



А.А. КРАМАРЕНКО

**ЛЕКЦИИ
ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ
СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ**

Часть 1

СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

НОВОСИБИРСК 2000

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-
СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.А. Крамаренко

**ЛЕКЦИИ
ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ
СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ**

Часть 1

СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

НОВОСИБИРСК 2000

УДК 624.041.1

ББК 38.112

К 777

Крамаренко А.А.

ЛЕКЦИИ ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ. ЧАСТЬ 1. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ. – Новосибирск: НГАСУ, 2000. – 136 с.

ISBN-5-7795-0093-2

Семь лекций по строительной механике стержневых систем охватывают раздел курса "Статически определимые системы", включающий в себя введение, кинематический анализ сооружений, способы построения линий влияния, использование линий влияния в инженерных расчётах, расчёт балок, рам и ферм на неподвижную и подвижную нагрузку.

Лекции разработаны для студентов безотрывных форм обучения в соответствии с требованиями государственного стандарта высшего профессионального образования к обязательному минимуму содержания и уровню подготовки бакалавров по направлению 653500 "Строительство" и инженеров по специальностям 290300 "Промышленное и гражданское строительство", 290400 "Гидротехническое строительство", 290500 "Городское строительство и хозяйство", 291400 "Проектирование зданий". Отдельные лекции и параграфы могут быть рекомендованы студентам других специальностей направления 653500 "Строительство".

Чертежи выполнены кандидатом архитектуры, и.о. доцента кафедры архитектуры и градостроительства Е.В. Симагиной

Печатается по решению издательско-библиотечного совета
НГАСУ

Рецензенты:

- В.А. Шутов, д.т.н., профессор, завкафедрой общетехнических дисциплин (НГАХА);
- В.К. Фёдоров, к.т.н., профессор кафедры инженерной геологии, оснований и фундаментов (НГАСУ)

ISBN-5-7795-0093-2

©

Крамаренко А.А., 2000

СОДЕРЖАНИЕ

ЛЕКЦИЯ ПЕРВАЯ. Введение к курсу "Строительная механика"	4
ЛЕКЦИЯ ВТОРАЯ. Кинематический анализ сооружений	16
ЛЕКЦИЯ ТРЕТЬЯ. Линии влияния и методы их построения.....	36
ЛЕКЦИЯ ЧЕТВЁРТАЯ. Использование линий влияния в практических расчётах	55
ЛЕКЦИЯ ПЯТАЯ. Расчёт балок и рам, имеющих главные и второстепенные части.....	69
ЛЕКЦИЯ ШЕСТАЯ. Расчёт плоских ферм на неподвижную нагрузку	97
ЛЕКЦИЯ СЕДЬМАЯ. Линии влияния усилий в стержнях ферм	118
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	135

ЛЕКЦИЯ ПЕРВАЯ

ВВЕДЕНИЕ К КУРСУ "СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА"

- 1.1. Дисциплина "Строительная механика" и ее основные задачи. Связь с другими дисциплинами
- 1.2. Виды нагрузок и других воздействий на сооружение
- 1.3. Реальное сооружение и его расчетная схема
- 1.4. Классификация расчетных схем сооружений
- 1.5. Основные допущения, принятые в курсе "Строительная механика"
- 1.6. Краткая историческая справка о развитии методов расчета сооружений

1.1. Дисциплина "Строительная механика" и ее основные задачи. Связь с другими дисциплинами

Строительная механика – это наука, изучающая принципы и методы расчета сооружений на прочность, жесткость и устойчивость при различного рода статистических и динамических воздействиях.

Расчет сооружений на прочность и устойчивость состоит в том, чтобы обеспечить достаточную, но не излишнюю их безопасность, т.е. достигнуть разумного сочетания долговечности сооружения с экономичностью. Цель расчета на жесткость – устранить возможность появления значительных перемещений и деформаций (прогибов, осадок, вибраций и т.п.), хотя бы безопасных для самого сооружения, но не приемлемых с эксплуатационной точки зрения.

Рассматривая сооружение в целом, строительная механика изучает также вопросы правильного соединения его элементов, занимается выявлением теоретически оптимальных систем.

Инженера-проектировщика строительная механика вооружает такими знаниями, которые помогают ему еще до начала строительства вскрыть действующие в сооружениях внутренние силы и, следовательно, находить рациональные размеры и формы их элементов.

Производителю работ строительная механика дает возможность правильно понимать работу сооружений под нагрузкой, вовремя устранить неточности их возведения, правильно назначить размеры приспособлений, используемых при производстве работ (подмостей, лесов, креплений и т.п.), или заменить в них элементы другими – равнопрочными.

В своем развитии и теоретических построениях строительная механика использует математику, физику, теоретическую механику, сопротивление материалов, а также результаты наблюдений за сооружениями, рассчитанными по ее методам. С другой стороны, строительная механика дает необходимую подготовку для изучения курсов инженерных конструкций (металлических, железобетонных, каменных конструкций, оснований и фундаментов, конструкций из дерева и пластмасс).

1.2. Виды нагрузок и других воздействий на сооружение

В строительной механике рассматриваются следующие виды нагрузок и воздействий на сооружение:

1. Объемные и поверхностные силы. Объемные силы действуют на каждую единицу объема рассматриваемой части системы (гравитационные силы, силы инерции, силы магнитного притяжения и т.п.). Поверхностные силы (сосредоточенные и распределенные как по длине элементов, так и по площади) могут действовать непосредственно на сооружение (рис. 1.1, а) или передаваться на него через другие элементы (узловая передача нагрузки, рис. 1.1, б).

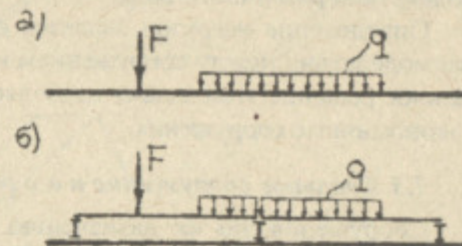


Рис. 1.1

2. В зависимости от характера изменения во времени различают статические и динамические нагрузки. Статические нагрузки изменяются во времени настолько медленно, что ускорениями элементов конструкций при их перемещениях можно пре-

небредь. При действии динамических нагрузок приходится учитывать силы инерции как самой системы, так и установленного на нем оборудования.

3. Постоянные и временные нагрузки. Постоянная нагрузка действует непрерывно в течение всего срока службы сооружения (собственный вес конструкций). Временная нагрузка имеет ограниченную продолжительность действия (поезд, проходящий через мост, снег, ветер и т.п.).

4. Другие воздействия, помимо внешних сил, — изменение температуры, осадка фундаментов, неточность изготовления отдельных элементов, химическая агрессия, действие огня, коррозия и т.п. Эти воздействия, как и внешняя нагрузка, могут быть постоянными или временными, статическими или динамическими.

Когда сооружение воспринимает несколько видов воздействий (собственный вес, снег, ветер, осадка фундаментов и т.п.), необходимо решение задачи о наиболее неблагоприятном сочетании этих воздействий. В этом случае для определения расчетных нагрузок может быть использован вероятностный метод, основанный на анализе статистических данных о повторяемости воздействий различного вида.

Определение нагрузок является одним из вопросов анализа взаимодействия между сооружением и окружающей средой. Правильное решение этой задачи позволяет проектировать надежные и экономичные сооружения.

1.3. Реальное сооружение и его расчетная схема

Сооружения, по их назначению, могут быть разделены на различные группы: жилые, общественные, промышленные, транспортные. Особо следует выделить уникальные сооружения: высотные здания, мосты с большими пролетами, крупные спортивные комплексы и т.д. Каждой из групп сооружений присущи свои особенности. В расчетах промышленных зданий учитываются динамические воздействия от установленного оборудования, а также особые температурные воздействия (в плавильных цехах). С особой ответственностью проектировщики подходят к расчетам уникальных сооружений, срок службы которых измеряется сотнями лет. Например, при расчете Останкинской телебаш-

ни учитывалась возможность ураганного ветра, который может появиться один раз в 60–80 лет. Особое место занимают специальные сооружения (плотины, мосты, метрополитены, тоннели), при проектировании которых возникают специфические задачи расчетов, требующие учета взаимодействия их конструкций с окружающей средой.

В строительной механике рассматриваются методы расчета сооружений всех перечисленных типов, однако главное внимание уделяется не особенностям расчета систем того или иного частного вида, а общим методам анализа напряженно-деформируемого состояния и принципам, на которых основаны эти методы.

Всякое реальное сооружение состоит из большого числа различных элементов, которые по своей геометрической форме разделяются на ряд типов.

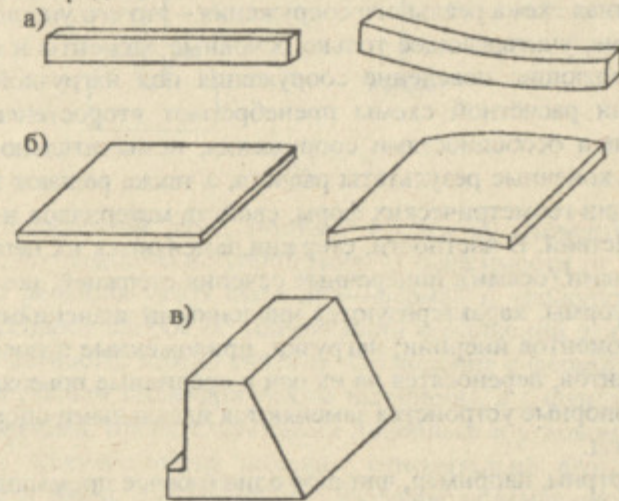


Рис. 1.2

1. Стержни, т.е. элементы, у которых один размер (длина), значительно превышает два других (рис. 1.2,а). Стержни могут быть прямолинейными или криволинейными.
2. Пластины и оболочки (рис. 1.2,б), т.е. элементы, характерные тем, что их толщина мала по сравнению с двумя другими размерами.

3. Массивные тела (рис. 1.2, в), т.е. элементы, у которых все основные размеры имеют один и тот же порядок.

Из перечисленных выше простейших элементов собирают разнообразные конструкции, предназначенные воспринимать различного рода внешние воздействия. Кроме основных несущих элементов в сооружениях используют целый ряд других элементов и деталей — ограждающие панели, лестничные клетки, утеплители, отопительные агрегаты и т.п.

Расчёт сооружений с точным учётом всех геометрических размеров и форм его элементов, а также с учётом разнообразия во взаимодействии их между собой, чрезвычайно сложен и требует больших затрат времени. Именно поэтому в строительной механике, используя метод научной абстракции, реальные сооружения заменяются их расчётными схемами.

Расчётная схема реального сооружения — это его упрощённое изображение, учитывающее только основные элементы и факторы, определяющие поведение сооружения под нагрузкой. При образовании расчётной схемы пренебрегают второстепенными элементами и особенностями сооружения, незначительно влияющими на конечные результаты расчёта, а также решают задачи схематизации геометрических форм, свойств материалов и внешних воздействий. В частности, стержни заменяются их центральными линиями (осями); поперечные сечения стержней, независимо от их формы, характеризуются численными значениями площадей и моментов инерции; нагрузки, приложенные к поверхностям элементов, переносятся на их оси и срединные поверхности; реальные опорные устройства заменяются идеальными опорными связями и т.д.

Рассмотрим, например, длинное одноэтажное промышленное здание, состоящее из колонн, ферм, плит покрытия, стеновых панелей, подкрановых балок, продольных и поперечных связей и других элементов. Расчёт такого пространственного сооружения заменяют более простым расчётом промежуточной плоской поперечной рамы (рис. 1.3, а). Экспериментальные данные и практика эксплуатации сооружений подобного типа подтверждают

приемлемость такой замены и достаточную для их проектирования точность расчёта.

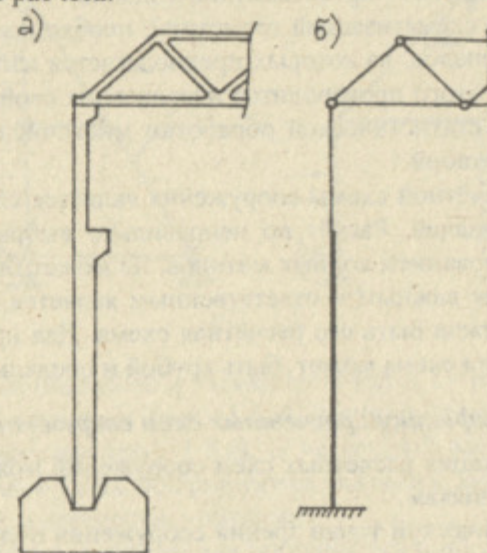


Рис. 1.3

В поперечной раме, помимо замены её элементов осями, производят дальнейшие упрощения. В зависимости от конструктивного решения узлов «колонна—ферма» и «колонна—фундамент» решают вопрос об идеализации соединений этих элементов. В частности, можно считать, что колонна с фермой соединяется идеальным цилиндрическим шарниром, а с фундаментом — тремя связями, препятствующими линейным и угловому перемещениям нижнего торца колонны относительно фундамента в плоскости рамы, т.е. абсолютно жестким защемлением. Естественно, что изменением площадей и изгибных жесткостей поперечных сечений колонны в районе оголовка и подкрановой консоли пренебрегают. В ферме считается, что стержни в узлах соединяются между собой идеальными цилиндрическим шарнирами, а их оси, сходящиеся к одному узлу, пересекаются в одной точке. Полученная с учётом вышеперечисленных упрощений

схема (рис. 1.3,б) является расчётной для поперечной рамы реального одноэтажного промышленного здания.

Наряду со схематизацией геометрии, необходимо учитывать свойства материалов, из которых предполагается изготавливать его элементы. Для этого производится идеализация свойств материалов на основе статистической обработки многочисленных лабораторных испытаний.

Выбор расчётной схемы сооружения является сложной и ответственной задачей. Расчёт по неправильно выбранной схеме, даже с использованием точных методов, не может быть правильным. Чем более важным и ответственным является сооружение, тем точнее должна быть его расчётная схема. Для предварительных расчётов эта схема может быть грубой и предельно простой.

1.4. Классификация расчетных схем сооружений

Классификация расчетных схем сооружений может строиться по разным признакам.

С геометрической точки зрения сооружения подразделяются на стержневые (их элементы – стержни); сооружения, составленные из пластин, оболочек, плит, мембран; массивные сооружения (фундаменты различных типов, подпорные стенки, плотины и т.д.). Часто сооружения представляют собой сочетание элементов различных типов: стержней, пластин, массивных тел и т.д.

Сооружения, состоящие из плит, пластин, оболочек и массивных тел, являются пространственными. Стержневые же системы могут быть как пространственными, так и плоскими. Если в стержневой системе оси всех элементов, опорных связей и нагрузка расположены в одной плоскости, то она является плоской (рис. 1.4,а). Стержневые системы, у которых не выполняется хотя бы одно из этих условий, являются пространственными (рис. 1.4,б). В настоящем конспекте лекций рассматривается расчёт только стержневых систем.

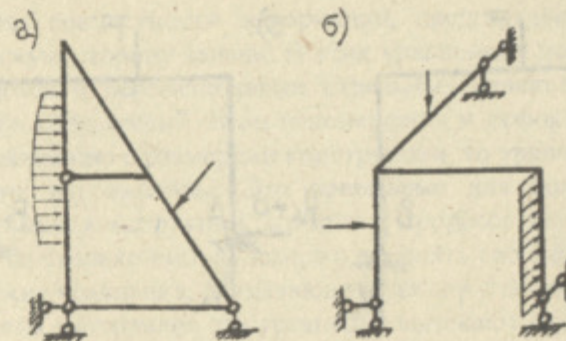


Рис. 1.4

Взаимные соединения элементов в узлах стержневых систем могут быть жёсткими (рис. 1.5,а), шарнирными (рис. 1.5,б) и комбинированными (рис. 1.5,в). В некоторых расчётах соединения элементов в узлах моделируются связями с заданными характеристиками, в частности, упругими.

По характеру направления опорных реакций сооружения могут быть безраспорными и распорными. К безраспорным относятся такие сооружения, в которых вертикальная нагрузка вызывает исключительно вертикальные опорные реакции (рис. 1.6,а). Остальные типы сооружений относятся к распорным (рис. 1.6,б). Наличие горизонтальных составляющих опорных реакций существенно влияет как на работу самих распорных систем, так и на работу их опор.

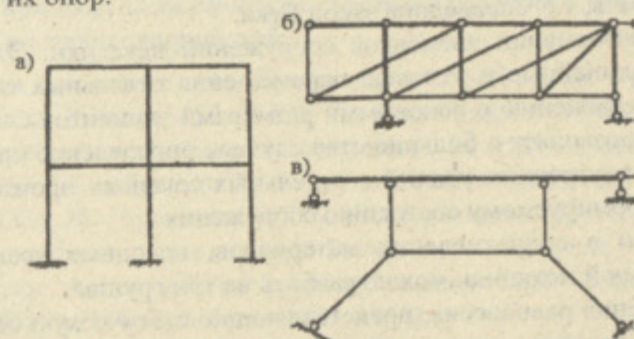


Рис. 1.5

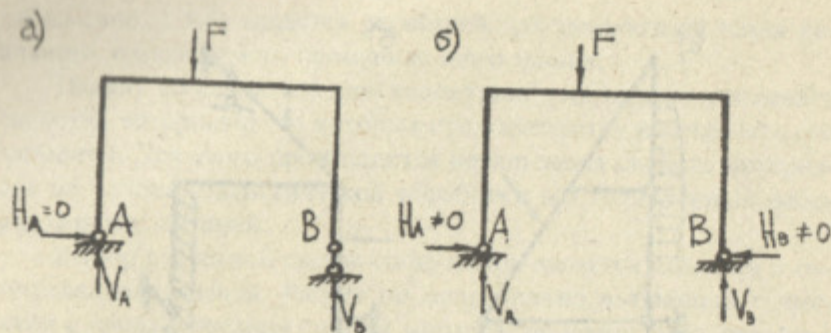


Рис. 1.6

По кинематическому признаку расчетные схемы сооружений подразделяются на геометрически неизменяемые, геометрически изменяемые и мгновенно изменяемые (см. вторую лекцию).

1.5. Основные допущения, принятые в курсе "Строительная механика"

1. Элементы сооружений представляют собой идеализированные тела, обладающие свойством сплошности и однородности.
2. Тела считаются идеально упругими. Материал элементов сооружений обладает упругой изотропией, т.е. упругие свойства материала одинаковы во всех направлениях.
3. Между напряжениями и деформациями существует линейная связь, т.е. справедлив закон Гука.
4. Деформации элементов сооружений невелики. Это значит, что линейные и угловые перемещения отдельных сечений малы по сравнению с основными размерами элементов сооружений. Это позволяет в большинстве случаев определение опорных реакций, внутренних усилий в отдельных сечениях производить по недеформируемому состоянию сооружения.

Как и в сопротивлении материалов, исходные уравнения строительной механики можно разбить на три группы.

1. Уравнения равновесия, представляющие статическую сторону задачи расчёта сооружений. Внутренние усилия в эти уравнения входят в первой степени.

2. Уравнения совместности деформаций, представляющие геометрическую сторону задачи. В этих уравнениях деформации связываются с перемещениями отдельных сечений и узлов элементов сооружений. Если перемещения и деформации малы по сравнению с размерами конструкции, то уравнения, связывающие их, линейны. Это приемлемо для большинства строительных конструкций, которые в процессе эксплуатации не должны сколько-нибудь заметно изменять свою форму.
3. Физические уравнения, связывающие усилия с деформациями. Для многих материалов эти уравнения вытекают из закона Гука, т.е. на основе линейной зависимости между напряжениями и деформациями.

Если все вышеперечисленные группы уравнений, составленные для какого-то сооружения, линейны, то его расчётная схема представляет собой линейно-деформируемую систему. В этих системах справедлив принцип независимости действия сил, т.е. какая-либо величина (перемещение, продольная сила, изгибающий момент и т.д.) при нескольких совместно действующих на сооружение внешних силах определяется как алгебраическая или геометрическая сумма значений составляющих этой величины от каждой силы в отдельности. Из принципа независимости действия сил следует, что конструкцию можно рассчитывать на отдельные единичные усилия, а затем результаты умножать на значения этих усилий и складывать друг с другом.

1.6. Краткая историческая справка о развитии методов расчета сооружений

Наука о прочности зародилась ещё в XV–XVII вв. в работах Леонардо да Винчи (1452–1519), Галилео Галилея (1564–1642) и других крупнейших ученых того времени. Её дальнейшее развитие связано с работами Я. Бернулли (1654–1705), Л. Эйлера (1707–1783), Ж. Лангранжа (1736–1813) и многих других знаменитых механиков и математиков. Большое значение для развития этой науки имели работы русских учёных М.В. Ломоносова (1711–1765) и И.П. Кулибина (1735–1818).

Однако основы строительной механики были созданы лишь в XIX веке, когда началось строительство железных дорог, ме-

таллических и железобетонных мостов, ферм больших пролётов, крупных гидротехнических и промышленных сооружений.

Большой вклад в развитие теории сооружений внесли русские учёные. Д.Н. Журавский (1821–1891) развил теорию балок и балочных ферм, Ф.С. Ясинский (1856–1899) предложил первые решения различных задач устойчивости стержней, В.Г. Шухов (1853–1939) создал новые типы плоских и пространственных систем, Н.Я. Белелобский (1845–1922) опубликовал первый в России учебник по строительной механике.

Разработке графических методов расчёта сооружений были посвящены труды Ш. Кулона (1736–1806), К. Кульмана (1821–1881), Л. Кремоны (1830–1903) и других европейских учёных. Большую роль в популяризации новых методов строительной механики сыграли работы В.Л. Кирпичёва (1845–1913), в которых наиболее полно изложены графическая статика и анализ основных положений теории статически неопределимых систем.

В конце XIX – начале XX веков в расчётах сооружений стали чаще использоваться методы прикладной теории упругости и пластичности. Получили широкое распространение численные и аналитические методы расчёта статически неопределимых систем. Развитие строительной механики в этот период связано с именами таких выдающихся учёных как Д. Максвелл (1831–1879), О. Мор (1835–1918), Д. Рэлей (1842–1919), С.П. Тимошенко (1878–1972) и других.

Среди работ многих русских и советских учёных большое значение имеют труды А.Н. Крылова (1863–1945), известного своими сочинениями по строительной механике корабля, теории продольного изгиба, теории вынужденных колебаний и расчёту балок на упругом основании; Б.Г. Галёркина (1871–1945), разработавшего общие методы решения задач устойчивости и теории упругости; Н.С. Стрелецкого (1885–1969), внёсшего большой вклад в строительную механику мостов и строительных конструкций, теорию сложных статически неопределимых систем и теорию надёжности; И.М. Рабиновича (1886–1977), сделавшего много ценных обобщений и исследований по статике и динамике сооружений; В.З. Власова (1906–1958), предложившего новую

стройную математическую теорию оболочек и тонкостенных стержней; Л.Д. Проскуракова и его ученика И.П. Прокофьева (1877–1958), создавших отечественную школу строительной механики и многих других.

Во второй половине XX века получили развитие новые разделы строительной механики: динамическая устойчивость, статистические методы, теория надёжности, оптимизация конструкций, теория ползучести, нелинейная теория оболочек.

Использование в первой половине XX столетия лишь простейшей вычислительной техники не позволило развить методы расчёта пространственных систем в такой степени, в какой это уже было необходимо для решения задач прочности, жёсткости и устойчивости строительных конструкций. Бурное развитие электронной вычислительной техники позволило рассчитывать системы, содержащие сотни и тысячи элементов. Это привело к развитию и интенсивному внедрению на практике методов, позволяющих рассчитывать сложные пространственные системы, состоящие из стержней, тросов, пластин, оболочек и т.п.

В наши дни теоретические основы расчёта сооружений достигли столь высокого уровня, что стало возможным применять самые совершенные расчётные схемы, позволяющие учесть множество различных свойств строительных конструкций. Появилась возможность отказаться от поэлементного расчёта зданий и сооружений и перейти к расчёту, в котором система рассматривается как единое целое.

Современная строительная механика располагает большим количеством надёжных методов расчёта, проверенных опытом и инженерно-строительной практикой. Однако, было бы ошибкой думать, что развитие этой науки уже завершено и что она способна дать точные ответы буквально на все вопросы расчёта и проектирования инженерных конструкций. Строительная механика, как и всякая наука, непрерывно развивается и совершенствуется в соответствии с запросами народного хозяйства страны.

Более подробную информацию о развитии методов расчёта сооружений в историческом аспекте можно получить из следующей литературы:

1. Рабинович И.М. (редакция). Строительная механика в СССР. 1917–1957 гг. – М.: Гостройиздат, 1957.
2. Рабинович И.М. (редакция). Строительная механика в СССР. 1917–1967 гг. – М.: Гостройиздат, 1969.
3. Бернштейн С.А. Очерки по истории строительной механики. – М., 1957.
4. Болотин В.В., Гольденблат И.И., Смирнов А.Ф. Современные проблемы строительной механики. – М.: Стройиздат, 1964.
5. Седов Л.И. и др. (редакция). Механика в СССР за 50 лет. – Т. 3. Механика деформируемого твёрдого тела. – М.: Наука, 1972.

ЛЕКЦИЯ ВТОРАЯ

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СООРУЖЕНИЙ

- 2.1. Цель кинематического анализа
- 2.2. Кинематический анализ стержневых систем с простой структурой
- 2.3. Кинематический анализ стержневых систем со сложной структурой
- 2.4. Аналитические критерии в кинематическом анализе сооружений
- 2.5. Вопросы для самопроверки
- 2.6. Рекомендуемая литература

2.1. Цель кинематического анализа

В первой лекции было отмечено, что с кинематической точки зрения расчётные схемы сооружений могут быть геометрически неизменяемыми, геометрически изменяемыми и мгновенно неизменяемыми.

Стержневая система (плоская или пространственная) называется геометрически неизменяемой, если изменение её формы и размеров при любых внешних воздействиях (силовых, температурных и других) обусловлено только деформацией стержней (рис. 2.1,а). В случае, если изменение формы и размеров

стержней происходит без деформаций, сооружение называется геометрически изменяемым (рис. 2.1,б). Стержневые системы, допускающие бесконечно малые начальные перемещения без деформаций, называются мгновенно изменяемыми. Дальнейшие перемещения в таких сооружениях обусловлены неупругими деформациями (рис. 2.1,в).

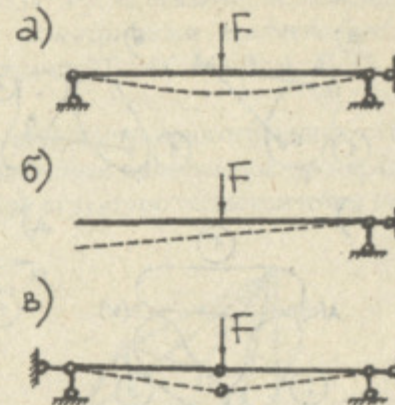


Рис. 2.1

Цель кинематического анализа состоит в определении класса расчётной схемы сооружения с кинематической точки зрения. В практике строительства и эксплуатации сооружений допустимо применение только геометрически неизменяемых систем.

2.2. Кинематический анализ стержневых систем с простой структурой

Стержневая система имеет простую структуру, если её можно представить в виде совокупности простейших структур, геометрическая неизменяемость которых может быть установлена экспериментальными методами.

К простейшим плоским геометрически неизменяемым структурам относятся:

1. Присоединение узла А к геометрически неизменяемой части сооружения (к диску 1) или к диску "земля" диадой, т.е. двумя линейными связями АВ и АС (рис. 2.2,а).
2. Соединение между собой двух геометрически неизменяемых дисков 1 и 2 цилиндрическим шарниром С и линейной связью АВ, ось которой не проходит через шарнир С (рис. 2.2,б).
3. Соединение двух геометрически неизменяемых дисков 1 и 2 тремя линейными связями АВ, СК, ЕД, оси которых не пересекаются в одной точке (рис. 2.2,в).

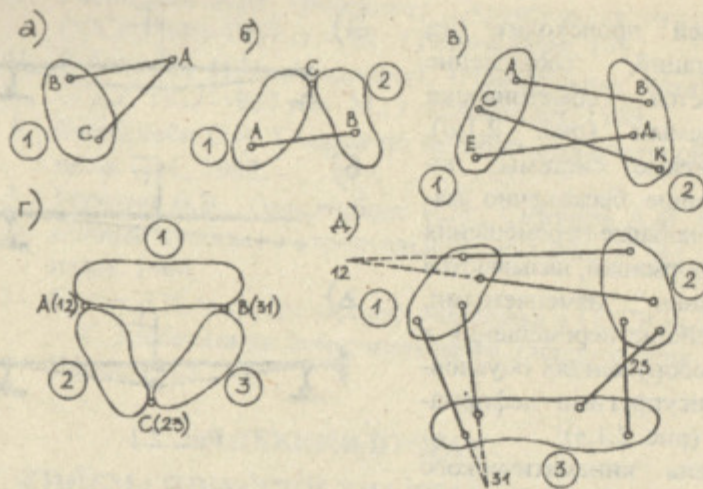


Рис. 2.2

4. Соединение между собой трёх геометрически неизменяемых дисков 1, 2 и 3 тремя цилиндрическими шарнирами, не лежащими на одной прямой. Иначе, рассматриваемая структура будет геометрически неизменяемой, если относительные мгновенные центры вращения 12, 23, 31 этих дисков не лежат на одной прямой (рис. 2.2, в).

5. Соединение между собой геометрически неизменяемых дисков 1, 2 и 3 линейными связями попарно так, что их относительные мгновенные центры вращения 12, 23, 31 не лежат на одной прямой (рис. 2.2, г).

Кинематический анализ пространственных сооружений специально проводится редко. Чаще всего он совмещается с расчётом пространственных систем на внешние воздействия. При этом используются аналитические критерии, позволяющие установить класс расчётной схемы сооружения с кинематической точки зрения (см. п. 2.4 настоящей лекции).

Однако в ряде случаев и без расчёта с полной определённо-стью можно назвать тип сооружения по кинематическому признаку.

1. Пространственная ферма, образованная последовательным присоединением узлов к геометрически неизменяемому дис-

ку сооружения или к диску "земля" тремя связями, не лежащими в одной плоскости (триадой), геометрически неизменяема. На рис. 2.3 узел А присоединён связями АВ, АС и АД; А, В, С, Д – идеальные шаровые шарниры.

2. Сетчатая ферма в виде выпуклого многогранника с треугольными гранями, ограничивающими односвязное пространство, является по своей внутренней структуре геометрически неизменяемой (рис. 2.4).

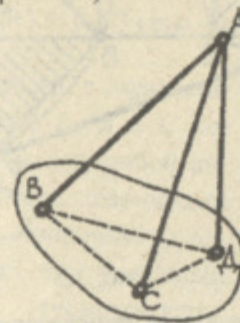


Рис. 2.3

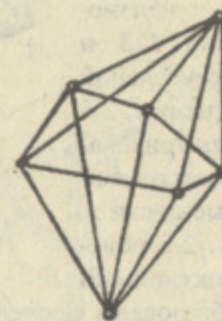


Рис. 2.4

3. Пространственная система, состоящая из двух геометрически неизменяемых дисков, соединённых между собой шестью связями, по своей внутренней структуре будет мгновенно изменяемой или геометрически изменяемой, если:

- связи расположены в параллельных плоскостях;
- связи расположены в двух произвольно ориентированных в пространстве плоскостях;
- четыре связи лежат в одной плоскости, а оси двух других в пространстве ориентированы произвольно;
- оси связей, взятые группами по три, пересекаются в одной точке;
- оси более трёх связей пересекаются в одной точке;
- оси трёх связей лежат в одной плоскости и пересекаются в одной точке.

Ниже рассматриваются примеры кинематического анализа стержневых систем с простой структурой.

ПРИМЕР 2.2.1 (рис. 2.5)

Стержни фермы 12, 23 и 13, а также 78, 79 и 89 соединяются между собой цилиндрическими шарнирами 1, 2, 3, 7, 8, 9, не лежащими на одной прямой, и образуют геометрически неизменяемые диски 123 и 789 с треугольной структурой (на рис. 2.5 эти диски заштрихованы). Геометрически неизменяемые диски А и В (на рис. 2.5 обведены пунктирными линиями) образованы последовательным присоединением узлов 4, 5 и 6 диадами к дискам 123 и 789. Между собой диски А, В и 0 ("земля") соединяются тремя связями, оси которых не пересекаются в одной точке (между дисками А и В – связи 36, 28, 19; между дисками В и 0 – опорные связи). Стержневая система (ферма) геометрически неизменяема.

