк}}}{\cos \alpha_{Bd}} = \frac{Q_{11}^0 \cos \alpha_{Bd} - H \sin \alpha_{Bd}}{\cos \alpha_{Bd}} = \frac{-25 \cdot 0,8 - 50 \cdot (-0,6)}{0,8} = 12,5 \text{ кН}.$$

Эпюра поперечных сил на балке жёсткости показана на рис. 9.7, д. Она может быть получена по эпюре изгибающих моментов (см. п. 5.4 пятой лекции).

9.3. Расчёт гибкой нити с балкой жёсткости на подвижную нагрузку

В расчётах комбинированных систем на подвижную нагрузку целесообразно использовать линии влияния реакций и внутренних усилий, позволяющие достаточно просто и быстро определять невыгоднейшее положение подвижной нагрузки, при котором определяемая величина (распор, усилие в каком-либо элементе гибкой нити, изгибающий момент в любом сечении балки жёсткости и т.д.) будет максимальной (см. п. 4.3 четвёртой лекции).

Линии влияния любых величин для гибкой нити с балкой жёсткости (рис. 9.9, а) получим, используя соотношения (9.10)–(9.12), (9.14)–(9.16), устанавливающие связь между реакциями балки жёсткости, продольными усилиями в элементах гибкой нити и подвесках, поперечными силами и изгибающими моментами в сечениях балки жёсткости и статическими параметрами трёхшарнирной арки (рис. 9.9, б).

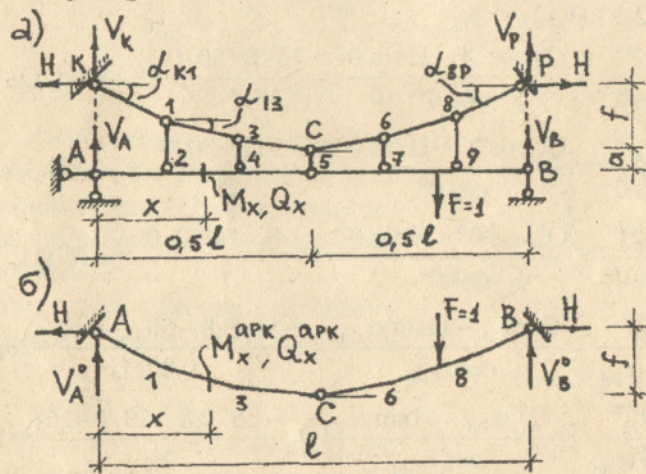


Рис. 9.9

$$\text{ЛВ } V_A = \text{ЛВ } V_A^0 - (\text{ЛВ } H) \text{tg } \alpha_{1K}, \quad (9.10)'$$

$$\text{ЛВ } V_B = \text{ЛВ } V_B^0 - (\text{ЛВ } H) \text{tg } \alpha_{P8}, \quad (9.11)'$$

$$\text{ЛВ } N_{1K} = (\text{ЛВ } H) \frac{1}{\cos \alpha_{1K}}, \quad \text{ЛВ } N_{13} = (\text{ЛВ } H) \frac{1}{\cos \alpha_{13}}, \dots \quad (9.12)'$$

$$\text{ЛВ } N_{34} = (\text{ЛВ } H)(\text{tg } \alpha_{13} - \text{tg } \alpha_{3C}), \quad (9.14)'$$

$$\text{ЛВ } Q_x = (\text{ЛВ } Q_x^{\text{арк}}) \frac{1}{\cos \alpha_{13}}, \quad (9.15)'$$

$$\text{ЛВ } M_x = \text{ЛВ } M_x^{\text{арк}}. \quad (9.16)'$$

ПРИМЕР 9.3.1. Построить линию влияния реакции V_A левой вертикальной опоры балки жёсткости (рис. 9.10, а).

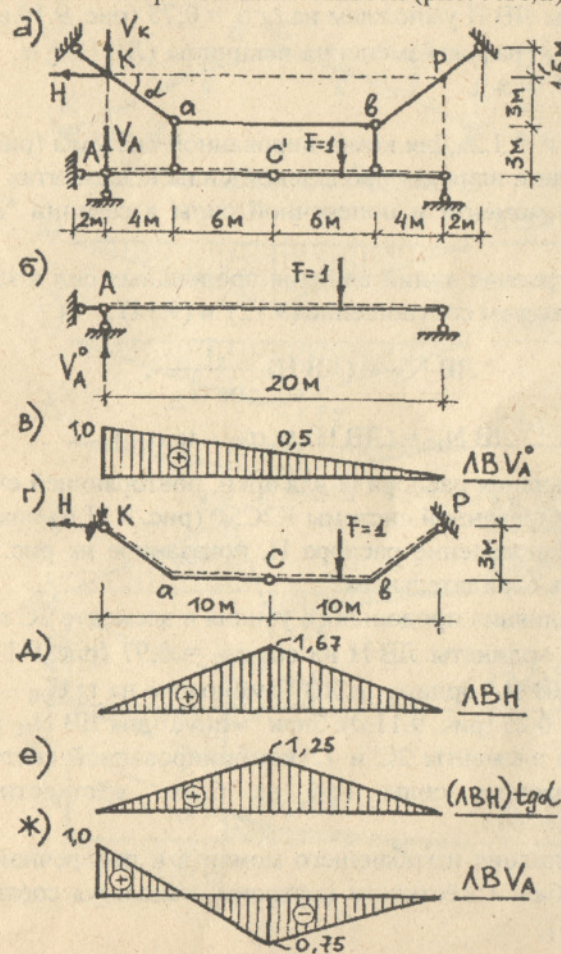


Рис. 9.10

Для решения задачи используем соотношение (9.10)':

$$ЛВ V_A = ЛВ V_A^0 - (ЛВ H) \operatorname{tg} \alpha.$$

Линии влияния реакции V_A^0 балки и распора H трёхшарнирной арки КаСвР, изображённых на рис. 9.10, б, г, читателям предлагается построить кинематическим способом (см. п. 3.3 третьей лекции, п. 8.6 и пример 8.6.2 восьмой лекции). ЛВ V_A^0 и ЛВ H показаны на рис. 9.10, в и рис. 9.10, д.

Ординаты ЛВ H умножаем на $\operatorname{tg} \alpha = 0,75$ (рис. 9.10, е). Вычитая из ЛВ V_A^0 график изменения величины $(ЛВ H) \operatorname{tg} \alpha$, получим ЛВ V_A (рис. 9.10, ж).

ПРИМЕР 9.3.2. Для комбинированной системы (рис. 9.11, а) построить линии влияния продольной силы в элементах 2С и 12, изгибающего момента и поперечной силы в сечении "а" балки жёсткости.

Для построения линий влияния продольных сил в элементах 2С и 12 используем соотношение (9.12)' и (9.14)':

$$ЛВ N_{2C} = (ЛВ H) \frac{1}{\cos \alpha_{2C}},$$

$$ЛВ N_{12} = (ЛВ H)(\operatorname{tg} \alpha_{2K} - \operatorname{tg} \alpha_{2C}).$$

Линии влияния распора H для арки, повторяющей очертание части комбинированной системы К2С5Р (рис. 9.11, б) показана на рис. 9.11, в. Направление распора H , показанное на рис. 9.11, а, б, будем считать отрицательным.

Линию влияния продольного усилия в элементе 2С получим, разделив все ординаты ЛВ H на $\cos \alpha_{2C} = 0,97$ (рис. 9.11, г). Для построения ЛВ N_{12} ординаты ЛВ H умножим на $\operatorname{tg} \alpha_{2K} - \operatorname{tg} \alpha_{2C} = 0,5 - 0,25 = 0,25$ (рис. 9.11, д). Знак "минус" для ЛВ N_{2C} и ЛВ N_{12} означает, что элементы 2С и 12 комбинированной системы при любом положении силы $F=1$ на балке жёсткости сжаты (см. рис. 9.8).

Линии влияния изгибающего момента и поперечной силы в сечении "а" балки жёсткости построим, используя соотношение (9.16)' и (9.15)':

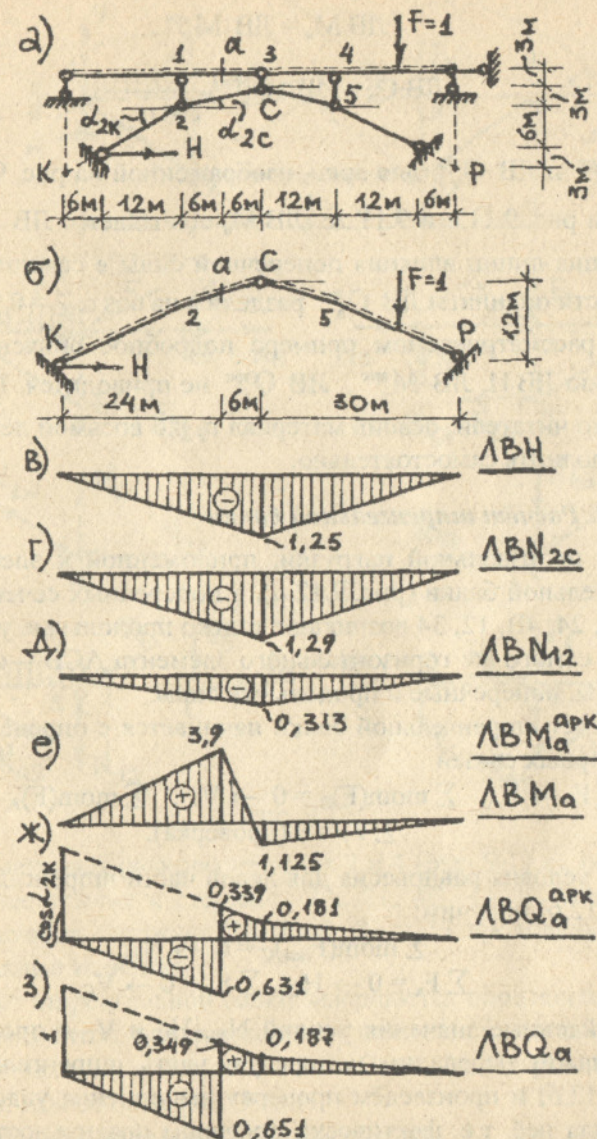


Рис. 9.11

$$\text{ЛВ } M_a = \text{ЛВ } M_a^{\text{арк}},$$

$$\text{ЛВ } Q_a = (\text{ЛВ } Q_a^{\text{арк}}) \frac{1}{\cos \alpha_{2C}}.$$

ЛВ $M_a^{\text{арк}}$ и ЛВ $Q_a^{\text{арк}}$ для арки, изображённой на рис. 9.11,б, показаны на рис. 9.11,е и 9.11,жс. ЛВ M_a совпадает с ЛВ $M_a^{\text{арк}}$, а для получения линии влияния поперечной силы в сечении "а" балки жёсткости ординаты ЛВ $Q_a^{\text{арк}}$ разделим на $\cos \alpha_{2C} = 0,97$.

В рассматриваемом примере подробное объяснение к построению ЛВ N , ЛВ $M_a^{\text{арк}}$, ЛВ $Q_a^{\text{арк}}$ не приводится. Предполагается, что читатели, освоив материал п. 8.6 восьмой лекции, могут это выполнить самостоятельно.

9.4. Расчёт шпренгельной балки

От произвольной нагрузки, приложенной к элементу АСВ шпренгельной балки (рис. 9.12,а), в поперечных сечениях стержней А2, 24, 4В, 12, 34 возникают только продольные усилия, в сечениях самого же горизонтального элемента АСВ — изгибающие моменты, поперечные и продольные силы.

Расчёт шпренгельной балки начинается с определения реакций опорных связей

$$\sum F_x \rightarrow H_A, \quad \sum \text{mom}(F)_B = 0 \rightarrow V_A, \quad \sum \text{mom}(F)_A \rightarrow V_B,$$

$$\sum F_y = 0 \text{ (проверка)}.$$

Из условия равновесия для левой части шпренгельной балки (рис. 9.12,б) получим:

$$\sum \text{mom}(F_{\text{лев}})_C = 0 \rightarrow N_{24},$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow H_C, \quad \sum F_y = 0 \rightarrow V_C.$$

Найденные значения усилий N_{24} , H_C и V_C с противоположным знаком передадим на правую часть шпренгельной балки (рис. 9.12,б) и произведём проверку выполнения условий равновесия для неё, т.е. фактически проверим правильность вычислений усилий N_{24} , H_C и V_C .

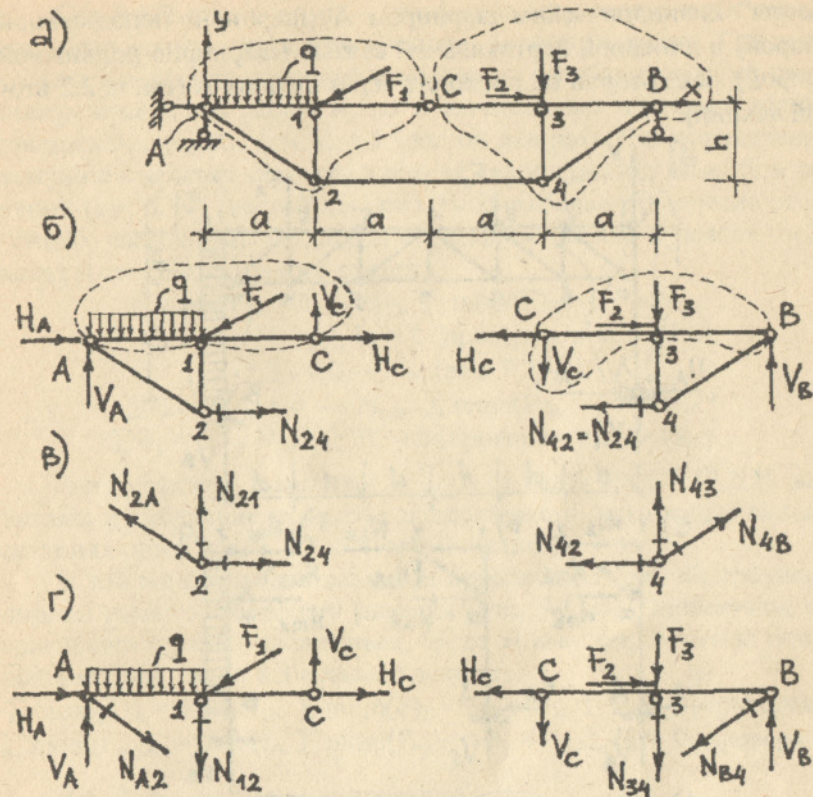


Рис. 9.12

Рассматривая равновесие узлов 2 и 4 (рис. 9.12,б), определим продольные усилия в стержнях 2А, 21, 4В, 43. В симметрично расположенных стержнях 2А и 4В, 21 и 43 продольные усилия имеют равные значения.

Расчёт шпренгельной балки завершается определением изгибающих моментов, поперечных и продольных сил в сечениях горизонтальных элементов АС и СВ. Силы, действующие на эти элементы, показаны на рис. 9.12,г.

9.5. Расчёт рамы со сквозным ригелем

Рама со сквозным ригелем (рис. 9.13,а) представляет собой геометрически неизменяемый диск, присоединённый к диску

"земля" цилиндрическим шарниром А (шарнирно-неподвижной опорой) и линейной вертикальной связью (шарнирно-подвижной опорой), ось которой не проходит через шарнир А (см. п. 2.2 второй лекции).

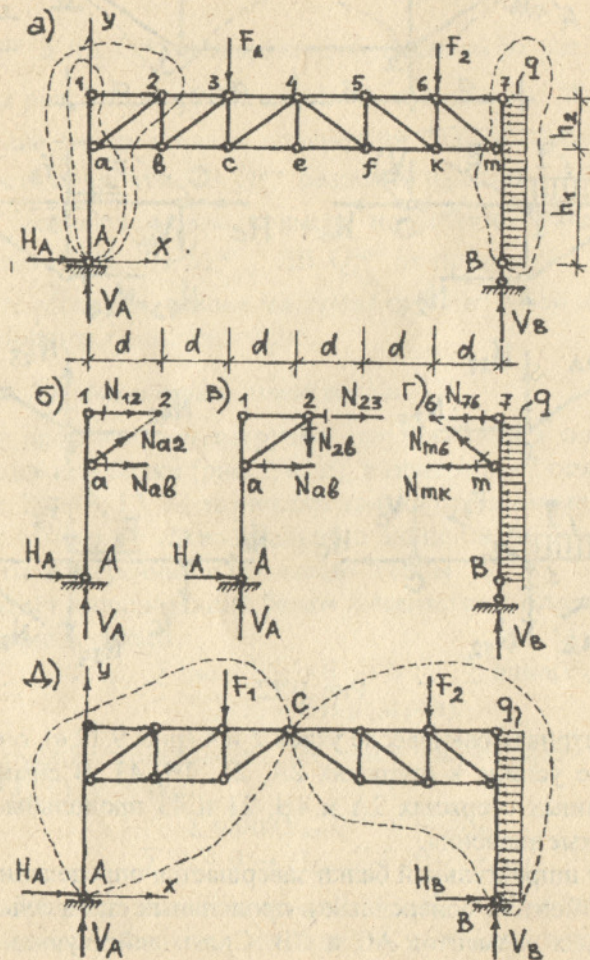


Рис. 9.13

Расчёт рамы начинается с определения опорных реакций
 $\sum F_x = 0 \rightarrow H_A$, $\sum \text{mom}(F)_B = 0 \rightarrow V_A$, $\sum \text{mom}(F)_A = 0 \rightarrow V_B$,
 $\sum F_y = 0$ (проверка).