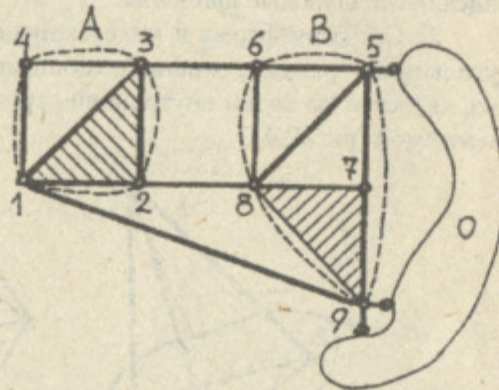


Рис. 2.5

ПРИМЕР 2.2.2 (рис. 2.6)

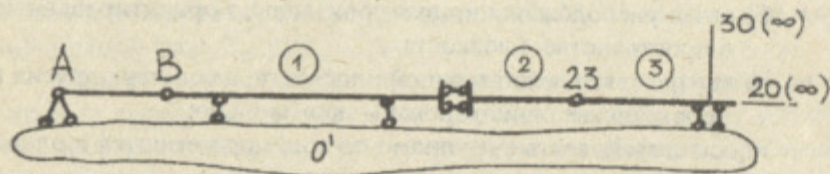


Рис. 2.6

Узел А присоединён к диску 0' ("земля") диадой, т.е. принадлежит этому диску. Диски 1 и 0' соединяются между собой тремя связями (АВ и двумя вертикальными опорными связями), оси которых не пересекаются в одной точке. Таким образом, диски 1 и 0' образуют единый геометрически неизменяемый диск, который

для дальнейших рассуждений обозначим как диск 0. Относительный мгновенный центр вращения 20 дисков 2 и 0 находится в бесконечности по горизонтали, а 30 дисков 3 и 0 – в бесконечности по вертикали. Так как относительные мгновенные центры вращения 20, 23 и 30 дисков 0, 2 и 3 не лежат на одной прямой, многопролётная балка геометрически неизменяема.

ПРИМЕР 2.2.3 (рис. 2.7)

Три диска с прямой осью А, В и С соединяются между собой цилиндрическими шарнирами k, m, n, не лежащими на одной прямой, т.е. эти диски образуют геометрически неизменяемый составной диск 1. Составной геометрически неизменяемый диск 2 образован аналогично. Заданная рама геометрически неизменяема, так как относительные мгновенные центры вращения 10, 12 и 20 дисков 0, 1 и 2 не лежат на одной прямой.

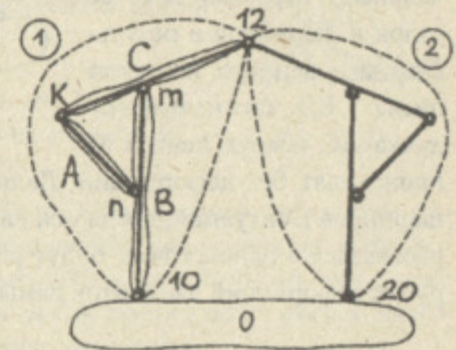


Рис. 2.7

ПРИМЕР 2.2.4 (рис. 2.8)

Диски АС и 0 ("земля") соединяются между собой тремя опорными связями, от которых не пересекаются в одной точке, следовательно стержень АС и диск 0 образуют геометрически неизменяемую систему. К этой системе диск ВД присоединяется тремя связями: линейной связью ЕК и двумя связями с ломаными осями АВ'В и СД'Д. Связь АВ'В препятствует взаимному перемещению шарниров А и В в направлении АВ, а связь СД'Д – шарниров С и Д в направлении СД, т.е. связи с ломаными осями

могут быть заменены связями с прямолинейными осями АВ и СД. Оси связей АВ, ЕК и СД пересекаются в точке М. Рама изображённая на рис. 2.8, является мгновенно изменяемой, так как бесконечно малые начальные перемещения её узлов и шарниров в результате мгновенного поворота диска ВД относительно диска АС вокруг центра М происходят без деформаций. Дальнейшие перемещения шарниров в ситуации, когда оси связей пересекаются в одной точке, будут разрывными деформациями элементов рамы.

ПРИМЕР 2.2.5 (рис. 2.9)

Комбинированная стержневая система геометрически неизменяема, так как она образована последовательным присоединением узлов 1, 2, 3 и 4 к диску А диадами и к диску 0 тремя опорными связями, оси которых не пересекаются в одной точке.

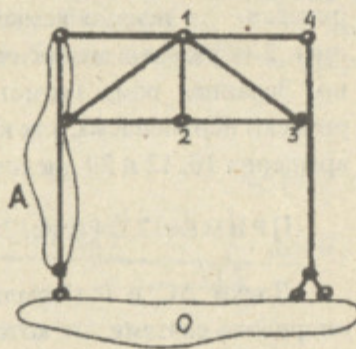


Рис. 2.9

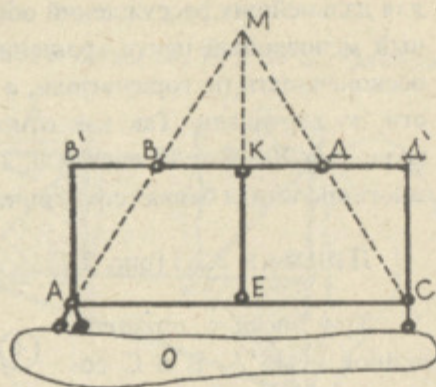


Рис. 2.8

ПРИМЕР 2.2.6 (рис. 2.10)

Опорный контур 123 образован последовательным присоединением узлов 1, 2 и 3 к диску "земля" тремя связями (триадами), оси которых не лежат в одной плоскости. К геометрически неизменяемому опорному контуру 123 последовательно триадами присоединятся узлы 4, 5, 6, 7, 8, 9. Пространственная ферма геометрически неизменяема.

2.3. Кинематический анализ стержневых систем со сложной структурой

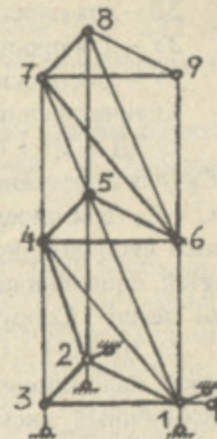


Рис. 2.10

Если по объективным или по субъективным причинам сооружение не может быть представлено в виде совокупности простейших геометрически неизменяемых структур, то оно имеет сложную структуру. Кинематический анализ таких систем включает в себя количественный и качественный анализ.

Количественный анализ определяет соотношение между числом дисков (или узлов) системы и числом связей, наложенных на них.

Примем следующие обозначения:

Д – число геометрически неизменяемых дисков сооружения;
Н – число простых шаровых, цилиндрических или поступательных шарниров, т.е. шарниров, соединяющих между собой только два диска;

C_0 – количество опорных линейных и угловых связей;

У – количество узлов шарнирно-стержневой системы (фермы);

С – число стержней шарнирно-стержневой системы (фермы).

Число степеней свободы разобщённых друг от друга геометрически неизменяемых дисков или узлов, т.е. количество независимых геометрических параметров, определяющих их положение в конкретных условиях, будет равно:

ЗД – для плоских стержневых систем;

ЗУ – для пространственных шарнирно-стержневых систем;

2У – для плоских шарнирно-стержневых систем.

Количественный анализ приводит к следующим случаям:

1. $ЗД > 2Н + С_0$ (для плоских стержневых систем), $ЗУ > С + С_0$ (для пространственных шарнирно-стержневых систем), $2У > С + С_0$ (для плоских шарнирно-стержневых систем). Число степеней свободы дисков или узлов сооружения превышает число связей, соединяющих эти диски или узлы между собой и с диском "земля". Сооружение является геометрически изменяемым.

2. $ЗД = 2Н + С_0$, $ЗУ = С + С_0$, $2У = С + С_0$ (рис. 2.11). Число связей, наложенных на систему, и суммарная степень свободы её разобъединённых дисков или узлов совпадают. В зависимости от расположения связей система может быть геометрически неизменяемой (рис. 2.11,а), мгновенно изменяемой (рис. 2.11,б) и геометрически изменяемой (рис. 2.11,в).

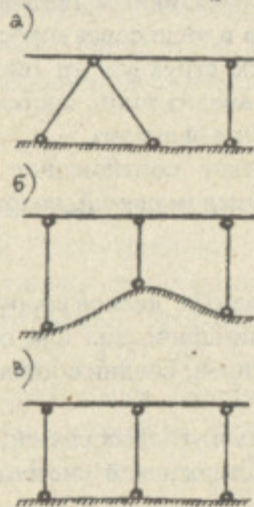


Рис. 2.11

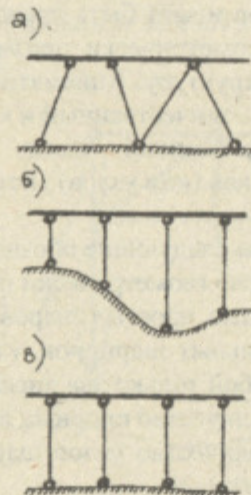


Рис. 2.12

3. $ЗД < 2Н + С_0$, $ЗУ < С + С_0$, $2У < С + С_0$ (рис. 2.12). Число наложенных связей на диски или узлы системы превышает их суммарную степень свободы. С кинематической точки зрения

система может быть геометрически неизменяемой (рис. 2.12,а), мгновенно изменяемой (рис. 2.12,б) и геометрически изменяемой (рис. 2.12,в).

В дальнейшем, в первой части курса, будем рассматривать статически определимые шарнирно-стержневые и плоские стержневые системы, для которых:

$$ЗД = 2Н + С_0, ЗУ = С + С_0, 2У = С + С_0.$$

Перечисленные соотношения являются только необходимыми условиями геометрической неизменяемости сооружений. Для решения вопроса о достаточности этих условий необходимо убедиться в правильности расстановки связей в стержневых системах, т.е. необходимо произвести их качественный анализ, который состоит из двух этапов: структурного анализа и анализа связей.

Структурный анализ предусматривает выявление геометрически неизменяемых дисков, имеющих лишние связи. Например, в ферме, показанной на рис. 2.13, диск А имеет одну лишнюю связь. Так как для рассматриваемой фермы $2У = С + С_0$

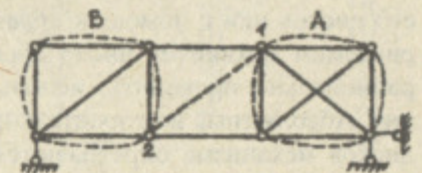


Рис. 2.13

($2 \cdot 8 = 13 + 3$), наличие лишней связи в диске А означает отсутствие таковой где-то в другом месте. В частности, отсутствие подкоса 12 позволяет диску А перемещаться относительно диска В в перпендикулярном поясам фермы направлении без деформации её стержней. В этой ситуации ферма геометрически изменяема.

Далее, при отсутствии в сооружении геометрически неизменяемых дисков с избытком связей, проводится анализ правильности размещения связей в целом.

В стержневой системе удаляется какая-либо связь. В результате этой операции система превращается в механизм с одной степенью свободы. Задав механизму возможные перемещения, исследуем перемещение в нём по направлению отброшенной связи. Если оно будет отлично от нуля, то удалённая связь, будучи

возвращённой на место, препятствует этому перемещению, т.е. она в рассматриваемой системе размещена правильно. Исследуемая стержневая система в этом случае геометрически неизменяема. Строго говоря, все связи системы должны быть проверены таким образом. Практически же для окончательного вывода о классе сооружения с кинематической точки зрения такую проверку достаточно произвести только для одной связи.

Если же перемещение по направлению удалённой связи окажется равным нулю, то возвращение её на место не меняет картины возможных перемещений системы. Связь в данном случае расположена неправильно, а исследуемое сооружение является либо мгновенно изменяемым, либо геометрически изменяемым.

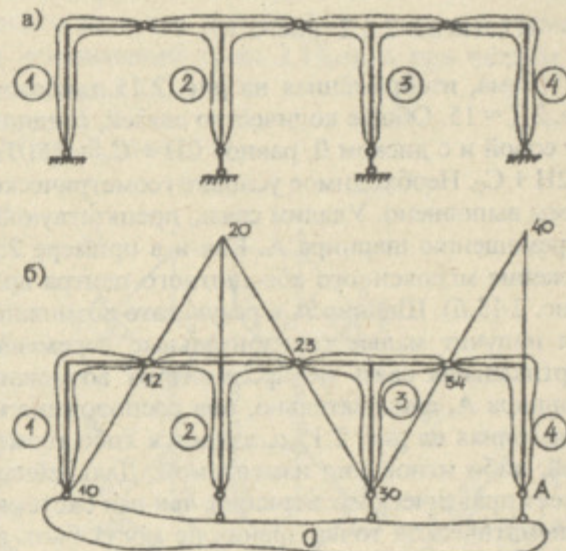
Механизму с одной степенью свободы возможные перемещения можно задать с помощью мгновенных центров вращения его дисков или с помощью плана перемещений. Если в рассматриваемом механизме число дисков не велико, то анализ связей рационально проводить, используя мгновенные центры вращения. Абсолютные и относительные мгновенные центры вращения дисков механизма определяются на основе теоремы о мгновенных центрах вращения трёх дисков, рассматриваемой в курсе теоретической механики. При наличии в механизме большого числа дисков (более 4–5) анализ связей стержневой системы наиболее эффективно проводится с помощью плана перемещений. Построение различного типа планов скоростей (перемещений) изучается в разделе "Кинематика" курса теоретической механики. В нашем курсе будем использовать для решения различных задач полярный не повернутый план перемещений.

Методику кинематического анализа, изложенную выше, практически можно реализовать только для плоских стержневых систем. Исследование возможных перемещений пространственных механизмов с помощью изложенных приёмов затруднительно.

Рассмотрим несколько практических примеров кинематического анализа стержневых систем со сложной структурой.

ПРИМЕР 2.3.1 (рис. 2.14)

Для рамы, показанной на рис. 2.14,а, $3Д = 12$, $2Н + С_0 = 12$, т.е. $3Д = 2Н + С_0$. Удалим горизонтальную связь на



правой шарнирно неподвижной опоре (рис. 2.14,б). Задав возможные перемещения механизма с одной степенью свободы, найдём горизонтальное перемещение шарнира А

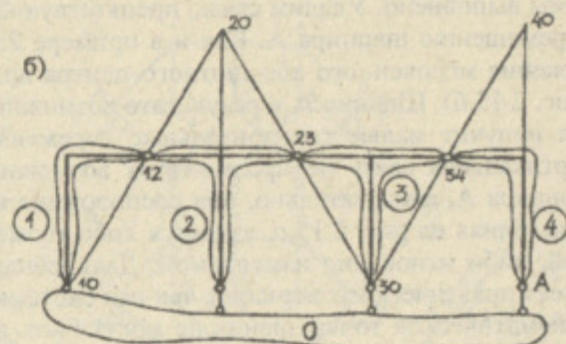


Рис. 2.14

через мгновенный абсолютный центр вращения 40 диска 4. Для определения положения 40 воспользуемся теоремой о мгновенных центрах вращения трёх дисков. Мгновенный абсолютный центр вращения 10 диска 1 совпадает с его неподвижной точкой. Положения мгновенных относительных центров вращения 12, 23, 34 очевидны (рис. 2.14,б). Мгновенный абсолютный центр вращения 20 диска 2 в соответствии с упомянутой теоремой находится, с одной стороны, на прямой, проходящей через центры 10 и 12, а с другой – на продолжении оси шарнирно-подвижной опоры, соединяющей диск 2 и диск 0. Таким же образом найдём положения мгновенных абсолютных центров вращения 30 и 40 дисков 3 и 4.

Возможные перемещения точек диска 4 можно рассматривать как их мгновенный поворот вокруг центра 40. Отсюда следует, что шарнир А будет иметь отличное от нуля горизонтальное перемещение. Горизонтальная связь правой шарнирно неподвижной опоры препятствует этому перемещению, т.е. она располо-

жена правильно. Исследуемая рама является геометрически неизменяемой.

ПРИМЕР 2.3.2 (рис. 2.15)

Рама, изображённая на рис. 2.15,а, состоит из пяти дисков, т.е. $3Д = 15$. Общее количество связей, соединяющих диски между собой и с диском 0, равно: $2Н + С_0 = 15$. Таким образом $3Д = 2Н + С_0$. Необходимое условие геометрической неизменяемости рамы выполнено. Удалим связь, препятствующую вертикальному перемещению шарнира А. Как и в примере 2.3.1, определим положение мгновенного абсолютного центра вращения 20 диска 2 (рис. 2.15,б). Шарнир А в результате возможных возмущений рамы получит малые горизонтальные перемещения. Исследуемая вертикальная связь не препятствует возможным перемещениям шарнира А, следовательно, она расположена неправильно. Рама, показанная на рис. 2.15,а, является либо геометрически изменяемой, либо мгновенно изменяемой. Дальнейшее исследование не имеет практического значения, так как системы подобного типа с кинематической точки зрения не могут быть использованы в качестве реального сооружения.

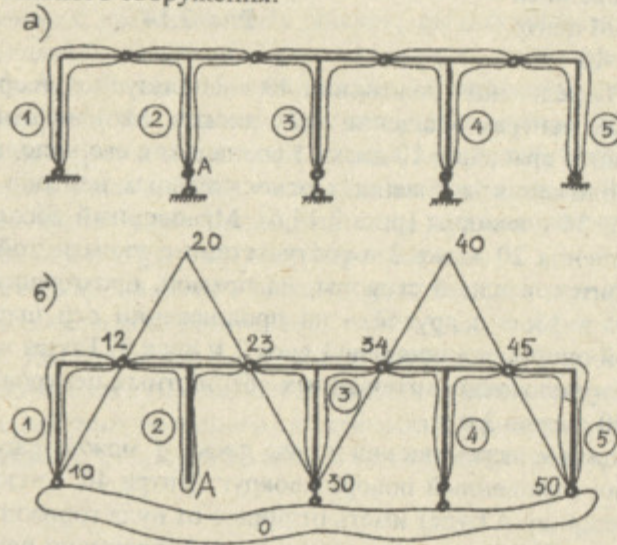


Рис. 2.15

Сопоставляя регулярные и симметричные относительно вертикальной оси рамы, изображённые на рис. 2.14,а и рис. 2.15,а, можно сделать вывод о том, что при нечётном числе пролётов они геометрически неизменяемы (рис. 2.14,а), а при чётном – мгновенно изменяемы (рис. 2.15,а).

ПРИМЕР 2.3.3 (рис. 2.16 и 2.17)

Степень свободы 11 узлов фермы (рис. 2.16,а) на плоскости равна $2У = 22$, $С + С_0 = 22$, следовательно, $2У = С + С_0$. Удалим из фермы стержень 57 (рис. 2.16,б). В механизме с одной степенью свободы содержится 14 дисков. Для определения взаимного перемещения Δ_{57} узлов 5 и 7 в направлении

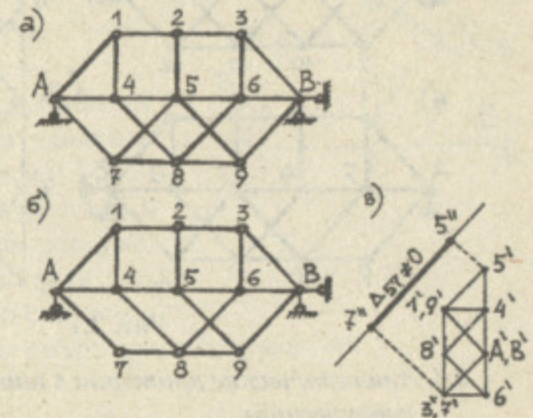


Рис. 2.16

57, вызванного возможными перемещениями всего механизма, построим полярный не повернутый план перемещений (рис. 2.16,в). В полюсе плана (А' и В') будут находиться неподвижные узлы фермы А и В. Узел А неподвижен, так как левая опорная связь препятствует его вертикальному перемещению, а средний пояс фермы В654А, имеющий прямую ось, – горизонтальному. Задавшись перемещением узла 6 (на плане перемещений – точка 6'), последовательно определим перемещения остальных узлов механизма – 3', 1', 4', 8', 9', 5', 7' (рис. 2.16,в). Из плана перемещений видно, что $\Delta_{57} \neq 0$. Заданная ферма является геометрически неизменяемой.

Ферма с такой же структурой, но с нечётным количеством панелей в среднем поясе (рис. 2.17,а), является мгновенно изме-

няемой. Действительно, из плана перемещений (рис. 2.17,в) для механизма с одной степенью свободы, образовавшегося в результате удаления стержня 69 (рис. 2.17,б), видно, что взаимное перемещение узлов 6 и 9 в направлении оси стержня $\Delta_{69} = 0$.

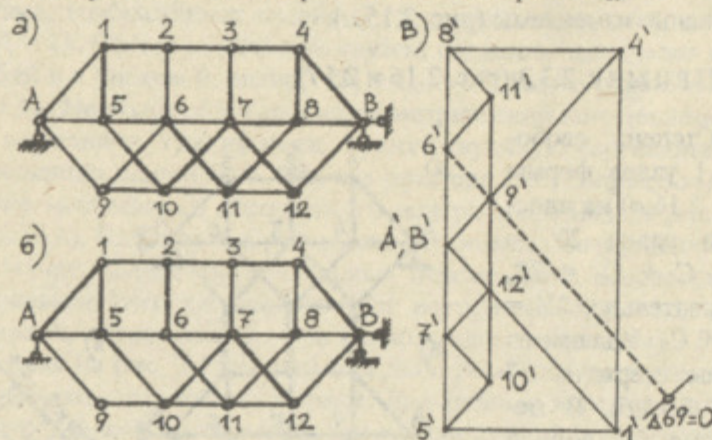


Рис. 2.17

2.4. Аналитические критерии в кинематическом анализе сооружений

Методом вырезания узлов (изложен в курсе теоретической механики, раздел "Статика") определим усилия в стержнях простейшей симметричной геометрически неизменяемой фермы от вертикальной сосредоточенной силы, приложенной в узле С (рис. 2.18, а, б):

$$\Sigma F_x = 0;$$

$$-N_{CB}\cos\alpha + N_{CA}\cos\alpha = 0;$$

$$N_{CB} = N_{CA} = N;$$

$$\sum F_y = 0, 2N \sin \alpha - F = 0;$$

$$N = \frac{F}{2 \sin \alpha} \quad (2.1)$$

Таким образом, в геометрически неизменяемых фермах от заданного силового воздействия усилия в стержнях имеют конечные и определённые значения. При $\alpha \rightarrow 0$ рассматриваемая ферма (рис. 2.18,а) преобразуется в мгновенно изменяемую систему (рис. 2.18,б), для которой из соотношения (2.1) следует: $N \rightarrow \infty$.

В общем случае определение неизвестных внутренних усилий и реакций опорных связей S_i ($i = 1, 2, \dots, n$) от силового воздействия в статически определимых сооружениях с математической точки зрения сводится к решению системы n линейных неоднородных алгебраиче

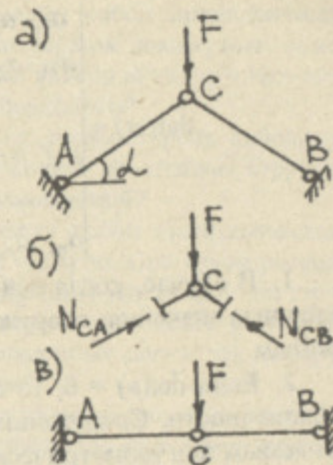


Рис. 2.18

[illegible]

Аналитические критерии, определяющие класс сооружений с кинематической точки зрения, вытекают из результатов решения системы уравнений (2.2) и, в соответствии с правилом Крамера, исследования её определителя:

$$\det(a) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (2.3)$$

1. В случае, когда $\det(a) \neq 0$, т.е. искомые усилия S_i имеют конечные значения, сооружение является геометрически неизменяемым.

2. Если $\det(a) = 0$, то определяемые усилия S_i стремятся к бесконечности. Сооружение в этом случае будет мгновенно изменяемым или геометрически изменяемым.

При отсутствии нагрузки, т.е. при её нулевом значении, свободные члены системы уравнений (2.2) A_{jF} отсутствуют. Это значит, что в геометрически неизменяемых системах, когда $\det(a) \neq 0$, вычисляемые усилия S_i равны нулю, т.е. имеют определённые значения, а в мгновенно изменяемых и геометрически изменяемых системах, когда определитель (2.3) равен нулю, — неопределённые.

2.5. Вопросы для самопроверки

1. На какие типы подразделяются расчётные схемы стержневых систем с кинематической точки зрения?
2. Какие сооружения называются геометрически неизменяемыми?
3. Какие сооружения называются геометрически изменяемыми?
4. Какие сооружения называются мгновенно неизменяемыми?
5. С какой целью проводится кинематический анализ сооружений?
6. Какие сооружения с кинематической точки зрения могут быть использованы в практике строительства?
7. Какие сооружения с кинематической точки зрения имеют простую структуру?
8. Каким образом проводится кинематический анализ расчётных схем сооружений с простой структурой?
9. Назовите простейшие геометрически неизменяемые плоские структуры.

10. Два плоских диска соединяются между собой цилиндрическим шарниром и линейной связью. Каким образом должна быть ориентирована прямая, соединяющая концы линейной связи, в геометрически неизменяемой структуре подобного типа?
11. Два плоских диска соединяются между собой тремя линейными связями. При каком расположении связей простейшая структура такого типа будет геометрически неизменяемой?
12. Три плоских диска соединяются между собой цилиндрическими шарнирами или линейными связями попарно. При каком расположении цилиндрических шарниров или линейных связей эта структура будет геометрически неизменяемой? При каком расположении цилиндрических шарниров или линейных связей эта же структура будет геометрически изменяемой?
13. Узел пространственной шарнирно стержневой системы закреплён к диску "земля" тремя линейными связями. При каком расположении линейных связей эта структура будет геометрически неизменяемой?
14. Какими с кинематической точки зрения по своей внутренней структуре являются сетчатые пространственные фермы в виде выпуклых ограничивающих односвязное пространство многогранников с треугольными гранями?
15. Два пространственных диска соединяются между собой шестью линейными связями. При каком расположении связей эта пространственная структура будет геометрически изменяемой или мгновенно изменяемой?
16. Заданы расчётные схемы плоских сооружений с простой структурой (рис. 2.19). Произведите кинематический анализ этих сооружений.
17. Какие сооружения с кинематической точки зрения могут быть отнесены к сооружениям со сложной структурой?
18. В какой последовательности проводится кинематический анализ стержневых систем со сложной структурой?
19. Сформулируйте необходимое условие геометрической неизменяемости любой плоской статически определимой стержневой системы.
20. Сформулируйте необходимое условие геометрической неизменяемости пространственной статически определимой шарнирно-стержневой системы.

21. Сформулируйте необходимое условие геометрической неизменяемости плоской статически определимой шарнирно-стержневой системы.
22. Как проводится качественный анализ сооружений? В чём смысл структурного анализа? Приведите пример расчётной схемы любого сооружения, иллюстрирующий структурный анализ.

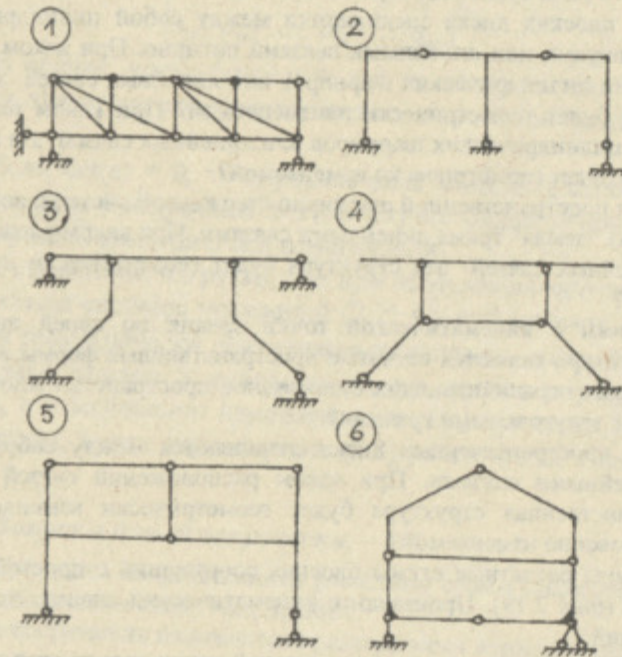


Рис. 2.19

23. В какой последовательности проводится анализ связей сооружений со сложной структурой?
24. В каком случае исследуемая связь считается размещённой правильно, а сооружение, кинематический анализ которого проводится, — геометрически неизменяемым?
25. В каком случае исследуемая связь считается размещённой неправильно, а сооружение мгновенно или геометрически изменяемым?
26. В каких случаях для анализа связей целесообразно использовать теорему о мгновенных центрах вращения трёх дисков?

27. В каких случаях для анализа связей целесообразно использовать построение плана перемещений?
28. Сформулируйте аналитический критерий геометрической неизменяемости сооружений.
29. Сформулируйте аналитический критерий мгновенной изменяемости сооружений.

2.6. Рекомендуемая литература

1. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем: Учеб. для вузов. — М.: Изд-во ассоциации строительных вузов, 1996. — 541 с.
Глава 1. Введение. § 1.6. Кинематический анализ расчётных схем. С. 21–25.
2. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика: Учеб. для вузов. — М.: Высш. школа, 1986. — 607 с.
Глава 1. Кинематический анализ сооружений. § 1.1. Опоры. § 1.2. Условия геометрической неизменяемости стержневых систем. С. 14–22.
3. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лашенков Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Стержневые системы: Учеб. для вузов. — М.: Стройиздат, 1981. — 512 с.
Глава II. Анализ образования стержневых систем и их виды. § 7. Основные положения. § 8. Геометрический анализ образования стержневых систем. С. 28–46.
4. Клейн Г.К., Леонтьев Н.Н. и др. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. Статика стержневых систем: Учеб. пособие. — М.: Высш. школа, 1980. — 384 с.
Глава I. Кинематический анализ сооружений. С. 4–13.
5. Крамаренко А.А. Статически определимые стержневые системы. Кинематический анализ. Балки и рамы: Учеб. пос. — Новосибирск: НГАС, 1997. — 76 с.
Глава I. Кинематический анализ сооружений. С. 4–28.

ЛЕКЦИЯ ТРЕТЬЯ

ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ И МЕТОДЫ ИХ ПОСТРОЕНИЯ

- 3.1. Понятие о линиях влияния
- 3.2. Статический способ построения линий влияния
- 3.3. Кинематический способ построения линий влияния
- 3.4. Матрицы влияния и способы их формирования
- 3.5. Вопросы для самопроверки
- 3.6. Рекомендуемая литература

3.1. Понятие о линиях влияния

Рассмотрим любое сооружение, например, статически неопределимую раму (рис. 3.1). По ригелю рамы перемещается сосредоточенная сила, величину которой примем равной единице. Линия действия единичной силы при любом её положении перпендикулярна оси ригеля. Используя методы строительной механики, вычислим изгибающий момент в сечении 3 ригеля при различных положениях груза $F = 1$ (1, 2, ..., 5). Величину изгибающего момента в рассматриваемом сечении будем откладывать от горизонтальной оси под соответствующими положениями единичной силы. В результате получим график (рис. 3.1), ординаты которого $M_{31} = 0$, M_{32} , M_{33} , M_{34} , $M_{35} = 0$ со статической точки зрения есть значения изгибающего момента в сечении 3 при различных положениях силы $F = 1$: M_{31} — когда сила находится в сечении 1, M_{32} — в сечении 2 и т.д.

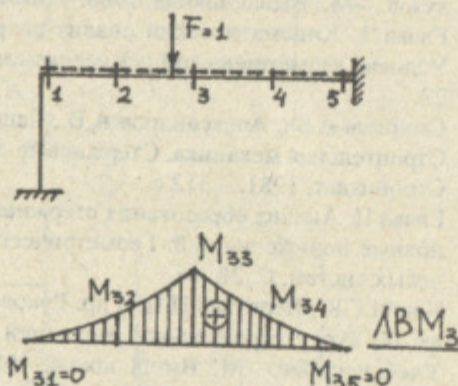


Рис. 3.1

График, показывающий изменение какой-либо величины (изгибающего момента, поперечной силы, продольной силы в определенном сечении, реакции опорной связи и т.д.) в зависимости от положения единичной сосредоточенной силы, перемещающейся параллельно самой себе по заданному маршруту движения в каком-либо сооружении, называется линией влияния этой величины.

Ординаты линий влияния откладываются от оси перпендикулярной линии действия единичной сосредоточенной силы. Все ординаты линии влияния любой величины выражают значение только этой величины при различных положениях единичной силы. В этом и состоит принципиальное отличие линий влияния исследуемых величин от их эпюр, где ординаты выражают значение этих величин во всех сечениях сооружения при заданной неподвижной нагрузке.

Положительные значения любых величин по отношению к горизонтальной оси отсчёта на линиях влияния принято откладывать вверх (отрицательные — вниз), а по отношению к вертикальной оси — слева (отрицательные — справа).

Для построения линий влияния внутренних усилий и реакций опорных связей используют статический или кинематический способ.

3.2. Статический способ построения линий влияния

Статический способ построения линии влияния какой-либо величины заключается в установлении аналитической связи между этой величиной и координатами, определяющими положение единичной сосредоточенной силы на сооружении. При построении линий влияния внутренних усилий и реакций опорных связей упомянутая аналитическая связь может быть получена с помощью уравнений равновесия отдельных частей или всего сооружения в целом.

Ниже рассматриваются примеры построения линий влияния статическим способом и даются практические рекомендации, позволяющие осуществить контроль правильности решения задачи.

ПРИМЕР 3.2.1. Построить линию влияния изгибающего момента в сечении a балки (рис. 3.2).

Реакция опоры A при любом положении единичной сосредоточенной силы определится из условия равновесия балки в целом:

$$\sum F_y = 0, \quad -1 + V_A = 0, \\ V_A = 1.$$

1. Единичная сила находится левее рассматриваемого сечения, т.е. $0 < x \leq 2$ м. Для определения изгибающего момента в сечении a рассмотрим равновесие правой отсечённой части балки (рис. 3.2,б):

$$\sum \text{mom } (F)_a = 0, \\ M_a - 1 \cdot 4 = 0, \quad M_a = 4.$$

Последнее выражение представляет собой уравнение левой ветви линии влияния изгибающего момента в сечении a . Оно показывает, что изгибающий момент в рассматриваемом сечении постоянен при любом положении единичной силы левее сечения a и положителен, т.е. в этом сечении вытянуты нижние волокна. Ординаты ЛВ M_a откладываем под единичной сосредоточенной силой (рис. 3.2,в).

2. Единичная сила находится правее рассматриваемого сечения, т.е. $2 \text{ м} \leq x \leq 8 \text{ м}$. Снова рассматриваем равновесие правой отсечённой части балки (рис. 3.2,г):

$$\sum \text{mom } (F)_a = 0, \quad M_a + 1 \cdot (x - 2) - 1 \cdot 4 = 0, \\ M_a = 6 - x \text{ (уравнение правой ветви ЛВ } M_a).$$

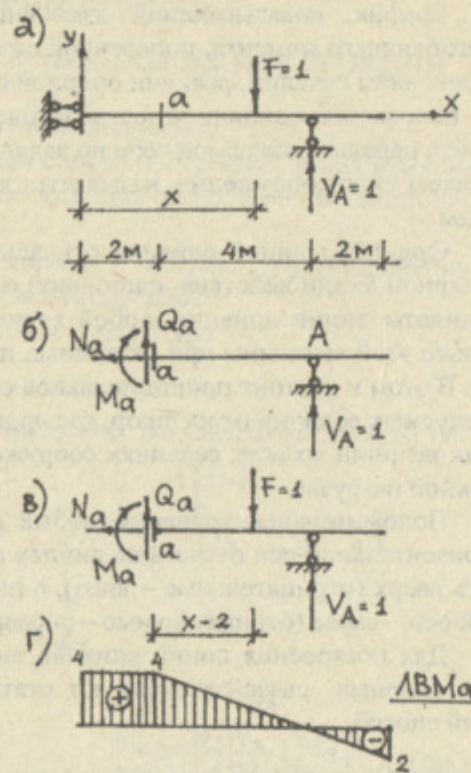


Рис. 3.2

С учётом линейности полученного уравнения правую ветвь ЛВ M_a построим, определив значения изгибающего момента в сечении a при двух положениях единичного груза:

$$\text{при } x = 2 \text{ м} \quad M_a = 6 - 2 = 4; \\ \text{при } x = 6 \text{ м} \quad M_a = 6 - 6 = 0 \text{ (рис. 3.2,з).}$$

Когда единичная сила занимает на балке крайнее правое положение ($x = 8 \text{ м}$), $M_a = 6 - 8 = -2$ (рис. 3.2,з). Знак "минус" означает, что при этом положении силы $F = 1$ в сечении a вытянуты верхние волокна, а абсолютная величина изгибающего момента равна двум единицам.

Из рассматриваемого примера видно, что левая и правая ветви линии влияния изгибающего момента, расположенные по обе стороны от сечения a , пересекаются под этим сечением (рис. 3.2,з).

ПРИМЕР 3.2.2. Построить линию влияния поперечной силы в сечении a . Маршрут движения единичной сосредоточенной силы показан на рис. 3.3,а пунктирной линией.

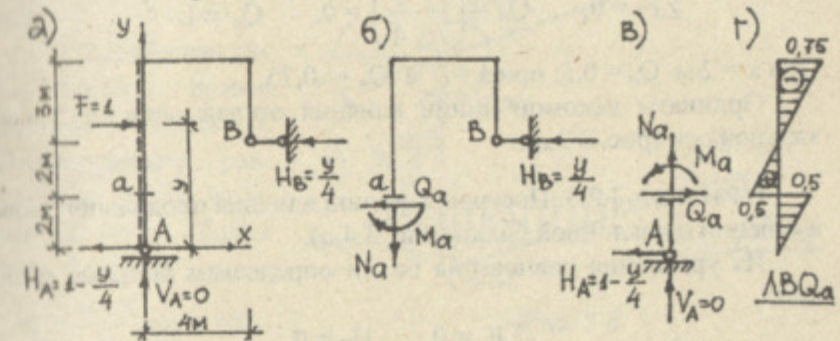


Рис. 3.3

Определяем опорные реакции рамы:

$$\sum F_y = 0, \quad V_A = 0.$$

$$\sum \text{mom } (F)_B = 0, \quad 1 \cdot (y - 4) + 4H_A = 0, \quad H_A = 1 - \frac{y}{4}.$$

$$\sum \text{mom } (F)_A = 0, \quad 1 \cdot y - 4H_B = 0, \quad H_B = \frac{y}{4}.$$

$$\sum F_x = 0, \quad 1 - \frac{y}{4} - \left(1 - \frac{y}{4}\right) = 0, \quad 0 = 0 \text{ (проверка)}.$$

Последовательно рассмотрим два интервала движения единичной силы.

1. Сила $F = 1$ находится ниже сечения a ($0 \leq y \leq 2$ м). Для определения Q_a рассматриваем равновесие верхней отсечённой части рамы (рис. 3.3,б):

$$\sum F_x = 0, \quad -Q_a - \frac{y}{4} = 0,$$

$Q_a = -\frac{y}{4}$ (уравнение нижней ветви ЛВ Q_a). При $y = 0$ $Q_a = 0$, при $y = 2$ м $Q_a = -0,5$.

2. Единичная сила находится выше сечения a ($2 \text{ м} \leq y \leq 7$ м). Уравнение верхней ветви ЛВ Q_a получим, рассматривая равновесие части рамы, расположенной ниже сечения a (рис. 3.3,в):

$$\sum F_x = 0, \quad Q_a - \left(1 - \frac{y}{4}\right) = 0, \quad Q_a = 1 - \frac{y}{4}.$$

При $x = 2$ м $Q_a = 0,5$; при $x = 7$ м $Q_a = -0,75$.

Ординаты искомой линии влияния откладываем от вертикальной оси (рис. 3.3,г).

ПРИМЕР 3.2.3. Построить линию влияния продольной силы в сечении a наклонной балки (рис. 3.4,а).

Из уравнения равновесия балки определяем опорные реакции:

$$\sum F_x = 0, \quad H_B = 0.$$

$$\sum \text{mom} (F)_A = 0, \quad 1 \cdot x - 6V_B = 0, \quad V_B = \frac{x}{6}.$$

$$\sum \text{mom} (F)_B = 0, \quad -1 \cdot (6 - x) + 6V_A = 0, \quad V_A = \frac{6 - x}{6}.$$

1. Единичная сила находится левее сечения a ($-2 \text{ м} \leq x \leq 0$). Рассматриваем равновесие правой отсечённой части балки (рис. 3.4,б):

$$\sum F_x = 0, \\ -N_a + \frac{x}{6} \sin \alpha,$$

$$N_a = \frac{x}{6} \sin \alpha, \text{ (уравнение левой ветви ЛВ } N_a).$$

Вычисляем значение продольной силы в сечении a при двух положениях силы $F = 1$:

$$x = -2 \text{ м},$$

$$N_a = -0,33 \sin \alpha,$$

$x = 0$ ($F = 1$ находится левее сечения a), $N_a = 0$.

2. Единичная сила находится правее сечения a ($0 \leq x \leq 8$ м). Рассматриваем равновесие левой отсечённой части балки (рис. 3.4,в):

$$N_a + \frac{6 - x}{6} \sin \alpha = 0,$$

$$N_a = -\frac{6 - x}{6} \sin \alpha \text{ (уравнение правой ветви ЛВ } N_a).$$

Положение этой ветви определяется двумя ординатами: $x = 0$ ($F = 1$ находится правее сечения a), $N_a = -1 \cdot \sin \alpha$; $x = 6$ м, $N_a = 0$; $x = 8$ м, $N_a = 0,33 \sin \alpha$.

Откладывая полученные ординаты под соответствующими положениями единичной силы, получим ЛВ N_a (рис. 3.4,г).

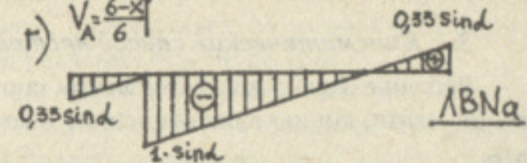
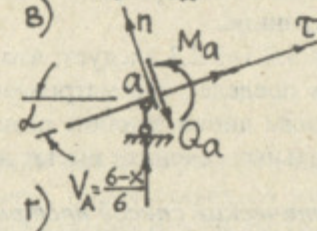
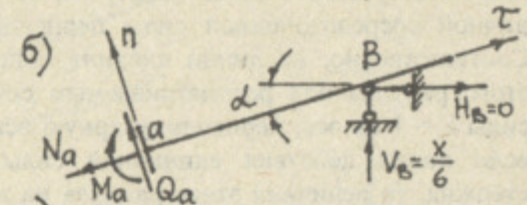
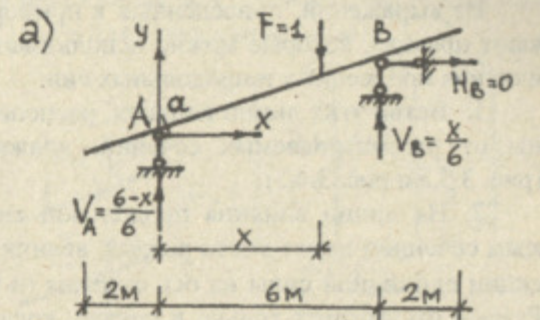


Рис. 3.4

Из выражений, приведённых в примерах 3.2.2 и 3.2.3, вытекают правила, которые можно использовать для проверки линий влияния поперечных и продольных сил.

1. Ветви этих линий влияния, расположенные по обе стороны от рассматриваемых сечений, должны быть параллельны (рис. 3.3,2 и рис. 3.4,2).

2. На линии влияния продольной силы под рассматриваемым сечением имеет место разрыв, величина которого равна проекции единичной силы на ось стержня (в примере 3.2.3 — $\sin \alpha$). Разрыв отсутствует только в случае, когда линия действия единичной сосредоточенной силы перпендикулярна оси стержня. Соответственно, на линии влияния поперечной силы величина этого разрыва под рассматриваемым сечением равна проекции силы $F = 1$ на ось, перпендикулярную оси стержня. В частности, если линия действия единичной силы перпендикулярна оси стержня, то величина этого разрыва на линии влияния поперечной силы равна единице.

Из примеров 3.2.1–3.2.3 следует, что для статически определимых систем в пределах рассматриваемых интервалов движение единичной силы линии влияния реакций опор и внутренних усилий в произвольных сечениях имеют линейный характер.

3.3. Кинематический способ построения линий влияния

Решение задачи кинематическим способом начинается с удаления связи, линию влияния усилия в которой требуется построить.

Для построения линии влияния изгибающего момента в сечении К (рис. 3.5,а) удаляется связь, препятствующая взаимному повороту близко расположенных друг от друга соседних сечений, т.е. между этими сечениями вводится цилиндрический шарнир (рис. 3.5,б).

Построению линий влияния поперечной и продольной силы в сечении К (рис. 3.5,а) предшествует удаление связей, препятствующих взаимному перемещению близко расположенных друг от друга сечений соответственно в направлении перпендикулярном

оси стержня и в направлении вдоль оси стержня (рис. 3.5,в — для поперечной силы, рис. 3.5,г — для продольной силы).

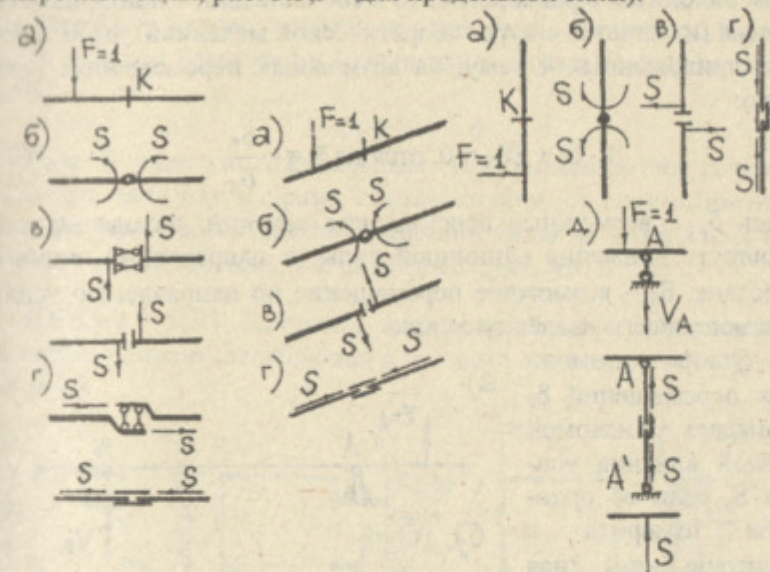


Рис. 3.5

Для построения линии влияния реакции шарнирно-подвижной опоры удаляется связь, препятствующая взаимному перемещению точек А и А' в направлении оси опоры (рис. 3.5,д).

В дальнейшем, не нарушая общности рассуждений, рассмотрим построение линии влияния реакции V_B шарнирно-подвижной опоры в однопролётной балке с консолями (рис. 3.6,а). Удалив вертикальную связь, образуем механизм с одной степенью свободы, к которому приложена сила $F = 1$ и неизвестное усилие S , заменяющее действие отброшенной связи (рис. 3.5,б). Поворотом диска 1 вокруг абсолютного мгновенного центра вращения 10 против часовой стрелки на бесконечно малый угол зададим механизму возможные перемещения (рис. 3.6,в). В случае более сложных по своей структуре механизмов возможные перемещения задают, используя теорему о мгновенных центрах вращения трёх дисков или план перемещений.

Так как под действием сил $F = 1$ и S рассматриваемый механизм находится в равновесии, то в соответствии с принципом Лагранжа (излагается в курсе теоретической механики), работа всех сил, приложенных к нему, на возможных перемещениях равна нулю:

$$1 \cdot \delta_F + S \delta_S = 0, \text{ отсюда } S = -\frac{\delta_F}{\delta_S}. \quad (3.1)$$

Здесь δ_F — возможные перемещения сечений, находящихся на маршруте движения единичной силы, в направлении линии её действия; δ_S — возможное перемещение по направлению усилия S , заменяющего удалённую связь.

Эпюра возможных перемещений δ_F совпадает с искомой линией влияния усилия S , если её ординаты измерить в масштабе $\delta_S = 1$. Зная этот масштаб и учитывая линейность эпюр возможных перемещений в пределах дисков механизма, необходимые ординаты ЛВ S (в нашем случае ЛВ V_B — рис. 3.6,2) определим из геометрических соображений. Если возможные перемещения механизму заданы так, что работа усилия S на соответствующем перемещении положительна, то знак линии влияния этого усилия выше

горизонтальной оси отсчёта или левее вертикальной будет поло-

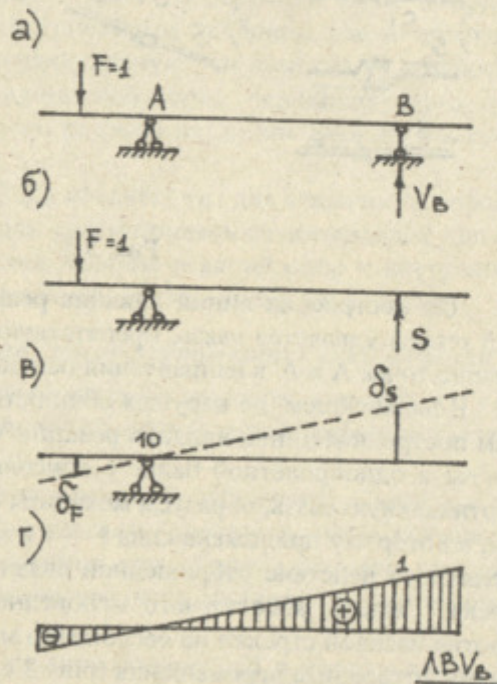


Рис. 3.6

жительным. Действительно, единичная сила, направленная вниз или направо, на перемещениях сечений механизма, происходящих вверх или налево, совершает отрицательную работу. В этом случае условие равновесия механизма в форме Лагранжа запишется:

$$-1 \cdot \delta_F + S \delta_S = 0$$

и усилие S будет положительным. При перемещении сечений механизма вниз или направо, соответственно от горизонтальной и вертикальной осей, работа единичной силы на возможных перемещениях положительна и из (3.1) следует, что $S < 0$.

ПРИМЕР 3.3.1. Для рамы, показанной на рис. 3.7,а, построить линии влияния изгибающего момента и поперечной силы в сечении а.

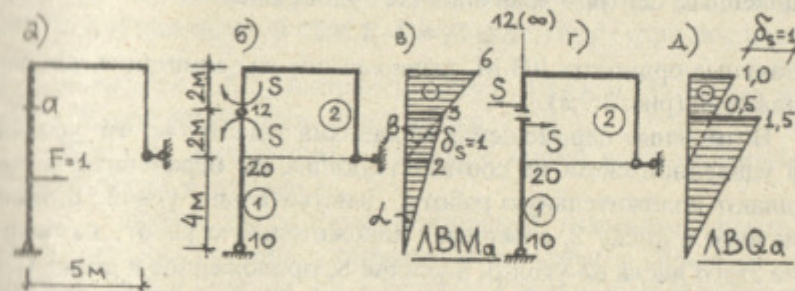


Рис. 3.7

1. ЛВ M_a . В сечение a вводим цилиндрический шарнир. Действие отброшенной угловой связи заменяем положительным усилием S — сосредоточенными моментами, вытягивающими на левой стороне рамы правые волокна (рис. 3.7,б). У механизма с одной степенью свободы неподвижная точка диска 1 является его абсолютным мгновенным центром вращения 10. Положение относительного мгновенного центра вращения 12 дисков 1 и 2 очевидно (рис. 3.7,б). В соответствии с теоремой о мгновенных центрах вращения трёх дисков абсолютный мгновенный центр вращения 20 диска 2 будет расположен на пересечении двух прямых: с одной стороны, прямой, проходящей через 10 и 12, с другой —

прямой, совпадающей с осью горизонтальной связи диска 2 (рис. 3.7,б).

Строим эпюру возможных горизонтальных перемещений сечений левой стойки рамы. Прямые, соответствующие дискам 1 и 2, на этой эпюре пересекают ось отсчёта под абсолютными мгновенными центрами вращения 10 и 20; взаимное же пересечение этих прямых происходит под их относительным мгновенным центром вращения 12 (рис. 3.7,в).

Ординаты полученной эпюры возможных перемещений измеряем в масштабе $\delta_s = 1$. В нашем случае δ_s — это взаимный угол поворота дисков 1 и 2 на эпюре возможных перемещений (рис. 3.7,в). Так как возможные перемещения малы, то $\operatorname{tg} \delta_s = 1$, следовательно, ордината ЛВ M_a , расположенная под абсолютным мгновенным центром вращения 20, будет равна:

$$2 \operatorname{tg} \delta_s = 2 \cdot 1 = 2.$$

Остальные ординаты ЛВ M_a вычисляются из геометрических соображений (рис. 3.7,в).

Возможные перемещения механизма заданы так, что усилия S в удалённой связи на соответствующих им перемещениях совершают положительную работу. Действительно, усилие S , приложенное к диску 2, совершает положительную работу на повороте этого диска на угол β , а усилие S , приложенное к диску 1, — отрицательную работу на его повороте по часовой стрелке на угол α . Суммарная работа усилий S положительна, т.е.

$$S\beta - S\alpha > 0, \text{ так как } \beta > \alpha.$$

В этом случае знак ЛВ M_a , расположенной правее вертикальной оси отсчёта, будет отрицательным. Это значит, что в сечении a при любом положении $F = 1$ на левой стойке рамы будут вытянуты не правые волокна, как это предполагалось ранее, а левые.

2. ЛВ Q_a . Механизм для построения этой линии влияния кинематическим способом показан на рис. 3.7,г. Относительный мгновенный центр вращения 12 дисков 1 и 2 этого механизма будет находиться в бесконечности по вертикали. Определение положений абсолютных мгновенных центров вращения 10 и 20

дисков 1 и 2 производится так же, как и в случае с ЛВ M_a (рис. 3.7,г).

Для построения эпюры возможных горизонтальных перемещений сечений левой стойки рамы поворачиваем диск 1 по часовой стрелке вокруг точки, расположенной под 10. Так как мгновенный центр 12 находится в бесконечности, то диск 2, поворачиваясь вокруг точки, расположенной под 20, останется параллельным диску 1 (рис. 3.7,д).

Учитывая, что линия действия единичной силы перпендикулярна оси стойки, разрыв на эпюре возможных перемещений δ_s принимаем за единицу. Так как горизонтальное перемещение нижней "щёчки" поступательного шарнира больше, чем горизонтальное перемещение верхней "щёчки", то работа усилия S на этих перемещениях будет положительной. Это значит, что знак ЛВ Q_a , расположенной правее оси отсчёта, будет отрицательным.

ПРИМЕР 3.3.2. Построить ЛВ M_1 , ЛВ Q_2 и ЛВ V_B для многопролётной балки, показанной на рис. 3.8,а.

Детально рассмотрим построение линии влияния изгибающего момента в сечении 1.

1. Удаляем связь, препятствующую взаимному повороту двух соседних сечений, расположенных слева и справа от рассматриваемого сечения, т.е. в сечение 1 балки вводим цилиндрический шарнир. После этой операции балка преобразуется в механизм с одной степенью свободы (рис. 3.8,б).

2. Действие отброшенной связи заменяем положительным усилием S , т.е. сосредоточенными моментами, растягивающими нижние волокна (рис. 3.8,б).

3. Определяем положение абсолютных мгновенных центров вращения дисков 1–5 механизма. Диск 1 имеет неподвижную точку A , являющуюся его абсолютным мгновенным центром вращения 10. Абсолютный мгновенный центр вращения 50 диска 5 находится на пересечении двух вертикальных параллельных связей, соединяющих этот диск с диском "земля" (диском 0), т.е. в бесконечности по вертикали. Положение абсолютных мгновенных центров вращения 12, 23, 34 и 45 дисков механизма очевидно (рис. 3.8,б). Используя теорему о мгновенных центрах вращения

трёх дисков, определим положение абсолютных мгновенных центров вращения 20, 30 и 40 дисков 2, 3, 4. В частности, абсолютный мгновенный центр вращения 20 диска 2 расположен на пересечении прямой, проходящей через точки 10 и 12, и оси вертикальной связи, соединяющей диски 2 и 0.

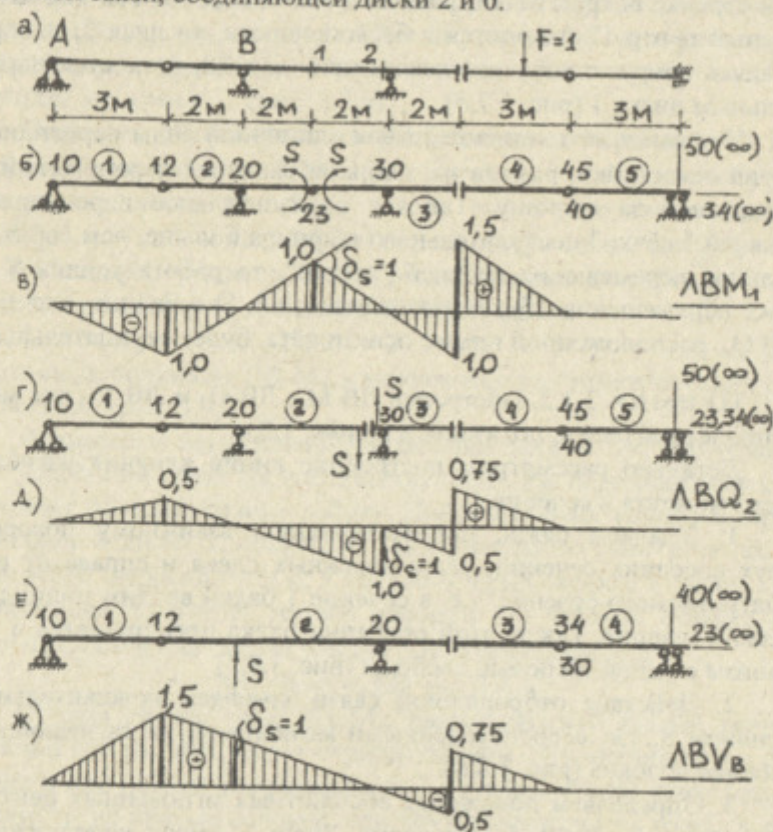


Рис. 3.8

4. По направлению положительного усилия S зададим возможные перемещения дискам 1–5 механизма и построим эпюру вертикальных перемещений сечений балки (рис. 3.8, в), совпадающей с ЛВ M_1 , если её ординаты измерить в масштабе $\delta_s = 1$ (рис. 3.9). Диск 5, абсолютный мгновенный центр которого находится в бесконечности, остаётся неподвижным, так как, с одной

стороны, он должен быть параллелен диску 0, а с другой – вертикальное перемещение его крайнего правого сечения равно нулю.

5. Вычислим ординату m_1 ЛВ M_1 под сечением 1. Из рис. 3.9 следует, что $\alpha + \beta = 1$. При малых перемещениях $\alpha \approx \tan \alpha$, $\beta \approx \tan \beta$, или $\tan \alpha + \tan \beta = 1$. После подстановки в последнее соотношение значений $\tan \alpha$ и $\tan \beta$ получим:

$$\frac{m_1}{a} + \frac{m_1}{b} = 1, \quad m_1 = \frac{ab}{a+b} = \frac{ab}{l}.$$

Для нашего случая $a = b = 2$ м и ордината m_1 ЛВ M_1 под рассматриваемым сечением равна единице. Учитывая линейность эпюры возможных перемещений дисков механизма, остальные ординаты этой линии влияния определим из геометрических соображений. Линия влияния изгибающего момента в сечении 1 показана на рис. 3.8, в.

Механизмы для получения ЛВ Q_2 и ЛВ V_B , представлены на рис. 3.8, г, е, а сами линии влияния – Q_2 и V_B , на рис. 3.8, д, ж. Читателям предоставляется возможность самостоятельно осмыслить ход решения этих задач.

Из примера 3.3.2 следует, что ветви линий влияния внутренних усилий и реакций опорных связей пересекаются под цилиндрическими шарнирами и имеют разрывы под поступательными шарнирами соответствующих механизмов, причём ветви линий влияния, расположенные по обе стороны от поступательных шарниров параллельны.

3.4. Матрицы влияния и способы их формирования

Для расчёта сооружений на различные виды воздействий (собственный вес, снег, ветер, крановая нагрузка и т.д.), тогда, когда требуется какие-либо величины (реакции, внутренние усилия, перемещения) определять в группе связей и в группе отдель-

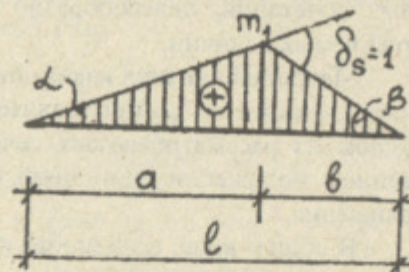


Рис. 3.9

ных сечений от каждого из этих воздействий или от их различных сочетаний, целесообразно использовать матрицы влияния требуемых величин.

Матрицей влияния какой-либо величины называется таблица чисел, каждое из которых является значением этой величины в одном из рассматриваемых сечений сооружения при фиксированном положении единичной силы на заданном маршруте её движения.

В общем виде, если любая величина d определяется в n сечениях сооружения при m положениях единичной силы, её матрица влияния запишется:

$$V_d = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1j} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2j} & \dots & d_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{i1} & d_{i2} & \dots & d_{ij} & \dots & d_{im} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nj} & \dots & d_{nm} \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

где d_{ij} — искомая величина в сечении i от единичной силы, действующей в сечении j .

Из матрицы (3.2) следует, что элементы её i -ой строки представляют собой значения исследуемой величины d в сечении i при различных положениях единичной силы ($j = 1, 2, \dots, m$), т.е. могут быть получены с помощью ЛВ d_i . Элементы j -го столбца матрицы (3.2) — это искомая величина в заданных сечениях ($i = 1, 2, \dots, n$) от единичной силы, расположенной в сечении j , т.е. они могут быть получены из эпюры величины d , построенной от этой силы. Таким образом, матрицы влияния искомых величин могут быть сформированы по строкам с помощью соответствующих линий влияния и по столбцам — из эпюр этих величин, построенных от единичной силы, расположенной в фиксированных сечениях.

ПРИМЕР 3.4.1. Составить матрицу влияния поперечных сил для балки на двух опорах. Сечения, для которых необходимо вы-

числить элементы этой матрицы, и фиксированные положения единичной силы показаны на рис. 3.10, а.

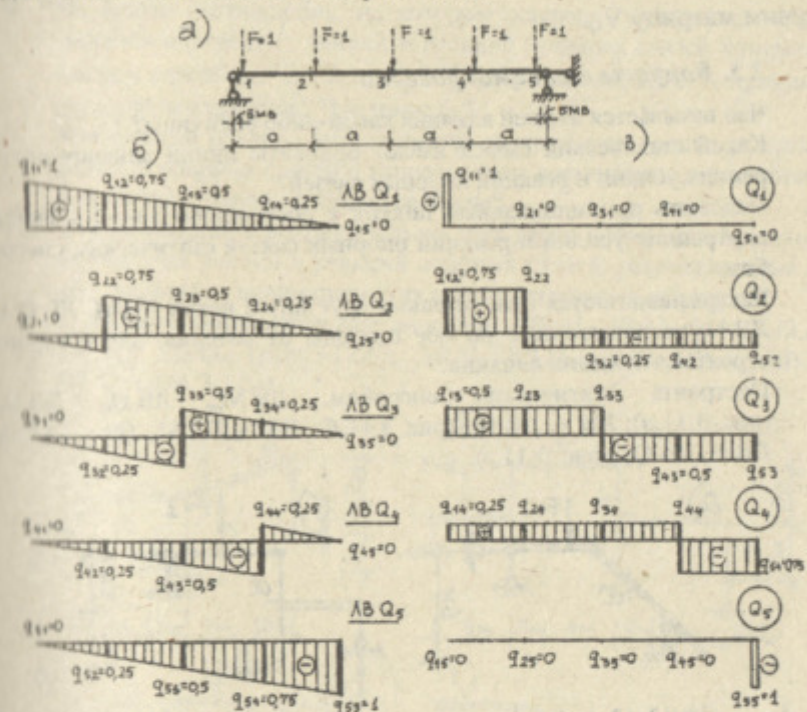


Рис. 3.10

1. Для формирования матрицы по строкам построим линии влияния поперечных сил для сечений 1–5 (рис. 3.10, б).

$$V_Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} & q_{15} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} & q_{25} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} & q_{35} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} & q_{45} \\ q_{51} & q_{52} & q_{53} & q_{54} & q_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,75 & 0,50 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0,50 & 0,25 & 0 \\ 0 & -0,25 & 0,50 & 0,25 & 0 \\ 0 & -0,25 & -0,50 & 0,25 & 0 \\ 0 & -0,25 & -0,50 & 0,25 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Матрица V_Q может быть сформирована по столбцам. Для этого необходимо построить эпюры поперечных сил в балке от

единичной силы, расположенной в сечениях 1–5 (рис. 3.10,б). Последовательно размещая по столбцам ординаты эпюр Q_1 – Q_5 , получим матрицу V_Q .