Сквозной ригель рамы – это ферма с параллельными поясами, нагруженная сосредоточенными силами в узлах. Следовательно, в сечениях стержней этой фермы изгибающие моменты и поперечные силы равны нулю и вычислению подлежат только продольные усилия (см. п. 6.1 шестой лекции). Для определения усилий в стержнях сквозного ригеля воспользуемся способом сечений (см. п. 6.4 шестой лекции). Рассматривая равновесие отсечённых частей (рис. 9.13, б, в, г) определим усилия в поясах, подкосах и стойках сквозного ригеля.

$$\begin{aligned} \sum \text{mom}(F)_a = 0 &\rightarrow N_{12}, \quad \sum \text{mom}(F)_2 = 0 \rightarrow N_{ab}, \\ \sum F_y = 0 &\rightarrow N_{a2}, \quad \sum F_x = 0 \text{ (проверка, рис. 9.13, б)}, \\ \sum F_y = 0 &\rightarrow N_{2b} \text{ (рис. 9.13, в)}, \\ \sum \text{mom}(F)_6 = 0 &\rightarrow N_{mk}, \quad \sum \text{mom}(F)_m = 0 \rightarrow N_{76}, \\ \sum F_y = 0 &\rightarrow N_{m6}, \quad \sum F_x = 0 \text{ (проверка, рис. 9.13, г)}. \end{aligned}$$

Зная усилия в шарнирах 1, а, 7, m рамы (рис. 9.13, б, г), вычислим изгибающие моменты, поперечные и продольные силы в сечениях стоек (см. п. 5.3–5.4 пятой лекции).

В той же последовательности производится расчёт трёхшарнирной рамы со сквозным ригелем (рис. 9.13, д). Особенным, по сравнению с вышеизложенным, будет только определение опорных реакций (см. п. 8.3 восьмой лекции).

$$\begin{aligned} \sum \text{mom}(F)_A = 0 &\rightarrow V_B, \quad \sum \text{mom}(F)_B = 0 \rightarrow V_A, \quad \sum F_y = 0 \text{ (проверка)}, \\ \sum \text{mom}(F)_{\text{лев}} C = 0 &\rightarrow H_A, \quad \sum \text{mom}(F)_{\text{пр}} C = 0 \rightarrow H_B, \quad \sum F_x = 0 \text{ (проверка)}, \end{aligned}$$

9.6. Вопросы для самопроверки

1. Расчётные схемы каких сооружений в строительной механике называют комбинированными системами?
2. По указанию преподавателя изобразите одну из следующих расчётных статически определимых комбинированных схем: гибкую нить с балкой (фермой) жёсткости, гибкую арку с балкой (фермой) жёсткости.
3. Заданы расчётные схемы гибкой нити с балкой жёсткости (рис. 9.14) с различными соотношениями пролётов гибкой нити и балки жёсткости ($\ell' = \ell$, $\ell' < \ell$, $\ell' > \ell$). Для случая, когда на балку жёсткости действует неподвижная вертикальная нагрузка, поясните определение:
а) реакций опорных связей балки жёсткости H_B , V_A и V_B ;
б) распора комбинированной системы (натяжения нити) N ;

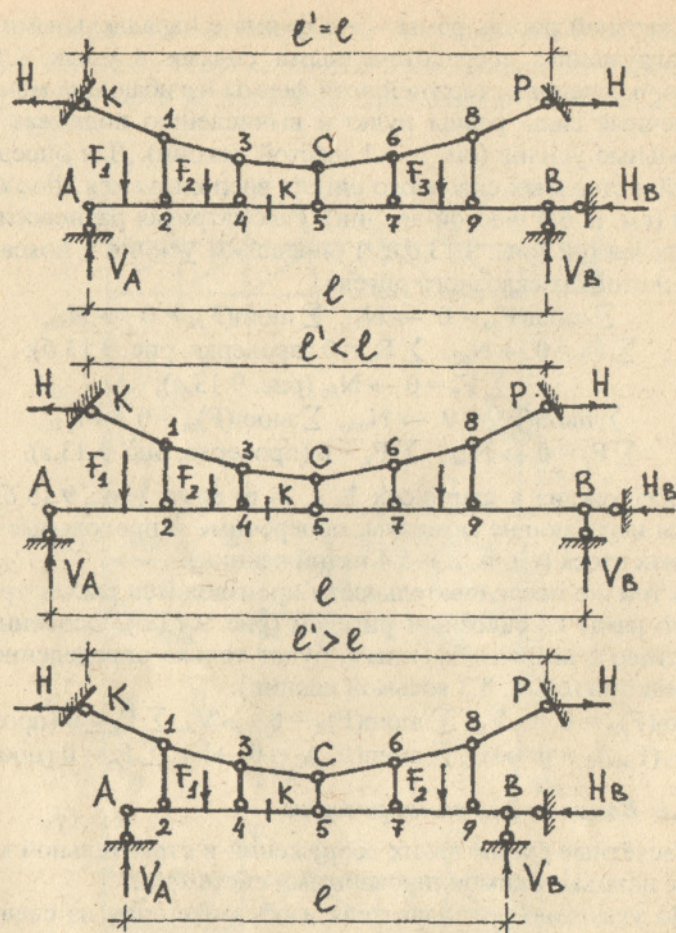


Рис. 9.14

в) усилий в элементах гибкой нити $N_{k1}, N_{13}, \dots, N_{8P}$;

г) усилий в подвесках $N_{12}, N_{34}, \dots, N_{89}$;

д) внутренних усилий в произвольном сечении балки жёсткости $K-M_k, Q_k, N_k$.

4. Заданы расчётные схемы гибкой нити с балкой жёсткости (рис. 9.14), по которой перемещается сосредоточенная сила $F=1$. К каким задачам сводится построение линий влияния внутренних усилий и реакций опорных связей в комби-

нированных системах в случаях, когда $l' = l, l' < l, l' > l$? Для любого из этих случаев, по указанию преподавателя, поясните построение ЛВ H , ЛВ V_B , ЛВ N_{13} , ЛВ N_{67} , ЛВ M_k , ЛВ Q_k .

5. Изобразите расчётную схему шпренгельной балки и поясните общий порядок определения внутренних усилий в её элементах от неподвижной нагрузки.
6. Изобразите расчётную схему рамы со сквозным ригелем, закреплённую к диску "земля" тремя или четырьмя линейными опорными связями. По указанию преподавателя поясните определение от заданной нагрузки:
 - а) усилия в одном из элементов сквозного ригеля;
 - б) изгибающего момента, поперечной и продольной силы в одном из сечений стойки.

9.7. Рекомендуемая литература

1. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем: Учеб. для вузов. – М.: Изд-во ассоциации строительных вузов, 1996. – 541 с.
Глава 4. Расчёт типичных статически определимых стержневых систем. § 4.4. Понятие о расчёте висячих систем. – С. 86–93.
2. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика: Учеб. для вузов. – М.: Высш. шк., 1986. – 607 с.
Глава 4. Плоские фермы. § 4.9. Трёхшарнирные арочные фермы и комбинированные системы. – С. 152–158.
3. Клейн Г.К., Леонтьев Н.Н. и др. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. Статика стержневых систем: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 1980. – 384 с.
Глава VI. Распорные фермы и комбинированные системы. § VI.2. Комбинированные системы. – С. 89–93.
4. Анохин Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах. Ч. 1. Статически определимые системы: Учеб. пособие. – М.: Изд-во ассоциации строительных вузов, 1999. – 334 с.
Глава 2. Расчёт сооружений на действие неподвижной нагрузки. § 2.4. Определение внутренних усилий в фермах и комбинированных системах. – С. 110–112 (пример 2.40). Глава 4. Построение линий влияния усилий. Определение усилий от действия неподвижной и подвижной нагрузок. § 4.3. Построение линий влияния усилий в распорных и комбинированных системах. – С. 234–235 (пример 4.18).

ЛЕКЦИЯ ДЕСЯТАЯ

ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ И ВОЗМОЖНАЯ РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ

- 10.1. Обобщённые силы и обобщённые перемещения
- 10.2. Действительная работа внешней статически приложенной нагрузки. Возможная работа внешней нагрузки
- 10.3. Действительная и возможная работа внутренних сил
- 10.4. Вопросы для самопроверки
- 10.5. Рекомендуемая литература

10.1. Обобщённые силы и обобщённые перемещения

В курсе "Сопротивления материалов" подробно рассмотрено понятие деформации сооружений, которая является следствием изменения размеров и формы бесконечно малых элементов стержней. В процессе деформации сооружения его точки занимают новые положения, т.е. получают перемещения.

Изучение перемещений необходимо для оценки жёсткости сооружений и расчёта статически неопределимых систем, так как дополнительные уравнения для раскрытия статической неопределимости вытекают из условий, накладываемых на перемещения.

Общие методы определения перемещений линейно деформируемых систем (понятие об этих системах см. в п. 1.5 первой лекции) основаны на анализе работы внешних и внутренних сил (изгибающих и крутящих моментов, поперечных и продольных сил). Внешние силы совершают работу на перемещениях их точек приложения к сооружению, внутренние же силы — на деформациях (изгиба, кручения, сдвига, растяжения — сжатия).

Механической работой силы постоянной величины и постоянного направления называется произведение величины этой силы на проекцию перемещения точки её приложения AA' на линию действия силы (рис. 10.1), т.е.

$$W_{\text{ext}} = F \Delta. \quad (10.1)$$

Сосредоточенная сила — лишь частный случай силового воздействия на сооружение. Механическую работу на соответствующих перемещениях совершают сосредоточенные моменты, равномерно распределённая нагрузка, группы сосредоточенных сил и сосредоточенных моментов, вообще любая нагрузка, включающая в себя в различных сочетаниях сосредоточенные силы и моменты, а также распределённую нагрузку.

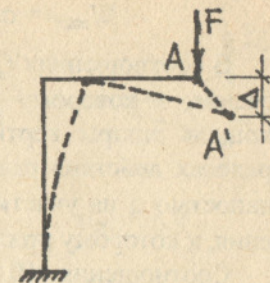


Рис. 10.1

В дальнейшем в наших лекциях будем рассматривать только простую нагрузку, т.е. нагрузку, все компоненты которой связаны с одним произвольно выбранным параметром. Изменение этого параметра на какую-либо величину приводит к такому же изменению всей нагрузки.

Вычислим механическую работу сосредоточенного момента (рис. 10.2, а), равномерно распределённой нагрузки (рис. 10.2, б), группы из двух сосредоточенных сил (рис. 10.2, в) на перемещениях балки, вызванных какими-то другими воздействиями. Считая величины перечисленных нагрузок постоянными, получим:

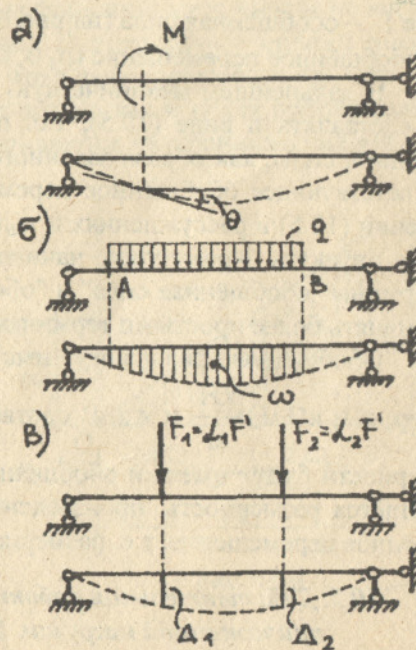


Рис. 10.2

$$W_{\text{ext}, M} = M \theta, \quad (10.2)$$

$$W_{\text{ext}, q} = q \omega, \quad (10.3)$$

$$W_{\text{ext},F} = \alpha_1 F' \Delta_1 + \alpha_2 F' \Delta_2 = F'(\alpha_1 \Delta_1 + \alpha_2 \Delta_2), \quad (10.4)$$

В соотношениях (10.2)–(10.4) обозначено: θ – угол поворота сечения, к которому приложен сосредоточенный момент; ω – площадь эпюры вертикальных перемещений сечений балки в пределах действия равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q на участке АВ; Δ_i – вертикальное перемещение сечения, к которому приложена сосредоточенная сила $F_i = \alpha_i F'$.

Соотношения (10.1)–(10.4) можно переписать в обобщённой форме, представляя механическую работу любой нагрузки, сколь сложной по структуре она не была бы, единой математической зависимостью

$$W_{\text{ext}} = F^* \Delta^*, \quad (10.5)$$

где F^* – обобщённая сила (на рис. 10.1 и 10.2 – это F , M , q , F'); Δ^* – обобщённое перемещение (Δ , θ , ω , $\alpha_1 \Delta_1 + \alpha_2 \Delta_2$).

В дальнейшем механическую работу любой нагрузки будем представлять в виде (10.5), т.е. произведения некоторой обобщённой силы, как образа заданного силового воздействия, на соответствующее обобщённое перемещение. Символ (*) в соотношении (10.5) в рассуждениях и выкладках, следующих далее, будем опускать. Кроме того, начиная с п. 10.3 настоящей лекции, термины "обобщённая сила" и "обобщённое перемещение" будем заменять более простыми терминами: "сила" и "перемещение".

Обобщённые силы могут иметь разные размерности, например, кН, кН·м, $\frac{\text{кН}}{\text{м}}$ и т.д. В соответствии с этим различные размерности будут иметь и обобщённые перемещения. Неизменной остаётся размерность произведения обобщённой силы на обобщённое перемещение, т.е. размерность работы.

10.2. Действительная работа внешней статически приложенной нагрузки. Возможная работа внешней нагрузки

Работа, совершаемая внешней обобщённой силой F_i на обобщённом перемещении Δ_{ii} , вызываемом этой же силой, называется действительной работой, а перемещение Δ_{ii} – действитель-

ным (или собственным) перемещением (рис. 10.3). Внешние силы, деформируя сооружение, на действительных перемещениях производят положительную работу.

В инженерных расчётах на прочность, жёсткость и устойчивость часто имеют дело со статическим способом приложения нагрузки, когда имеется ввиду постепенный, плавный и спокойный процесс воздействий внешних сил на сооружение, при котором оно деформируется медленно, без заметных ускорений. Практически, при таком способе приложения нагрузки силы инерции перемещаемых в результате деформации масс ничтожно малы по сравнению с прочими силами. В этом случае силами инерции можно пренебречь и считать, что в любое мгновение, как в процессе самого деформирования сооружения, так и после наступления покоя, внешние силы уравниваются внутренними силами.

В линейно деформируемых системах процесс нагружения характеризуется прямой пропорциональной зависимостью между обобщёнными силами и обобщёнными действительными перемещениями (рис. 10.4)

$$F_i = c \Delta_{ii}; \quad (10.6)$$

$$F = c \Delta. \quad (10.7)$$

В соотношениях (10.6) и (10.7): F_i , F – обобщённая сила, соответственно, в некоторый промежуточный и конечный моменты времени формирования нагрузки статическим способом; Δ_{ii} , Δ – соответствующие обобщённые перемещения; c – коэффициент пропорциональности.

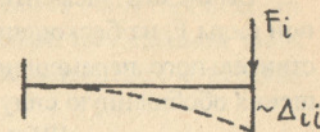


Рис. 10.3

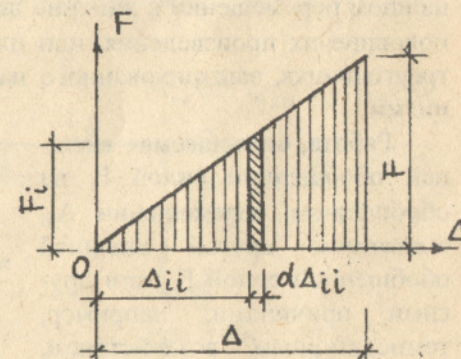


Рис. 10.4

Вычислим элементарную действительную работу обобщенной силы F_i на бесконечно малом приращении обобщенного действительного перемещения $d\Delta_{ij}$. Считая в пределах этого приращения обобщенную силу F_i постоянной (рис. 10.4), получим:

$$dW_{\text{ext},ii} = F_i \cdot d\Delta_{ij} = c\Delta_{ij} \cdot d\Delta_{ij}.$$

Полная действительная работа статически приложенной обобщенной силы F_i в пределах её изменения от 0 до F , а соответствующего обобщенного перемещения от 0 до Δ , есть интегральная сумма

$$W_{\text{ext},ii} = \int_0^{\Delta} c\Delta_{ij} \cdot \Delta_{ij} = c \frac{\Delta^2}{2}.$$

С учётом формулы (10.7) имеем:

$$W_{\text{ext},ii} = \frac{1}{2} F \Delta. \quad (10.8)$$

Таким образом, действительная работа статически приложенной внешней обобщенной силы на соответствующем обобщенном перемещении в линейно деформируемых системах равна половине их произведения, или площади диаграммы $F - \Delta$, т.е. треугольника, заштрихованного на рис. 10.4 вертикальными линиями.