3.5. Вопросы для самопроверки

1. Что называется линией влияния какой-либо величины?
2. Какой статический смысл имеют ординаты линий влияния внутренних усилий и реакций опорных связей?
3. Изложить принципиальный подход к построению линий влияния внутренних усилий и реакций опорных связей статическим способом.
4. Как располагаются относительно друг друга ветви ЛВ M , ЛВ Q и ЛВ N , расположенные по обе стороны от сечения, для которого строятся эти линии влияния?
5. Построить статическим способом: ЛВ M_a , ЛВ Q_a , ЛВ N_a (рис. 3.11,а); ЛВ V , ЛВ N_a (рис. 3.11,б); ЛВ H , ЛВ M_a (рис. 3.11,в); ЛВ H , ЛВ Q_a (рис. 3.11,г).

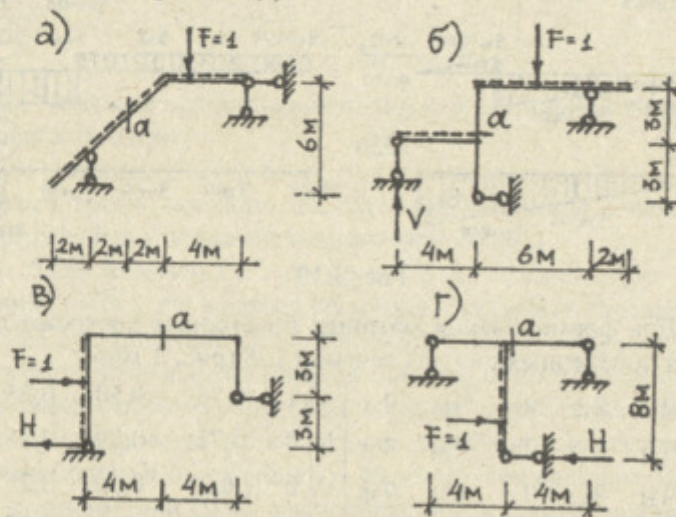


Рис. 3.11

6. Изложите общий порядок построения линий влияния внутренних усилий и реакций опорных связей кинематическим способом.
7. Задана рама с наклонным элементом. Изобразите механизмы с одной степенью свободы для построения линий влияния изгибающих

моментов, поперечных и продольных сил в произвольном сечении наклонного элемента.

8. Запишите соотношение, на котором основано построение линий влияния внутренних усилий и реакций опорных связей кинематическим способом. Что такое δ_s ? Почему перемещение δ_s принимается равным единице? Что такое δ_r ?
9. Как связано правило знаков линий влияния внутренних усилий и реакций опорных связей с направлением возможного перемещения механизма с одной степенью свободы?
10. Как располагаются относительно друг друга ветви линий влияния внутренних усилий и реакций опорных связей, расположенные по обе стороны от цилиндрических и поступательных шарниров?
11. Построить кинематическим способом: ЛВ H , ЛВ M_a (рис. 3.12,а); ЛВ M_a , ЛВ Q_a (рис. 3.12,б); ЛВ V , ЛВ N_a (рис. 3.12,в); ЛВ H , ЛВ Q_a (рис. 3.12,г).

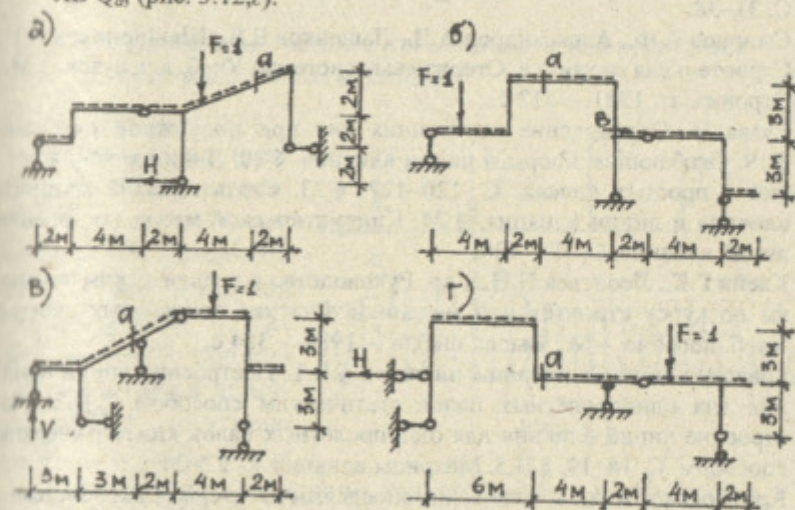


Рис. 3.12

12. Что называется матрицей влияния какой-либо величины? Какой смысл имеет элемент матрицы влияния какой-либо величины, расположенный на пересечении i -ой строки и j -го столбца?
13. Какой смысл имеет i -я строка и j -ый столбец матрицы влияния какой-либо величины? Каким способом может быть произведено формирование матриц влияния внутренних усилий и реакций опорных связей?

3.6. Рекомендуемая литература

1. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем: Учеб. для вузов. — М.: Изд-во ассоциации строительных вузов, 1996. — 541 с.
Глава 3. Расчёт статически определимых систем на подвижную нагрузку. § 3.1. Понятия о линиях влияния. § 3.2. Построение линий влияния усилий простых балок (статический метод). С. 48–52. § 3.4. Кинематический метод построения линий влияния. С. 53–55. § 3.8. Понятие о матрицах влияния. С. 61–63.
2. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика: Учеб. для вузов. — М.: Высш. школа, 1986. — 607 с.
Глава 2. Балки. § 2.2. Линии влияния опорных реакций для однопролётных и консольных балок. § 2.3. Линии влияния изгибающих моментов и поперечных сил для однопролётных и консольных балок. С. 31–38.
3. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лашенков Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Стержневые системы: Учеб. для вузов. — М.: Стройиздат, 1981. — 512 с.
Глава V. Определение внутренних сил при подвижной нагрузке. § 19. Огибающие эпюры и линии влияния. § 20. Линии влияния усилий в простых балках. С. 120–127. § 23. Связь понятий матрицы влияния и линии влияния. § 24. Кинематический метод построения линий влияния. С. 134–139.
4. Клейн Г.К., Леонтьев Н.Н. и др. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. Статика стержневых систем: Учеб. пособие. — М.: Высш. школа. — 1980. — 384 с.
Глава II. Линии и матрицы влияния. § II.1. Построение линий влияния для однопролётных балок статическим способом. § II.2. Построение линий влияния для однопролётных балок кинематическим способом. С. 14–19. § II.5. Матрицы влияния. С. 22–24.
5. Крамаренко А.А. Статически определимые стержневые системы. Кинематический анализ. Балки и рамы: Учеб. пос. — Новосибирск: НГАС, 1997. — 76 с.
Глава 2. § 2.2. Статический способ построения линий влияния. § 2.3. Кинематический способ построения линий влияния. С. 41–57. § 2.6. Матрицы влияния и их практическое использование. С. 64–68.

ЛЕКЦИЯ ЧЕТВЁРТАЯ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ В ПРАКТИЧЕСКИХ РАСЧЁТАХ

- 4.1. Определение усилий от неподвижной нагрузки с помощью линий влияния
- 4.2. Построение линий влияния с учётом узловой передачи нагрузки
- 4.3. Определение невыгоднейшего положения подвижной системы жёстко-связанных сосредоточенных сил
- 4.4. Использование матриц влияния для определения усилий
- 4.5. Вопросы для самопроверки
- 4.6. Рекомендуемая литература

4.1. Определение усилий от неподвижной нагрузки с помощью линий влияния

1. Влияние сосредоточенных сил (рис. 4.1). Из ЛВ S следует, что S_1 — это искомое усилие S от единичной силы, расположенной над ординатой S_1 . Так как над этой ординатой фактически действует сила F_1 , то усилие S от этой силы будет

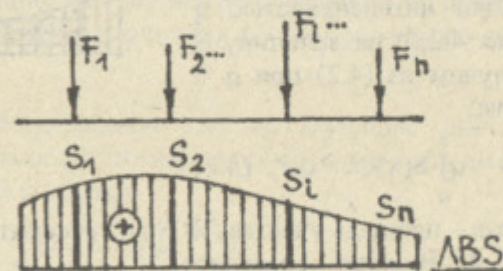


Рис. 4.1

$F_1 S_1$. Аналогично определим усилие S от F_2 — $F_2 S_2$, от F_i — $F_i S_i$; от F_n — $F_n S_n$. От одновременного действия всех сосредоточенных сил усилие S в соответствии с принципом независимости действия нагрузок будет равно:

$$S = \sum_{i=1}^n F_i S_i. \quad (4.1)$$

В соотношении (4.1) n — число сосредоточенных сил.

2. Влияние линейно распределённой по любому закону нагрузки интенсивностью $q(x)$. На участке бесконечно малой длины

dx заменим распределённую нагрузку элементарной сосредоточенной силой $q(x)dx$ (рис. 4.2, а). Элементарное влияние этой силы на величину S вычислим, используя соотношение (4.1):

$$dS = q(x)dx S(x).$$

Устремим длину элементарного участка dx к нулю, а количество этих участков к бесконечности. Получим полное значение усилия S от заданной нагрузки в виде интегральной суммы:

$$S = \int_a^c q(x) S(x) dx. \quad (4.2)$$

3. Влияние равномерно распределённой нагрузки интенсивностью q (рис. 4.2, б) на величину S получим из (4.2) при $q = \text{const}$:

$$S = q \int_a^c S(x) dx = q\omega, \quad (4.3)$$

где ω — площадь участка ЛВ S под рассматриваемой нагрузкой.

4. Влияние сосредоточенного момента на величину S рассмотрим для случая линейного участка ЛВ S (рис. 4.3). Сосредоточенный момент M заменим парой сил с плечом Δx (рис. 4.3) и, следовательно, сосредоточенными силами, составляющими пару, равными $M/\Delta x$. С учётом (4.1):

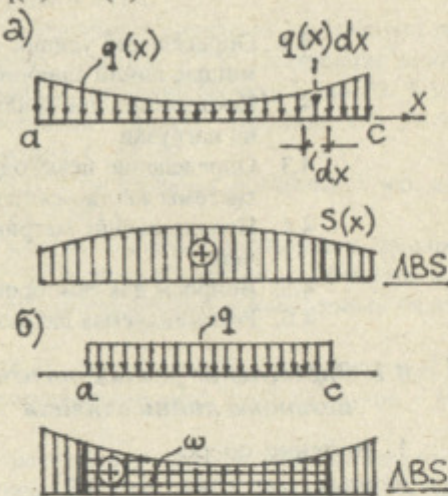


Рис. 4.2

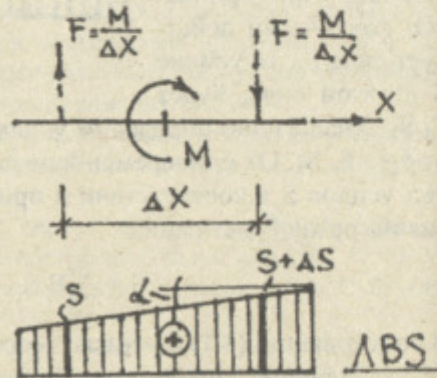


Рис. 4.3

$$S = -\frac{M}{\Delta x} S + \frac{M}{\Delta x} (S + \Delta S) = M \frac{\Delta S}{\Delta x} = M \operatorname{tg} \alpha.$$

При наличии n сосредоточенных моментов будем иметь:

$$S = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \operatorname{tg} \alpha_i, \quad (4.4)$$

где α_i — угол наклона участка линии влияния, расположенного под сосредоточенным моментом M_i .

Знак влияния определяется знаком произведения величин, входящих в формулы (4.1)–(4.3), т.е. знаком нагрузки и знаком ординаты или участков линии влияния исследуемой величины. Нагрузка считается положительной, если она действует сверху вниз и слева направо, и отрицательной — при действии снизу вверх и справа налево. Для определения знака влияния сосредоточенного момента рекомендуется представить его в виде пары сил (рис. 4.3). Знак наибольшего по абсолютной величине произведения составляющей пары сил на соответствующую ординату линии влияния и определит знак влияния рассматриваемого сосредоточенного момента.

ПРИМЕР 4.1.1. Загружением соответствующих линий влияния вычислить изгибающий момент и поперечную силу в сечении a рамы от заданной нагрузки.

ЛВ M_a и ЛВ Q_a построение которых кинематическим способом подробно рассмотрено в примере 3.3.1 третьей лекции, с необходимыми для решения задачи ординатами показаны на рис. 4.4, б, в.

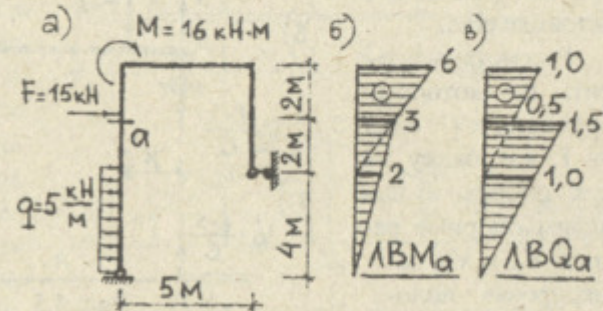


Рис. 4.4

(автомобили, железнодорожные составы и т.д.) и имеющих треугольное очертание линий влияния внутренних усилий и реакций опорных связей (рис. 4.6).

Влияние системы грузов ("поезда"), занимающих произвольное положение на сооружении, определяемое абсциссой x , на величину S определится по формуле (4.1):

$$S = f(x) = F_1 S_1 + F_2 S_2 + F_3 S_3 + F_4 S_4 + F_5 S_5 = \\ = F_1 x \operatorname{tg} \alpha + F_2 (x + d_1) \operatorname{tg} \alpha + F_3 (x + d_1 + d_2) \operatorname{tg} \alpha + \\ + F_4 (a + b - x - d_1 - d_2 - d_3) \operatorname{tg} \beta + F_5 (a + b - x - d_1 - d_2 - d_3 - d_4) \operatorname{tg} \beta.$$

Первая производная функции $S = f(x)$ после несложных преобразований запишется:

$$\frac{dS}{dx} = (F_1 + F_2 + F_3) \operatorname{tg} \alpha - (F_4 + F_5) \operatorname{tg} \beta. \quad (4.6)$$

Для определения положения "поезда", соответствующего максимальному значению S , исследуем выражение (4.6). Допустим, что поезд перемещается слева направо, т.е. в сторону возрастания x . Если при каком-либо его положении получим, что $\frac{dS}{dx} > 0$, то S представляет собой возрастающую функцию. Это значит, что "поезд" ещё не дошёл до наиболее невыгодного положения. Если же, наоборот, $\frac{dS}{dx} < 0$, то функция S будет убывающей, следовательно, "поезд" самое невыгодное положение уже прошёл. Таким образом, искомое положение "поезда" характеризуется тем, что в момент перехода через это положение производная $\frac{dS}{dx}$ меняет свой знак.

Из приведённых рассуждений следует, что самым невыгодным положением "поезда" будет то, при котором один из грузов, называемый критическим, стоит над вершиной линии влияния. Действительно, если над вершиной или бесконечно близко к вершине нет ни одного груза, то правая часть выражения (4.6), не содержащая x , не может изменить своего знака при бесконечно малом продвижении "поезда" в ту или другую сторону. При переходе любого груза через вершину линии влияния величина

производной может внезапно измениться, так как в правой части формулы (4.6) слагаемое, содержащее этот груз, переводится из первой суммы во вторую или наоборот.

Допустим, что критическим является груз F_3 . Тогда должно оказаться следующее: когда он расположен левее вершины линии

влияния, то $\frac{dS}{dx} > 0$, а когда справа, то $\frac{dS}{dx} < 0$, т.е.

$$\left. \begin{aligned} (F_1 + F_2 + F_3) \operatorname{tg} \alpha - (F_4 + F_5) \operatorname{tg} \beta &> 0, \\ (F_1 + F_2) \operatorname{tg} \alpha - (F_3 + F_4 + F_5) \operatorname{tg} \beta &< 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Неравенства (4.7) дают возможность после некоторого количества попыток разыскать критический груз.

Задача об определении критического груза "поезда" может быть решена без попыток графически (рис. 4.7). В ЛВ S из точки B отложим все силы в последовательности $F_5, F_4, \dots, F_1$. Соединим точки A и K и из точки D проведем прямую параллельную прямой AK . Точка E расположится на критическом грузе, так как из подобия треугольников BED и BAK вытекает справедливость

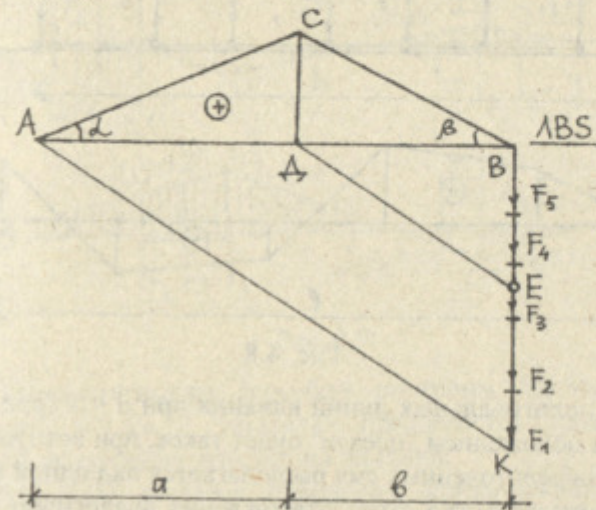


Рис. 4.7

Если точка Е совпадает с границей каких-либо двух сил F_i и F_{i+1} , то, в этом случае обе силы будут критическими. Это значит, что с момента, когда на вершину приходит сила F_i , и до момента, когда это положение займет соседняя сила, производная будет равна нулю, а влияние "движущегося поезда" останется постоянным.

Решение, удовлетворяющее условиям (4.7) справедливо, если при установке "поезда" в найденное самое невыгодное положение ни один из его сосредоточенных грузов не сойдет с участка ЛВ S_{AB} , т.е. если $(d_1 + d_2 + d_3 + d_4) < (a + b)$. В случае схода груза с участка АВ решение задачи придется повторить, учитывая лишь те силы, которые останутся над участком АВ линии влияния S .

При наличии поезда, длина которого превышает длину участка АВ линии влияния S , поиск критического груза осуществляется методом попыток.

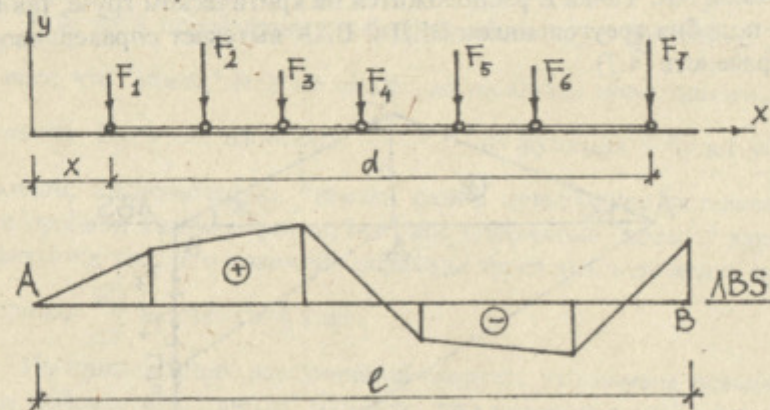


Рис. 4.8

Для полигональных линий влияния при $d < \ell$ (рис. 4.8) критическим положением "поезда" будет такое, при котором хотя бы одна из сосредоточенных сил располагается над одной из вершин ЛВ S . Доказательство этого утверждения аналогично вышеприведенному для линий влияния, имеющих треугольное очертание.

ПРИМЕР 4.3.1. Для многопролётной балки (рис. 4.9,а) определить расчётные значения изгибающего момента в сечении 1, поперечной силы в сечении 2, реакции на опоре В от подвижной системы жёстко связанных сосредоточенных сил $F_1 = 12$ кН и $F_2 = 18$ кН. "Поезд" на балке может занимать любое положение, причём головной груз F_1 может находиться в крайнем правом или крайнем левом положениях.

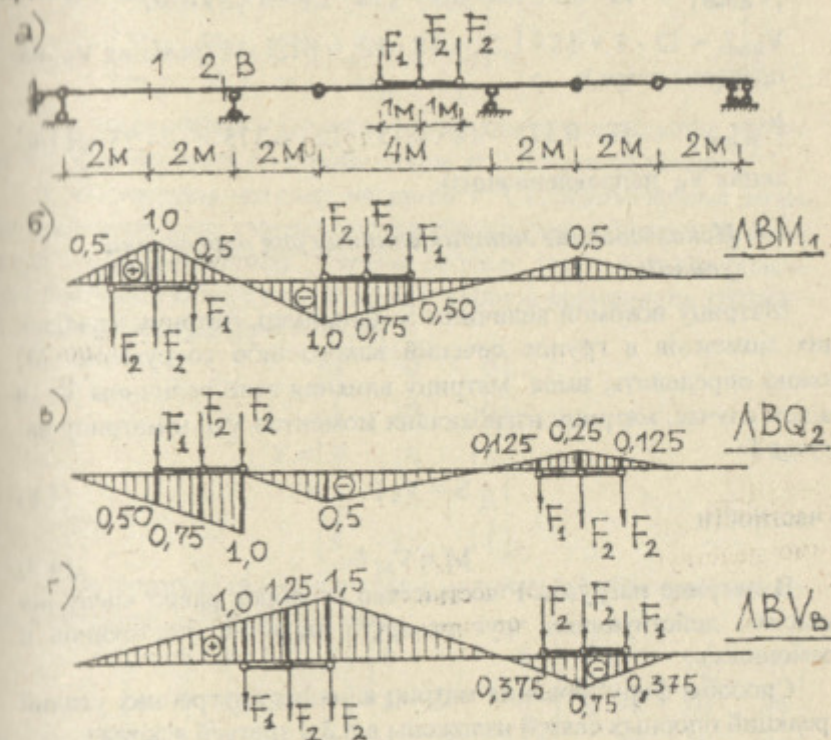


Рис. 4.9

1. Кинематическим способом построим ЛВ M_1 , ЛВ Q_2 и ЛВ V_B (рис. 4.9,б,в,г). Читателям предлагается проверить правильность построения этих линий влияния.

2. Методом попыток определим критическое положение "поезда" над положительными и отрицательными участками вышеперечисленных линий влияния (рис. 4.9,б,в,г).

3. Используя соотношение (4.1), вычислим требуемые расчётные усилия:

$$M_{1,\max} = 18 \cdot 0,5 + 18 \cdot 1 + 12 \cdot 0,5 = 33 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$|M_{1,\max}| = -18 \cdot 0,5 - 18 \cdot 0,75 - 12 \cdot 0,5 = -37,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$Q_{2,\max} = 12 \cdot 0,125 + 18 \cdot 0,25 + 18 \cdot 0,125 = 8,25 \text{ кН};$$

$$|Q_{2,\max}| = -12 \cdot 0,5 - 18 \cdot 0,75 - 18 \cdot 1 = -37,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$V_{B,\max} = 12 \cdot 1 + 18 \cdot 1,25 + 18 \cdot 1,5 = 61,5 \text{ кН (реакция } V_B \text{ направлена вверх)};$$

$$|V_{B,\max}| = -18 \cdot 0,375 - 18 \cdot 0,75 - 12 \cdot 0,375 = -24,75 \text{ кН (реакция } V_B \text{ направлена вниз)}.$$

4.4. Использование матриц влияния для определения усилий

Матрицу искомой величины S (например, матрицу изгибающих моментов в группе сечений какого-либо сооружения M) можно определить, имея матрицу влияния этой величины V_S (в нашем случае, матрицу изгибающих моментов V_M) и матрицу нагрузок F :

$$S = V_S F. \quad (4.8)$$

В частности

$$M = V_M F. \quad (4.9)$$

В матрице нагрузок F количество столбцов равно числу независимо действующих друг от друга нагрузок (постоянной и временных).

Способы формирования матриц влияния внутренних усилий и реакций опорных связей изложены в п.3.4 третьей лекции.

ПРИМЕР 4.4.1. Определить изгибающие моменты в сечениях 1–5 рамы (рис. 4.10,б) от трёх независимо действующих нагрузок: постоянной – F_1 , первой временной – F_2 , F_3 , F_4 , второй временной – F_5 , F_6 (рис. 4.10,а).

1. Строим линии влияния изгибающих моментов в сечении 1–5 (рис. 4.10,в). Читателям предлагается проверить правиль-

ность их построения: в сечениях 1 и 5 – статическим способом, в сечениях 2 и 4 – кинематическим.

2. Используя полученные ЛВ M_1 – M_5 , по строкам формируем матрицу влияния изгибающих моментов:

$$V_M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 & 0 & -3 \\ 6 & 6 & 3 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для закрепления материала читателям рекомендуется матрицу V_M сформировать по столбцам (см. п. 3.4 третьей лекции).

3. Формируем матрицу нагрузок F . Сосредоточенные силы, направленные вниз считаем положительными, а направленными вверх – отрицательными. Первый столбец этой матрицы описывает постоянную нагрузку, второй – первую временную, третий – вторую временную (рис. 4.10,а):

$$F = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 8 & 10 & 0 \\ 8 & 0 & -18 \\ 8 & 6 & 0 \\ 8 & -12 & 14 \end{bmatrix}.$$

4. По формуле (4.9) вычисляем матрицу изгибающих моментов в сечениях 1–5 заданной рамы:

$$M = V_M F = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 & 0 & -3 \\ 6 & 6 & 3 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 8 & 10 & 0 \\ 8 & 0 & -18 \\ 8 & 6 & 0 \\ 8 & -12 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 & 96 & -96 \\ 96 & 96 & -96 \\ 48 & 66 & -96 \\ -24 & 36 & -42 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Правило умножения матриц читателям рекомендуется вспомнить из курса линейной алгебры.

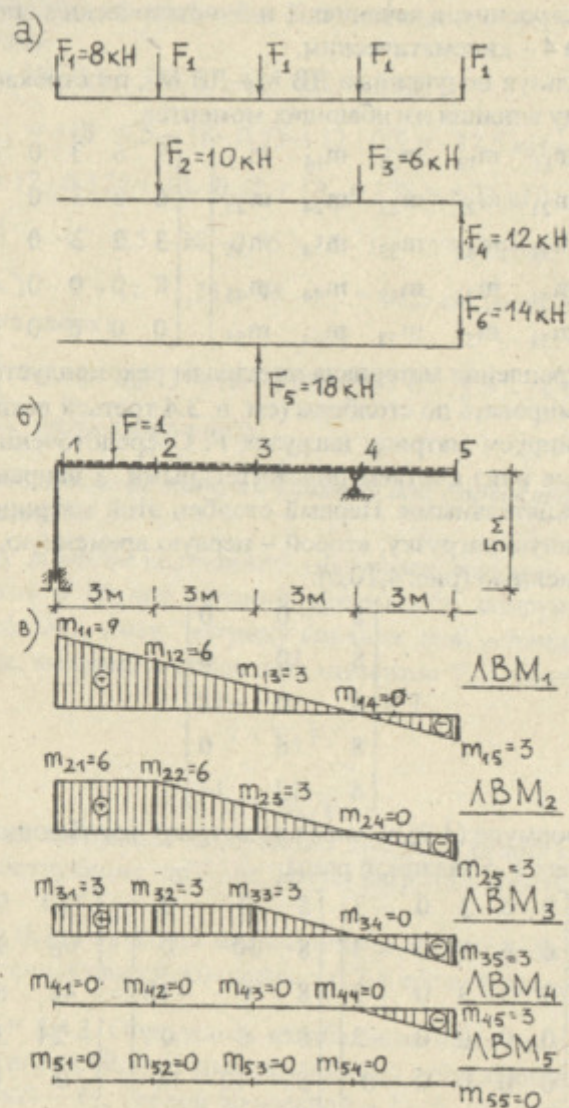


Рис. 4.10

Первая строка матрицы M — это изгибающий момент (в $\text{kH}\cdot\text{м}$) в сечении 1, вторая — в сечении 2 и т.д., наконец, пятая — в

сечении 5, соответственно, от постоянной (первый столбец), первой временной (второй столбец) и второй временной нагрузки (третий столбец).

Напоминаем читателям, что положительные значения элементов матрицы M соответствуют нижним вытянутым волокнам в рассматриваемых сечениях рамы, а отрицательные — верхним вытянутым волокнам.

4.5. Вопросы для самопроверки

1. Какие практические расчёты сооружений производятся с помощью линий влияния?
2. Как производится загрузка имеющих произвольное очертание линий влияния любых величин сосредоточенными силами, линейно распределённой по любому закону нагрузкой, равномерно распределённой нагрузкой?
3. Как производится загрузка линий влияния треугольного и полигонального очертания сосредоточенными моментами?
4. Построена линия влияния какой-либо величины при непосредственном действии $F = 1$ на сооружение. Как изменится вид этой линии влияния, если на каком-то участке единичная сила будет действовать на сооружение через узлы?
5. Как, используя линии влияния треугольного и полигонального очертания, определить самое невыгодное положение "поезда", состоящего из системы жёстко связанных сосредоточенных сил?
6. Как используются матрицы влияния различных величин в практических расчётах? В каких случаях целесообразно использование матриц влияния для расчёта сооружений?

4.6. Рекомендуемая литература

1. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем: Учеб. для вузов. — М.: Изд-во ассоциации строительных вузов, 1996. — 541 с.
Глава 3. Расчёт статически определимых систем на подвижную нагрузку. Теория линий влияния. § 3.5. Определение усилий от неподвижной нагрузки по линиям влияния. § 3.6. Невыгоднейшее нагружение линий влияния. Критический груз. § 3.7. Построение линии влияния при узловой передаче нагрузки. § 3.8. Понятие о матрицах влияния. С. 55–64.

2. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика: Учеб. для вузов. — М.: Высш. школа, 1986. — 607 с.
Глава 2. Балки. § 2.4. Линии влияния при узловой передаче нагрузки. § 2.5. Определение усилий с помощью линий влияния. § 2.6. Определение невыгоднейшего положения нагрузки на сооружении. Эквивалентная нагрузка. С. 38–50.
3. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лашенков Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Стержневые системы: Учеб. для вузов. — М.: Стройиздат, 1981. — 512 с.
Глава V. Определение внутренних усилий при подвижной нагрузке. § 21. Построение линий влияния при узловой передаче нагрузки. С. 127–132. § 25. Загружение линий влияния неподвижной нагрузкой. § 26. Загружение линий влияния подвижной нагрузкой. С. 139–145.
4. Клейн Г.К., Леонтьев Н.Н. и др. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. Статика стержневых систем: Учеб. пособие. — М.: Высш. школа, 1980. — 384 с.
Глава II. Линии и матрицы влияния. § II.3. Определение усилий по линиям влияния. § II.4. Нахождение невыгоднейшего положения подвижной нагрузки на сооружении. § II.5. Матрицы влияния. С. 18–24.
5. Крамаренко А.А. Статически определимые стержневые системы. Кинематический анализ. Балки и рамы: Учеб. пос. — Новосибирск: НГАС, 1997. — 76 с.
Глава 2. Расчёт балок и рам, имеющих главные и второстепенные части. § 2.4. Использование линий влияния в практических расчётах. С. 57–61. § 2.6. Матрицы влияния и их практическое использование. С. 64–68.

ЛЕКЦИЯ ПЯТАЯ

РАСЧЁТ БАЛОК И РАМ, ИМЕЮЩИХ ГЛАВНЫЕ И ВТОРОСТЕПЕННЫЕ ЧАСТИ

- 5.1. Предварительные замечания. Рабочая схема сооружения
- 5.2. Некоторые сведения из сопротивления материалов об определении внутренних усилий и построении их эпюры
- 5.3. Расчёт балок и рам на неподвижную нагрузку
- 5.4. Методика вычисления поперечных и продольных сил в отдельных сечениях сооружений, принятая в строительной механике
- 5.5. Замечания о построении линий влияния внутренних усилий и реакций опорных связей в балках и рамах
- 5.6. Объёмлющие эпюры внутренних усилий и их построение в случае подвижной временной нагрузки
- 5.7. Вопросы для самопроверки
- 5.8. Рекомендуемая литература

5.1. Предварительные замечания. Рабочая схема сооружения

В сопротивлении материалов рассматривается расчёт простых балок и рам, т.е. стержней с прямолинейной или ломаной осями, прикрепленных к диску "земля" тремя связями (рис. 5.1). С кинематической точки зрения простые балки и рамы — это однодисковые системы, геометрическая неизменяемость которых обеспечивается тем, что оси трёх линейных связей, соединяющие эти системы с диском "земля", не пересекаются в одной точке.

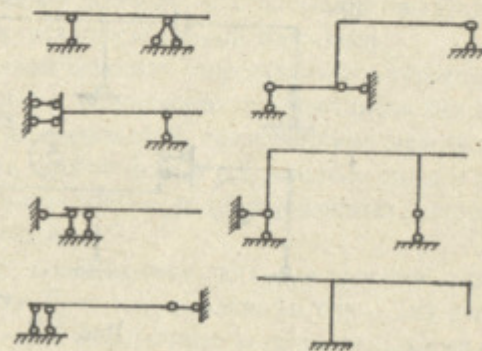


Рис. 5.1

В настоящей лекции рассматривается расчёт многодисковых систем, имеющих рабочую схему, т.е. систем, представляющих собой совокупность простых балок и рам, соединённых между собой цилиндрическими или поступательными шарнирами (рис. 5.2). Рабочая схема определяет соподчинённость отдельных простых балок и рам по отношению друг к другу, выявляет главные и второстепенные части сооружения и определяет порядок расчёта. Главная часть сооружения — это диск (в нашем случае — простая балка или рама), способный самостоятельно воспринимать заданную нагрузку. Остальные диски сооружения, прикрепляемые к главным дискам или соединяемые между собой, являются второстепенными.

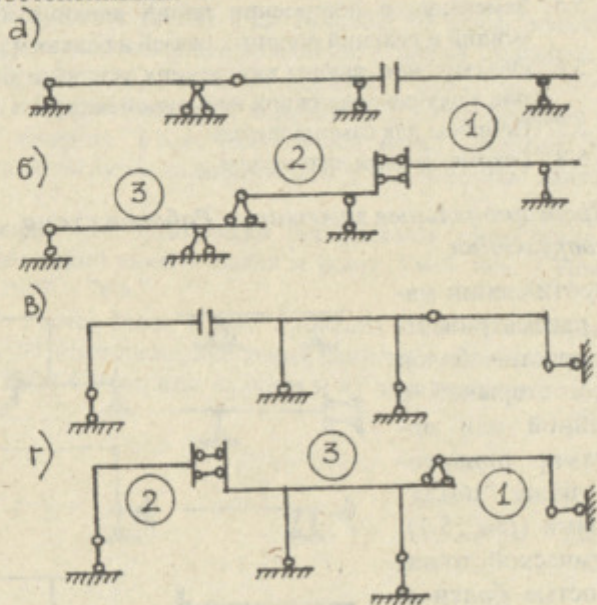


Рис. 5.2

Рабочая схема для многопролётной балки (рис. 5.2,а) показана на рис. 5.2,б. На этой схеме простая балка 3 является главной, балка 2 — второстепенной, 3 — более второстепенной. Для рамы, состоящей из трёх дисков с ломаной осью (рис. 5.2,в) рабочая схема приведена на рис. 5.2,г. Из неё следует, что рама 3 является

главной, а рамы 1, 2 — второстепенными и независимыми друг от друга.

Читателям следует иметь в виду, что часто для многодисковых систем построение рабочих схем невозможно, т.е. в них нет главных и второстепенных частей (рис. 5.3). Расчёт таких сооружений рассматривается в восьмой лекции.

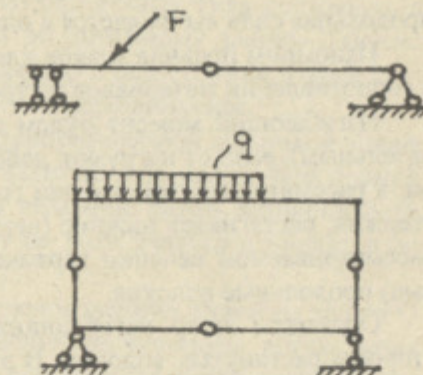


Рис. 5.3

5.2. Некоторые сведения из сопротивления материалов об определении внутренних усилий и построении их эпюр

Определение внутренних усилий (изгибающих и крутящих моментов, поперечных и продольных сил) подробно излагается в курсе сопротивления материалов. Здесь мы приводим наиболее важные сведения по данному вопросу, необходимые читателям для успешного изучения курса строительной механики.

В этой и последующей лекциях определение внутренних усилий в отдельных сечениях сооружения производится без использования аналитических выражений, связывающих между собой изгибающие моменты, поперечные и продольные силы и координаты, определяющие положение рассматриваемых сечений на различных грузовых участках.

Количество сечений, необходимое для построения эпюр внутренних усилий, должно быть минимальным: три — для изгибающих моментов и два — для поперечных и продольных сил на грузовом участке с равномерно распределённой нагрузкой, имеющей произвольное направление по отношению к оси стержня; два — для изгибающих моментов и одно — для поперечных и продольных сил на незагруженном участке. На участке, загру-

женном по любому закону нагрузкой перпендикулярной его оси, продольная сила вычисляется в одном сечении.

Напомним правила знаков для внутренних усилий, принятые в сопротивлении материалов и строительной механике.

Изгибающий момент будем считать положительным (отрицательным), если от нагрузки, действующей на отсечённую часть, он, в рассматриваемом сечении горизонтального или наклонного стержня, растягивает нижние (верхние) продольные волокна, а в рассматриваемом сечении вертикального стержня – правые (левые) продольные волокна.

Ординаты эпюр изгибающих моментов откладываются со стороны растянутых волокон. В этом случае отпадает необходимость в указании знаков изгибающих моментов на их эпюрах. Знаки для изгибающих моментов в дальнейшем будут использоваться только при вычислении их значений в отдельных сечениях заданного сооружения.

Поперечная сила, взятая в двух близко расположенных друг от друга сечениях, считается положительной (отрицательной), если от нагрузки, действующей на отсечённую часть сооружения, она стремится сдвинуть элемент, расположенный между двумя вышеупомянутыми сечениями рассматриваемого грузового участка, в направлении движения часовой стрелки (против движения часовой стрелки).

Продольная сила положительна, если от нагрузки, действующей на отсечённую часть сооружения, она вызывает в рассматриваемом сечении растягивающие продольные деформации и отрицательной, – если сжимающие продольные деформации.

Проверка правильности эпюр M и Q основана на дифференциальных зависимостях между интенсивностью распределённой нагрузки $q(s)$, направлением которой перпендикулярно оси стержня, и функциями, описывающими изменение вдоль оси стержня изгибающих моментов $M(s)$ и поперечных сил $Q(s)$:

$$q(s) = \frac{dQ(s)}{ds}, \quad Q(s) = \frac{dM(s)}{ds}, \quad q(s) = \frac{d^2M(s)}{ds^2}. \quad (5.1)$$

Из соотношения (5.1) следует:

1. На незагруженном участке поперечная сила постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. Тангенс угла наклона эпюры M по отношению к оси стержня в этом случае по абсолютной величине равен поперечной силе.

2. На участке с равномерно распределённой нагрузкой эпюра Q имеет вид наклонной прямой. Тангенс угла между этой прямой и осью стержня по абсолютной величине равен интенсивности нагрузки q . Изгибающий момент на этом участке изменяется по закону квадратной параболы.

3. Излому эпюры M под сосредоточенной силой на эпюре Q будет соответствовать разрыв, величина которого, когда линия действия силы перпендикулярна оси стержня, равна величине сосредоточенной силы.

4. Разрыв на эпюре M имеет место под сечением, где действует сосредоточенный момент. Величина этого разрыва равна величине сосредоточенных моментов.

5. Если ординаты эпюры M откладываются со стороны вытянутых волокон, то излом на эпюре M под сосредоточенной силой направлен в сторону действия этой силы. На участке с распределённой нагрузкой выпуклость эпюры M совпадает с направлением этой нагрузки.

Для контроля правильности построения эпюр поперечных и продольных сил полезно использовать следующие правила:

1. На участке без нагрузки или с распределённой по любому закону нагрузкой, перпендикулярной оси стержня, продольная сила постоянна.

2. В сечениях, где действуют сосредоточенные силы, произвольно ориентированные по отношению к оси стержня, на эпюрах Q и N имеют место разрывы. Величина разрыва на эпюре Q равна проекции сосредоточенной силы на нормаль к оси стержня в рассматриваемом сечении, а на эпюре N – проекции сосредоточенной силы на ось стержня.

3. Для грузовых участков, несущих распределённую нагрузку, произвольно направленную по отношению к оси стержня, справедливы следующие дифференциальные зависимости:

$$q_n(s) = \frac{dQ(s)}{ds}, \quad q_\tau(s) = \frac{dN(s)}{ds^2}, \quad (5.2)$$

где $q_n(s)$ и $q_\tau(s)$ – отнесенные к единице длины стержня интенсивности распределенной нагрузки, действующие соответственно перпендикулярно и параллельно его оси.

Из геометрической интерпретации соотношений (5.2) следует, что если

$$q_n(s) = \text{const} = q_n,$$

$$q_\tau(s) = \text{const} = q_\tau,$$

то тангенсы углов наклона эпюр Q и N к оси стержня будут равны q_n и q_τ (рис. 5.4), т.е.

$$\text{tg} \phi_Q = q_n,$$

$$\text{tg} \phi_N = q_\tau.$$

В рамах, после построения эпюр внутренних усилий и их качественной проверки с помощью вышеперечисленных правил, необходимо дополнительно произвести проверку условий равновесия для всех узлов и отдельных частей сооружения.

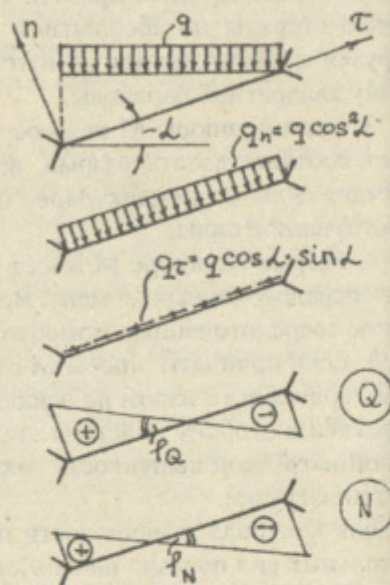


Рис. 5.4

5.3. Расчёт балок и рам на неподвижную нагрузку

Порядок расчёта сооружений, имеющих главные и второстепенные части, определяется их рабочей схемой. Расчёт начинается с независимых друг от друга самых второстепенных частей на нагрузки, непосредственно приложенные к ним. Затем реакции опорных связей этих частей с противоположным знаком передаются на менее второстепенные части, расчёт которых производится на совместное действие заданной нагрузки и переданных с более второстепенных частей опорных реакций. В последнюю

очередь рассчитываются главные балки и рамы, находящиеся под воздействием внешней нагрузки и реакций опорных связей, переданных с второстепенных частей.

ПРИМЕР 5.3.1. В балке, показанной на рис. 5.5, от заданной нагрузки построить эпюры внутренних усилий.

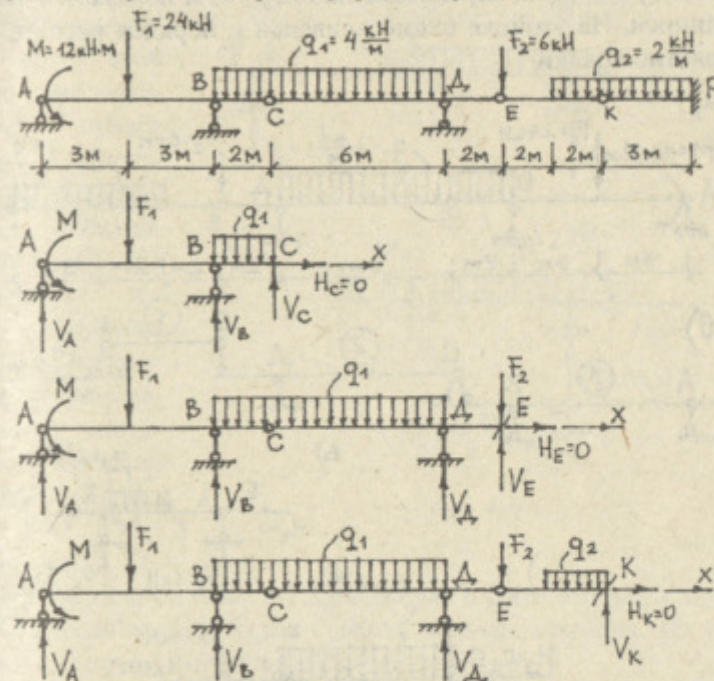


Рис. 5.5

Построим рабочую схему многопролётной балки. Консоль КР способна воспринимать любую нагрузку, т.е. является главным элементом заданной системы (главной балкой). Из уравнения равновесия $\sum F_x = 0$ частей многопролётной балки, расположенные левее шарниров С, Е, К (рис. 5.5), следует, что горизонтальные составляющие усилий в этих шарнирах отсутствуют, т.е. $H_C = H_E = H_K = 0$ и продольные силы во всех сечениях заданного сооружения равны нулю. Это значит, что балка АС может воспринимать вертикальную нагрузку независимо от других элемен-

тов и является также главной балкой, а балки СЕ и ЕК – второстепенными, причём балка ЕК, опёртая слева на балку СЕ, а справа на консоль КР, – более второстепенной. С кинематической точки зрения балка ЕК является связью, препятствующей горизонтальным перемещениям балок СЕ и АС. На рабочей схеме (рис. 5.6, б) эта связь перенесена на опору А и показана пунктирной линией. На этой же схеме приведён и порядок расчёта многопролётной балки.

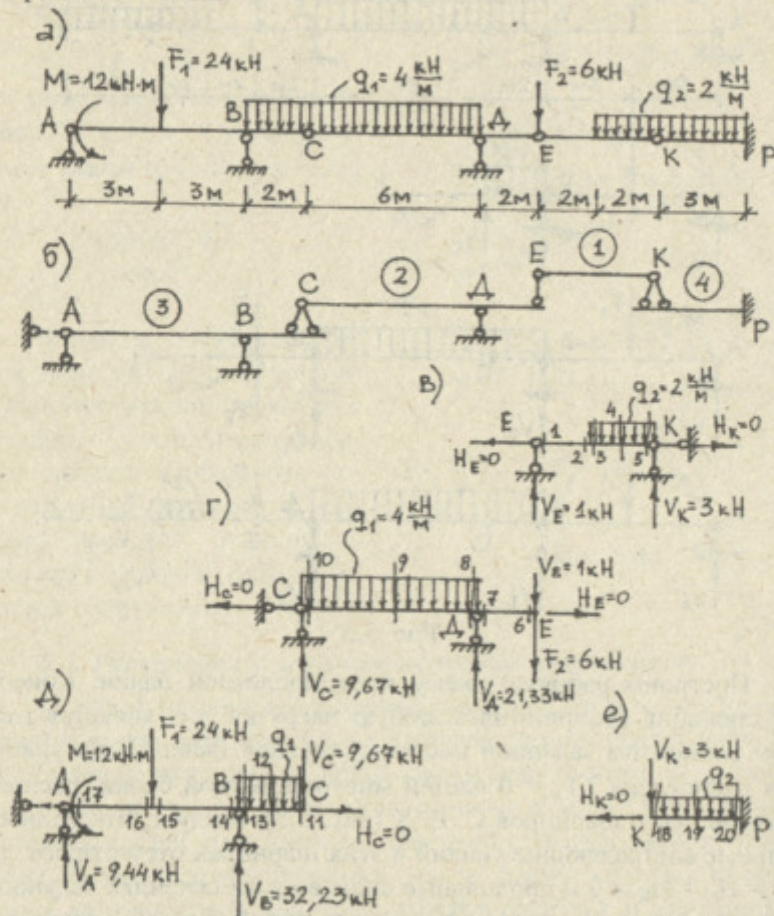


Рис. 5.6

Балка ЕК (рис. 5.6, в)

$$\sum \text{том} (F)_E = 0, \quad 2 \cdot 2 \cdot 3 - 4V_K = 0, \quad V_K = 3 \text{ кН};$$

$$\sum \text{том} (F)_K = 0, \quad -2 \cdot 2 \cdot 1 + 4V_E = 0, \quad V_E = 1 \text{ кН}.$$

Подробно объясним определение внутренних усилий в сечении 3 балки ЕК (рис. 5.7, а). Рассмотрим равновесие части этой балки, расположенной правее сечения 3 (на рис. 5.7, а эта часть обведена пунктирной линией). На отсечённую

часть, помимо внешней нагрузки, действуют неизвестные внутренние усилия: изгибающий момент M_3 , поперечная сила Q_3 , продольная сила N_3 (рис. 5.7, б), которые в соответствии с принятым правилом знаком будем считать положительными. Из условий равновесия для отсечённой части получим:

$$\sum (F_{\text{омс}})_x = 0, \quad -N_3 + 0 = 0, \quad N_3 = 0;$$

$$\sum (F_{\text{омс}})_y = 0, \quad Q_3 - 2 \cdot 2 + 3 = 0, \quad Q_3 = 1 \text{ кН};$$

$$\sum \text{том} (F_{\text{омс}})_3 = 0, \quad M_3 + 2 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 0, \quad M_3 = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Знаки "плюс", с которыми мы получили Q_3 и M_3 , подтверждают правильность выбранного направления поперечной силы и изгибающего момента в сечении 3, т.е. они действительно положительны. Если же из уравнения равновесия для какого-то внутреннего усилия мы получим знак "минус", то это значит, что рассматриваемое внутреннее усилие имеет противоположное направление и является отрицательным.

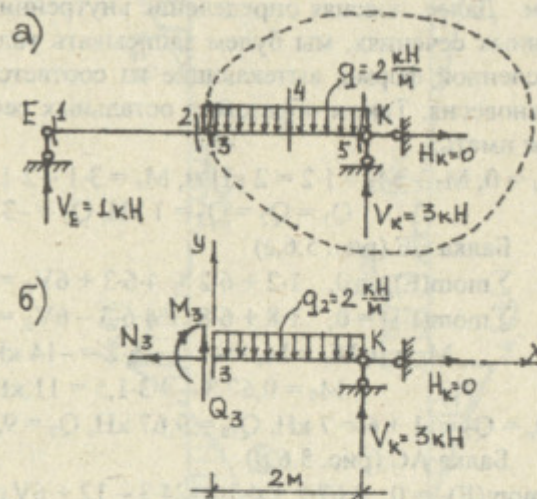


Рис. 5.7

Учитывая достаточный опыт, приобретённый читателями по данному вопросу в курсе сопротивления материалов, в строительной механике уравнения равновесия для определения внутренних усилий в отдельных сечениях больше приводить не будем. Далее, поясняя определение внутренних усилий в фиксированных сечениях, мы будем записывать только их выражения в численной форме, вытекающие из соответствующих уравнений равновесия. Таким образом, в остальных сечениях балки ЕК будем иметь:

$$M_1 = 0, M_2 = M_3 = 1 \cdot 2 = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}, M_4 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0,5 = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}, M_5 = 0.$$

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1 \text{ кН}, Q_5 = -3 \text{ кН}.$$

Балка СЕ (рис. 5.6,е)

$$\sum \text{mom}(F)_D = 0, 1 \cdot 2 + 6 \cdot 2 - 4 \cdot 6 \cdot 3 + 6V_C = 0, V_C = 9,67 \text{ кН};$$

$$\sum \text{mom}(F)_C = 0, 1 \cdot 8 + 6 \cdot 8 + 4 \cdot 6 \cdot 3 - 6V_D = 0, V_D = 21,33 \text{ кН};$$

$$M_6 = 0, M_7 = M_8 = -1 \cdot 2 - 6 \cdot 2 = -14 \text{ кН} \cdot \text{м}, M_{10} = 0,$$

$$M_9 = 9,67 \cdot 3 - 4 \cdot 3 \cdot 1,5 = 11 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$Q_6 = Q_7 = 1 + 6 = 7 \text{ кН}, Q_{10} = 9,67 \text{ кН}, Q_8 = 9,67 - 4 \cdot 6 = -14,33 \text{ кН}.$$

Балка АС (рис. 5.6,д)

$$\sum \text{mom}(F)_B = 0, 9,67 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot 1 - 24 \cdot 3 - 12 + 6V_A = 0, V_A = 9,44 \text{ кН}.$$

$$\sum \text{mom}(F)_A = 0, 9,67 \cdot 8 + 4 \cdot 2 \cdot 7 + 24 \cdot 3 - 12 - 6V_B = 0, V_B = 32,23 \text{ кН}.$$

$$M_{11} = 0, M_{12} = -9,67 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 0,5 = -11,67 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{13} = M_{14} = -9,67 \cdot 2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -27,34 \text{ кН} \cdot \text{м}, M_{17} = -12 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{16} = M_{15} = -12 + 9,44 \cdot 3 = 16,32 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$Q_{11} = 9,67 \text{ кН}, Q_{13} = 9,67 + 4 \cdot 2 = 17,67 \text{ кН}, Q_{17} = Q_{16} = 9,44 \text{ кН},$$

$$Q_{15} = Q_{14} = 9,44 - 24 = -14,56 \text{ кН}.$$

Балка КР (рис. 5.6,е)

$$M_{18} = 0, M_{19} = -3 \cdot 1,5 - 2 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = -6,75 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{20} = -3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 1,5 = -18 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$Q_{18} = -3 \text{ кН}, Q_{20} = -3 - 2 \cdot 3 = -9 \text{ кН}.$$

Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил показаны на рис. 5.8.

ПРИМЕР 5.3.2. Построить эпюры внутренних усилий в раме (рис. 5.9,а).

Рабочая схема рамы и порядок её расчёта показаны на рис. 5.9,б.

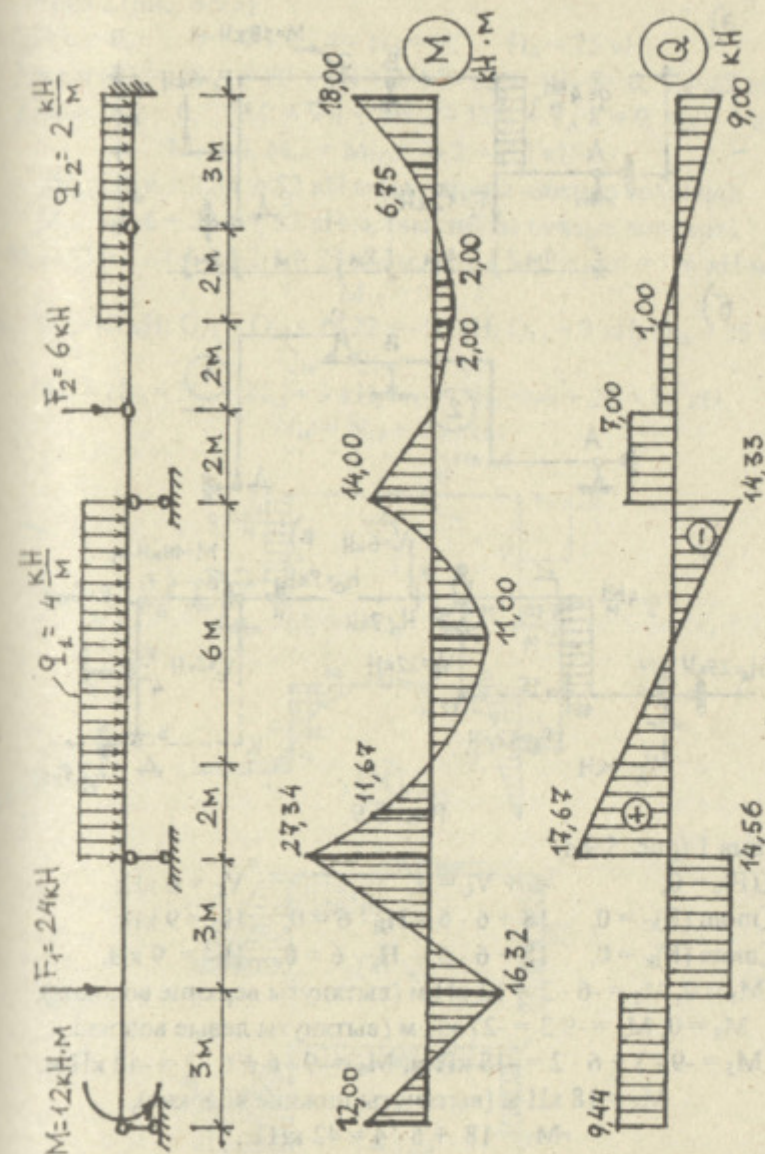


Рис. 5.8

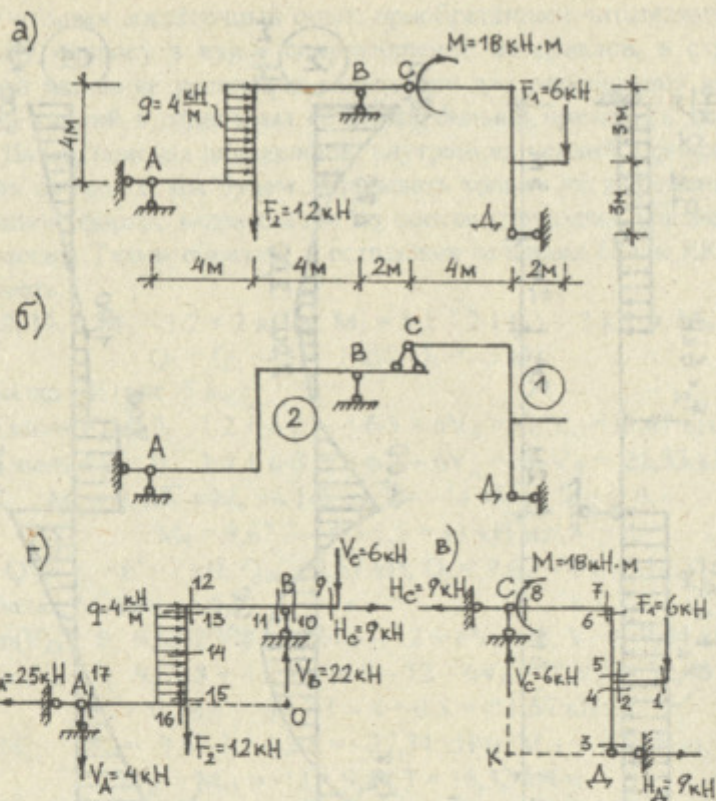


Рис. 5.9

Рама 1 (рис. 5.9, в)

$$\begin{aligned} \sum(F)_y &= 0, & -6 + V_C &= 0, & V_C &= 6 \text{ кН}; \\ \sum \text{mom}(F)_C &= 0, & 18 + 6 \cdot 6 - H_D \cdot 6 &= 0, & H_D &= 9 \text{ кН}; \\ \sum \text{mom}(F)_K &= 0, & 18 + 6 \cdot 6 - H_C \cdot 6 &= 0, & H_C &= 9 \text{ кН}. \\ M_1 &= 0, M_2 = -6 \cdot 2 = 12 \text{ кН·м (вытянуты верхние волокна)}, \\ M_3 &= 0, M_4 = -9 \cdot 3 = -27 \text{ кН·м (вытянуты левые волокна)}, \\ M_5 &= -9 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = -15 \text{ кН·м}, M_6 = -9 \cdot 6 + 6 \cdot 2 = -42 \text{ кН·м}, \\ M_8 &= 18 \text{ кН·м (вытянуты нижние волокна)}, \\ M_7 &= 18 + 6 \cdot 4 = 42 \text{ кН·м}. \\ Q_1 &= Q_2 = 6 \text{ кН}; Q_3 = Q_4 = Q_5 = Q_6 = -9 \text{ кН}, Q_7 = Q_8 = 6 \text{ кН}. \\ N_1 &= N_2 = N_3 = N_4 = 0, N_5 = N_6 = 6 \text{ кН}, N_7 = N_8 = 9 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Рама 2 (рис. 5.9, з)

$$\begin{aligned} \sum(F)_x &= 0, & 9 + 4 \cdot 4 - H_A &= 0, & H_A &= 25 \text{ кН}; \\ \sum \text{mom}(F)_A &= 0, & 6 \cdot 10 + 9 \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 2 + 12 \cdot 4 - V_B \cdot 8 &= 0, & V_B &= 22 \text{ кН}; \\ \sum \text{mom}(F)_0 &= 0, & 6 \cdot 2 + 9 \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 2 - 12 \cdot 4 - V_A \cdot 8 &= 0, & V_A &= 4 \text{ кН}. \\ M_9 &= 0, M_{10} = M_{11} = -6 \cdot 2 = -12 \text{ кН·м}, \\ M_{12} &= -6 \cdot 6 + 22 \cdot 4 = 52 \text{ кН·м (вытянуты нижние волокна)}, \\ M_{13} &= -6 \cdot 6 + 22 \cdot 4 = 52 \text{ кН·м (вытянуты правые волокна)}, \\ M_{14} &= 25 \cdot 2 - 4 \cdot 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 26 \text{ кН·м}, M_{15} = M_{16} = -4 \cdot 4 = -16 \text{ кН·м}, \\ M_{17} &= 0. \\ Q_9 &= Q_{10} = 6 \text{ кН}; Q_{11} = Q_{12} = 6 - 22 = -16 \text{ кН}, Q_{13} = 9 \text{ кН}, Q_{15} = 25 \text{ кН}, \\ Q_{16} &= Q_{17} = -4 \text{ кН}. \\ N_9 &= N_{10} = N_{11} = N_{12} = 9 \text{ кН}, N_{13} = N_{15} = -6 + 22 = 16 \text{ кН}, \\ N_{16} &= N_{17} = 25 \text{ кН}. \end{aligned}$$

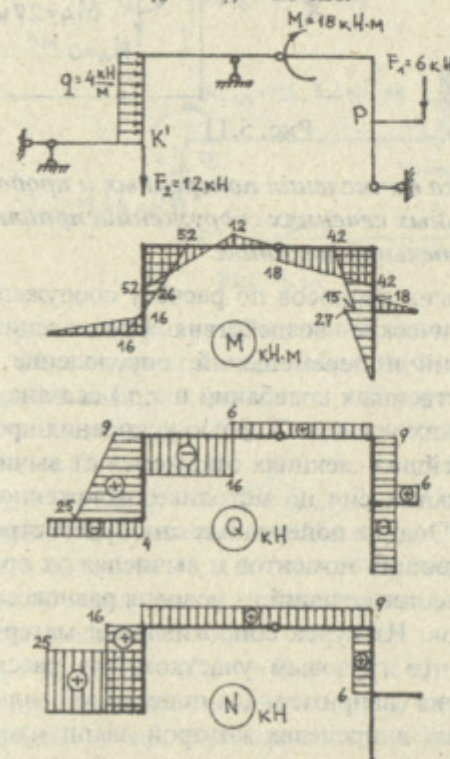


Рис. 5.10

Эпюры внутренних усилий показаны на рис. 5.10. На рис. 5.11 приведены силы, действующие на узлы К' и Р (рис. 5.10) рассматриваемой рамы. Читателям предлагается самостоятельно выполнить проверку условий равновесия этих узлов:

$$\sum(F)_x = 0, \quad \sum(F)_y = 0, \quad \sum \text{mom}(F)_{K'} = 0, \quad \sum \text{mom}(F)_P = 0.$$

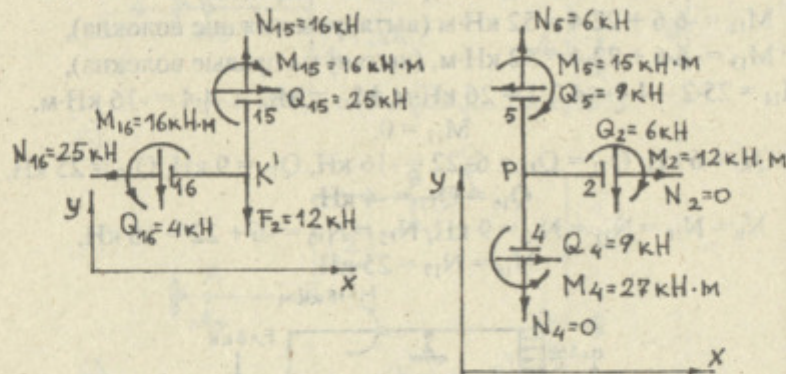


Рис. 5.11

5.4. Методика вычисления поперечных и продольных сил в отдельных сечениях содружений, принятая в строительной механике

Решение многих вопросов по расчёту сооружений на статические и динамические воздействия (вычисление расчётных внутренних усилий и перемещений, определение критических сил и частот собственных колебаний и т.д.) связано с построением эпюр внутренних усилий. С целью ускорения процесса их построения в дальнейших лекциях откажемся от вычисления поперечных и продольных сил по методике, изложенной в п.5.3 настоящей лекции. Эпюры поперечных сил будем строить, используя эпюры изгибающих моментов и вычисляя их ординаты в минимальном количестве сечений из условия равновесия отдельных грузовых участков. Из курса сопротивления материалов напомним читателям, что грузовым участком для рассматриваемого внутреннего усилия (например, для поперечной силы) называется часть сооружения, в пределах которой закон изменения этого внутреннего усилия описывается одним математическим выра-

жением (уравнением прямой линии, уравнением квадратной параболы и т.д.).