Работа, совершаемая внешней обобщенной силой F_i на обобщенном перемещении Δ_{ij} , вызванном другой внешней обобщенной силой F_j (или другими причинами, например, температурным воздействием, смещением каких-то связей и т.д.) называется возможной, а перемещение Δ_{ij} – возможным (рис. 10.5).

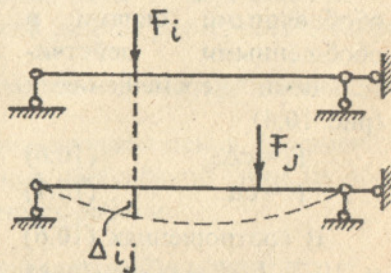


Рис. 10.5

Возможное перемещение Δ_{ij} – это перемещение точки приложения обобщенной силы F_i в направлении ее действия, обусловленное воздействием обобщенной силы F_j . Таким образом,

первый индекс (i) в обозначении возможного перемещения Δ_{ij} показывает – в направлении какой обобщенной силы происходит данное перемещение, а второй (j) – от какой обобщенной силы или от какого воздействия происходит рассматриваемое перемещение.

Возможная работа обобщенной силы F_i , постоянной по величине и имеющей неизменное направление, на перемещении, вызванном другой причиной, в частности, другой обобщенной силой F_j , равна произведению обобщенной силы F_i на соответствующее обобщенное перемещение Δ_{ij} , т.е.

$$W_{\text{ext},ij} = F_i \cdot \Delta_{ij}. \quad (10.9)$$

10.3. Действительная и возможная работа внутренних сил

При воздействии на сооружение внешних сил работу совершают не только они, но и внутренние силы, которые развиваются в деформируемых элементах. Вычислим действительную и возможную работу внутренних сил, ограничиваясь рассмотрением плоских систем, содержащих стержни с прямолинейной осью или слабоискривлённые стержни.

Пусть на стержневую систему действует обобщенная сила F_i (рис. 10.6), вызывающая в поперечных сечениях внутренние усилия – изгибающие моменты, поперечные и продольные силы.

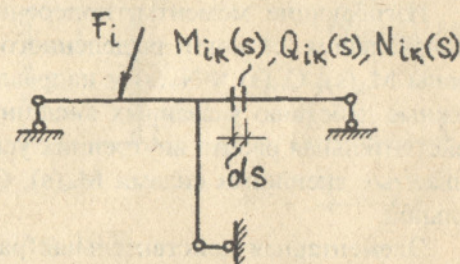


Рис. 10.6

Жёсткости поперечных сечений элементов k -го грузового участка на изгиб $EJ_k(s)$, сдвиг – $GA_k(s)$ и растяжение – сжатие – $EA_k(s)$ известны. В общем случае они являются функцией обобщенной координаты s , фиксируемой вдоль оси элемента. Количество грузовых участков в заданном сооружении обозначим: n_M – для изгибающих моментов, n_Q – для поперечных сил, n_N – для продольных сил.

Сначала определим действительную работу внутренних сил, т.е. работу, совершаемую внутренними усилиями на деформациях, вызванных обобщенной силой F_i . Двумя сечениями, отстоящими друг от друга на бесконечно малое расстояние ds (рис. 10.6) выделим элемент k -го грузового участка (рис. 10.7). В рассматриваемых сечениях возникают изгибающие моменты $M_{ik}(s)$, поперечные $Q_{ik}(s)$ и продольные силы $N_{ik}(s)$. Приращения внутренних усилий в пределах интервала ds на рис. 10.7 не показаны, т.к. механической работой этих приращений на малых деформациях будем пренебрегать как величиной более высокого порядка малости.

По отношению к выделенному элементу усилия, показанные на рис. 10.7, являются внешними силами, вызывающими перемещения боковых граней элемента и его деформации — изгиба, сдвига и растяжения (рис. 10.8–10.10).

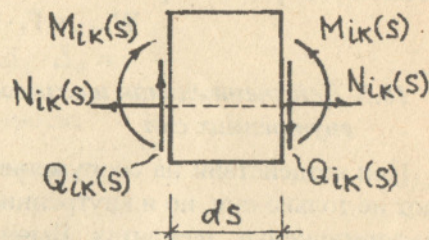


Рис. 10.7

Изгибающие моменты, поперечные и продольные силы в произвольном сечении выделенного элемента соответственно равны $M_{ik}(s)$, $Q_{ik}(s)$ и $N_{ik}(s)$ и направлены в стороны противоположные действию указанных внешних усилий. Это значит, что действительная работа внутренних усилий на перемещениях, вызываемых внешними силами $M_{ik}(s)$, $Q_{ik}(s)$ и $N_{ik}(s)$ будет отрицательной.

Элементарная действительная работа внутренних сил dW_{int} на указанных перемещениях запишется:

$$dW_{int} = dW_{int,M} + dW_{int,Q} + dW_{int,N}. \quad (10.10)$$

Изгибающий момент $M_{ik}(s)$ производит элементарную действительную работу на возможном повороте боковых граней элемента $d\theta_i$ (рис. 10.8), вызванным таким же по величине внешним моментом и равным, как известно из сопротивления материалов,

$$d\theta_i = \frac{M_{ik}(s)ds}{EJ_k(s)}, \text{ т.е.}$$

$$\begin{aligned} dW_{int,M} &= -\frac{1}{2} M_{ik}(s) d\theta_i = \\ &= -\frac{M_{ik}^2(s)ds}{2EJ_k(s)}. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Напоминаем, что действительная работа статически приложенной нагрузки равна половине произведения рассматриваемого усилия на соответствующее перемещение (см. п. 10.2).

Элементарная действительная работа поперечной силы $Q_{ik}(s)$ совершается на перемещении $ds \cdot dy_i$ от такой же по величине внешней силы (рис. 10.9).

$$dW_{int,Q} = -\frac{1}{2} Q_{ik}(s) ds \cdot dy_i. \quad (10.12)$$

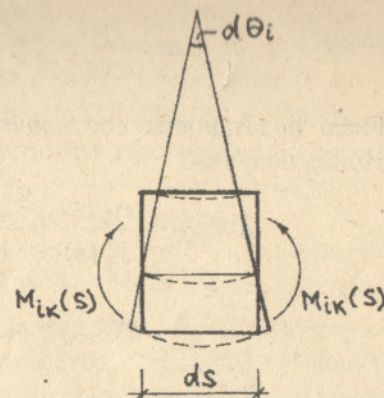


Рис. 10.8

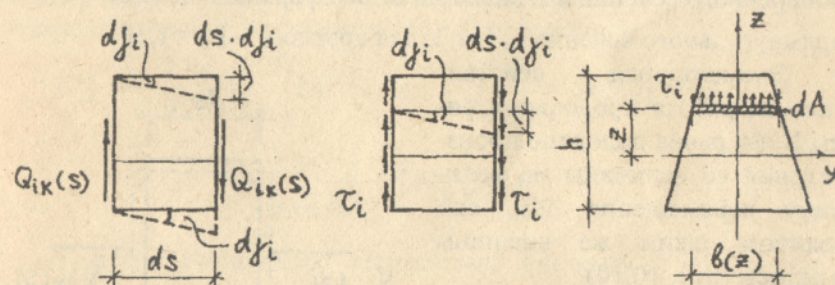


Рис. 10.9

Поперечная сила является равнодействующей касательных напряжений τ_i (рис. 10.9), неравномерно распределяемых по высоте поперечного сечения h .

$$Q_{ik}(s) = \int_A \tau_i dA. \quad (10.13)$$

Воспользуемся следующими зависимостями из сопротивления материалов:

$$dy_i = \frac{\tau_i}{G}, \quad \tau_i = \frac{Q_{ik}(s) S_{\text{омс},y}}{J_k(s) b(z)}. \quad (10.14)$$

После подстановки соотношений (10.14) в (10.13), а затем в (10.12), получим:

$$dW_{\text{int},Q} = \frac{A_k(s)}{J_k^2(s)} \int_A \frac{S_{\text{омс},y}^2}{b^2(z)} \cdot \frac{Q_{ik}^2(s) ds}{2GA_k(s)}, \text{ или}$$

$$dW_{\text{int},Q} = -k_\tau \frac{Q_{ik}^2(s) ds}{2GA_k(s)}, \quad (10.15)$$

$$\text{где } k_\tau = \frac{A_k(s)}{J_k^2(s)} \int_A \frac{S_{\text{омс},y}^2}{b^2(z)}.$$

В формуле (10.15) k_τ — коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по высоте поперечного сечения и зависящий от его формы. В частности, для прямоугольного сечения $k_\tau = 1,2$, для круглого — $k_\tau = 1,18$.

Элементарная действительная работа продольной силы $N_{ik}(s)$ равна половине произведения её величины на величину перемещения Δds_i , вызванном таким же внешним усилием (рис. 10.10).

$$dW_{\text{int},N} = -\frac{1}{2} N_{ik}(s) \Delta ds_i,$$

где Δds_i — продольное удлинение элемента. В соответствии с законом Гука

$$\Delta ds_i = \frac{N_{ik}(s) ds}{EA_k(s)}.$$

С учётом последнего соотношения имеем:

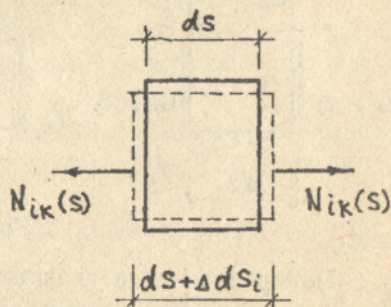


Рис. 10.10

$$dW_{\text{int},N} = \frac{N_{ik}^2(s) ds}{2EA_k(s)}. \quad (10.16)$$

После подстановки выражений (10.11), (10.15) и (10.16) в (10.10) получим элементарную действительную работу внутренних сил.

$$dW_{\text{int}} = -\frac{M_{ik}^2(s) ds}{2EJ_k(s)} - k_\tau \frac{Q_{ik}^2(s) ds}{2GA_k(s)} - \frac{N_{ik}^2(s) ds}{2EA_k(s)}. \quad (10.17)$$

Действительную работу внутренних сил вычислим, интегрируя соотношение (10.17) по длине соответствующих грузовых участков и суммируя вычисленные определённые интегралы по всем грузовым участкам.

$$dW_{\text{int}} = -\sum_{k=1}^{n_M} \int_0^{\ell_k} \frac{M_{ik}^2(s) ds}{2EJ_k(s)} - \sum_{k=1}^{n_Q} \int_0^{\ell_k} k_\tau \frac{Q_{ik}^2(s) ds}{2GA_k(s)} - \sum_{k=1}^{n_N} \int_0^{\ell_k} \frac{N_{ik}^2(s) ds}{2EA_k(s)}. \quad (10.18)$$

Если в пределах грузовых участков жёсткости поперечных сечений элементов сооружения на изгиб, сдвиг и растяжение — сжатие постоянны, то формула (10.18) примет вид:

$$W_{\text{int}} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_M} \frac{1}{EJ_k} \int_0^{\ell_k} M_{ik}^2(s) ds - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_Q} \frac{k_\tau}{GA_k} \int_0^{\ell_k} Q_{ik}^2(s) ds - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_N} \frac{1}{EA_k} \int_0^{\ell_k} N_{ik}^2(s) ds. \quad (10.19)$$

В пространственных стержневых системах соотношения (10.18) и (10.19) содержат шесть членов, которые отражают действительную работу изгибающих моментов и поперечных сил, действующих в двух главных плоскостях инерции, действительную работу крутящих моментов и действительную работу продольных сил.

Действительная работа внутренних сил при разгрузке сооружения положительна и называется потенциальной энергией деформации сооружения. Потенциальная энергия деформации плоской стержневой системы вычисляется по формуле:

$$U = -W_{\text{int}} = -\sum_{k=1}^{n_M} \int_0^{\ell_k} \frac{M_{ik}^2(s) ds}{2EJ_k(s)} + \sum_{k=1}^{n_Q} \int_0^{\ell_k} k_\tau \frac{Q_{ik}^2(s) ds}{2GA_k(s)} + \sum_{k=1}^{n_N} \int_0^{\ell_k} \frac{N_{ik}^2(s) ds}{2EA_k(s)}. \quad (10.20)$$

В дальнейшем выражение (10.20) будет использовано при изучении специальных разделов курса строительной механики: "Устойчивость сооружений" и "Динамика сооружений".

Далее вычислим возможную работу внутренних сил, вызванных обобщенной силой F_i , на деформациях, обусловленных другим воздействием, в частности, обобщенной силой F_j (рис. 10.11).

По-прежнему рассмотрим элемент k -го грузового участка длиной ds . В соседних сечениях, ограничивающих этот элемент, от обобщенной силы F_i возникают изгибающий момент $M_{ik}(s)$, поперечная сила $Q_{ik}(s)$, продольная сила $N_{ik}(s)$, а от обобщенной силы F_j — соответственно, $M_{jk}(s)$, $Q_{jk}(s)$, $N_{jk}(s)$ (рис. 10.11). По отношению к выделенному элементу указанные внутренние усилия являются внешними силами. Внешние усилия $M_{jk}(s)$, $Q_{jk}(s)$, $N_{jk}(s)$ вызывают перемещения граней элемента, величины которых определяются по известным формулам сопротивления материалов:

$$d\theta_j = \frac{M_{jk}(s) ds}{EJ_k(s)}, \quad ds \cdot d\gamma_j = ds \frac{\tau_j}{G} = \frac{ds}{G} \cdot \frac{Q_{jk}(s) S_{\text{омс},y}}{J_k(s) b(z)},$$

$$\Delta ds_j = \frac{N_{jk}(s) ds}{EA_k(s)}.$$

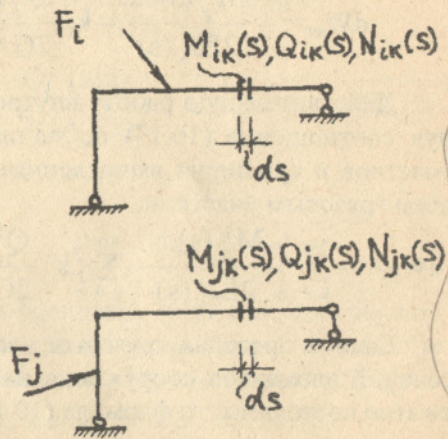


Рис. 10.11

Направление этих перемещений будем считать совпадающими с направлением внешних усилий $M_{ik}(s)$, $Q_{ik}(s)$, $N_{ik}(s)$. Это значит, что элементарная возможная работа внутренних сил от обобщенной силы F_i на перемещениях $d\theta_j$, $ds \cdot d\gamma_j$, Δds_j , обусловленных деформациями изгиба, сдвига и растяжения от обобщенной силы F_j , отрицательна. Её величина будет равна:

$$dW_{\text{int},ij} = dW_{\text{int},ij}^{(M)} + dW_{\text{int},ij}^{(Q)} + dW_{\text{int},ij}^{(N)} =$$

$$= -\frac{M_{ik}(s) M_{jk}(s) ds}{EJ_k(s)} - k_\tau \frac{Q_{ik}(s) Q_{jk}(s) ds}{GA_k(s)} - \frac{N_{ik}(s) N_{jk}(s) ds}{EA_k(s)}.$$

В отличие от соотношения (10.17) в последнем выражении отсутствует коэффициент 0,5, так как обобщенная сила F_i и вызываемые ею внутренние усилия постоянны.

Возможная работа внутренних сил всего сооружения от обобщенной силы F_i на деформациях, вызванных обобщенной силой F_j запишется:

$$W_{\text{int},ij} = -\sum_{k=1}^{n_M} \int_0^{\ell_k} \frac{M_{ik}(s) M_{jk}(s) ds}{EJ_k(s)} - \sum_{k=1}^{n_Q} \int_0^{\ell_k} k_\tau \frac{Q_{ik}(s) Q_{jk}(s) ds}{GA_k(s)} -$$

$$- \sum_{k=1}^{n_N} \int_0^{\ell_k} \frac{N_{ik}(s) N_{jk}(s) ds}{EA_k(s)}. \quad (10.21)$$

В случае, когда $EJ_k(s) = \text{const}$, $GA_k(s) = \text{const}$, $EA_k(s) = \text{const}$, формула (10.21) преобразуется:

$$W_{\text{int},ij} = -\sum_{k=1}^{n_M} \frac{1}{EJ_k} \int_0^{\ell_k} M_{ik}(s) M_{jk}(s) ds -$$

$$- \sum_{k=1}^{n_Q} \frac{k_\tau}{GA_k} \int_0^{\ell_k} Q_{ik}(s) Q_{jk}(s) ds - \sum_{k=1}^{n_N} \frac{1}{EA_k} \int_0^{\ell_k} N_{ik}(s) N_{jk}(s) ds. \quad (10.22)$$

10.4. Вопросы для самопроверки

1. Что называется механической работой сосредоточенной силы постоянной величины и постоянного направления?
2. Какая нагрузка, действующая на сооружение, считается простой?
3. С какой целью вводятся понятия "обобщённая сила" и "обобщённое перемещение"?
4. Что называется действительным перемещением? Возможным перемещением? Поясните смысл индексов i и j , входящих в обозначения действительных перемещений Δ_{ii} и возможных перемещений Δ_{ij} .
5. Что называется действительной работой внешней нагрузки? Возможной работой внешней нагрузки?
6. Назовите способы приложения нагрузок к сооружению. Дайте характеристику статическому способу приложения нагрузки. Приведите примеры статического способа приложения нагрузки из области строительства и эксплуатации сооружений.
7. Какая зависимость имеет место между обобщёнными силами, приложенными статическим способом, и соответствующими действительными обобщёнными перемещениями в линейно-деформируемых системах?
8. Как вычисляется действительная работа статически приложенной внешней нагрузки в линейно-деформируемых системах?
9. Как вычисляется возможная работа обобщённой силы, имеющей постоянное значение по величине и неизменное направление?
10. Запишите выражение для действительной работы внутренних сил в линейно-деформируемых плоских стержневых системах. Поясните смысл каждого члена этого выражения:

$$-\sum_{k=1}^{n_M} \int_0^{\ell_k} \frac{M_{ik}^2(s) ds}{2EJ_k(s)}; -\sum_{k=1}^{n_Q} \int_0^{\ell_k} k_{\tau} \frac{Q_{ik}^2(s) ds}{2GA_k(s)}; -\sum_{k=1}^{n_N} \int_0^{\ell_k} \frac{N_{ik}^2(s) ds}{2EA_k(s)}.$$

Обоснуйте знак "минус" действительной работы изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.

11. Что называется потенциальной энергией деформации сооружения? Запишите выражение для потенциальной энергии деформации плоской стержневой системы.
12. Запишите выражение для возможной работы внутренних сил в плоских стержневых системах. Поясните смысл каждого члена этого выражения:

$$-\sum_{k=1}^{n_M} \int_0^{\ell_k} \frac{M_{ik}(s)M_{jk}(s) ds}{EJ_k(s)}; -\sum_{k=1}^{n_Q} \int_0^{\ell_k} k_{\tau} \frac{Q_{ik}(s)Q_{jk}(s) ds}{GA_k(s)}; -\sum_{k=1}^{n_N} \int_0^{\ell_k} \frac{N_{ik}(s)N_{jk}(s) ds}{EA_k(s)}.$$

В каком случае возможная работа внутренних сил будет отрицательной?

13. Поясните смысл обозначений, входящих в выражения, записанные в пп. 10 и 12: $M_{ik}(s)$, $Q_{ik}(s)$, $N_{ik}(s)$, $M_{jk}(s)$, $Q_{jk}(s)$, $N_{jk}(s)$, E , G , $A_k(s)$, $J_k(s)$, $EJ_k(s)$, $GA_k(s)$, $EA_k(s)$, k_{τ} , ℓ_k , n_M , n_Q , n_N .
14. Что учитывает коэффициент k_{τ} и от чего зависит его значение? Запишите формулу для определения этого коэффициента. Поясните смысл обозначений, входящих в эту формулу: $S_{\text{отс},y}$, $b(z)$. Чему равно значение коэффициента k_{τ} для прямоугольного и круглого поперечных сечений?

10.5. Рекомендуемая литература

1. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем: Учеб. для вузов. – М.: Изд-во ассоциации строительных вузов, 1996. – 541 с.
Глава 5. Основы теории расчёта линейно деформируемых систем. § 5.2. Обобщённые силы и обобщённые перемещения. Принцип возможных перемещений. § 5.3. Действительная работа внешних и внутренних сил стержневой системы. – С. 96–101.

2. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика: Учеб. для вузов. – М.: Высш. шк., 1986. – 607 с.
Глава 5. Определение перемещений в упругих системах. § 5.1. Работа внешних сил. Потенциальная энергия. – С. 159–163.
3. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лашенков Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Стержневые системы: Учеб. для вузов. – М.: Стройиздат, 1981. – 512 с.
Глава VIII. Определение перемещений по методу Мора. § 38. Вводные замечания. – С. 201–203.
4. Клейн Г.К., Леонтьев Н.Н. и др. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. Статика стержневых систем: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 1980. – 384 с.
Глава VIII. Потенциальная энергия упругих систем. Определение перемещений стержневых систем. § VIII.1. Потенциальная энергия упругих систем. – С. 107–109.
5. Анохин Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах. Ч. 1. Статически определимые системы: Учеб. пособие. – М.: Изд-во ассоциации строительных вузов, 1999. – 334 с.
Глава 3. Определение перемещений в статически определимых системах. § 3.1. Перемещения. Работа внешних и внутренних сил... – С. 120–125.

ЛЕКЦИЯ ОДИННАДЦАТАЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ СИЛОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

- 11.1. Предварительные замечания
- 11.2. Определение перемещений от силового воздействия. Формула Мора
- 11.3. Практическое использование формулы Мора для определения перемещений в стержневых системах различного типа
- 11.4. Способы вычисления интегралов Мора
- 11.5. Общий порядок решения задачи по определению перемещений от силового воздействия
- 11.6. Примеры определения перемещений в статически определимых стержневых системах
- 11.7. Вопросы для самопроверки
- 11.8. Рекомендуемая литература

11.1. Предварительные замечания

Строительные нормы и правила требуют, чтобы сооружения были не только прочными, но и достаточно жёсткими. Например, вертикальные перемещения фермы моста при загрузке подвижным поездом не должны превышать определённой величины, установленной нормами ($1/500$ – $1/1000$ пролета). В противном случае резко ухудшаются условия эксплуатации моста и подвижного состава. Определённым требованиям должны удовлетворять углы поворота отдельных сечений антенной части телевизионной башни. Они должны быть достаточно малыми, т.е. такими, чтобы даже при сильном ветре не страдало качество телепередач.

Необходимость вычисления перемещений возникает не только при проверке жёсткости сооружений, но и при решении обширного класса задач строительной механики (расчет статически неопределимых систем, определение частот собственных колебаний сооружений, расчёт на динамические воздействия и т.д.).

В стержневых системах, как правило, не требуется отыскивать аналитическую связь между перемещениями отдельных сечений и координатами, определяющими их положение. Определению подлежат характерные линейные и угловые перемещения отдельных сечений и узлов сооружений от различного рода воздействий (силовых, температурных, смещения связей и т.д.). В частности, в раме, показанной на рис. 11.1, может возникнуть необходимость определения угла поворота узла В (θ_B), вертикальной и горизонтальной проекции линейного перемещения узла А (Δ_{Ay} и Δ_{Ax}) от боковой равномерно распределенной нагрузки.

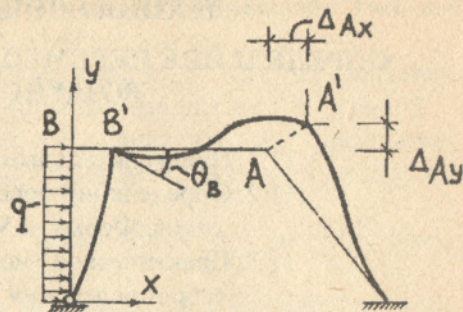


Рис. 11.1

В дальнейшем искомые перемещения будем обозначать буквой Δ с двойным индексом (например, Δ_{jF} , Δ_{ji}). Первый индекс указывает на направление перемещения отдельного сечения или узла, а второй — на причину, вызвавшую это перемещение (внешние силы, изменение температуры в отдельных зонах сооружения и т.д.).

Часто определяемые перемещения являются проекциями полных перемещений отдельных сечений или узлов на заданные направления. Полное же перемещение можно получить, зная его проекции на эти направления. Например, полное линейное перемещение Δ узла А рамы (рис. 11.1) получим, определив предварительно его проекции на горизонтальную и вертикальную оси

$$\Delta = \sqrt{\Delta_{Ax}^2 + \Delta_{Ay}^2}.$$

11.2. Определение перемещений от силового воздействия. Формула Мора

Определим перемещение сечения А Δ_{jF} в направлении j в любой плоской стержневой системе с заданными размерами и жёсткостями поперечных сечений её элементов $EJ(s)$, $GA(s)$, $EA(s)$ от произвольной нагрузки, представленной на рис. 11.2, а обобщённой силой F . По существу поставлена задача определения проекции полного перемещения рассматриваемого сечения AA' (рис. 11.2, а) на направление j ($AA'' = \Delta_{jF}$).

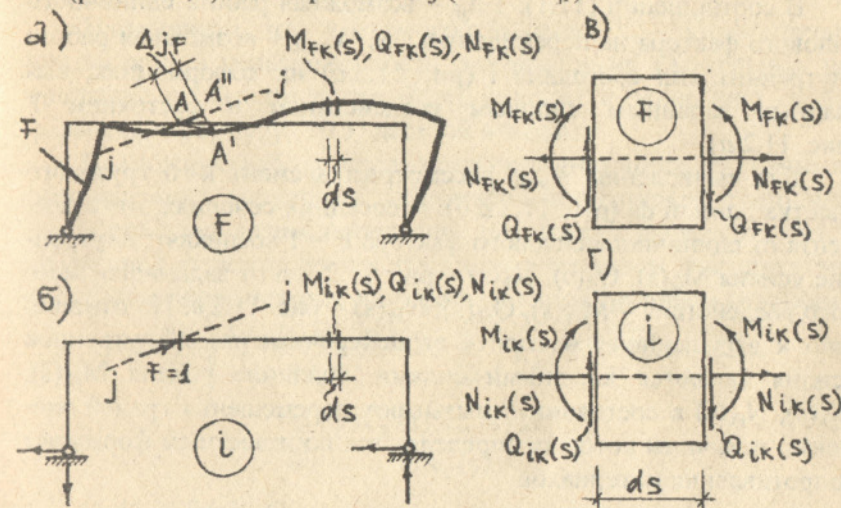


Рис. 11.2

Рассмотрим два состояния заданного сооружения: грузовое F (рис. 11.2, а) и единичное i (рис. 11.2, б), в котором по направлению искомого перемещения приложен единичный силовой фактор. В случае, когда определяется линейное перемещение какого-либо сечения, таким фактором будет единичная сосредоточенная сила, совершающая механическую работу на линейном перемещении Δ_{jF} . В общем случае, при определении любого обобщенного перемещения, единичный силовой фактор формируется так, чтобы он совершал механическую работу на этом перемещении.

К равновесному единичному состоянию i применим принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа). За возможные примем перемещения, имеющие место в грузовом состоянии F . Эти перемещения не противоречат связям сооружения (рис. 11.2, a) и их величина мала по сравнению с его размерами. Возможная работа внешних и внутренних сил равновесного состояния i на упомянутых перемещениях равна нулю

$$1 \cdot \Delta_{jF} + W_{int,iF} = 0. \quad (11.1)$$

В соотношении (11.1): $1 \cdot \Delta_{jF}$ — возможная работа единичного силового фактора на перемещении Δ_{jF} , $W_{int,iF}$ — возможная работа внутренних сил состояния i (рис. 11.2, b) на деформациях, вызванных заданным силовым воздействием в состоянии F (рис. 11.2, a).

Для вычисления $W_{int,iF}$ рассмотрим элемент k -го грузового участка длиной ds (рис. 11.2, a, b). В соседних сечениях этого элемента от единичного силового фактора $F = 1$ возникают внутренние усилия $M_{ik}(s)$, $Q_{ik}(s)$, $N_{ik}(s)$ — рис. 11.2, z , а от заданного силового воздействия — $M_{Fk}(s)$, $Q_{Fk}(s)$, $N_{Fk}(s)$ — рис. 11.2, $в$. По отношению к выделенному элементу вышеперечисленные внутренние усилия являются внешними силами. Внешние усилия $M_{Fk}(s)$, $Q_{Fk}(s)$, $N_{Fk}(s)$ в состоянии F вызывают перемещения граней элемента, величины которых определяются по известным формулам сопротивления материалов

$$d\theta_F = \frac{M_{Fk}(s)ds}{EJ_k(s)}, \quad ds \cdot d\gamma_F = ds \cdot \frac{\tau_F}{G} = \frac{ds}{G} \cdot \frac{Q_{Fk}(s) S_{омс,y}}{J_k(s) b(z)},$$

$$\Delta ds_F = \frac{N_{Fk}(s)ds}{EA_k(s)}.$$

Аналогией этих перемещений являются перемещения $d\theta_i$, $ds \cdot d\gamma_i$, Δds_i , показанные на рис. 10.8–10.10 (см. п. 10.3 десятой лекции).

Направление перемещений $d\theta_F$, $ds \cdot d\gamma_F$, Δds_F будем считать совпадающими с направлениями внешних усилий $M_{ik}(s)$, $Q_{ik}(s)$, $N_{ik}(s)$ (рис. 11.2, z). Это значит, что элементарная возможная работа внутренних сил состояния i (рис. 11.2, b) на возможных перемещениях $d\theta_F$, $ds \cdot d\gamma_F$, Δds_F , обусловленных деформациями изгиба,

сдвига и растяжения в состоянии F (рис. 11.2, a), отрицательна. Величину этой элементарной возможной работы внутренних сил $dW_{int,iF}$ получим, повторяя выкладки, приведенные в п. 10.3 десятой лекции, но теперь привязывая их к единичному и грузовому состояниям сооружения.

$$\begin{aligned} dW_{int,iF} &= dW_{int,iF}^{(M)} + dW_{int,iF}^{(Q)} + dW_{int,iF}^{(N)} = \\ &= -\frac{M_{ik}(s)M_{Fk}(s)ds}{EJ_k(s)} - k_\tau \cdot \frac{Q_{ik}(s)Q_{Fk}(s)ds}{GA_k(s)} - \frac{N_{ik}(s)N_{Fk}(s)ds}{EA_k(s)}. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Напоминаем, что в этом соотношении k_τ — коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по высоте поперечного сечения и зависящий от его формы (см. формулу (10.5) десятой лекции).

Возможную работу внутренних сил единичного состояния на перемещениях, вызванных деформациями в грузовом состоянии, для всего сооружения определим, интегрируя выражение (11.2) по длине соответствующих грузовых участков и суммируя вычисленные определенные интегралы по всем грузовым участкам

$$\begin{aligned} W_{int,iF} &= -\sum_{k=1}^{n_M} \int_0^{\ell_k} \frac{M_{ik}(s)M_{Fk}(s)ds}{EJ_k(s)} - \sum_{k=1}^{n_Q} \int_0^{\ell_k} k_\tau \cdot \frac{Q_{ik}(s)Q_{Fk}(s)ds}{GA_k(s)} - \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n_N} \int_0^{\ell_k} \frac{N_{ik}(s)N_{Fk}(s)ds}{EA_k(s)}. \end{aligned} \quad (11.3)$$

В (11.3) n_M , n_Q , n_N — число грузовых участков соответственно для изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.

После подстановки (11.3) в (11.1) получим формулу Мора для определения перемещений в плоских стержневых системах от силового воздействия

$$\begin{aligned} \Delta_{jF} &= \sum_{k=1}^{n_M} \int_0^{\ell_k} \frac{M_{ik}(s)M_{Fk}(s)ds}{EJ_k(s)} + \sum_{k=1}^{n_Q} \int_0^{\ell_k} k_\tau \cdot \frac{Q_{ik}(s)Q_{Fk}(s)ds}{GA_k(s)} + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n_N} \int_0^{\ell_k} \frac{N_{ik}(s)N_{Fk}(s)ds}{EA_k(s)}. \end{aligned} \quad (11.4)$$

В случае постоянной жёсткости поперечных сечений элементов сооружения на изгиб, сдвиг и растяжение-сжатие формула Мора переписывается:

$$\Delta_{jF} = \sum_{k=1}^{n_M} \frac{1}{EJ_k} \int_0^{\ell_k} M_{ik}(s) M_{Fk}(s) ds + \sum_{k=1}^{n_Q} \frac{k_\tau}{GA_k} \int_0^{\ell_k} Q_{ik}(s) Q_{Fk}(s) ds + \sum_{k=1}^{n_N} \frac{1}{EA_k} \int_0^{\ell_k} N_{ik}(s) N_{Fk}(s) ds. \quad (11.5)$$

11.3. Практическое использование формулы Мора для определения перемещений в стержневых системах различного типа

Перемещения сооружений в плоских стержневых системах от силового воздействия определяются их деформациями: изгиба, сдвига, растяжения-сжатия. Влияние этих деформаций на величины перемещений неодинаково для сооружений различного назначения. В частности, в рамах и балках деформации сдвига и растяжения-сжатия незначительно влияют на величины перемещений.