Чаще всего при вычислении ординат эпюр поперечных сил приходится иметь дело с двумя случаями.

1. На грузовом участке нет нагрузки. Во всех сечениях такого участка поперечная сила постоянна и по абсолютному значению равна тангенсу угла наклона эпюры изгибающих моментов по отношению к оси стержня (см. п. 5.2 настоящей лекции).

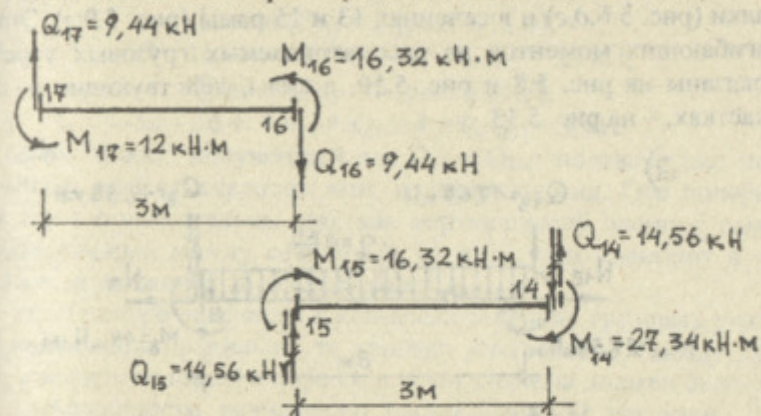


Рис. 5.12

Рассмотрим, например, вычисление поперечных сил в сечениях 17, 16, 15, 14 многопролетной балки (см. пример 5.3.1, рис. 5.6, д). Эпюра изгибающих моментов для грузовых участков 17–16 и 15–14 показана на рис. 5.8, а силы, действующие на эти участки, – на рис. 5.12.

$$\sum \text{mom}(F)_{17} = 0, \quad -12,00 - 16,32 + Q_{16} \cdot 3 = 0, \quad Q_{16} = Q_{17} = 9,44 \text{ кН.}$$

Знак "плюс", полученный для Q_{16} и Q_{17} , означает, что поперечная сила в сечениях 16 и 17 положительна, так как участок, расположенный между рассматриваемыми сечениями, сдвигается в направлении движения часовой стрелки.

$$\sum \text{mom}(F)_{15} = 0, \quad 16,32 + 27,34 + Q_{14} \cdot 3 = 0, \quad Q_{14} = Q_{15} = -14,56 \text{ кН.}$$

Знак "минус" показывает, что поперечные силы Q_{14} и Q_{15} имеют направление противоположное принятому, что на рис. 5.12 зафиксировано пунктирной линией. Эти поперечные силы

стремятся сдвинуть участок 15–14 в направлении против движения часовой стрелки, т.е. они отрицательны.

2. На грузовом участке имеется равномерно распределённая нагрузка. Напомним читателям, что эпюра поперечных сил на таком участке имеет вид наклонной прямой. Тангенс угла между этой прямой и осью стержня по абсолютной величине равен интенсивности равномерно распределённой нагрузки.

Для примера вычислим поперечные силы в сечениях 13 и 8 балки (рис. 5.6, д, з) и в сечениях 13 и 15 рамы (рис. 5.9, з). Эпюры изгибающих моментов на рассматриваемых грузовых участках показаны на рис. 5.8 и рис. 5.10, а силы, действующие на этих участках, – на рис. 5.13.

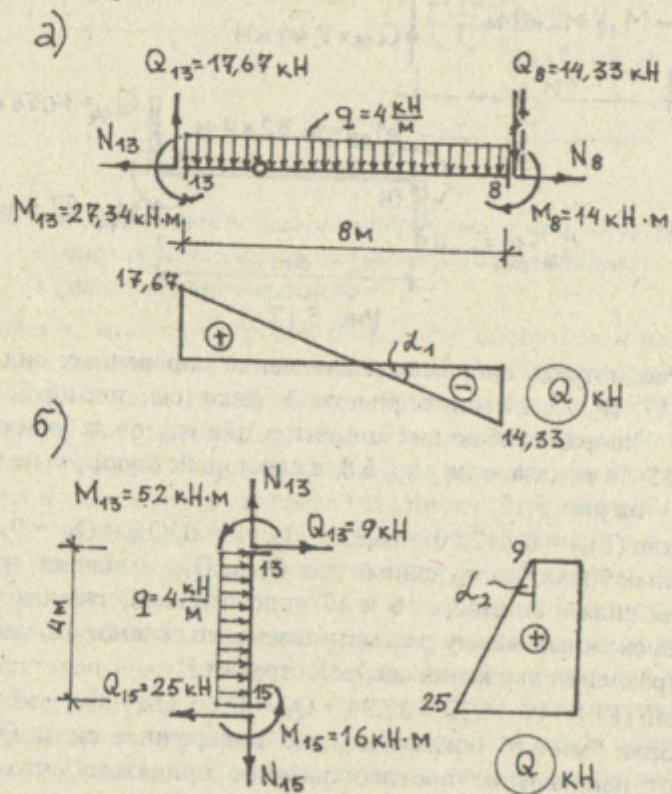


Рис. 5.13

$$\sum \text{mom} (F)_{13} = 0 \text{ (рис. 5.13, а),}$$

$-27,34 + 14,00 + 4 \cdot 8 \cdot 4 + Q_8 \cdot 8 = 0$, $Q_8 = -14,33 \text{ кН}$,
т.е. поперечная сила в сечении 8 отрицательна (на рис. 5.13, а она показана пунктирной линией).

$$\sum \text{mom} (F)_8 = 0 \text{ (рис. 5.13, а),}$$

$-27,34 + 14,00 - 4 \cdot 8 \cdot 4 + Q_{13} \cdot 8 = 0$, $Q_{13} = 17,67 \text{ кН}$,
т.е. направление поперечной силы в сечении 13 выбрано верно и соответствует её положительному значению.

$$\sum \text{mom} (F)_{13} = 0 \text{ (рис. 5.13, б),}$$

$$-52 - 16 - 4 \cdot 4 \cdot 2 + Q_{15} \cdot 4 = 0$$
, $Q_{15} = 25 \text{ кН}$;

$$\sum \text{mom} (F)_{15} = 0 \text{ (рис. 5.13, б),}$$

$$-52 - 16 + 4 \cdot 4 \cdot 2 + Q_{13} \cdot 4 = 0$$
, $Q_{13} = 9 \text{ кН}$.

Знак "плюс", полученный для Q_{15} и Q_{13} , подтверждает правильность выбора векторов этих поперечных сил. Обе поперечные силы положительны, так как вертикальный элемент рамы, расположенный между сечениями 15 и 13, они сдвигают в направлении движения часовой стрелки.

Если поперечные силы в концевых сечениях грузовых участков вычислены правильно, то тангенс угла наклона между прямой, соответствующей эпюре Q , и осью стержня должен быть равен интенсивности равномерно распределённой нагрузки. Для рассматриваемых выше примеров (рис. 5.13, а, б) имеем:

$$\text{tg} \alpha_1 = \frac{17,67 + 14,33}{8} = 4, \quad \text{tg} \alpha_2 = \frac{25 - 9}{4} = 4.$$

Полученные значения $\text{tg} \alpha_1$ и $\text{tg} \alpha_2$ соответствуют заданным интенсивностям равномерно распределённой нагрузки (рис. 5.6, а и рис. 5.9, а).

После построения эпюры поперечных сил, последовательно рассматривая равновесие узлов и отдельных элементов сооружения, вычисляют значения ординат эпюры продольных сил. В частности, для рамы (рис. 5.10) продольные силы в сечениях 15 и 16, можно получить из условия равновесия узла К' (рис. 5.11):

$$\sum (F)_x = 0, \quad +25 - N_{16} = 0, \quad N_{16} = 25 \text{ кН};$$

$$\sum (F)_y = 0, \quad -4 - 12 + N_{15} = 0, \quad N_{15} = 16 \text{ кН}.$$

Знак "плюс", полученный для значений N_{15} и N_{16} , подтверждает правильность выбора направления векторов указанных продольных сил, т.е. "от узла". Продольные силы, направленные

"от узла" и вызывающие растягивающие продольные деформации стержней, считаются положительными, а продольные силы, направленные "к узлу" и вызывающие сжимающие продольные деформации, — отрицательными.

В конечном счёте, мы подойдем к последнему узлу заданного сооружения, для всех сечений которого поперечные и продольные силы будут известны. Если в предыдущих вычислениях не было допущено ошибок, то для этого узла будут выполняться условия равновесия. Проверка выполнения этих условий обязательна, так как этой операцией подтверждается правильность построения эпюр поперечных и продольных сил.

5.5. Замечания о построении линий влияния внутренних усилий и реакций опорных связей в балках и рамах

Для построения линий влияния внутренних усилий и реакций опорных связей в многопролётных балках и рамах можно использовать статический и кинематический способы. В п.п. 3.2 и 3.3 третьей лекции дано подробное обоснование этих способов для любых сооружений и приведены примеры построения линий влияния в однодисковых (простых) балках и рамах (примеры 3.2.1, 3.2.2 и 3.2.3 — статическим, 3.3.1 — кинематическим способом) и в многодисковой многопролётной балке (пример 3.3.2 — кинематическим способом). В дополнение к изложенному в третьей лекции примем во внимание следующие замечания:

1. В сооружениях, имеющих главные и второстепенные части, решение задач по построению линий влияния внутренних усилий и реакций опорных связей статическим способом начинается с той части, к которой принадлежат рассматриваемые сечения и опорные связи. Если рассматриваемые сечения и опорные связи принадлежат к главным частям сооружения, то обязательно должны быть рассмотрены случаи размещения единичной сосредоточенной силы на второстепенных частях, реакции опор которых передаются на главные. Если же рассматриваемые сечения или опорные связи принадлежат второстепенным частям сооружения, то случаи размещения единичной силы на главных или менее второстепенных частях не рассматриваются. В этом случае внутренние усилия и реакции в этих сечениях и опорных связях равны нулю.

2. В подавляющем большинстве случаев при построении линий влияния предпочтение следует отдавать кинематическому способу.

Ниже приводятся конкретные примеры, подтверждающие справедливость вышеизложенных замечаний.

ПРИМЕР 5.5.1. Статическим способом построить линию влияния реакции опоры А многопролётной балки при заданном маршруте движения единичной силы (рис. 5.14, а).

Рабочая схема балки показана на рис. 5.14, б.

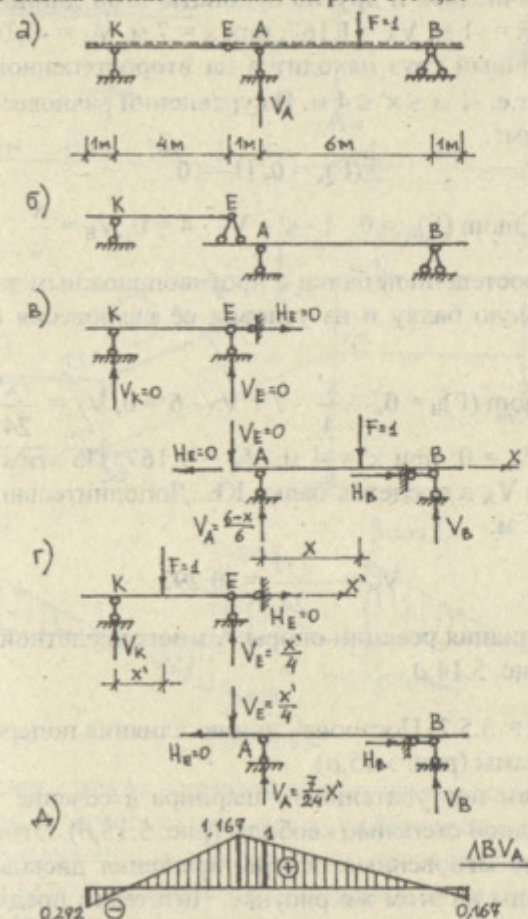


Рис. 5.14

1. Сила $F = 1$ находится на главной балке (рис. 5.14,а), т.е. $-1 \text{ м} \leq x \leq 7 \text{ м}$. Реакции шарнира Е в этом случае отсутствуют ($V_E = H_E = 0$). Рассматривая равновесие главной балки, получим:

$$\sum \text{mom}(F)_B = 0, -1 \cdot (6 - x) + V_A \cdot 6 = 0, V_A = \frac{6 - x}{6}.$$

При $x = 0$, $V_A = 1$, при $x = 6 \text{ м}$, $V_A = 0$. Эти ординаты позволяют построить ЛВ V_A в пределах главной балки. Из соотношения для V_A можно вычислить и другие ординаты этой линии влияния, а именно: при $x = -1 \text{ м}$, $V_A = 1,167$, при $x = 7 \text{ м}$, $V_A = -0,167$.

2. Единичный груз находится на второстепенной балке КЕ (рис. 5.14,з), т.е. $-1 \text{ м} \leq x' \leq 4 \text{ м}$. Из уравнений равновесия для этой балки получим:

$$\sum (F)_x = 0, H_E = 0.$$

$$\sum \text{mom}(F)_K = 0, 1 \cdot x' - V_E \cdot 4 = 0, V_E = \frac{x'}{4}.$$

Реакции второстепенной балки с противоположным знаком передаём на главную балку и из условия её равновесия определяем реакцию V_A :

$$\sum \text{mom}(F)_B = 0, -\frac{x'}{4} \cdot 7 + V_A \cdot 6 = 0, V_A = \frac{7x'}{24}.$$

При $x' = 0$, $V_A = 0$, при $x' = 4 \text{ м}$, $V_A = 1,167$. По этим ординатам построим ЛВ V_A в пределах балки КЕ. Дополнительно вычислим V_A при $x' = -1 \text{ м}$:

$$V_A = -\frac{7 \cdot 1}{24} = -0,292.$$

Линия влияния реакции опоры А многопролётной балки изображена на рис. 5.14,д.

ПРИМЕР 5.5.2. Построить линию влияния поперечной силы в сечении 1 рамы (рис. 5.15,а).

Введением поступательного шарнира в сечение 1 образуем механизм с одной степенью свободы (рис. 5.15,б). Относительные и абсолютные мгновенные центры вращения дисков 1–4 механизма показаны на этом же рисунке. Читателям предлагается самостоятельно использовать теорему о мгновенных центрах вра-

щения трёх дисков для определения положений абсолютных центров вращения 30, 20 и 40 дисков 3, 2 и 4 рассматриваемого механизма.

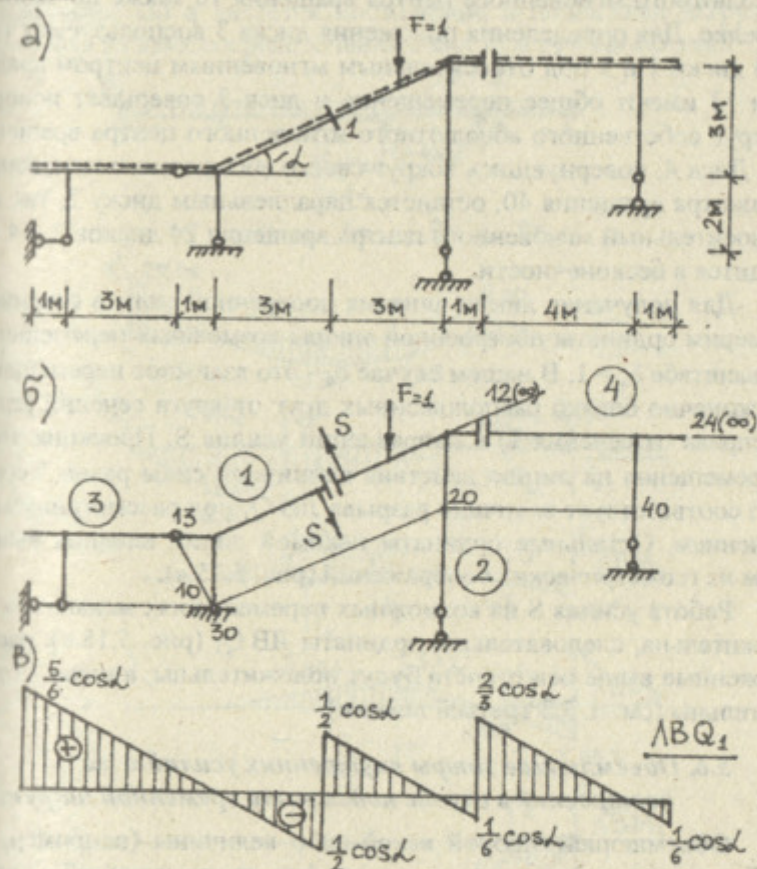


Рис. 5.15

Построение эпюры возможных вертикальных перемещений сечений рамы, по которым перемещается единичная сила, начнём с диска 2, задавшись его поворотом по часовой стрелке вокруг абсолютного мгновенного центра вращения 20 (по направлению положительного усилия S , приложенного к диску 2). Так как относительный мгновенный центр вращения 12 дисков 1 и 2 нахо-

дится в бесконечности, то диск 1 на эпюре возможных перемещений будет параллелен диску 2, т.е. повернется вокруг своего абсолютного мгновенного центра вращения 10 также по часовой стрелке. Для определения положения диска 3 воспользуемся тем, что диски 1 и 3 под относительным мгновенным центром вращения 13 имеют общее перемещение и диск 3 совершает поворот вокруг собственного абсолютного мгновенного центра вращения 30. Диск 4, повернувшись вокруг своего абсолютного мгновенного центра вращения 40, останется параллельным диску 2, так как относительный мгновенный центр вращения 24 дисков 2 и 4 находится в бесконечности.

Для получения линии влияния поперечной силы в сечении 1 измерим ординаты построенной эпюры возможных перемещений в масштабе $\delta_s = 1$. В нашем случае δ_s — это взаимное перемещение бесконечно близко расположенных друг от друга сечений (слева и справа от сечения 1) в направлении усилия S . Проекция этого перемещения на линию действия единичной силы равна $1 - \cos \alpha$, что соответствует величине разрыва ЛВ Q_1 под рассматриваемым сечением. Остальные ординаты искомой линии влияния вычислим из геометрических соображений (рис. 5.15, в).

Работа усилия S на возможных перемещениях механизма положительна, следовательно, ординаты ЛВ Q_1 (рис. 5.15, в), расположенные выше оси отсчета будут положительны, а ниже — отрицательны (см. п. 3.3 третьей лекции).

5.6. Объемлющие эпюры внутренних усилий и их построение в случае подвижной временной нагрузки

Объемлющей эпюрой какой-либо величины (например, изгибающего момента) называется график, показывающий её изменение вдоль осей элементов рассматриваемого сооружения, ординаты которого представляют собой максимальные и минимальные алгебраические значения этой величины при самом невыгодном сочетании постоянной и временной нагрузок.

Порядок построения объемлющих эпюр в случае, когда временная нагрузка подвижна, подробно рассмотрим на примере.

ПРИМЕР 5.6.1. Построить объемлющую эпюру изгибающих моментов для балки, показанной на рис. 5.16, а, вычислив её ординаты в сечениях 1–6. Равномерно распределённая нагрузка интенсивностью q является постоянной, а подвижная нагрузка, состоящая из двух сосредоточенных сил F_1 и F_2 — временной.

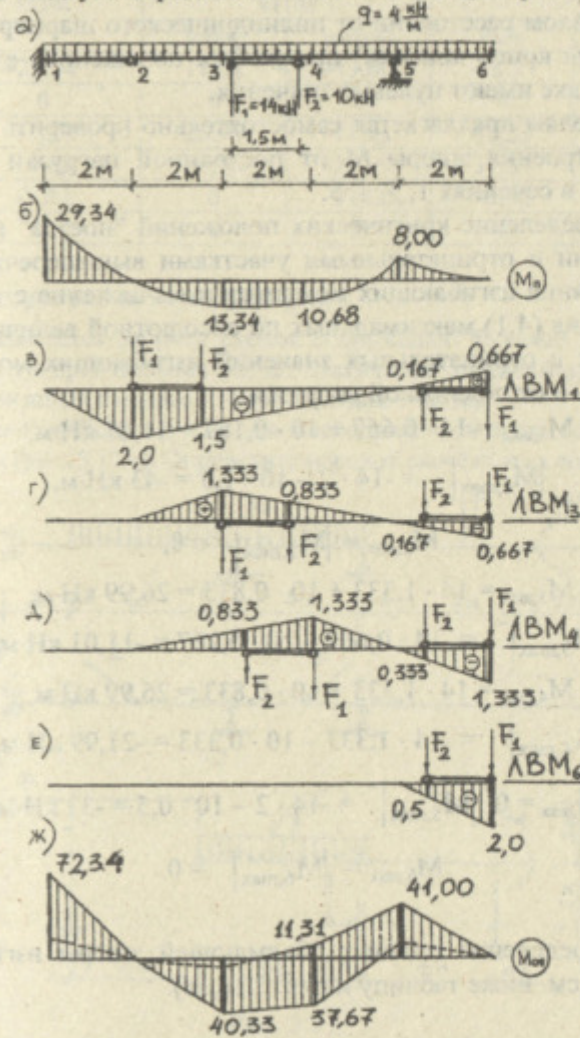


Рис. 5.16

1. Построение эпюры изгибающих моментов от постоянной нагрузки (рис. 5.16,б).

2. Построение линий влияния изгибающих моментов в сечениях 1, 3, 4, 5 кинематическим способом (рис. 5.16,в,г,д,е). Ординаты линий влияния изгибающих моментов в сечении 2 (на бесконечно малом расстоянии от цилиндрического шарнира) и в сечении 6 (на конце консоли) при любых положениях единичной силы на балке имеют нулевые значения.

Читателям предлагается самостоятельно проверить правильность построения эпюры M от постоянной нагрузки и линий влияния M в сечениях 1, 3, 4, 5.

3. Определение критических положений "поезда" над положительными и отрицательными участками вышеперечисленных линий влияния изгибающих моментов и вычисление с помощью соотношения (4.1) максимальных по абсолютной величине положительных и отрицательных значений изгибающих моментов в сечениях 1–6 от подвижной нагрузки:

$$M_{1,\max} = 14 \cdot 0,667 + 10 \cdot 0,167 = 11,01 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$|M_{1,\max}|^- = -14 \cdot 2 - 10 \cdot 1,5 = -43 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_{2,\max} = |M_{2,\max}|^- = 0,$$

$$M_{3,\max} = 14 \cdot 1,333 + 10 \cdot 0,833 = 26,99 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$|M_{3,\max}|^- = -14 \cdot 0,667 - 10 \cdot 0,167 = -11,01 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_{4,\max} = 14 \cdot 1,333 + 10 \cdot 0,833 = 26,99 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$|M_{4,\max}|^- = -14 \cdot 1,333 - 10 \cdot 0,333 = -21,99 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_{5,\max} = 0, |M_{5,\max}|^- = -14 \cdot 2 - 10 \cdot 0,5 = -33 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_{6,\max} = |M_{6,\max}|^- = 0.$$

4. Определение ординат объемлющей эпюры изгибающих моментов (см. ниже таблицу и рис. 5.16,ж).

№ сечений	Изгибающие моменты от постоянной нагрузки, кН·м	Максимальные по абсолютной величине значения M от подвижной нагрузки, кН·м		Расчётные изгибающие моменты (ординаты объемлющей эпюры M), кН·м	
		плюс	минус	max	min
1	-29,34	11,01	-43,00	-18,33	-72,34
2	0	0	0	0	0
3	13,34	26,99	-11,01	40,33	3,33
4	10,68	26,99	-21,99	37,67	-11,31
5	-8,00	0	-33,00	-8,00	-41,00
6	0	0	0	0	0

5.7. Вопросы для самопроверки

1. Что называется рабочей схемой сооружения? В какой последовательности производится расчёт статически определимых балок и рам, имеющих главные и второстепенные части?
2. Постройте рабочую схему для многопролётной балки (рис. 5.17,а) и рамы (рис. 5.17,б). Определите порядок расчёта этих сооружений.

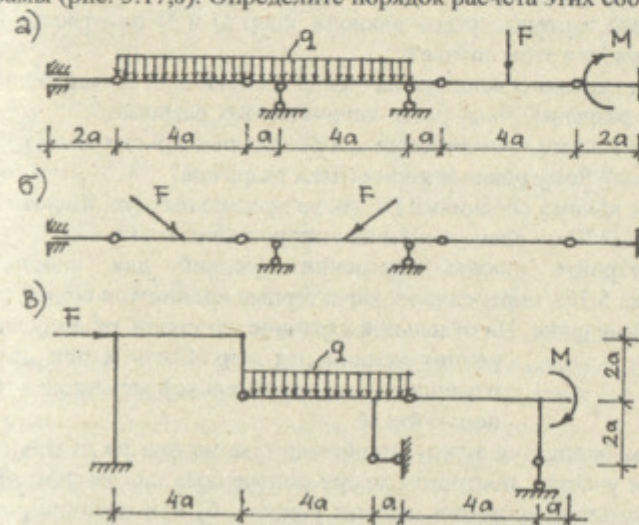


Рис. 5.17

1. Как изменится рабочая схема для многопролётной балки, показанной на рис. 5.17,а, с изменением характера нагрузки (рис. 5.17,б)?

4. Задан плоский стержень с ломаной осью, присоединённый к диску "мля" тремя произвольно расположенными линейными связями, оси которых не пересекаются в одной точке. Как рационально определить реакции этих связей? Какие внутренние усилия возникают в произвольном сечении такого стержня и как они определяются? Что называется изгибающим моментом, поперечной силой, продольной силой в произвольном сечении стержня? Сформулируйте правило знаков для указанных внутренних усилий.
5. Что называется эпюрой какого-либо внутреннего усилия?
6. Какие правила, вытекающие из дифференциальных зависимостей между q , Q и M , используются для проверки правильности эпюр изгибающих моментов и поперечных сил?
7. По какому закону изменяется эпюра продольных сил на участке, где нет внешней нагрузки?
8. По какому закону изменяется эпюра продольных сил на участке с линейно распределённой по любому закону нагрузкой, приложенной перпендикулярно оси стержня?
9. По какому закону изменяются эпюры поперечных и продольных сил на участке, несущем равномерно распределённую нагрузку, произвольно направленную по отношению к оси стержня? Чему равны тангенсы углов наклона эпюр Q и N по отношению к оси стержня в этом случае?
10. Под какими сечениями на эпюре изгибающих моментов имеют место разрывы? Чему равна величина этих разрывов?
11. Под какими сечениями на эпюре поперечных сил имеют место разрывы? Чему равна величина этих разрывов?
12. Под какими сечениями на эпюре продольных сил имеют место разрывы? Чему равна величина этих разрывов?
13. Постройте эпюры внутренних усилий для простых балок (рис. 5.18), определив их характерные ординаты в общем виде.

Примечание. На отдельной странице составьте таблицу эпюр внутренних усилий для этих балок и при дальнейшем изучении курса строительной механики активно используйте её.

14. Как, используя эпюру изгибающих моментов на отдельном грузовом участке, построить эпюру поперечных сил на нём: а) в случае отсутствия нагрузки на этом участке, б) при наличии равномерно распределённой нагрузки на этом участке? Каким образом можно произвести проверку правильности построенных эпюр поперечных сил?

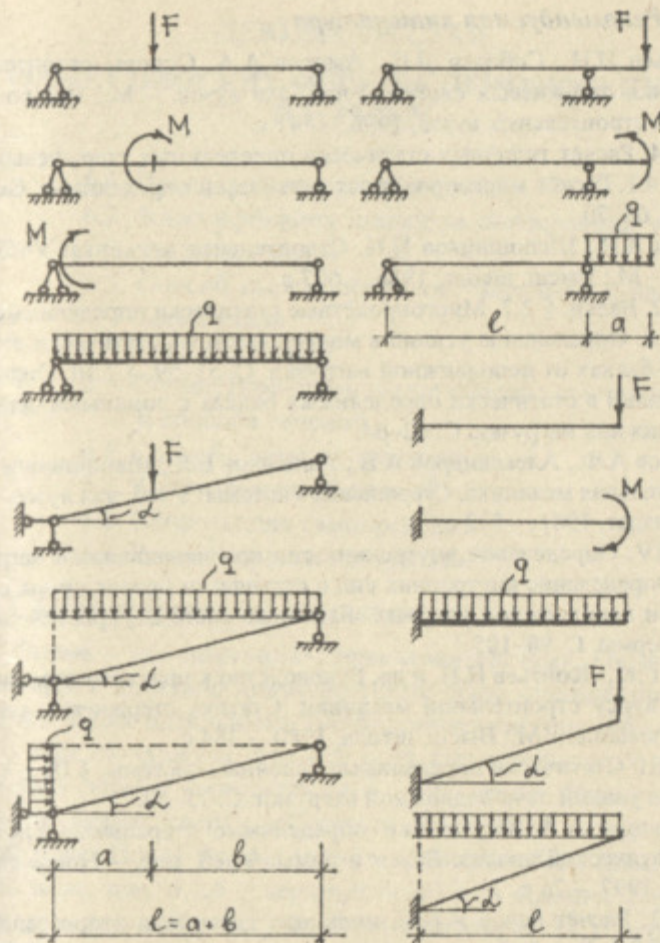


Рис. 5.18

15. Как, имея эпюру поперечных сил для заданного сооружения, можно построить эпюру продольных сил? Каким образом проверяется правильность построенной эпюры продольных сил?
16. Что называется объемлющими эпюрами внутренних усилий? Какой смысл имеют ординаты этих эпюр?
17. Изложите порядок построения объемлющих эпюр внутренних усилий для случая, когда временная нагрузка является подвижной.