Рассмотрим для примера определение вертикального перемещения конца консоли AA' Δ_{Ay} от равномерно распределённой нагрузки q . Поперечное сечение консоли примем прямоугольным шириной b и высотой h (рис. 11.3, а).

Исследуем грузовое и единичное состояния консольного стержня (рис. 11.3, а, б) и вычис-

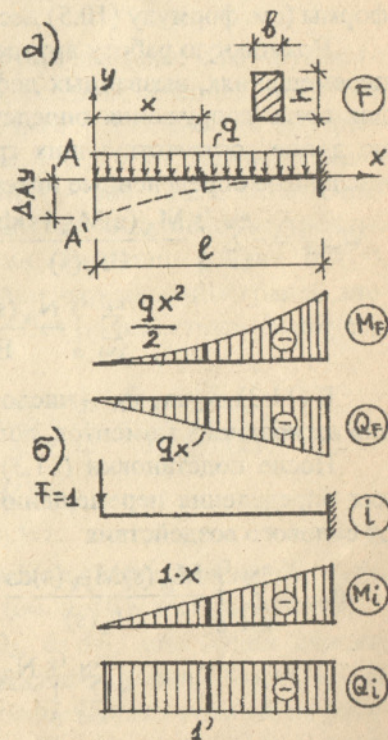


Рис. 11.3

лим изгибающие моменты, поперечные и продольные силы в произвольном сечении x :

$$M_F(x) = -\frac{qx^2}{2}, \quad Q_F(x) = -qx, \quad N_F(x) = 0;$$

$$M_i(x) = -1 \cdot x, \quad Q_i(x) = -1, \quad N_i(x) = 0.$$

Подставляя полученные значения внутренних усилий в формулу Мора (11.5), получим:

$$\Delta_{Ay} = \frac{1}{EJ} \int_0^{\ell} \left(-\frac{qx^2}{2} \right) (-1 \cdot x) dx + \frac{1}{GA} \int_0^{\ell} k_\tau \cdot (-qx) (-1) dx =$$

$$= \frac{q\ell^4}{8EJ} + \frac{k_\tau q\ell^2}{2GA}.$$

Для прямоугольного поперечного сечения консоли

$$J = \frac{bh^3}{12}, \quad A = bh, \quad k_\tau = 1,2.$$

Модуль упругости E , модуль сдвига G и коэффициент Пуассона ν материала, как известно из сопротивления материалов, связаны соотношением

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

После подстановки значений J , A , G и k_τ в формулу (11.6) и элементарных преобразований получим:

$$\Delta_{Ay} = \frac{q\ell^4}{8EJ} \left[1 + \frac{4(1+\nu)\ell^2}{5h^2} \right]. \quad (11.7)$$

Второе слагаемое соотношения (11.7) для балок обычно составляет величину порядка нескольких процентов от первого. Например, при $\nu = 0,25$ и $h/\ell < 0,2$ оно меньше 0,04. Поэтому при определении перемещений в балках и рамах со сплошным поперечным сечением их элементов пренебрегают влиянием деформаций сдвига. Аналогично можно показать, что влияние деформаций растяжения-сжатия на перемещения также незначительно. Это позволяет в практических расчётах балок и рам исключить из формулы Мора (11.4) второй и третий члены, оставив в ней толь-

ко первый, учитывающий влияние деформации изгиба на перемещения.

$$\Delta_{jF} = \sum_{k=1}^n \int_0^{\ell_k} \frac{M_{ik}(s) M_{Fk}(s) ds}{EJ_k(s)}. \quad (11.8)$$

В фермах при узловой передаче нагрузки и определении линейных перемещений узлов в поперечных сечениях стержней отсутствуют изгибающие моменты и поперечные силы, т.е.

$$M_{Fk}(s) = 0, \quad Q_{Fk}(s) = 0, \quad M_{ik}(s) = 0, \quad Q_{ik}(s) = 0,$$

а продольные силы постоянны по их длине

$$N_{Fk}(s) = \text{const} = N_{Fk}, \quad N_{ik}(s) = \text{const} = N_{ik}.$$

Часто жёсткость поперечного сечения стержней на растяжение-сжатие EA_k принимается постоянной по длине стержня. В этом случае формула Мора (11.4) примет вид:

$$\Delta_{jF} = \sum_{k=1}^n \frac{N_{ik} N_{Fk}}{EA_k} \int_0^{\ell_k} ds = \sum_{k=1}^n \frac{N_{ik} N_{Fk} \ell_k}{EA_k}, \quad (11.9)$$

где n – количество стержней фермы.

В комбинированных системах (гибкая нить с балкой жёсткости – рис. 9.2, шпренгельная балка – рис. 9.12, рама со сквозным ригелем – рис. 9.13 и т.п.) определение перемещений производится без учета деформаций сдвига, т.е. в формуле Мора (11.4) сохраняются первый и третий члены.

Все три члена формулы Мора (11.4), как правило, учитываются при расчете на прочность и жёсткость арок.

11.4. Способы вычисления интегралов Мора

С математической точки зрения определение перемещений в стержневых системах от силового воздействия сводится к вычислению определенных интегралов формулы Мора (11.4). Подынтегральные выражения у всех членов этой формулы имеют одинаковую структуру и в обобщённом виде могут быть представлены следующим образом:

$$\int_0^{\ell_k} \frac{\Phi_{ik}(s) \Phi_{Fk}(s) ds}{T_k(s)}. \quad (11.10)$$

Здесь $\Phi_{ik}(s)$ – общее представление функций изгибающих моментов $M_{ik}(s)$, поперечных и продольных сил $Q_{ik}(s)$, $N_{ik}(s)$ на k -ом грузовом участке от единичного фактора, приложенного в направлении определяемого перемещения; $\Phi_{Fk}(s)$ – представление функций внутренних усилий $M_{Fk}(s)$, $Q_{Fk}(s)$, $N_{Fk}(s)$ от заданного силового воздействия; $T_k(s)$ – представление функций, описывающих изменение жесткостей поперечного сечения вдоль k -го грузового участка $EJ_k(s)$, $GA_k(s)$, $EA_k(s)$.

В некоторых случаях определенный интеграл (11.10) можно вычислить точно, используя известные методы математического анализа. Однако чаще всего первообразная функция для подынтегрального выражения интеграла (11.10) в замкнутой форме не существует и численное значение величины этого интеграла приходится вычислять приближенно с заданной точностью. В строительной механике для этого, как правило, используется формула Симпсона:

$$\int_0^{\ell_k} \frac{\Phi_{ik}(s) \Phi_{Fk}(s) ds}{T_k(s)} = \frac{\ell_k}{6} \left(\frac{\Phi_{ik}^{(b)} \Phi_{Fk}^{(b)}}{T_k^{(b)}} + 4 \frac{\Phi_{ik}^{(c)} \Phi_{Fk}^{(c)}}{T_k^{(c)}} + \frac{\Phi_{ik}^{(e)} \Phi_{Fk}^{(e)}}{T_k^{(e)}} \right). \quad (11.11)$$

В формуле (11.11) $\Phi_{ik}^{(b)}$, $\Phi_{Fk}^{(b)}$, $T_k^{(b)}$ – значения функций, входящих в подынтегральное выражение, в начале интервала; $\Phi_{ik}^{(c)}$, $\Phi_{Fk}^{(c)}$, $T_k^{(c)}$ – в середине; $\Phi_{ik}^{(e)}$, $\Phi_{Fk}^{(e)}$, $T_k^{(e)}$ – в конце (рис. 11.4). Точность вычисления величины интеграла (11.10) зависит от длины интервала ℓ_k . С уменьшением этой длины, т.е. с увеличением числа рассматриваемых интервалов, точность вычислений повышается.

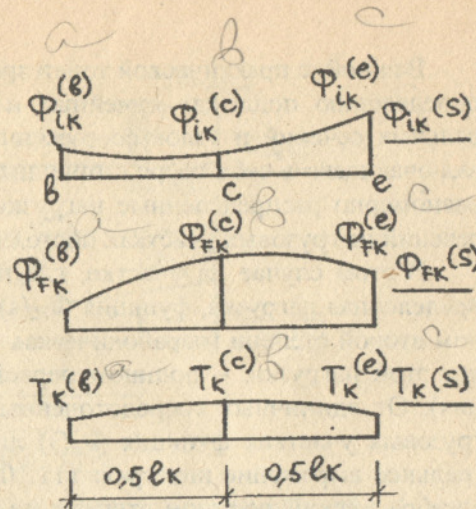


Рис. 11.4

Важной, с практической точки зрения, является задача, когда определению подлежат линейные и угловые перемещения отдельных сечений и узлов сооружения от силового воздействия, включающего в себя сосредоточенные силы и моменты, а также равномерно распределенные нагрузки, и жёсткости поперечных сечений на грузовых участках постоянны ($EJ_k, GA_k, EA_k = \text{const}$).

В этом случае на участке, где приложена равномерно распределенная нагрузка, функция $\Phi_{Fk}(s)$ есть алгебраический полином второй степени (параболическая функция), а на участке, где нет этой нагрузки, — полином первой степени (линейная функция). От единичных сосредоточенных сил и моментов на всех грузовых участках функция $\Phi_{ik}(s)$ линейна. В целом прединтегральное выражение интеграла (11.10) будет представлять собой алгебраический полином степени не выше третьей. Это значит, что формула Симпсона на рассматриваемом интервале, равном длине грузового участка ℓ_k (рис. 11.4), даёт точное значение определенного интеграла (11.10). Соотношение (11.11) для данного случая переписывается:

$$\frac{1}{T_k} \int_0^{\ell_k} \Phi_{ik}(s) \Phi_{Fk}(s) ds = \frac{\ell_k}{6T_k} \left(\Phi_{ik}^{(b)} \Phi_{Fk}^{(b)} + 4\Phi_{ik}^{(c)} \Phi_{Fk}^{(c)} + \Phi_{ik}^{(e)} \Phi_{Fk}^{(e)} \right). \quad (11.12)$$

Часто, когда хотя бы одна из подинтегральных функций $\Phi_{ik}(s)$ или $\Phi_{Fk}(s)$ линейна (рис. 11.5), определенный интеграл для k -го грузового участка можно вычислить, используя правило Верещагина

$$\int_0^{\ell_k} \Phi_{ik}(s) \Phi_{Fk}(s) ds = \omega_{Fk} \Phi_{ik}^{(c)}, \quad (11.13)$$

где ω_{Fk} — площадь фигуры, ограниченной на k -том участке функцией $\Phi_{Fk}(s)$; $\Phi_{ik}^{(c)}$ — значение функции $\Phi_{ik}(s)$ под центром тяжести S фигуры, имеющей площадь ω_{Fk} (рис. 11.5).

Для доказательства справедливости соотношения (11.13) рассмотрим случай, когда функция $\Phi_{Fk}(s)$ произвольна, а $\Phi_{ik}(s)$ — линейна (рис. 11.5). Элементарную площадь участка ds функции $\Phi_{Fk}(s)$ обозначим через $d\omega_{Fk}$, т.е.

$$d\omega_{Fk} = \Phi_{Fk}(s) ds.$$

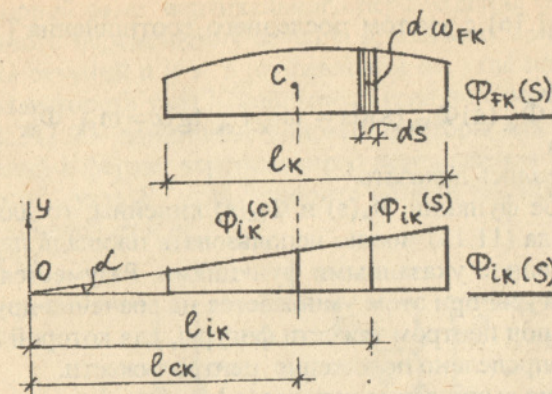


Рис. 11.5

С учетом принятого обозначения определенный интеграл (11.13) преобразуется:

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell_k} \Phi_{ik}(s) \Phi_{Fk}(s) ds &= \int_0^{\ell_k} d\omega_{Fk} \cdot \Phi_{ik}(s) = \int_0^{\ell_k} d\omega_{Fk} \cdot \ell_{ik} \operatorname{tg} \alpha = \\ &= \operatorname{tg} \alpha \int_0^{\ell_k} d\omega_{Fk} \cdot \ell_{ik}. \end{aligned} \quad (11.14)$$

Определенный интеграл правой части соотношения (11.14) есть статический момент площади фигуры, ограниченной функцией $\Phi_{Fk}(s)$, относительно вертикальной оси y , проходящей через точку O (рис. 11.5), т.е.

$$\int_0^{\ell_k} d\omega_{Fk} \cdot \ell_{ik} = S_{Fk,y}. \quad (11.15)$$

С учетом (11.15) определенный интеграл (11.13) можно представить в виде:

$$\int_0^{\ell_k} \Phi_{ik}(s) \Phi_{Fk}(s) ds = \operatorname{tg} \alpha \cdot S_{Fk,y}. \quad (11.16)$$

Статический момент площади фигуры, ограниченной функцией $\Phi_{Fk}(s)$, относительно оси y можно вычислить и иначе, а именно, умножая площадь этой фигуры ω_{Fk} на величину отрезка ℓ_{ck} , равного длине перпендикуляра, опущенного из центра тяжести S фигуры на ось y , т.е.

$$S_{Fk,y} = \omega_{Fk} \ell_{ck}. \quad (11.17)$$

Формула (11.16) с учетом последнего соотношения (11.17) преобразуется:

$$\int_0^{\ell_k} \Phi_{ik}(s) \Phi_{Fk}(s) ds = \omega_{Fk} \ell_{ck} \operatorname{tg} \alpha = \omega_{Fk} \Phi_{ik}^{(c)},$$

что и требовалось доказать.

Если обе функции $\Phi_{ik}(s)$ и $\Phi_{Fk}(s)$ линейны, то для вычисления интеграла (11.13) можно использовать площадь любой фигуры, ограниченной указанными функциями. Разумеется, принятая площадь фигуры при этом умножается на значение другой функции, взятой под центром тяжести фигуры, для которой вычислена площадь и определено положение центра тяжести.

Операция вычисления интеграла Мора по формуле Симпсона или по правилу Верещагина называется сопряжением (умножением) соответствующих эпюр внутренних усилий. Например, вычисление определённого интеграла

$$\int_0^{\ell_k} M_{ik}(s) M_{Fk}(s) ds$$

указанными способами есть сопряжение эпюры изгибающих моментов $M_{Fk}(s)$, построенной на k -ом грузовом участке от заданного силового воздействия, с эпюрой $M_{ik}(s)$, полученной на этом же грузовом участке от единичного фактора, приложенного в направлении искомого перемещения.

Примеры определения перемещений в стержневых системах и, соответственно, вычисления интегралов Мора по формуле Симпсона и с помощью правила Верещагина приведены в п. 11.6 настоящей лекции.

11.5. Общий порядок решения задачи по определению перемещений от силового воздействия

Для вычисления перемещений от силового воздействия в стержневых системах по формуле Мора (11.4) или (11.5) необходимо выполнить ряд операций в следующей последовательности.

1. Построить эпюры внутренних усилий M_F , Q_F , N_F в заданной системе от силового воздействия.
2. В направлении искомого перемещения приложить единичный силовой фактор так, чтобы он совершал механическую работу на этом перемещении. На рис. 11.6 показаны единичные силовые факторы для определения различных перемещений в

трёхшарнирной раме: вертикального перемещения сечения a , горизонтального перемещения сечения b , взаимного линейного перемещения сечений a и b в направлении ab , угла поворота сечения c , угла поворота узла K , взаимного угла поворота сечений d и e , а на рис. 11.7 – единичные силовые факторы для определения перемещений в ферме: вертикального перемещения узла E , горизонтального – узла K , угла поворота панели ab , взаимного угла поворота панелей ab и bc .

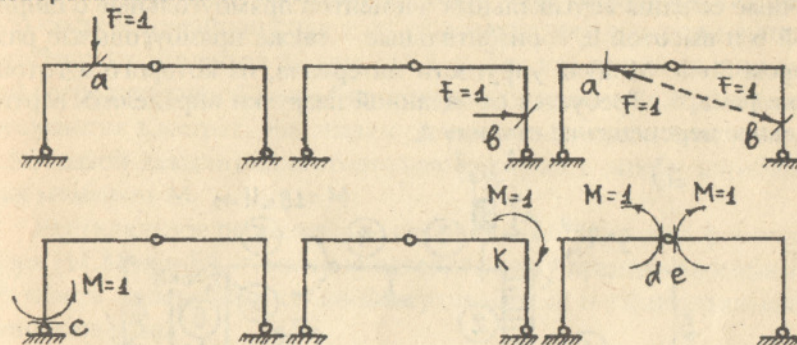


Рис. 11.6

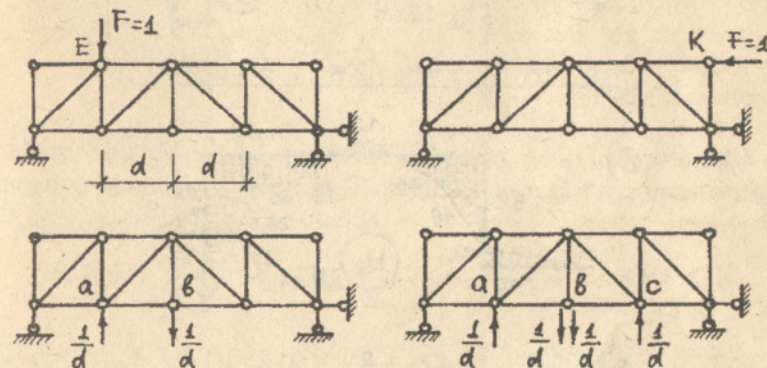


Рис. 11.7

3. Построить эпюры внутренних усилий M_i , Q_i , N_i от принятого единичного силового фактора в заданной системе.

4. Вычислить необходимые для практических расчетов интегралы Мора, используя формулу Симпсона или правило Верещагина. Если в результате расчетов искомое перемещение получилось положительным, это значит, что его направление совпадает

с направлением единичного силового фактора. При отрицательном значении перемещения его направление противоположно направлению принятого единичного силового фактора.

11.6. Примеры определения перемещений в статически определимых стержневых системах

ПРИМЕР 11.6.1. В раме, показанной на рис. 11.8,а, поперечные сечения вертикальных элементов прямоугольные с шириной b и высотой h , горизонтальные – также прямоугольные размером $2b \times h$. Модуль упругости материала, из которого изготовлена рама, E . Требуется от заданной нагрузки определить вертикальное перемещение сечения А.

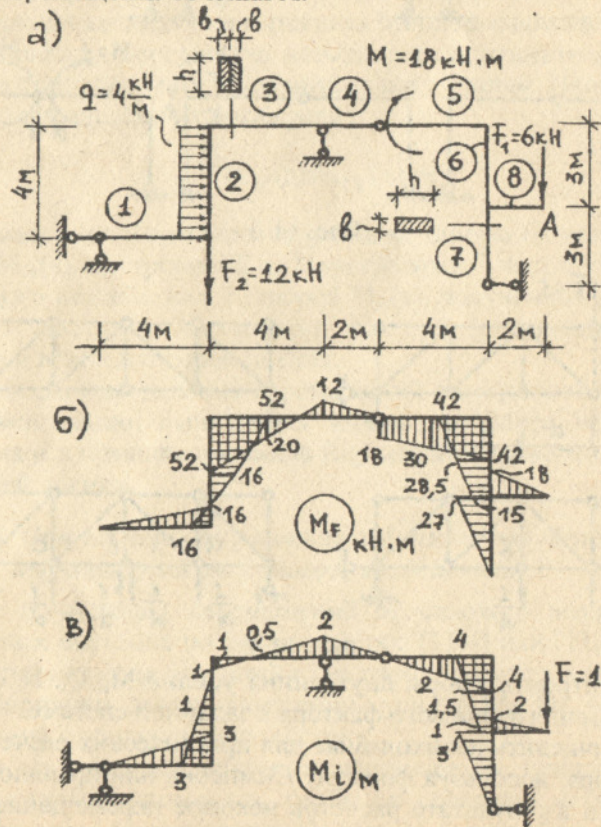


Рис. 11.8

1. От силового воздействия построим эпюру изгибающих моментов M_F в раме (рис. 11.8,б). Определение изгибающих моментов в сечениях её стержней подробно рассмотрено в примере 5.3.2 пятой лекции (см. Крамаренко А.А. Лекции по строительной механике стержневых систем. – Ч. 1. Статически определимые системы: Курс лекций. – Новосибирск: НГАСУ, 2000).

2. К сечению А рамы вертикально вниз приложим единичную сосредоточенную силу и от её воздействия построим эпюру изгибающих моментов M_i (рис. 11.8,в). Так как величина единичной сосредоточенной силы безразмерна, то ординаты этой эпюры измеряются в метрах. Читателям предлагается (после повторения п. 5.3 пятой лекции) самостоятельно построить эпюру изгибающих моментов M_i .

Вертикальное перемещение сечения А вычислим по формуле Мора (11.8) при $EJ_k = \text{const}$, предварительно определив изгибные жёсткости поперечных сечений вертикальных и горизонтальных элементов рамы

$$EJ_2 = EJ_6 = EJ_7 = E \cdot \frac{bh^3}{12} = EJ,$$

$$EJ_1 = EJ_3 = EJ_4 = EJ_5 = EJ_8 = E \cdot \frac{2bh^3}{12} = 2EJ.$$

Интегралы Мора на грузовых участках 1, 4, 7, 8 (рис. 11.8,а) вычислим, используя правило Верещагина, а на грузовых участках 2, 3, 5, 6 – формулу Симпсона:

$$\begin{aligned} \Delta_{Ay} = & \sum_{k=1}^8 \frac{1}{EJ_k} \int_0^{\ell_k} M_{ik} M_{Fk} ds = \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \\ & + \frac{4}{6EJ} (16 \cdot 3 - 4 \cdot 16 \cdot 1 + 52 \cdot 1) + \frac{4}{6 \cdot 2EJ} (52 \cdot 1 - 4 \cdot 20 \cdot 0,5 + 12 \cdot 2) + \\ & + \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{4}{6 \cdot 2EJ} (18 \cdot 0 + 4 \cdot 30 \cdot 2 + 42 \cdot 4) + \\ & + \frac{3}{6EJ} (42 \cdot 4 + 4 \cdot 28,5 \cdot 2,5 + 15 \cdot 1) + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 27 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{32}{EJ} + \frac{24}{EJ} + \frac{12}{EJ} + \frac{8}{EJ} - \frac{136}{EJ} + \frac{234}{EJ} + \frac{81}{EJ} + \frac{12}{EJ} =$$

$$= \frac{403}{EJ} - \frac{136}{EJ} = \frac{267}{EJ} \text{ (м)}.$$

Величина перемещения сечения А положительна, следовательно, оно будет, как и предполагалось при выборе направления единичной сосредоточенной силы, происходить вниз.

ПРИМЕР 11.6.2. В узлах 1, 4, 6, 8 ферма загружена горизонтальными силами $F = 10 \text{ кН}$ (рис. 11.9, а). В табл. 11.1 в графах 2 и 3 приведены длины стержней фермы и жёсткости их поперечных сечений на растяжение – сжатие. Требуется от заданной нагрузки определить горизонтальное перемещение узла 6 фермы.

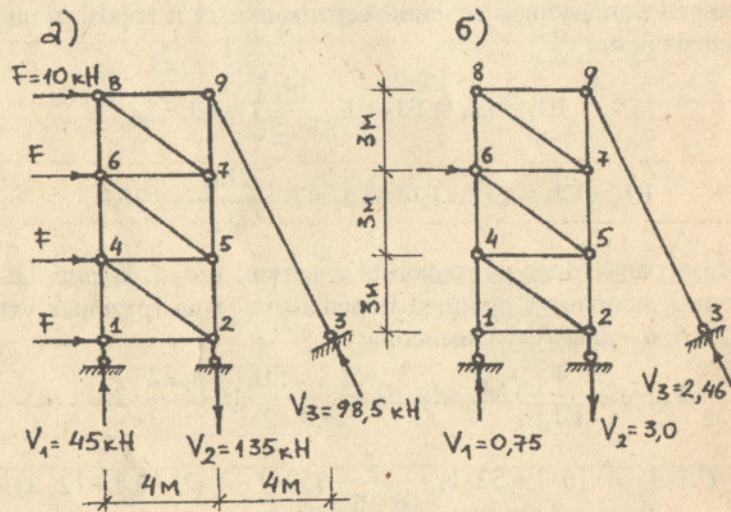


Рис. 11.9

1. Используя условия равновесия для всей фермы, метод сечений и метод вырезания узлов, определим реакции опорных связей фермы и усилия в её стержнях N_{Fk} от заданного силового воздействия (см. пп. 6.3 и 6.4 шестой лекции). Эти усилия приведены в графе 5 табл. 11.1.

2. К узлу 6 приложим безразмерную горизонтальную единичную сосредоточенную силу (рис. 11.9, б) и от этого воздействия определим опорные реакции и усилия N_{ik} в стержнях фермы (см. графу 4 табл. 11.1). Усилия N_{ik} и N_{Fk} в стержнях фермы читателям предлагается определить самостоятельно.

3. По формуле (11.9) определим горизонтальные перемещения узла 6, суммируя числа, записанные в графе 6 табл. 11.1:

$$\Delta_{6x} = \sum \frac{N_{ik} N_{Fk} \ell_k}{EA_k} = \frac{2811,84}{EA}.$$

Так как величина $\Delta_{6x} > 0$, узел 6 от заданной нагрузки переместится по горизонтали вправо, т.е. по направлению единичной сосредоточенной силы.

Таблица 11.1

№ стержней	$\ell_k, \text{ м}$	EA_k	N_{ik}	$N_{Fk}, \text{ кН}$	$\frac{N_{ik} N_{Fk} \ell_k}{EA_k}$
39	9,85	3EA	-2,46	-98,5	$\frac{795,58}{EA}$
14	3,0	2EA	-0,75	-45,0	$\frac{50,63}{EA}$
46	3,0	2EA	-0,75	-37,5	$\frac{42,19}{EA}$
68	3,0	2EA	-0,75	-22,5	$\frac{25,31}{EA}$
25	3,0	2EA	3,0	127,5	$\frac{573,75}{EA}$
57	3,0	2EA	3,0	112,5	$\frac{506,25}{EA}$
79	3,0	2EA	2,25	90,0	$\frac{303,75}{EA}$
12	4,0	EA	0	-10,0	0
45	4,0	EA	0	-20,0	0
67	4,0	EA	-1,0	-30,0	$\frac{120,0}{EA}$
89	4,0	EA	-1,0	-40,0	$\frac{160,0}{EA}$
24	5,0	EA	0	12,5	0
56	5,0	EA	0	25,0	0
78	5,0	EA	1,25	37,5	$\frac{234,38}{EA}$

ПРИМЕР 11.6.3. В стержневой комбинированной системе, показанной на рис. 11.10, а, определить угол поворота сечения "а" от силового воздействия. Момент инерции поперечного сечения горизонтального элемента равен J , площадь поперечного сечения опорных элементов $1A, 2A, 3B - A$, причём $A = \beta J$, где $\beta = 0,75 \frac{1}{\text{м}^2}$. Модуль упругости материала, из которого запроектирована заданная система, равен E .

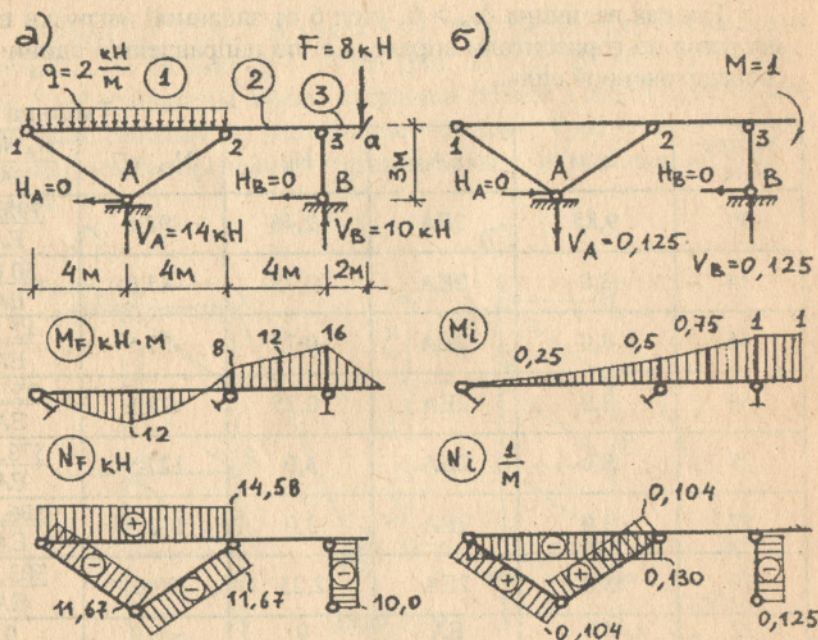


Рис. 11.10

В сечениях опорных элементов, ограниченных по концам цилиндрическими шарнирами и не несущих приложенной к ним нагрузки будут иметь место только продольные силы (см. п. 6.1. шестой лекции) и только деформации растяжения – сжатия, которые в комбинированных системах существенно влияют на величины перемещений. Горизонтальный элемент системы, непо-

средственно воспринимающий нагрузку, будет испытывать деформации изгиба, сдвига и растяжения – сжатия.

1. От заданной нагрузки построим эпюры изгибающих моментов и продольных сил M_F и N_F (рис. 11.10, а).

2. По направлению поворота сечения "а" по часовой стрелке приложим единичный сосредоточенный момент и от его действия, повторив расчёт заданной системы, построим эпюры M_i и N_i (рис. 11.10, б).

3. При определении угла поворота сечения "а" по формуле Мора будем пренебрегать деформацией сдвига всех элементов системы и деформацией растяжения – сжатия горизонтального элемента. В этом случае при $EJ = \text{const}, EA = \beta EJ = \text{const}$ формула (11.4) примет вид

$$\theta_a = \frac{1}{EJ} \sum_{k=1}^3 M_{ik}(s) M_{Fk}(s) ds + \frac{1}{EA} \sum_{k=1}^3 N_{ik} N_{Fk} \ell_k.$$

Первый член этой формулы учитывает деформацию изгиба горизонтального элемента, а второй – деформации растяжения – сжатия опорных элементов заданной стержневой системы. На первом и втором грузовых участках горизонтального элемента интегралы Мора вычислим по формуле Симпсона, на третьем для этой цели используем правило Верещагина.

$$\begin{aligned} \theta_a &= \frac{1}{EJ} \left[\frac{8}{6} (0 \cdot 0 - 4 \cdot 12 \cdot 0,25 + 8 \cdot 0,5) + \frac{4}{6} (8 \cdot 0,5 + 4 \cdot 12 \cdot 0,75 + 16 \cdot 1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} 16 \cdot 2 \cdot 1 \right] - \frac{2 \cdot 11,67 \cdot 5 \cdot 0,104}{EA} + \frac{10 \cdot 3 \cdot 0,125}{EA} = \\ &= \frac{34,6}{EJ} - \frac{8,39}{0,75EJ} = \frac{23,41}{EJ} \text{ (рад)}. \end{aligned}$$

Величина угла поворота сечения "а" получена положительной, т.е., как и предполагалось, искомое перемещение произойдёт по направлению единичного сосредоточенного момента – по часовой стрелке.

Вычисления показывают, что при $\beta = 0,75$ учёт деформации растяжения – сжатия опорных элементов вносит существенные коррективы в абсолютное значение угла поворота сечения "а".

Очевидно, что при $\beta = 0,2$ произошло бы изменение направления поворота сечения "а" от заданной нагрузки

$$\theta_a = \frac{34,6}{EJ} - \frac{8,39}{0,2EJ} = -\frac{7,35}{EJ} \text{ (рад).}$$

11.7. Вопросы для самопроверки

1. Строительные нормы и правила требуют, чтобы сооружения были не только прочными, но и жёсткими. Поясните, в чём смысл термина "жёсткость сооружения"?
2. В строительной механике перемещения принято обозначать буквой Δ с двойным индексом, например Δ_{Ff} . Каков смысл этих индексов?
3. Запишите формулу Мора для определения перемещений в плоских стержневых системах. Что означают функции, входящие в подинтегральные выражения: $M_{ik}(s)$, $Q_{ik}(s)$, $N_{ik}(s)$, $M_{Fk}(s)$, $Q_{Fk}(s)$, $N_{Fk}(s)$, $J_k(s)$, $A_k(s)$?
4. Поясните смысл каждого члена формулы Мора, записанной для плоских стержневых систем.
5. Какую структуру имеет формула Мора для определения перемещений в пространственных стержневых системах?
6. Какой вид деформаций влияет на перемещения в фермах при узловой нагрузке? Как в этом случае запишется формула Мора при $EA_k = \text{const}$?
7. Какие деформации влияют на величины перемещений в комбинированных системах? В рамах и балках? Какими членами формулы Мора можно пренебречь при определении перемещений в указанных стержневых системах?
8. Перечислите способы вычисления интегралов Мора.
9. Как интегралы Мора вычисляются по формуле Симпсона? От чего зависит точность этих вычислений? В каком случае на произвольном грузовом участке формула Симпсона даёт точное значение интеграла Мора.
10. Сформулируйте правило Верещагина для вычисления интегралов Мора. Что ограничивает применение правила Верещагина при определении перемещений в стержневых системах?