5.8. Рекомендуемая литература

1. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем: Учеб. для вузов. – М.: Изд-во ассоциации строительных вузов, 1996. – 541 с.
Глава 4. Расчёт типичных статически определимых стержневых систем. § 4.1. Расчёт многопролётных статически определимых балок и рам. С. 65–70.
2. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика: Учеб. для вузов. – М.: Высш. школа, 1986. – 607 с.
Глава 2. Балки. § 2.7. Многопролётные статически определимые балки. § 2.8. Определение усилий в многопролётных статически определимых балках от неподвижной нагрузки. С. 51–59. § 2.10. Определение усилий в статически определимых балках с ломаными осями от неподвижной нагрузки. С. 62–64.
3. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лашенков Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Стержневые системы: Учеб. для вузов. – М.: Стройиздат, 1981. – 512 с.
Глава IV. Определение внутренних сил при неподвижной нагрузке. § 14. Определение внутренних сил в статически определимых системах при неподвижной нагрузке. Балочные системы, простейшие рамы и фермы. С. 98–105.
4. Клейн Г.К., Леонтьев Н.Н. и др. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. Статика стержневых систем: Учеб. пособие. – М.: Высш. школа, 1980. – 384 с.
Глава III. Статически определимые балочные системы. § III.1. Определение усилий от неподвижной нагрузки. С. 25–29.
5. Крамаренко А.А. Статически определимые стержневые системы. Кинематический анализ. Балки и рамы: Учеб. пос. – Новосибирск: НГАС, 1997. – 76 с.
Глава 2. Расчёт балок и рам, имеющих главные и второстепенные части. § 2.1. Расчёт балок и рам на неподвижную нагрузку. С. 29–41. § 2.5. Построение объемлющих эпюр внутренних усилий в случае подвижной временной нагрузки. С. 62–64.
6. Проценко В.М., Себешев В.Г. Расчёт статически определимых систем: Метод. указания. – Новосибирск: НИСИ, 1990. – 52 с.
Задача № 1. Расчёт статически определимой многопролётной балки. С. 3–11

ЛЕКЦИЯ ШЕСТАЯ

РАСЧЁТ ПЛОСКИХ ФЕРМ НА НЕПОДВИЖНУЮ НАГРУЗКУ

- 6.1. Предварительные замечания
- 6.2. Классификация способов определения усилий в стержнях ферм
- 6.3. Способ вырезания узлов. Частные случаи равновесия узлов
- 6.4. Способ сечений
- 6.5. Совместное применение способа вырезания узлов и способа сечений
- 6.6. Способ замены стержней
- 6.7. Кинематический способ
- 6.8. Вопросы для самопроверки
- 6.9. Рекомендуемая литература

6.1. Предварительные замечания

1. Ферма – это шарнирно-стержневая система, составленная из стержней с идеально прямолинейной осью, соединённых между собой в узлах идеальными цилиндрическими шарнирами (рис. 6.1,а,б). Предполагается, что оси всех стержней, сходящихся в одном узле фермы, пересекаются в одной точке. Линии, ограничивающие ферму сверху, образуют её верхний пояс, снизу – нижний пояс. Пояса фермы имеют прямолинейное (рис. 6.1,а – нижний пояс, рис. 6.1,б – верхний пояс) или ломаное очертание (рис. 6.1,а – верхний пояс, рис. 6.1,б – нижний пояс). Вертикальные стержни, расположенный между верхним и нижним поясами, называются стойками, наклонные – раскосами (рис. 6.1,а). Совокупность стоек и раскосов образует решётку фермы. Широкое распространение получили фермы, в которых стойки и раскосы образуют решётку с треугольной структурой (рис. 6.1,а и рис. 6.2,а).

Важными геометрическими характеристиками фермы являются: ℓ – пролёт, h – высота, d – длина панели (рис. 6.1,б).

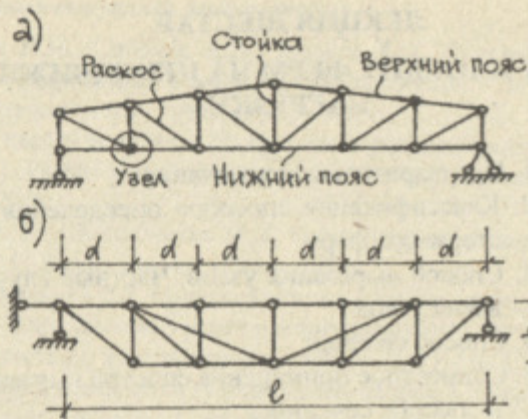


Рис. 6.1

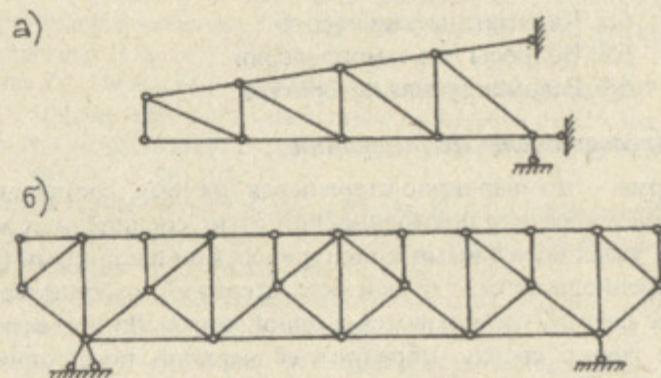


Рис. 6.2

2. Полная классификация типов ферм подробно рассматривается в курсе строительных конструкций. Здесь отметим только наиболее распространённые признаки классификации:

А. В строительстве часто используются балочные (рис. 6.1) и консольные фермы (рис. 6.2, а). Балочные фермы могут иметь слева и справа консоли (рис. 6.2, б).

Б. Часто шарнирно-стержневые системы содержат в себе главные и второстепенные части (см. п. 5.1 пятой лекции), т.е. имеют рабочую схему. Например, в ферме, показанной на рис. 6.3, диск 1 является главной фермой, а диск 2 – второстепенной.

Фермы, состоящие из нескольких дисков, могут и не иметь рабочей схемы, в частности, это фермы "арочного" типа (см. восьмую лекцию).

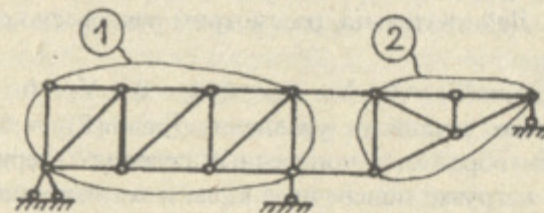


Рис. 6.3

В. С кинематической точки зрения (см. вторую лекцию) фермы имеют простую (рис. 6.1–6.4) или сложную структуру (рис. 6.13).

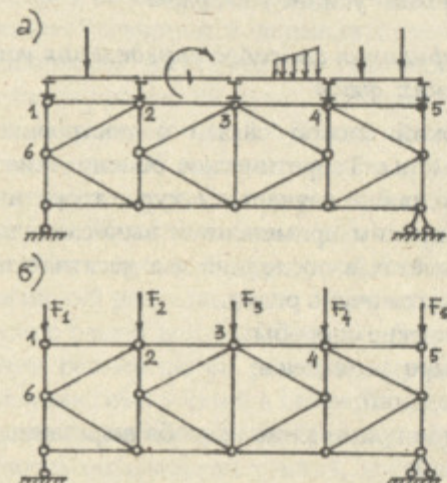


Рис. 6.4

3. Загружение фермы внешними силами осуществляется через узлы (рис. 6.4, а, б). В этом случае в поперечных сечениях стержней ферм возникают только продольные силы, постоянные по их длине. Действительно, рассмотрим равновесие стержня 62 (рис. 6.4, в):

$$\sum \text{om}(F)_6 = 0, -V_2 \cdot \ell_{62} = 0, \ell_{62} \neq 0, \quad V_2 = 0.$$

Аналогично, используя уравнение $\sum \text{om}(F)_2 = 0$, получим $V_6 = 0$. Таким образом, в поперечных сечениях стержней ферм при узловой нагрузке поперечные силы и изгибающие моменты отсутствуют.

$$\sum F_x = 0, -H_6 + H_2 = 0, \quad H_6 = H_2 = H.$$

В произвольном сечении стержня продольная сила постоянна и равна H . Учитывая это обстоятельство, в дальнейшем будем использовать термин "усилие в стержне".

6.2. Классификация способов определения усилий в стержнях ферм

1. Графический способ связан с построением диаграммы Максвелла–Кремоны. Теоретическое обоснование и применение этого способа подробно изучается в курсе теоретической механики. В связи с широким применением вычислительной техники в инженерных расчётах в последние два десятилетия графический способ используется очень редко.

2. Аналитические способы:

а) способ вырезания узлов;

б) способ сечений;

в) совместное применение способа вырезания узлов и способа сечений;

г) способ замены стержней.

3. Кинематический способ.

Аналитические способы, кроме способа замены стержней, также рассматриваются в курсе теоретической механики. Учитывая исключительную важность этих способов для расчёта статически определимых ферм на неподвижную и подвижную нагрузки, в курсе строительной механике полезно повторить их изложение (см. п.п. 6.3–6.5 настоящей лекции).

6.3. Способ вырезания узлов. Частные случаи равновесия узлов

В расчётах ферм на узловую нагрузку определению подлежат реакции опорных связей и усилия в стержнях, т.е. $S + S_0$ неизвестных, где S – число стержней, S_0 – число опорных связей. Для каждого узла плоской фермы, как для системы сходящихся в одной точке сил, можно записать два уравнения равновесия, а для всей фермы – $2U$ уравнений, где U – число её узлов. В статически определимых системах для расчёта используются только уравнения равновесия, число которых должно быть равным числу неизвестных. Так как для плоских геометрически неизменяемых шарнирно-стержневых систем, не имеющих избыточных связей, $2U = S + S_0$ (см. п. 2.3 второй лекции), расчёт статически определимых ферм сведётся к решению системы $2U$ линейных неоднородных алгебраических уравнений, содержащих такое же количество неизвестных. Напомним читателям, что при неравенстве определителя этой системы уравнений нулю, заданная ферма будет геометрически неизменяемой (см. п. 2.4 второй лекции).

Таким образом, способ вырезания узлов применим к определению усилий в стержнях любых ферм, в том числе и ферм со сложной структурой. Практически же этот способ целесообразно применять в фермах с простой структурой, когда вышеупомянутая система уравнений распадается на независимые друг от друга уравнения только с одним неизвестным. Это будет возможно при последовательном рассмотрении равновесия узлов, содержащих не более двух неизвестных усилий в стержнях (см. пример 6.3.1).

К недостаткам способа вырезания узлов следует отнести:

1. Невозможность определения усилий, когда это требуется, в произвольно взятых отдельных стержнях. Например, в ферме, изображённой на рис. 6.6, а, усилие только в стержне 23 определить нельзя, не зная усилий в стержнях А1 и 12 или в стержне 3В.
2. В процессе последовательного вырезания узлов и арифметических операций происходит накопление ошибки. Кроме того, этот способ не позволяет обнаружить допущенную ошибку в определении усилий на ранней стадии расчёта фермы.

Выявление ошибки произойдёт на заключительной стадии расчёта, когда будут проверяться условия равновесия последних узлов фермы.

Из способа вырезания узлов вытекают частные случаи их равновесия, которые можно использовать при расчёте ферм на неподвижную нагрузку и построении линий влияния усилий в стержнях.

1. Усилия N_1 и N_2 в стержнях незагруженного двухстержневого узла равны нулю (рис. 6.5, а).

$$\sum F_y = 0, \quad -N_2 \cos \beta = 0, \quad -\cos \beta \neq 0, \quad \text{значит } N_2 = 0;$$

$$\sum F_x = 0, \quad -N_1 \cos \alpha = 0, \quad -\cos \alpha \neq 0, \quad \text{значит } N_1 = 0.$$

2. Усилие N_3 в одиночном стержне незагруженного трёхстержневого узла в случае, когда линии действия усилий N_1 и N_2 совпадают, равно нулю (рис. 6.5, б).

$$\sum F_y = 0, \quad -N_3 \cos \alpha = 0, \quad -\cos \alpha \neq 0, \quad N_3 = 0.$$

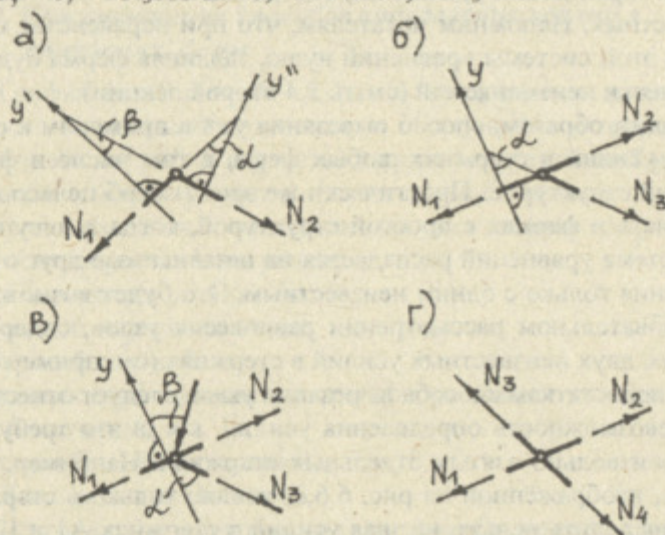


Рис. 6.5

3. Для загруженного трёхстержневого узла, у которого линии действия усилий N_1 и N_2 совпадают, усилие N_3 в одиночном стержне целесообразно определить следующим образом (рис. 6.5, в):

$$\sum F_y = 0, \quad -F \cos \beta - N_3 \cos \alpha = 0, \quad N_3 = -F \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}.$$

4. Для четырёхстержневого незагруженного узла, линии действия неизвестных усилий которого попарно совпадают, $N_1 = N_2$, $N_3 = N_4$ (рис. 6.5, г). Читателям предлагается самостоятельно доказать это утверждение.

ПРИМЕР 6.3.1. Способом вырезания узлов определить усилия в стержнях фермы (рис. 6.6, а).

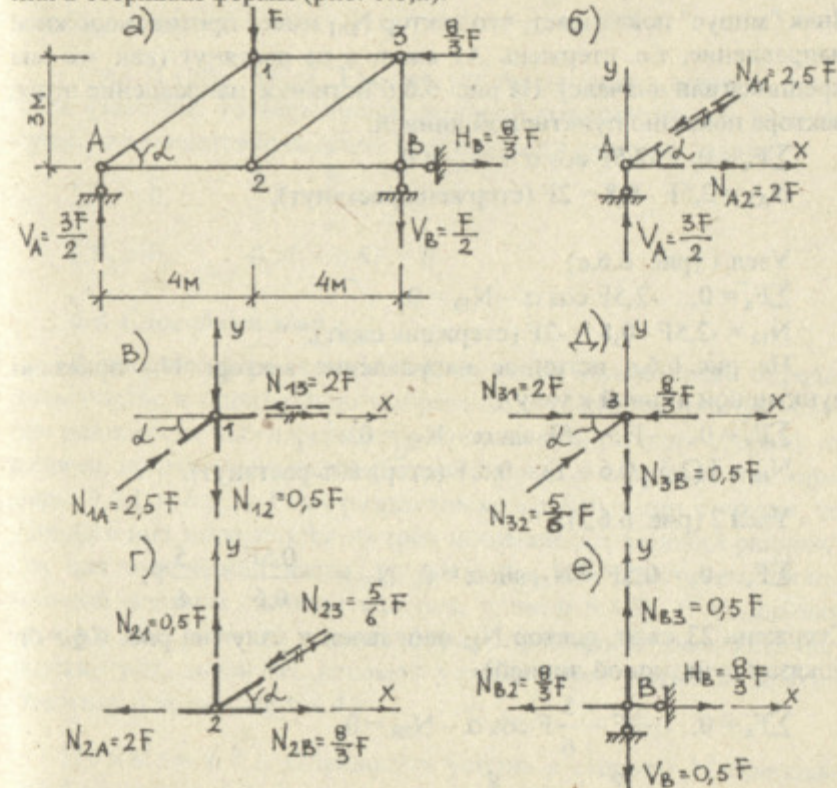


Рис. 6.6

Вычисляем опорные реакции балочной фермы и дополнительные геометрические характеристики:

$$H_B = \frac{8}{3}F, \quad V_A = \frac{3}{2}F, \quad V_B = \frac{F}{2},$$

$$\cos \alpha = 0,8, \quad \sin \alpha = 0,6.$$

Последовательно вырезаем узлы А, 1, 2, 3, В и рассматриваем их условия равновесия.

Узел А (рис. 6.6,б).

$$\sum F_y = 0, \quad \frac{3}{2}F + N_{A1} \sin \alpha = 0, \quad N_{A1} = -\frac{3F}{2 \cdot 0,6} = -2,5F.$$

Знак "минус" показывает, что вектор N_{A1} имеет противоположное направление, т.е. стержень А1 сжат, а не растянут (как это мы предполагали вначале). На рис. 6.6,б истинное направление этого вектора показано пунктирной линией.

$$\sum F_x = 0, \quad -2,5F \cos \alpha + N_{A2} = 0,$$

$$N_{A2} = 2,5F \cdot 0,8 = 2F \text{ (стержень растянут)}.$$

Узел 1 (рис. 6.6,в)

$$\sum F_x = 0, \quad -2,5F \cos \alpha - N_{13} = 0,$$

$$N_{13} = -2,5F \cdot 0,8 = -2F \text{ (стержень сжат)}.$$

На рис. 6.6,в истинное направление вектора N_{13} показано пунктирной линией к узлу 1.

$$\sum F_y = 0, \quad -F + 2,5F \sin \alpha - N_{12} = 0,$$

$$N_{12} = F(2,5 \cdot 0,6 - 1) = 0,5F \text{ (стержень растянут)}.$$

Узел 2 (рис. 6.6,г).

$$\sum F_y = 0, \quad 0,5F + N_{23} \sin \alpha = 0, \quad N_{23} = -\frac{0,5F}{0,6} = -\frac{5}{6}F.$$

Стержень 23 сжат, вектор N_{23} направлен к узлу (на рис. 6.6,г он показан пунктирной линией).

$$\sum F_x = 0, \quad -2F - \frac{5}{6}F \cos \alpha - N_{2B} = 0,$$

$$N_{2B} = F(2 + \frac{5}{6} \cdot 0,8) = \frac{8}{3}F.$$

Стержень 2В растянут, вектор N_{2B} направлен от узла, как и предполагалось вначале.

Узел 3 (рис. 6.6,д).

$$\sum F_x = 0 \text{ (проверка)}, \quad 2F + \frac{5}{6}F \cos \alpha - \frac{8}{3}F = 0,$$

$$\cos \alpha = 0,8, \quad \frac{8}{3}F = \frac{8}{3}F, \text{ т.е.}$$

условие равновесия соблюдается.

$$\sum F_y = 0, \quad \frac{5}{6}F \sin \alpha - N_{3B} = 0, \quad N_{3B} = \frac{5}{6}F \cdot 0,6 = 0,5F,$$

т.е. N_{3B} растянут.

Узел В (рис. 6.6,е). Так как усилия во всех стержнях этого узла известны, то выполнение условий равновесия для него по существу является проверкой правильности решения задачи:

$$\sum F_x = 0, \quad \frac{8}{3}F - \frac{8}{3}F = 0,$$

$$\sum F_y = 0, \quad -0,5F + 0,5F = 0.$$

6.4. Способ сечений

В плоских фермах способом сечений можно сразу определить усилие в произвольно выбранном стержне, используя условие равновесия части фермы, расположенной по одну сторону от разреза, проходящего через рассматриваемый стержень (см. примеры 6.4.1 и 6.4.2). Если разрез проходит через три стержня, то усилия в них определяются из трёх независимых условий равновесия для отсечённой части, находящейся под действием произвольной плоской системы сил (см. пример 6.4.3). В отдельных случаях для решения задачи ферму приходится рассекать несколько раз, вычисляя искомое усилие через усилия в других стержнях (см. пример 6.4.4).

ПРИМЕР 6.4.1. Определить усилие в стержне 12 консольной фермы (рис. 6.7,а).

Замкнутым разрезом, проходящим через стержни 45, 36, 26 и 12, выделим свободную часть консольной фермы 1 (рис. 6.7,б). Линии действия неизвестных усилий N_{45} , N_{36} , N_{26} пересекаются в точке 6. Приравнявая нулю сумму моментов всех сил, дейст-

вующих на отсеченную часть фермы 1, относительно точки 6, получим усилие в стержне 12:

$$\sum \text{mom}(F)_{\text{отс}} = 0,$$

$$F \cdot 2d + F \cdot 3d + 2F \cdot 4d + N_{12} \cdot h_2 = 0, \quad N_{12} = -\frac{13Fd}{h_2}.$$

Знак "минус" показывает, что стержень 12 сжат, а не растянут, как это предполагалось вначале. На рис. 6.7,б истинное направление вектора N_{12} показано пунктирной линией. Для усилия N_{12} точка 6 называется моментной, или точкой Риттера.

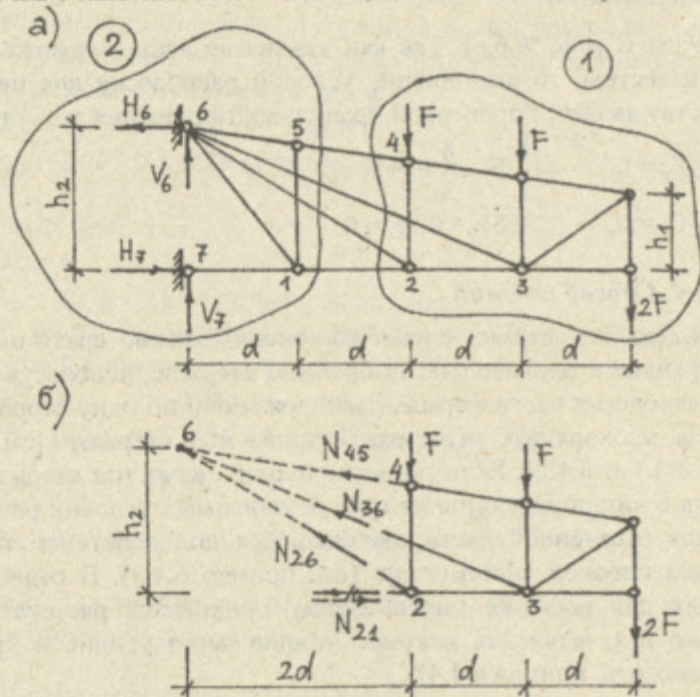


Рис. 6.7

Примечание. Усилие N_{12} можно определить также из условия равновесия части фермы 2 (рис. 6.7,а). В этом случае необходимо предварительно определить опорные реакции V_6 , H_6 , V_7 , H_7 из условий равновесия всей фермы.

ПРИМЕР 6.4.2. Определить усилие в стержне 12 фермы (рис. 6.8,а).

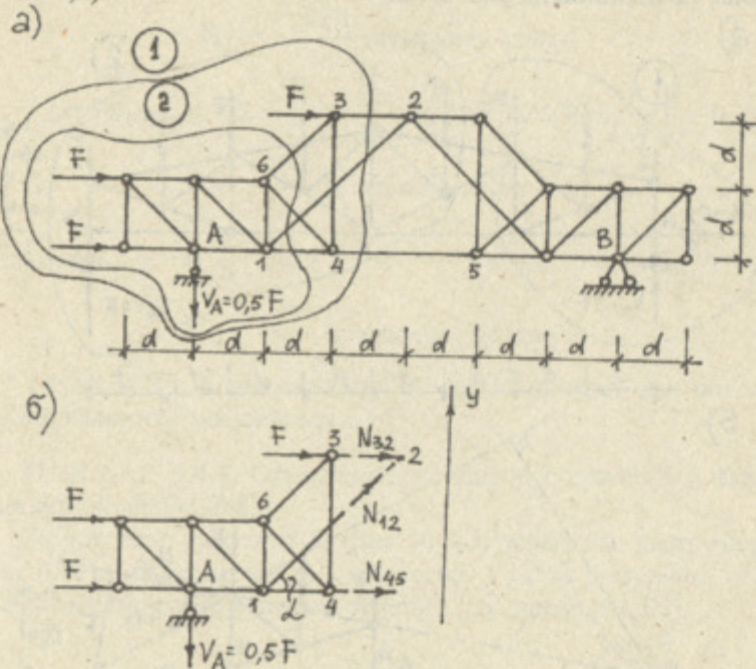


Рис. 6.8

Из условия равновесия всей фермы определим реакцию шарнирно-подвижной опоры V_A :

$$\sum \text{mom}(F)_B = 0, \quad F \cdot 2d + Fd - V_A \cdot 6d = 0, \quad V_A = 0,5F.$$

Рассмотрим равновесие отсеченной части фермы 1 (рис. 6.8,б). Неизвестные усилия N_{32} и N_{45} параллельны, следовательно, моментная точка для искомого усилия N_{12} находится в бесконечности по горизонтали. Приравнявая нулю сумму проекций всех сил, приложенных к отсеченной части фермы 1 (рис. 6.8,б), на вертикальную ось, получим:

$$\sum F_y = 0, \quad -0,5F + N_{12} \sin \alpha = 0,$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad N_{12} = \frac{F}{\sqrt{2}} \text{ (стержень растянут).}$$

ПРИМЕР 6.4.3. Определить усилия в стержнях 12, 13, 45 фермы, показанной на рис. 6.9, а.

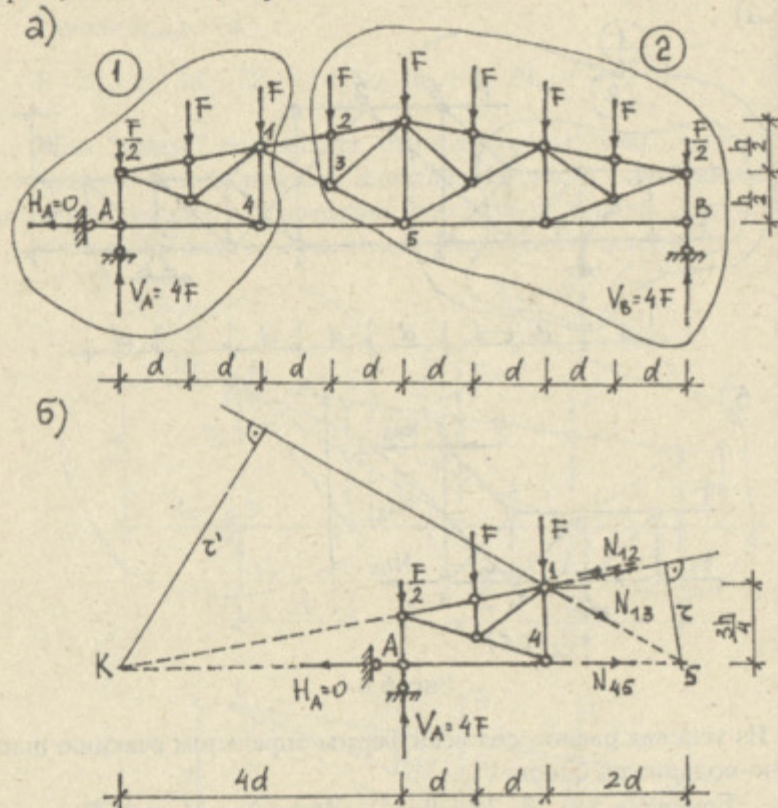


Рис. 6.9

Определяем опорные реакции симметрично загруженной балочной фермы:

$$\sum F_x = 0, H_A = 0, \sum \text{mom}(F)_A = 0, V_B = 4F, \\ \sum \text{mom}(F)_B = 0, V_A = 4F.$$

Замкнутыми сечениями, проходящими через стержни 12, 13, 45 разрежем ферму на две части 1 и 2 (6.9, а). Рассмотрим равновесие части 1, к которой приложено меньшее число активных сил. Неизвестные усилия N_{12} , N_{13} , N_{45} определим независимо друг от друга из условий равновесия части фермы 1 (6.9, б):

$$\sum \text{mom}(F_{\text{ome}})_5 = 0, -F \cdot 2d - F \cdot 3d - \frac{F}{2} \cdot 4d + 4F \cdot 4d + N_{12} \cdot r = 0,$$

$$N_{12} = -\frac{9Fd}{r} \text{ (стержень сжат);}$$

$$\sum \text{mom}(F_{\text{ome}})_1 = 0, -Fd - \frac{F}{2} \cdot 2d + 4F \cdot 2d - N_{45} \cdot \frac{3h}{4} = 0,$$

$$N_{45} = \frac{8Fd}{h} \text{ (стержень растянут);}$$

$$\sum \text{mom}(F_{\text{ome}})_K = 0, \frac{F}{2} \cdot 4d + F \cdot 5d + F \cdot 6d - 4F \cdot 4d + N_{13} \cdot r' = 0,$$

$$N_{13} = \frac{3Fd}{r'} \text{ (стержень растянут).}$$

Точки 5, 1 и К, не лежащие на одной прямой, для искомых усилий являются моментными.

ПРИМЕР 6.4.4. Определить усилие в стержне 6.3 фермы, показанной на рис. 6.8, а.

Замкнутым разрезом 2 (рис. 6.8, а) выделим часть фермы (рис. 6.10) и рассмотрим её равновесие. Усилие в стержне 12 было определено ранее методом сечений (см. пример 6.4.2).

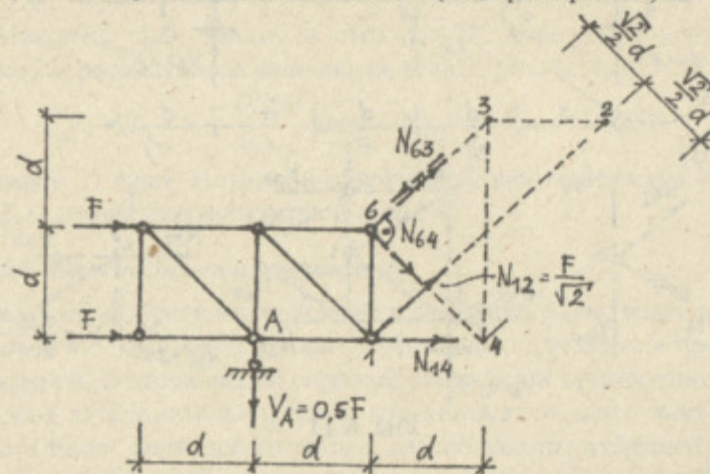


Рис. 6.10

$$\sum \text{mom}(F_{\text{отс}})_4 = 0, F \cdot d - 0,5F \cdot 2d + \frac{F}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} d + N_{63} \cdot \sqrt{2} d = 0,$$

$$N_{63} = -\frac{F}{2\sqrt{2}} \text{ (стержень сжат).}$$

6.5. Совместное применение способа вырезания узлов и способа сечений

В некоторых случаях для определения усилий в отдельных стержнях ферм приходится совместно использовать способ вырезания узлов (одного или нескольких) и способ сечений.

ПРИМЕР 6.5.1. Определить усилие в стойке 21 полураскосной балочной фермы (рис. 6.11,а).

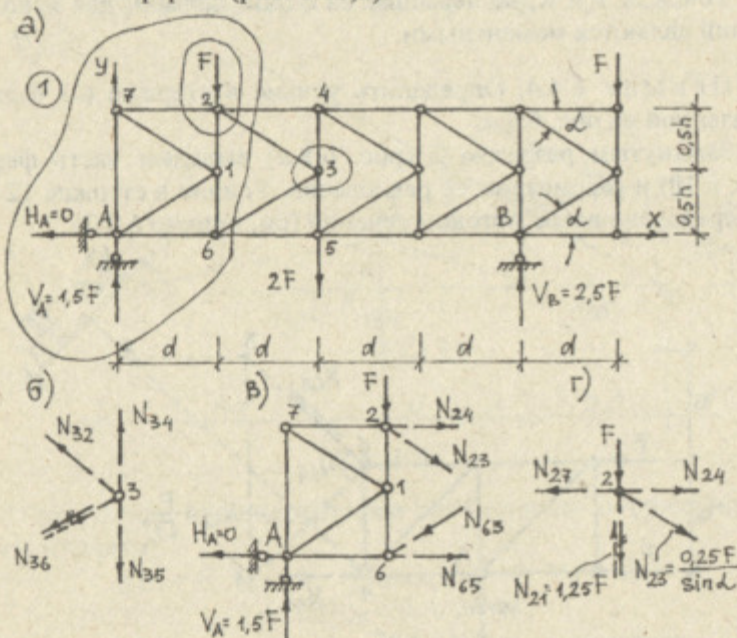


Рис. 6.11

Определение опорных реакций:

$$\sum F_x = 0, H_A = 0;$$

$$\sum \text{mom}(F)_A = 0, F \cdot d + 2F \cdot 2d + F \cdot 5d - V_B \cdot 4d = 0, V_B = 2,5F;$$

$$\sum \text{mom}(F)_B = 0, -F \cdot 3d - 2F \cdot 2d + F \cdot d + V_A \cdot 4d = 0, V_A = 1,5F;$$

$$\sum F_y = 0 \text{ (проверка)}, -F - F - 2F + 1,5F + 2,5F = 0, 0 = 0.$$

Рассмотрим равновесие узла 3 (рис. 6.11,б):

$$\sum F_x = 0, -N_{32} \cos \alpha - N_{36} \cos \alpha = 0, N_{32} = -N_{36}.$$

Из этого уравнения равновесия следует, что значения усилий в полураскосах 32 и 36 одинаковы, но противоположны по знаку. Пусть полураскос 32 испытывает растягивающие усилия. В этом случае полураскос 36 будет сжат.