11. Как в строительной механике называется операция вычисления интегралов Мора с использованием формулы Симпсона или правила Верещагина?
12. На k -ом грузовом участке произвольной стержневой системы преподавателем заданы эпюры изгибающих моментов: M_{Fk} — от нагрузки, M_{ik} — от единичного силового фактора, приложенного в направлении искомого перемещения. Произведите сопряжение заданных эпюр, используя формулу Симпсона или правило Верещагина.
13. Изложите общий порядок решения задачи по определению величины любого перемещения от силового воздействия в произвольной стержневой системе.
14. При вычислении перемещений в стержневых системах используются эпюры внутренних усилий $M_{ik}(s)$, $Q_{ik}(s)$, $N_{ik}(s)$ от единичного силового фактора, действующего в направлении определяемого перемещения. Какой принцип положен в основу определения вида этого фактора?
15. В результате решения задачи численное значение какого-либо перемещения от заданной нагрузки оказалось отрицательным. Поясните, что это значит?

11.8. Рекомендуемая литература

1. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем: Учеб. для вузов. — М.: Изд-во ассоциации строительных вузов, 1996. — 541 с.
Глава 5. Основы теории расчёта линейно деформируемых систем. § 5.6. Формула Мора для определения перемещений от нагрузки. § 5.7. Способы вычисления интегралов Мора. — С. 109–114.
2. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика: Учеб. для вузов. — М.: Высш. шк., 1986. — 607 с.
Глава 5. Определение перемещений в упругих системах. § 5.4. Определение перемещений. Интеграл Мора. § 5.5. Правило Верещагина. § 5.6. Примеры расчёта. — С. 168–185.
3. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лашенков Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Стержневые системы: Учеб. для вузов. — М.: Стройиздат, 1981. — 512 с.
Глава VIII. Определение перемещений по методу Мора. § 39. Интеграл Мора. § 40. Вычисление интегралов Мора. — С. 203–219.

4. Клейн Г.К., Леонтьев Н.Н. и др. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. Статика стержневых систем: Учеб. пособие. — М.: Высш. шк., 1980. — 384 с.
Глава VIII. Потенциальная энергия упругих систем. Определение перемещений стержневых систем. § VIII.3. Формула Максвелла-Мора для вычисления перемещений. § VIII.4. Определение перемещений от силового воздействия. — С. 111–120.
5. Анохин Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах. Ч. 1. Статически определимые системы: Учеб. пособие. — М.: Изд-во ассоциации строительных вузов, 1999. — 334 с.
Глава 3. Определение перемещений в статически определимых системах. § 3.1. Перемещения. Работа внешних и внутренних сил... Правило Верещагина. — С. 130–131. § 3.2. Силовое воздействие. — С. 143–154.
6. Проценко В.М., Себешев В.Г. Расчёт статически определимых систем: Метод. указания к контрольным работам по строительной механике. — Новосибирск: НИСИ, 1990. — 52 с.
Задача № 5. Определение перемещений в статически определимой балке. — С. 36–39. Задача № 6. Определение перемещений в статически определимой раме. — С. 40–43.

ЛЕКЦИЯ ДВЕНАДЦАТАЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ ОТ ТЕМПЕРАТУРНЫХ И КИНЕМАТИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

- 12.1. Предварительные замечания
- 12.2. Определение перемещений от температурного воздействия
- 12.3. Определение перемещений от кинематических воздействий
- 12.4. Вопросы для самопроверки
- 12.5. Рекомендуемая литература

12.1. Предварительные замечания

Рассмотрим любую статически определимую систему, например, стержень с прямолинейной осью, закрепленный к диску "земля" тремя линейными связями, оси которых не пересекаются в одной точке (рис. 12.1). Со стороны нижних волокон стержня произошло изменение температуры на Δt° , кроме того, по каким-то причинам опорная связь А стержня получила перемещение по вертикали вверх на $\Delta_{(1)}$. Из условия равновесия стержня следует:

$$\begin{aligned}\sum \text{mom}(F)_2 &= 0, & V_A \cdot 2a &= 0, & 2a \neq 0, & V_A &= 0; \\ \sum \text{mom}(F)_1 &= 0, & -V_C \cdot 2a &= 0, & -2a \neq 0, & V_C &= 0; \\ \sum F_x &= 0, & V_B \cdot \cos \alpha &= 0, & \cos \alpha \neq 0, & V_B &= 0.\end{aligned}$$

Обобщив многочисленные примеры подобного рода, приходим к выводу, что в статически определимых системах от воздействий, не обладающих силовым потенциалом (изменение параметров температурного поля, кинематических возмущений в виде

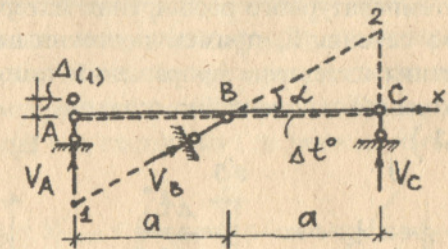


Рис. 12.1

смещения опор, использование при монтаже сооружений элементов, имеющих отклонения от проектных размеров и т.д.), реакции опорных связей и, следовательно, внутренних усилий во всех сечениях равны нулю. Перемещения узлов и отдельных сечений в таких системах от указанных воздействий происходят без деформаций.

12.2. Определение перемещений от температурного воздействия

Определим перемещение Δ_{jt} произвольного сечения плоской стержневой системы в направлении j от изменения температуры на различных поверхностях её отдельных элементов $\Delta t_1^\circ, \Delta t_2^\circ, \dots, \Delta t_n^\circ$ (рис. 12.2, а). На k -ом участке любого элемента сооружения величины приращения температуры Δt_k° , коэффициента линейного температурного расширения материала α_k и высоты поперечного сечения h_k примем постоянными. По высоте поперечного сечения изменение приращений температур будем считать происходящими по линейному закону.

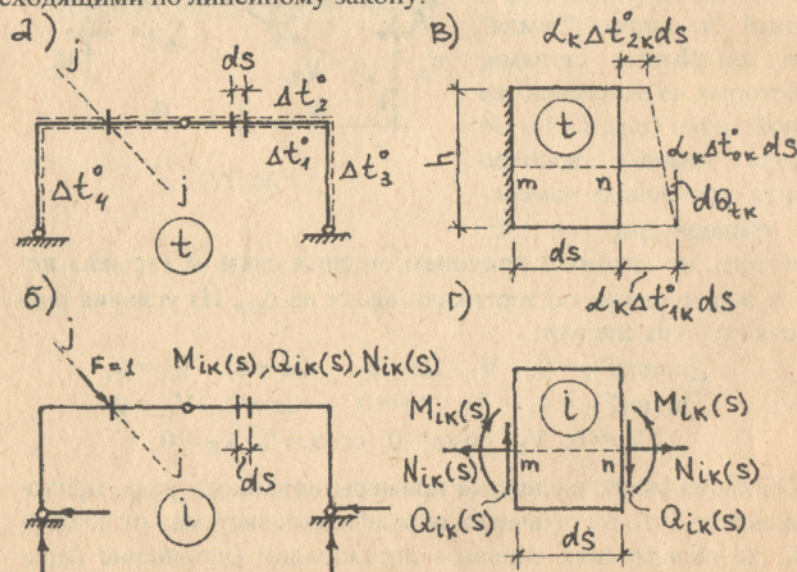


Рис. 12.2

Параметрами, характеризующими температурное воздействие на k -ом грузовом участке, являются $\Delta t_{nr,k}^\circ = \Delta t_{1k}^\circ - \Delta t_{2k}^\circ$ — перепад приращений температур по высоте поперечного сечения, $\Delta t_{0,k}^\circ$ — приращение температуры на уровне центров тяжести поперечных сечений m и n (рис. 12.2, в). Величина $\Delta t_{0,k}^\circ$ определяется по эпюре приращений температур при известном положении центра тяжести поперечного сечения. В частности, для поперечных сечений с двумя осями симметрии

$$\Delta t_{0,k}^\circ = \frac{\Delta t_{1k}^\circ + \Delta t_{2k}^\circ}{2}.$$

Рассмотрим два состояния заданного сооружения: температурное t (рис. 12.2 а, в) и единичное i (рис. 12.2 б, г), в котором по направлению определяемого перемещения приложен единичный силовой фактор $F = 1$. К единичному равновесному состоянию i применим принцип Лагранжа. За возможные примем перемещения, имеющие место в температурном состоянии t . Возможная работа внешних и внутренних сил состояния i на упомянутых перемещениях равна нулю

$$1 \cdot \Delta_{jt} + W_{int,it} = 0. \quad (12.1)$$

В соотношении (12.1): $1 \cdot \Delta_{jt}$ — возможная работа единичного силового фактора $F = 1$ на перемещении Δ_{jt} ; $W_{int,it}$ — возможная работа внутренних сил состояния i (рис. 12.2, а) на перемещениях, вызванных заданным изменением температуры, в состоянии t .

Для вычисления $W_{int,it}$ рассмотрим элементы k -го грузового участка длиной ds (рис. 12.2, в, г). По границам этого элемента от единичного силового фактора $F=1$ возникают внутренние усилия $M_{jk}(s)$, $Q_{jk}(s)$, $N_{jk}(s)$. От изменения температуры внутренние усилия во всех сечениях сооружения отсутствуют и перемещения граней элемента в состоянии t происходят без деформаций. Эти перемещения характеризуются поворотом на $d\theta_{tk}$ одной грани элемента относительно другой и величиной продольного пере-

мещения $\alpha_k \Delta t_{0,k}^\circ ds$ волокон стержней, пересекающих нейтральную ось поперечного сечения. Из рис. 12.2,в видно, что

$$d\theta_{tk} = \frac{\alpha_k \Delta t_{1k}^\circ ds - \alpha_k \Delta t_{2k}^\circ ds}{h_k} = \frac{\alpha_k \Delta t_{nr,k}^\circ ds}{h_k}.$$

Направление возможных перемещений $d\theta_{tk}$ и $\alpha_k \Delta t_{0,k}^\circ ds$ будем считать совпадающими с направлениями внешних усилий $M_{ik}(s)$, $Q_{ik}(s)$, $N_{ik}(s)$, действующих по отношению к выделенному элементу ds (рис. 12.2,з). Отсюда следует, что элементарная возможная работа $dW_{int,it}$ внутренних сил состояния i (рис. 12.2,б) на перемещениях $d\theta_{tk}$ и $\alpha_k \Delta t_{0,k}^\circ ds$ отрицательна. На указанных перемещениях элементарную работу совершают изгибающие моменты $M_{ik}(s)$ и продольные силы $N_{ik}(s)$:

$$dW_{int,it}^{(M)} = -M_{ik}(s) d\theta_{tk} = -M_{ik}(s) \frac{\alpha_k \Delta t_{nr,k}^\circ ds}{h_k},$$

$$dW_{int,it}^{(N)} = -N_{ik}(s) \alpha_k \Delta t_{0,k}^\circ ds.$$

Элементарная возможная работа поперечных сил $Q_{ik}(s)$ равна нулю, так как в состоянии i взаимное перемещение соседних граней элемента ds в направлении перпендикулярном его продольной оси отсутствует.

Элементарная возможная работа внутренних сил элемента ds , взятого в состоянии i , на его перемещениях в состоянии t определится как сумма:

$$\begin{aligned} dW_{int,it} &= dW_{int,it}^{(M)} + dW_{int,it}^{(N)} = \\ &= -M_{ik}(s) \frac{\alpha_k \Delta t_{nr,k}^\circ}{h_k} ds - N_{ik}(s) \alpha_k \Delta t_{0,k}^\circ ds. \end{aligned} \quad (12.2)$$

Возможную работу внутренних сил всего сооружения в состоянии i на перемещениях, вызванных изменением температуры, определим интегрируя выражение (12.2) по длине участков, под-

верженных температурному воздействию, и суммируя вычисленные определенные интегралы по всем таким участкам

$$W_{int,it} = - \sum_{k=1}^{n_M} \int_0^{\ell_k} M_{ik}(s) \frac{\alpha_k \Delta t_{nr,k}^\circ}{h_k} ds - \sum_{k=1}^{n_N} \int_0^{\ell_k} N_{ik}(s) \alpha_k \Delta t_{0,k}^\circ ds, \quad (12.3)$$

где n_M , n_N — соответственно, число участков, на которых $\Delta t_{nr,k}^\circ$ и $\Delta t_{0,k}^\circ$ отличны от нуля.

Формулу для определения перемещений в плоских стержневых системах от температурного воздействия получим, подставляя выражение (12.3) для $W_{int,it}$ в соотношение (12.1):

$$\Delta_{jt} = -W_{int,it} = \sum_{k=1}^{n_M} \int_0^{\ell_k} M_{ik}(s) \frac{\alpha_k \Delta t_{nr,k}^\circ}{h_k} ds + \sum_{k=1}^{n_N} \int_0^{\ell_k} N_{ik}(s) \alpha_k \Delta t_{0,k}^\circ ds. \quad (12.4)$$

При наличии эпюр внутренних усилий $M_{ik}(s)$ и $N_{ik}(s)$ от единичного силового фактора, действующего в направлении опреде-

ляемого перемещения, а также условных эпюр $\frac{\alpha_k \Delta t_{nr,k}^\circ}{h_k}$ и $\alpha_k \Delta t_{0,k}^\circ$,

построенных вдоль продольных осей элементов сооружения, интегралы, входящие в формулу (12.4), можно вычислить, используя правило Верещагина (см. п. 11.4 одиннадцатой лекции и пример 12.2.1).

ПРИМЕР 12.2.1. В раме, показанной на рис. 12.3,а, на поверхностях её стержней, отмеченных пунктирной линией, приращение температуры составляет: $\Delta t_1^\circ = +60^\circ \text{C}$, $\Delta t_2^\circ = -30^\circ \text{C}$, $\Delta t_3^\circ = +30^\circ \text{C}$, $\Delta t_4^\circ = +90^\circ \text{C}$. Ригель рамы имеет треугольное поперечное сечение, стойки — прямоугольное. Высота поперечных сечений всех элементов рамы $h = 0,3$ м. Коэффициент линейного температурного расширения материала α известен. Требуется от заданного изменения температуры определить горизонтальное перемещение узла А.

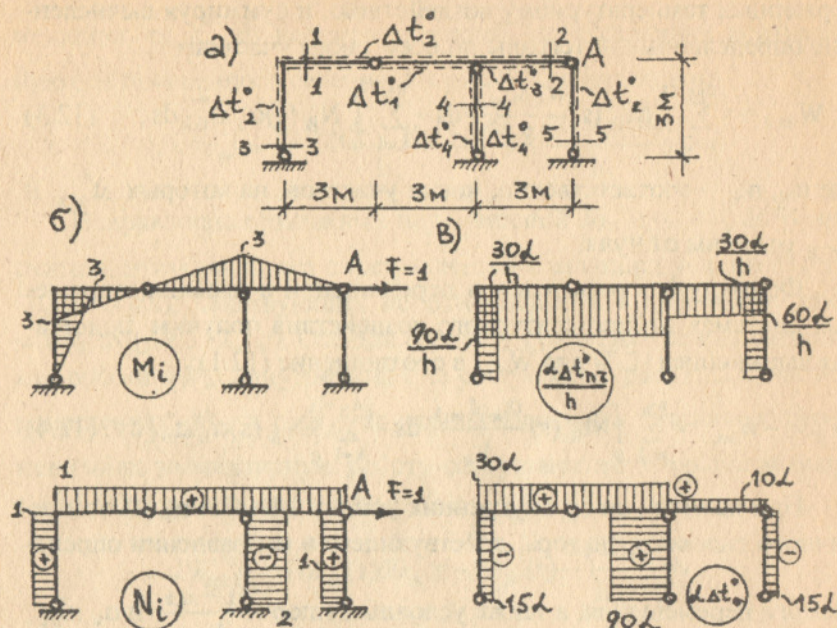


Рис. 12.3

1. От горизонтальной силы $F=1$, приложенной к узлу А, построим эпюры изгибающих моментов M_i и продольных сил N_i (рис. 12.3, б). Читателям предлагается самостоятельно выполнить эту операцию.

2. Для каждого стержня рамы, подверженного воздействию температуры, вычислим абсолютное значение перепада приращений температур по высоте поперечного сечения $\Delta t_{nr,k}^\circ$ и приращение температуры на уровне его центра тяжести $\Delta t_{0,k}^\circ$ (рис. 12.4):

- | | | |
|-------------|--|--|
| сечение 1-1 | — $ \Delta t_{nr,1}^\circ = 90^\circ\text{C}$, | $\Delta t_{0,1}^\circ = 30^\circ\text{C}$; |
| сечение 2-2 | — $ \Delta t_{nr,2}^\circ = 60^\circ\text{C}$, | $\Delta t_{0,2}^\circ = 10^\circ\text{C}$; |
| сечение 3-3 | — $ \Delta t_{nr,3}^\circ = 30^\circ\text{C}$, | $\Delta t_{0,3}^\circ = -15^\circ\text{C}$; |
| сечение 5-5 | — $ \Delta t_{nr,4}^\circ = 30^\circ\text{C}$, | $\Delta t_{0,4}^\circ = -15^\circ\text{C}$; |
| сечение 4-4 | — $ \Delta t_{nr,5}^\circ = 0^\circ\text{C}$, | $\Delta t_{0,5}^\circ = 90^\circ\text{C}$. |

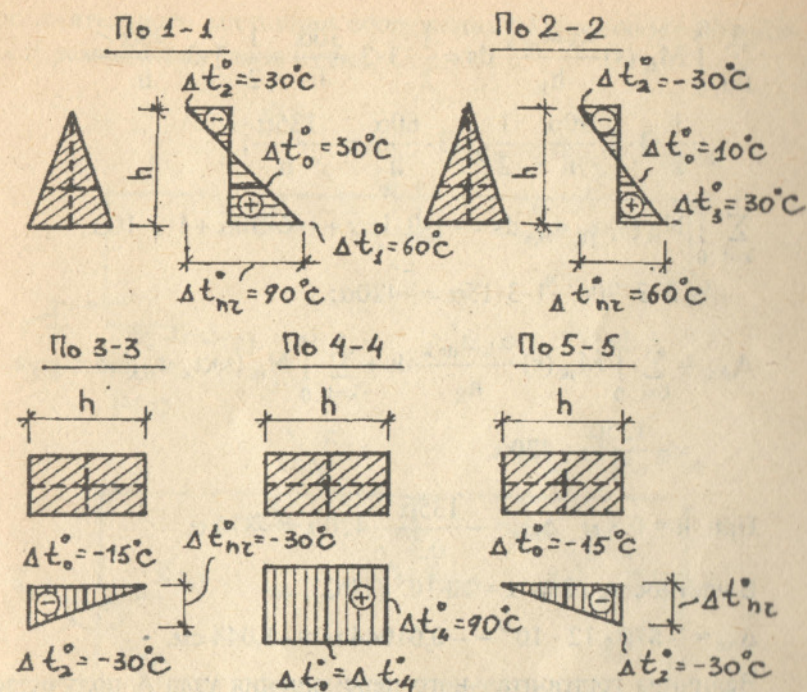


Рис. 12.4

Далее строим условные эпюры $\frac{\alpha_k \Delta t_{nr,k}^\circ}{h_k}$ и $\alpha_k \Delta t_{0,k}^\circ$ вдоль продольных осей элементов рамы (рис. 12.3, в). Ординаты эпюры $\frac{\alpha_k \Delta t_{nr,k}^\circ}{h_k}$ откладываются со стороны более "тёплых" волокон. На h_k

эпюре $\alpha_k \Delta t_{0,k}^\circ$ фиксируются знаки: "плюс" — в случае положительных приращений температур на уровне центра тяжести поперечного сечения, "минус" — в случае отрицательных.

3. Горизонтальное перемещение узла А рамы определяем по формуле (12.4), используя правило Верещагина

$$\sum_{k=1}^4 \int_0^{\ell_k} M_{ik}(s) \frac{\alpha_k \Delta t_{nr,k}}{h_k} ds = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{30\alpha}{h} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{90\alpha}{h} -$$

$$- \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{90\alpha}{h} - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{60\alpha}{h} = -\frac{135\alpha}{h};$$

$$\sum_{k=1}^5 \int_0^{\ell_k} N_{ik}(s) \alpha_k \Delta t_{0,k} ds = -1 \cdot 3 \cdot 15\alpha + 1 \cdot 6 \cdot 30\alpha + 1 \cdot 3 \cdot 10\alpha -$$

$$- 2 \cdot 3 \cdot 90\alpha - 1 \cdot 3 \cdot 15\alpha = -420\alpha;$$

$$\Delta_{Ax} = \sum_{k=1}^4 \int_0^{\ell_k} M_{ik}(s) \frac{\alpha_k \Delta t_{nr,k}}{h_k} ds + \sum_{k=1}^5 \int_0^{\ell_k} N_{ik}(s) \alpha_k \Delta t_{0,k} ds =$$

$$= -\frac{135\alpha}{h} - 420\alpha.$$

При $h = 0,3 \text{ м}$ $\Delta_{Ax} = -\frac{135\alpha}{0,3} - 420\alpha = -870\alpha.$

В частности, если $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} (1/^\circ\text{C})$, то

$$\Delta_{Ax} = -870 \cdot 12 \cdot 10^{-6} = -0,01044 \text{ м} = -1,044 \text{ см.}$$

Величина горизонтального перемещения узла А получилась отрицательной, следовательно, этот узел от заданного изменения температуры переместится влево, т.е. в сторону, противоположную принятому направлению единичного силового фактора.

12.3. Определение перемещений от кинематических воздействий

Определим перемещение Δ_{jc} произвольного сечения стержневой системы в направлении j от заданных смещений n опорных связей $\Delta_{(1)}, \Delta_{(2)}, \dots, \Delta_{(k)}, \dots, \Delta_{(n)}$ (рис. 12.5, а).

Рассмотрим два состояния сооружения: исходное, в котором происходит смещение связей (рис. 12.5, а) и вспомогательное, где в направлении определяемого перемещения приложен единичный силовой фактор $F=1$. К вспомогательному равновесному состоянию применим принцип Лагранжа. За возможные примем перемещения сооружения, произошедшие в результате смещения опорных связей. Возможная работа внешних и внутренних сил

вспомогательного состояния сооружения на указанных возможных перемещениях равна нулю.

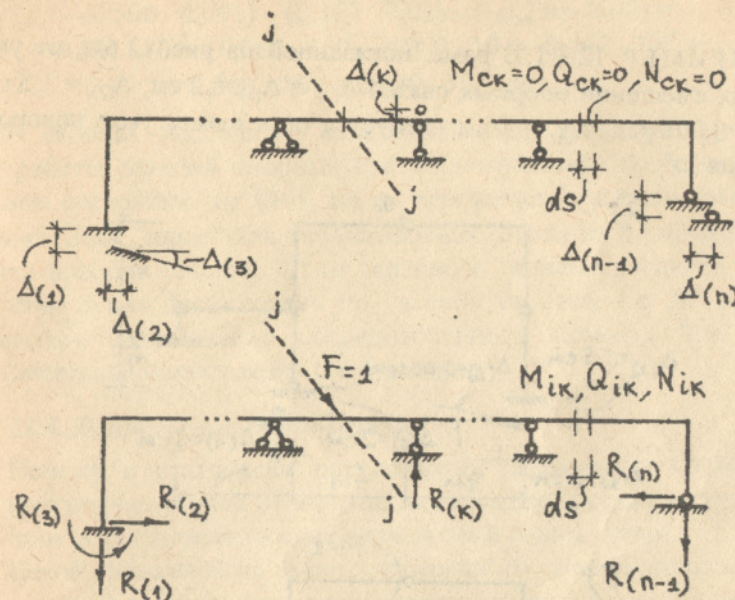


Рис. 12.5

$$1 \cdot \Delta_{jc} + R_{(1)} \Delta_{(1)} + \dots + R_{(k)} \Delta_{(k)} + \dots + R_{(n)} \Delta_{(n)} + W_{int,ic} = 0. \quad (12.5)$$

В соотношении (12.5): $1 \cdot \Delta_{jc}$ — возможная работа единичного силового фактора $F=1$ на перемещении Δ_{jc} ; $R_{(k)}$ — реакция в k -й смещаемой связи заданного сооружения от единичного силового фактора; $W_{int,ic}$ — возможная работа внутренних сил M_{ik}, Q_{ik}, N_{ik} вспомогательного состояния на перемещениях исходного состояния.

Так как в исходном состоянии статически определимых систем внутренние усилия M_{ck}, Q_{ck}, N_{ck} отсутствуют (см. п. 12.1 настоящей лекции) и грани всех элементов длиной ds не имеют относительных угловых и линейных перемещений, то упомянутая выше возможная работа внутренних сил $W_{int,ic}$ равна нулю. С учетом этого факта из выражения (12.5) получим формулу для определения перемещений в статически определимых системах от кинематических воздействий:

$$\Delta_{jc} = - \sum_{k=1}^n R_{(k)} \Delta_{(k)} \quad (12.6)$$

ПРИМЕР 12.3.1. В раме, показанной на рис. 12.6, а, от указанных смещений опорных связей $\Delta_{(1)} = \Delta_{(5)} = 2$ см, $\Delta_{(2)} = 1,5$ см, $\Delta_{(3)} = 0,001$ рад, $\Delta_{(4)} = 1$ см требуется определить угол поворота сечения "а".

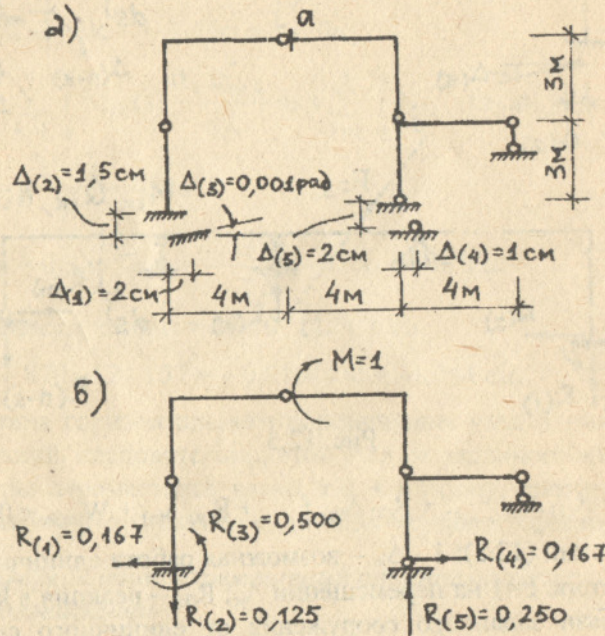


Рис. 12.6

1. В предполагаемом направлении определяемого перемещения приложим единичный сосредоточенный момент $M=1$ (рис. 12.6, б) и от его воздействия определим реакции в опорных связях, получивших в исходном состоянии смещение: $R_{(1)} = 0,167$, $R_{(2)} = 0,125$, $R_{(3)} = 0,500$, $R_{(4)} = 0,167$, $R_{(5)} = 0,250$. Читателям предлагается эти вычисления выполнить самостоятельно.

2. По формуле (12.6) определим угол поворота сечения "а":

$$\begin{aligned} \theta_a = - \sum_{k=1}^5 R_{(k)} \Delta_{(k)} = & -(-0,167 \cdot 0,02) - (0,125 \cdot 0,015) - \\ & - (0,500 \cdot 0,001) - (0,167 \cdot 0,01) - (-0,250 \cdot 0,02) = \\ = & 0,334 \cdot 10^{-2} - 0,188 \cdot 10^{-2} - 0,050 \cdot 10^{-2} - 0,167 \cdot 10^{-2} + \\ & + 0,500 \cdot 10^{-2} = 0,429 \cdot 10^{-2} \text{ (рад)}. \end{aligned}$$

В скобках последнего арифметического выражения учтён знак работы реакций опорных связей, полученных во вспомогательном состоянии от $M=1$, на их перемещении в заданном состоянии. Знак "плюс" для окончательного значения θ_a показывает, что поворот сечения "а" от заданного кинематического воздействия будет происходить по часовой стрелке, т.е. по ранее принятому направлению сосредоточенного момента $M=1$ во вспомогательном состоянии сооружения.

12.4. Вопросы для самопроверки

1. Почему в статически определимых стержневых системах внутренние усилия от изменения параметров температурного поля и от кинематических воздействий равны нулю?
2. Какой функцией по высоте поперечного сечения стержневого элемента сооружения описывается изменение приращений температуры?
3. Какие параметры характеризуют температурное воздействие на произвольном участке отдельного элемента сооружения?
4. Запишите формулу для определения перемещений в статически определимых стержневых системах от температурных воздействий. Поясните смысл величин отдельных функций и параметров, вошедших в эту формулу, и обозначенных через $M_{ik}(s)$, $N_{ik}(s)$, Δ_{jt} , $\Delta_{t_{ur,k}}^\circ$, $\Delta_{t_{0,k}}^\circ$, α_k , h_k , ℓ_k , n_M , n_N . Каким образом вычисляются определенные интегралы записанной формулы?
5. Запишите формулу для определения перемещений в статически определимых стержневых системах от смещения опорных связей. Поясните смысл величин отдельных параметров этой формулы, и обозначенных через Δ_{jc} , $R_{(k)}$, $\Delta_{(k)}$, n .

12.5. Рекомендуемая литература

1. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем: Учеб. для вузов. – М.: Изд-во ассоциации строительных вузов, 1996. – 541 с.
Глава 5. Основы теории расчёта линейно деформируемых систем.
§ 5.8. Определение перемещений от тепловых воздействий.
§ 5.9. Перемещения, вызванные осадкой опор. – С. 116–120.
2. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика: Учеб. для вузов. – М.: Высш. шк., 1986. – 607 с.
Глава 5. Определение перемещений в упругих системах.
§ 5.7. Температурные перемещения. – С. 185–187. § 5.9. Перемещения статически определимых систем, вызванные перемещением опор. – С. 189–192.
3. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лащенко Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Стержневые системы: Учеб. для вузов. – М.: Стройиздат, 1981. – 512 с.
Глава VIII. Определение перемещений по методу Мора. § 41. Определение перемещений от изменения температуры. – С. 220–221.
4. Клейн Г.К., Леонтьев Н.Н. и др. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. Статика стержневых систем: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 1980. – 384 с.
Глава VIII. Потенциальная энергия упругих систем. Определение перемещений стержневых систем. § VIII.5. Определение перемещений от теплового воздействия. § VIII.6. Определение перемещений от смещения связей. – С. 121–123.
5. Анохин Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах. Ч. 1. Статически определимые системы: Учеб. пособие. – М.: Изд-во ассоциации строительных вузов, 1999. – 334 с.
Глава 3. Определение перемещений в статически определимых системах. § 3.3. Тепловое воздействие. – С. 161–167. § 3.4. Кинематическое воздействие. – С. 171–178.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем: Учеб. для вузов. – М.: Изд-во ассоциации строительных вузов, 1996. – 541 с.
2. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика: Учеб. для вузов. – М.: Высш. шк., 1986. – 607 с.
3. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лащенко Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика: Стержневые системы: Учеб. для вузов. – М.: Стройиздат, 1981. – 512 с.
4. Снитко Н.К. Строительная механика: Учеб. для вузов. – М.: Высш. шк., 1972. – 487 с.
5. Анохин Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах. – Ч. 1. Статически определимые системы: Учеб. пособие. – М.: Изд-во ассоциации строительных вузов, 1999. – 334 с.
6. Клейн Г.К., Леонтьев Н.Н. и др. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. Статика стержневых систем: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 1980. – 384 с.
7. Доценко И.С. Строительная механика: Учеб. пособие. – Киев: Вища шк., 1986. – 294 с.
8. Крамаренко А.А. Лекции по строительной механике стержневых систем. Ч. 1. Статически определимые системы: Курс лекций. – Новосибирск: НГАСУ, 2000. – 136 с.
9. Крамаренко А.А. Статически определимые стержневые системы. Кинематический анализ. Балки и рамы: Учеб. пособие. – Новосибирск: НГАС, 1997. – 76 с.
10. Крамаренко А.А. Статически определимые многопролётные балки: Метод. указания. – Новосибирск: НГАСУ, 2000. – 28 с.

11. Крамаренко А.А. Статически определяемые фермы: Метод. указания. – Новосибирск: НГАСУ, 2000. – 28 с.
12. Крамаренко А.А., Широких Л.А. Статически определяемые трёхшарнирные арки и рамы: Метод. указания. – Новосибирск: НГАСУ, 2001. – 40 с.
13. Крамаренко А.А. Построение эпюр внутренних усилий: Метод. указ. – Новосибирск: НИСИ, 1992. – 48 с.
14. Проценко В.М., Себешев В.Г. Расчёт статически определимых систем: Метод. указания. – Новосибирск: НИСИ, 1990. – 52 с.
15. Себешев В.Г. Расчёт арок с применением ЭВМ: Метод. указания. – Новосибирск: НИСИ, 1986. – 36 с.
16. Крамаренко А.А., Широких Л.А. Статически определяемые сооружения: Сборник задач. – Новосибирск: НГАС, 1995. – 44 с.

Учебное издание
Крамаренко Анатолий Алексеевич

ЛЕКЦИИ ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Часть 2

СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

Темплан 2001 г.

Редактор А.В. Максимова

Лицензия ЛР № 020462 от 10.08.98 г.

Санитарно-эпидемиологическое заключение

№ 54.НЦ. 02.953.П.127.10.01 от 01.10.2001 г.

Подписано к печати 16.02.2002. Формат 60х84 1/16 д.л.

Гарнитура Таймс. Бумага газетная. Ризография.

Объем 6,13 уч.-изд.л.; 6,75 п.л. Тираж 550 экз. Заказ № 98

Новосибирский государственный архитектурно-
строительный университет

630008, Новосибирск, ул. Ленинградская, 113

Отпечатано мастерской оперативной полиграфии НГАСУ