Замкнутым сечением 1 отсечём левую часть фермы, нагруженную меньшим количеством сил (рис. 6.11,в), и рассмотрим её равновесие:

$$\sum F_y = 0, 1,5F - F - N_{23} \sin \alpha - N_{36} \sin \alpha = 0,$$

$$0,5F - 2N_{23} \sin \alpha = 0, N_{32} = \frac{0,25F}{\sin \alpha}.$$

Знак "плюс", полученный для усилия N_{23} , подтверждает наше предположение о характере деформации стержня 23 (растяжение).

Наконец, зная усилие в стержне 23, определим усилие в стойке 21, рассматривая равновесие узла 2 (рис. 6.11,г):

$$\sum F_y = 0, -F - \frac{0,25F}{\sin \alpha} \sin \alpha - N_{21} = 0, N_{21} = -1,25F.$$

Стержень 21 сжат. Истинное направление вектора усилия N_{21} на рис. 6.11,г показано пунктирной линией.

6.6. Способ замены стержней

Способы определения усилий в стержнях ферм, изложенные в пп. 6.3–6.5 настоящей лекции, эффективны для ферм с простой структурой. В стержнях со сложной структурой применение этих способов затруднительно. Чаще для кинематического анализа и расчёта таких ферм используются способ замены стержней и кинематический способ.

В способе замены стержней заданная ферма со сложной структурой преобразуется в ферму с простой структурой путём

перестановки группы её стержней и опорных связей в новое положение. Рассмотрим случай, когда такое преобразование фермы достигается перестановкой одного стержня или одной опорной связи. Например, ферма, показанная на рис. 6.12,а, преобразуется в другую ферму (6.12,б) путём перестановки стержня av в положение ac . Стержень av в дальнейшем будем называть заменяемым, а стержень ac — заменяющим.

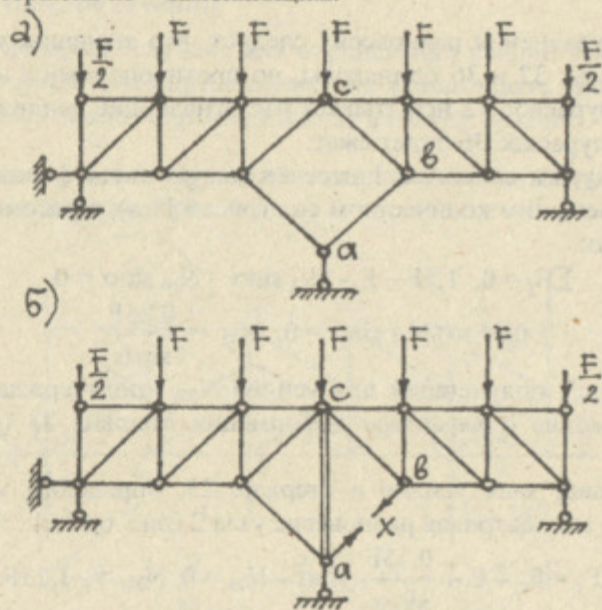


Рис. 6.12

Новая ферма должна быть геометрически неизменяемой и простой по структуре. Это значит, что усилия в её стержнях можно определить, используя способы вырезания узлов или сечений, а также их сочетание.

Произведём расчёт новой фермы, обозначив: $S_{ac}^{(F)}$ — усилие в заменяющем стержне от заданной нагрузки, $S_{ac}^{(X)}$ — усилие в этом же стержне от X , X — усилие в заменяющем стержне заданной фермы. Из условия эквивалентности заданной и новой ферм сум-

ма $S_{ac}^{(F)}$ и $S_{ac}^{(X)}$ должна быть равна нулю. Другими словами, мы отрицаем существование стержня ac в новой ферме, приравнявая усилия в нём к нулю.

$$S_{ac}^{(F)} + S_{ac}^{(X)} = 0. \quad (6.1)$$

В соответствии с принципом независимости действия сил (см. п. 1.5 первой лекции) $S_{ac}^{(X)} = S_{ac}^{(X=1)} X$. После подстановки этого соотношения в (6.1) получим усилие в заменяемом стержне заданной фермы:

$$S_{ac}^{(F)} + S_{ac}^{(X=1)} X = 0, \\ X = N_{av} = -\frac{S_{ac}^{(F)}}{S_{ac}^{(X=1)}}. \quad (6.2)$$

Если $S_{ac}^{(X=1)} = 0$, то из (6.2) следует, что $X = \infty$, т.е. заданная ферма мгновенно изменяема или геометрически изменяема. При $S_{ac}^{(X=1)} \neq 0$ усилие X имеет определённое и конечное значение. В этом случае заданная форма геометрически неизменяема (см. п. 2.4 второй лекции).

В дальнейшем, зная усилие X в заменяемом стержне заданной фермы, усилия в её остальных стержнях S_k можно определить из соотношения:

$$S_k = S_k^{(F)} + S_k^{(X=1)} X. \quad (6.3)$$

В формуле (6.3) $S_k^{(F)}$ — усилие в k -том стержне новой фермы от заданной нагрузки, $S_k^{(X=1)}$ — усилие в k -том стержне новой фермы от единичного усилия в заменяющем стержне.

6.7. Кинематический способ

Кинематический способ основан на принципе возможных перемещений Лагранжа. Применение этого принципа к определению усилий в стержнях ферм рассмотрим на примере.

ПРИМЕР 6.7.1. Определить усилие в стержне av фермы со сложной структурой от заданной нагрузки (рис. 6.13,а).

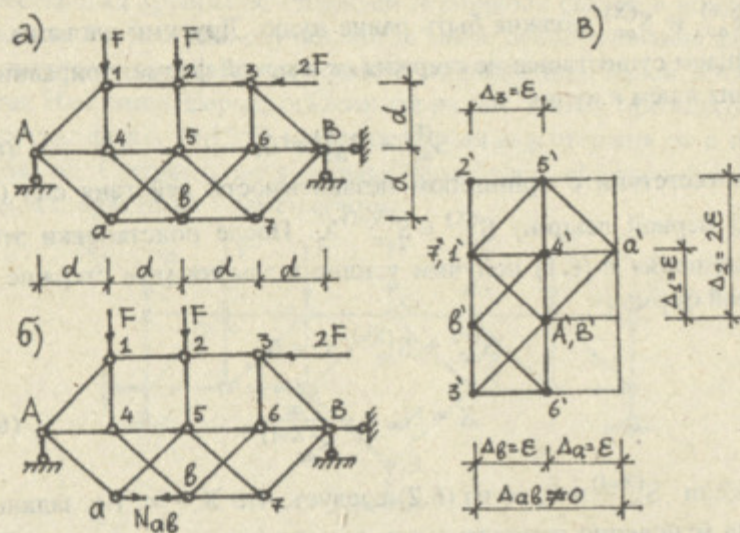


Рис. 6.13

Удалим из фермы стержень ab , препятствующий взаимному горизонтальному перемещению узлов a и b . В результате этой операции заданная ферма преобразуется в механизм с одной степенью свободы (рис. 6.13, б). Действие отброшенного стержня заменим положительным усилием N_{ab} . Условием равновесия механизма является равенство нулю работы всех сил, приложенных к нему (заданной нагрузки и неизвестного усилия N_{ab}), на возможных перемещениях.

Возможные перемещения узлам механизма зададим, построив не повернутый полярный план перемещений (рис. 6.13, в). В полюс плана (A' и B') поместим неподвижные узлы фермы A и B . Узел A неподвижен, так как левая опорная связь препятствует его вертикальному перемещению, а средний пояс фермы $B654A$, имеющий прямую ось, — горизонтальному. Задавшись перемещением узла b (на плане перемещений — точка b'), последовательно определим положение остальных узлов механизма $3', 1', 4', 6', 5', a'$.

Из рис. 6.13, в видно, что $\Delta_{ab} \neq 0$, т.е. удаленный стержень представляет собой связь, действительно препятствующего вза-

имному горизонтальному перемещению узлов a и b . Это является признаком геометрической неизменяемости заданной фермы (см. п. 2.3 второй лекции).

Зафиксировав перемещения узлов в направлении действия нагрузки ($\Delta_a = \epsilon$, $\Delta_b = \epsilon$, $\Delta_1 = \epsilon$, $\Delta_2 = 2\epsilon$, $\Delta_3 = \epsilon$), запишем условие равновесия механизма в форме Лагранжа:

$$-F\Delta_1 - F\Delta_2 + 2F\Delta_3 + N_{ab}\Delta_a + N_{ab}\Delta_b = 0,$$

$$= -F\epsilon - F \cdot 2\epsilon + 2F \cdot \epsilon + N_{ab} \cdot \epsilon + N_{ab} \cdot \epsilon = 0,$$

$N_{ab} = 0,5 F$ (стержень растянут, как и предполагалось).

Величина искомого усилия не зависит от масштаба плана перемещений, так как число ϵ в уравнении равновесия сокращается.

После определения усилия в стержне ab расчёт заданной фермы можно продолжить, используя аналитические способы, изложенные в пп. 6.3–6.5 настоящей лекции.

6.8. Вопросы для самопроверки

1. Какое сооружение называется фермой?
2. Какие предпосылки положены в основу образования расчётных схем ферм?
3. Для восприятия каких нагрузок целесообразно использовать фермы? Почему?
4. Запишите соотношение между числом узлов, стержней и опорных связей, при котором заданная ферма может быть геометрически неизменяемой.
5. Как производится кинематический анализ ферм с простой структурой?
6. Назовите способы определения усилий в стержнях ферм.
7. В каких случаях для определения усилий в стержнях ферм целесообразно использовать способ вырезания узлов?
8. Каковы недостатки способа вырезания узлов для определения усилий в стержнях ферм?
9. Можно ли использовать способ вырезания узлов для определения усилий в стержнях ферм со сложной структурой? К чему в этом случае с математической точки зрения сводится решение задачи.
10. Назовите частные случаи равновесия узлов. В каких ситуациях полезно знание этих случаев для определения усилий в стержнях ферм?

11. Задана ферма и нагрузка, действующая на неё (рис. 6.14). Есть ли в этой ферме стержни, усилия в которых равны нулю? Если да, то поясните: почему?

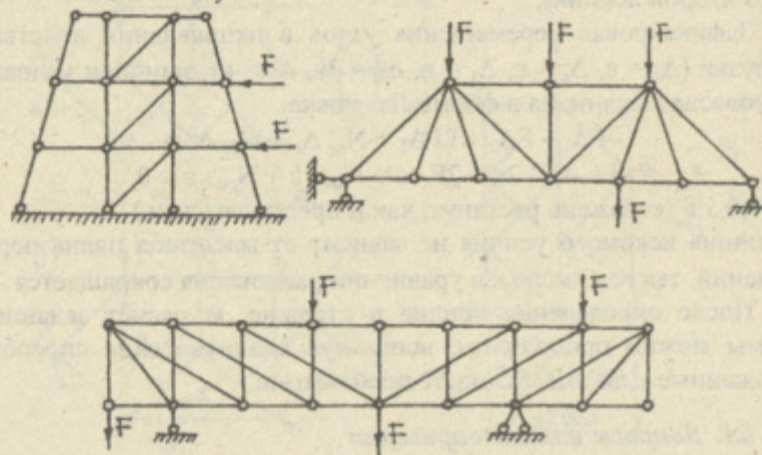


Рис. 6.14

12. В каких случаях для определения усилий в стержнях ферм используется способ сечений? Назовите достоинства этого способа для определения усилий.
13. Задана ферма и нагрузка, действующая на неё. Как определить усилие в одном из стержней этой фермы (по указанию преподавателя) способом моментных точек?
14. Какую задачу позволяет решить способ сечений при определении усилий в случае, когда секущая плоскость, расчленяющая ферму на две части, проходит через n стержней, причем $n > 3$?
15. Сформулируйте статический признак геометрической неизменяемости ферм в случае определения усилий в их стержнях способом вырезания узлов или способом сечений.
16. Какие способы целесообразно использовать для определения усилий в стержнях ферм со сложной структурой?
17. Каким образом определяются усилия в стержнях ферм способом замены стержней? Дайте пояснения на примере замены только одного стержня.
18. Сформулируйте статический признак геометрической неизменяемости ферм в случае определения усилий в их стержнях методом замены стержней (на примере замены только одного стержня).

19. Каким образом определяются усилия в стержнях ферм кинематическим способом?
20. Сформулируйте признак геометрической неизменяемости ферм в случае определения усилий в их стержнях кинематическим способом.

6.9. Рекомендуемая литература

1. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем: Учеб. для вузов. — М.: Изд-во ассоциации строительных вузов, 1996. — 541 с.
Глава 4. Расчёт типичных статически определимых систем. § 4.3. Расчёт плоских ферм. С. 76–80.
Глава 2. Расчёт типичных статически определимых систем на неподвижную нагрузку. § 2.2. Метод сечений. § 2.3. Метод замены связей. С. 33–38.
2. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика: Учеб. для вузов. — М.: Высш. школа, 1986. — 607 с.
Глава 4. Плоские фермы. § 4.1. Понятие о ферме. § 4.2. Определение усилий в стержнях простейших ферм. § 4.3. Определение усилий в стержнях сложных ферм. § 4.4. Распределение усилий в элементах ферм различного очертания. § 4.5. Исследование неизменяемости ферм. С. 98–133.
3. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лашенков Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Стержневые системы: Учеб. для вузов. — М.: Стройиздат, 1981. — 512 с.
Глава VI. Расчёт статически определимых ферм. § 27. Выбор расчётной схемы фермы. § 28. Система уравнений равновесия фермы. § 29. Аналитический анализ образования ферм. § 30. Анализ напряжённого состояния ферм при неподвижной нагрузке. С. 145–171.
4. Клейн Г.К., Леонтьев Н.Н. и др. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. Статика стержневых систем: Учеб. пособие. — М.: Высш. школа, 1980. — 384 с.
Глава V. Плоские фермы. § V.1. Аналитический расчёт на неподвижную нагрузку. С. 62–71.
5. Проценко В.М., Себешев В.Г. Расчёт статически определимых систем: Методические указания. — Новосибирск: НИСИ, 1990. — 52 с.
Задача № 3. Расчёт простой плоской статически определимой фермы. Стр. 19–20. Задача № 4. Расчёт сложной статически определимой плоской фермы. Стр. 24–27.

ЛЕКЦИЯ СЕДЬМАЯ

ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ ФЕРМ

- 7.1. СТАТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ ФЕРМАХ
- 7.2. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ СПОСОБ. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МГНОВЕННЫХ ЦЕНТРОВ ВРАЩЕНИЯ
- 7.3. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ СПОСОБ. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПЛАНА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ
- 7.4. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ
- 7.5. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

7.1. Статический способ построения линий влияния усилий в стержнях фермах

При построении линий влияния усилий в стержнях ферм предполагается, что единичный груз при любом положении своё воздействие на ферму передаёт через узлы. В дальнейшем, для упрощения чертежей, в настоящей лекции поперечные балки и настил, по которому фактически движется единичный груз, изображать не будем.

Статический способ построения линий влияния усилий рационально использовать в фермах с простой структурой. Суть способа состоит в том, что с помощью условий равновесия узлов или отдельных частей фермы устанавливается аналитическая связь между искомым усилием и координатами, определяющими положение единичной силы на заданном маршруте движения.

ПРИМЕР 7.1.1. Построить линию влияния усилия в стержне av фермы, показанной на рис. 7.1,а. Маршрут движения единичной силы на этом рисунке показан пунктирной линией.

Положение единичного груза на верхнем и нижнем поясах фермы определяется абсциссой x (рис. 7.1.1,а). Определим опорные реакции фермы от этого груза:

$$\sum F_x = 0, H_B = 0;$$

$$\sum \text{mom}(F)_A = 0, 1 \cdot x - V_B \cdot 16 = 0, V_B = \frac{x}{16};$$

$$\sum \text{mom}(F)_B = 0, -1 \cdot (16 - x) + V_A \cdot 16 = 0, V_A = \frac{16 - x}{16}.$$

Для определения усилия в стержне av используется метод сечений (замкнутые сечения 1 и 2 – рис. 7.1,а).

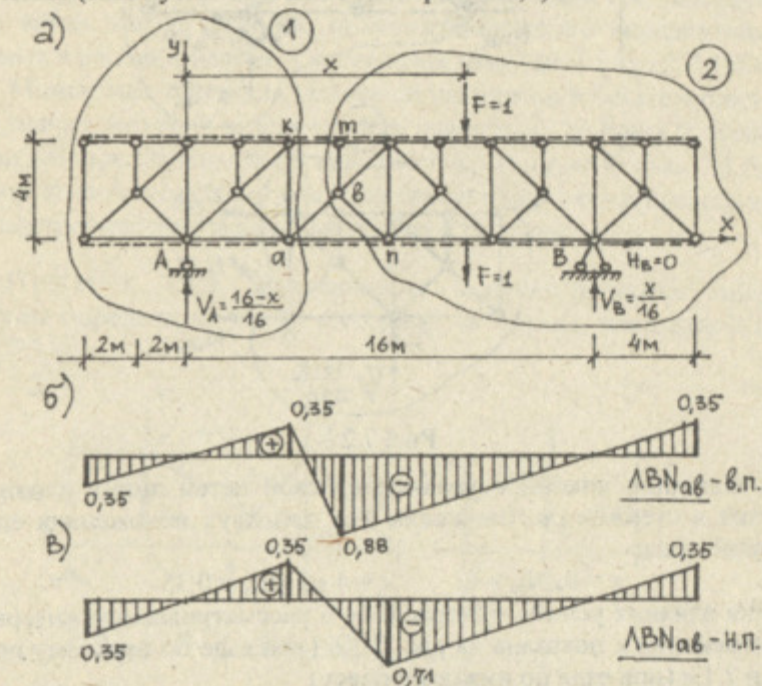


Рис. 7.1

1. Единичный груз находится левее узла k на верхнем поясе или левее узла a на нижнем поясе, т.е. $-4 \text{ м} \leq x \leq 4 \text{ м}$. Рассмотрим равновесие правой части фермы (рис. 7.2,а), на которую действует меньше сил:

$$\sum F_y = 0, -N_{av} \cos 45^\circ + \frac{x}{16} = 0, N_{av} = \frac{x}{11,31}.$$

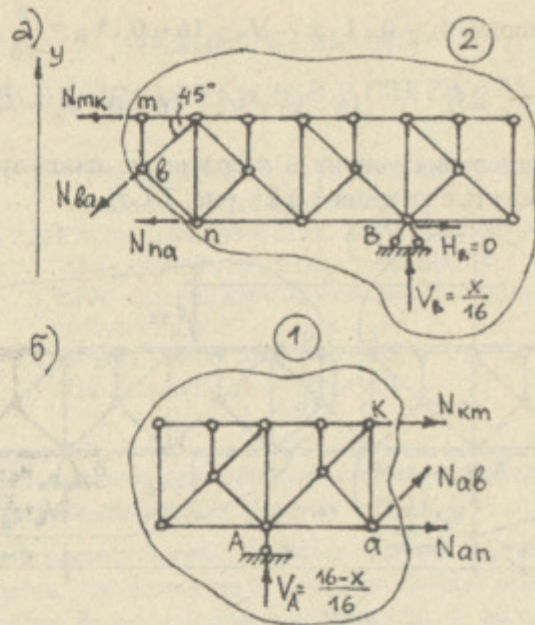


Рис. 7.2

Мы получили линейное уравнение левой ветви линии влияния усилия в стержне *ав*. Вычислим $N_{ав}$ при двух положениях единичной силы:

$$x = 0, N_{ав} = 0; \quad x = 4 \text{ м}, N_{ав} = 0,35.$$

Линия влияния усилия в стержне *ав* в рассматриваемом интервале изменения x показана на рис. 7.1,б (при езде по верхнему поясу) и 7.1,в (при езде по нижнему поясу).

2. Единичная сила находится правее узла *т* на верхнем поясе ($6 \text{ м} \leq x \leq 20 \text{ м}$) или правее узла *п* на нижнем поясе ($8 \text{ м} \leq x \leq 20 \text{ м}$). Для получения уравнения правой ветви линии влияния рассмотрим равновесие левой части фермы (рис. 7.2,б):

$$\sum F_y = 0, \quad N_{ав} \cos 45^\circ + \frac{16-x}{16} = 0, \quad N_{ав} = -\frac{16-x}{11,31}.$$

Используя это уравнение, получим:

$$x = 6 \text{ м}, \quad N_{ав} = -0,88 \quad (F = 1 \text{ находится над узлом } m),$$

$$x = 8 \text{ м}, \quad N_{ав} = -0,71 \quad (F = 1 \text{ находится над узлом } n),$$

$$x = 16 \text{ м}, \quad N_{ав} = 0.$$

Линии влияния усилия в стержне *ав* для рассматриваемых интервалов изменения x показаны на рис. 7.1,б,в.

3. Единичная сила находится между узлами *к* и *п* на верхнем поясе ($4 \text{ м} \leq x \leq 6 \text{ м}$) или между узлами *а* и *п* на нижнем поясе ($4 \text{ м} \leq x \leq 8 \text{ м}$). Так как воздействие $F = 1$ на ферму осуществляется через узлы, то проектируя точки *к*, *п*, *а*, *п* на соответствующие ветви линии влияния, получим положение передаточных прямых в рассматриваемых интервалах изменения x (рис. 7.1,б,в).

Моментная точка для усилия *ав* находится в бесконечности. Это значит, что если задача решена правильно, то левая и правая ветви ЛВ *Нав* должны быть параллельны. Используя рис. 7.1,б,в, читатели самостоятельно могут произвести проверку правильности построения линии влияния усилия в стержне *ав*.

ПРИМЕР 7.1.2. Загружением соответствующих линий влияния определить усилие в стержне *ав* фермы, показанной на рис. 7.3,а.

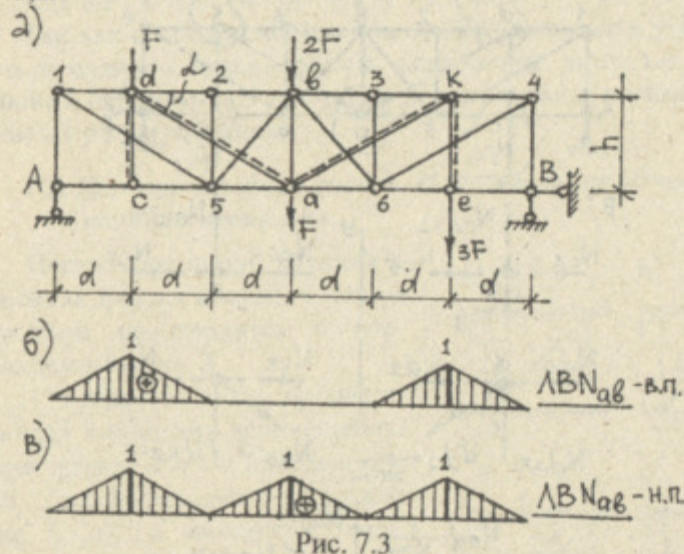


Рис. 7.3

Вычислим усилие в стержне *ав* при различных положениях единичной силы в узлах верхнего и нижнего поясов фермы из условия равновесия узла *а*, учитывая, что зигзаги фермы *adc* и *ake*

заканчиваются одиночными стержнями cd и ek . На рис. 7.3,а эти зигзаги показаны пунктирной линией.

1. Единичный груз находится в узлах 1, 2, в, 3, 4 верхнего пояса и в узлах А, 5, 6, В нижнего пояса (рис. 7.4,а). Используя частные случаи равновесия узлов c, d, e, k, a (см. п. 6.3 шестой лекции) последовательно получим:

$$N_{cd} = 0, N_{da} = 0, N_{ek} = 0, N_{ka} = 0, N_{ae} = 0.$$

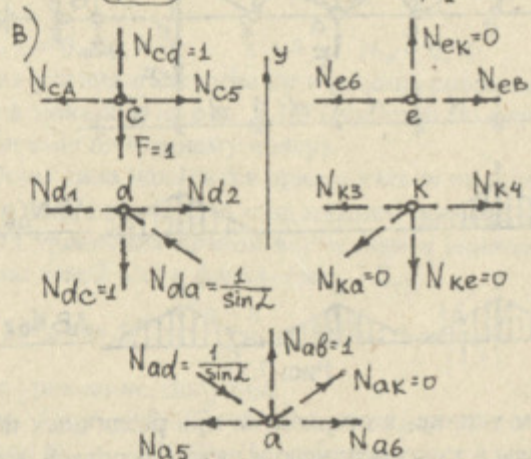
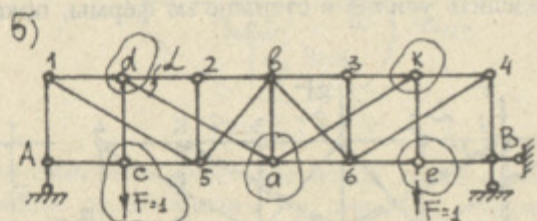
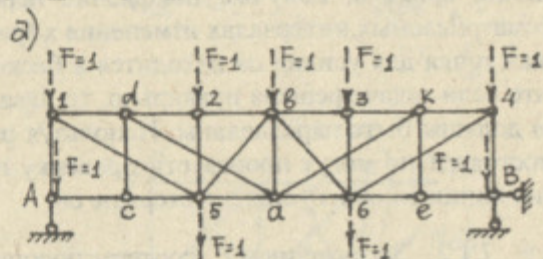


Рис. 7.4

2. Единичный груз находится в узле с нижнего пояса фермы (рис. 7.4,б). Из условия равновесия узлов c, d, e, k, a (рис. 7.4,в) имеем:

$$\sum F_y = 0, N_{cd} = 1, N_{da} = \frac{1}{\sin \alpha} \text{ (стержень сжат)},$$

$$N_{ek} = 0, N_{ka} = 0, N_{ae} = 1 \text{ (стержень растянут)}.$$

С учетом симметрии фермы $N_{ae} = 1$ и в том случае, когда $F = 1$ находится в узле е нижнего пояса (на рис. 7.4,б единичная сила в этом узле показана пунктирной линией).

3. Единичная сила находится в узлах d и k верхнего пояса и в узле a нижнего пояса фермы. Предлагается читателям, последовательно рассматривая равновесие узлов c, d, e, k, a , убедиться в том, что во всех этих случаях $N_{av} = 1$.

Линии влияния N_{av} показаны на рис. 7.3,б,в. Усилие в стержне av от заданной нагрузки определим нагружением ЛВ N_{av} (см. п. 4.1 четвертой лекции):

$$N_{av} = F \cdot 1 + 2F \cdot 0 + F \cdot 1 + 3F \cdot 1 = 5F.$$

Так как сосредоточенные силы, приложенные к узлам верхнего и нижнего поясов фермы, направлены вниз, т.е. положительны и ординаты ЛВ N_{av} также положительны, искомое усилие является растягивающим.

7.2. Кинематический способ. Использование мгновенных центров вращения

Построение линий влияния в стержнях фермы кинематическим способом производится в следующем порядке:

1. Удаляется связь, препятствующая взаимному перемещению узлов фермы a и b в направлении оси рассматриваемого стержня (рис. 7.5,а), т.е. вводится в одном из его сечений поступательный шарнир (рис. 7.5,б), который условно можно изобразить так, как показано на рис. 7.5,в. Учитывая,

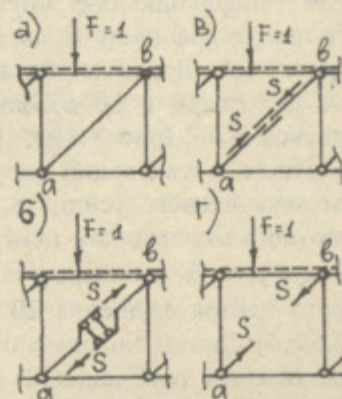


Рис. 7.5

что вдоль стержня ab продольное усилие постоянно, практически мы удаляем из фермы стержень ab (рис. 7.5,з).

2. Действие отброшенной связи заменяется положительным (растягивающим) усилием S (рис. 7.5,б,в,з).

3. Механизму с одной степенью свободы, образовавшемуся после удаления стержня, задаём возможные перемещения, желательны, в направлении положительного усилия S . Если число дисков в механизме невелико, то возможные перемещения ему можно задать, используя относительные и абсолютные мгновенные вращения дисков. Зная положение этих центров, можно построить эпюру возможных перемещений δ_F узлов фермы, находящихся на маршруте движения единичной силы, в направлении линии её действия.

4. Искомую линию влияния усилия получим, замерив ординаты эпюр возможных перемещений δ_F в масштабе $\delta_S = 1$ (см. п. 3.3 третьей лекции). В фермах δ_S – это взаимное перемещение узлов, которые соединяет рассматриваемый стержень, в направлении его оси. В случае использования мгновенных центров вращения механизма, ординаты линии влияния усилия в стержне ab (рис. 7.6,а) определяются через взаимный угол поворота дисков 1 и 2 (рис. 7.6,б), к которым приложено усилие S

$$\varphi = \frac{1}{r}, \quad (7.1)$$

где r – перпендикуляр, опущенный из относительного мгновенного центра вращения 12 дисков 1 и 2 на линию действия усилия S (рис. 7.6,а). Докажем это утверждение.

Пусть 10 и 20 абсолютные мгновенные центры вращения дисков 1 и 2 (рис. 7.6,а). Положение дисков 1 и 2 на эпюре возможных перемещений получим их перемещением в направлении положительного усилия S , т.е. поворотом диска 1 вокруг абсолютного мгновенного центра вращения 10 против часовой стрелки на угол α_1 и поворотом диска 2 вокруг абсолютного мгновенного центра вращения 20 по часовой стрелки на угол α_2 (рис. 7.6,а,б). Линии, определяющие положение дисков 1 и 2 на эпюре возможных перемещений, пересекаются под их относительным мгновенным центром вращения 12.

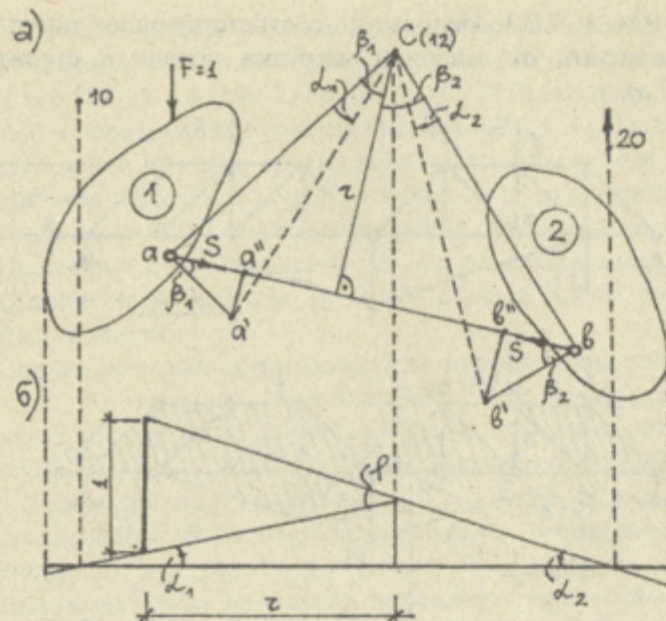


Рис. 7.6

При малых возможных перемещениях $aa' = Ca \cdot \alpha_1$, $bb' = Cb \cdot \alpha_2$, (рис. 7.6,а,б). Выполняя условие $\delta_S = 1$, получим:

$$\delta_S = aa'' + bb'' = aa' \cos \beta_1 + bb' \cos \beta_2 =$$

$$Ca \cdot \alpha_1 \cos \beta_1 + Cb \cdot \alpha_2 \cos \beta_2 = r\alpha_1 + r\alpha_2 = r(\alpha_1 + \alpha_2) = r\varphi = 1.$$

Отсюда следует соотношение (7.1).

Учитывая, что при малых перемещениях $\varphi \approx \tan \varphi$, единицу масштаба ординат линии влияния получим, отложив от горизонтали отрезок r от точки взаимного пересечения дисков 1 и 2 (рис. 7.6,б).

Если возможные перемещения механизму заданы так, что работа усилий S на этих перемещениях положительна, то знак линии влияния искомого усилия выше оси отсчёта будет положительным, а ниже – отрицательным (обоснование см. в п. 3.3 третьей лекции).

ПРИМЕР 7.2.1. Используя соответствующие линии влияния, вычислить от заданной нагрузки усилие в стержне ab (рис. 7.7, а).

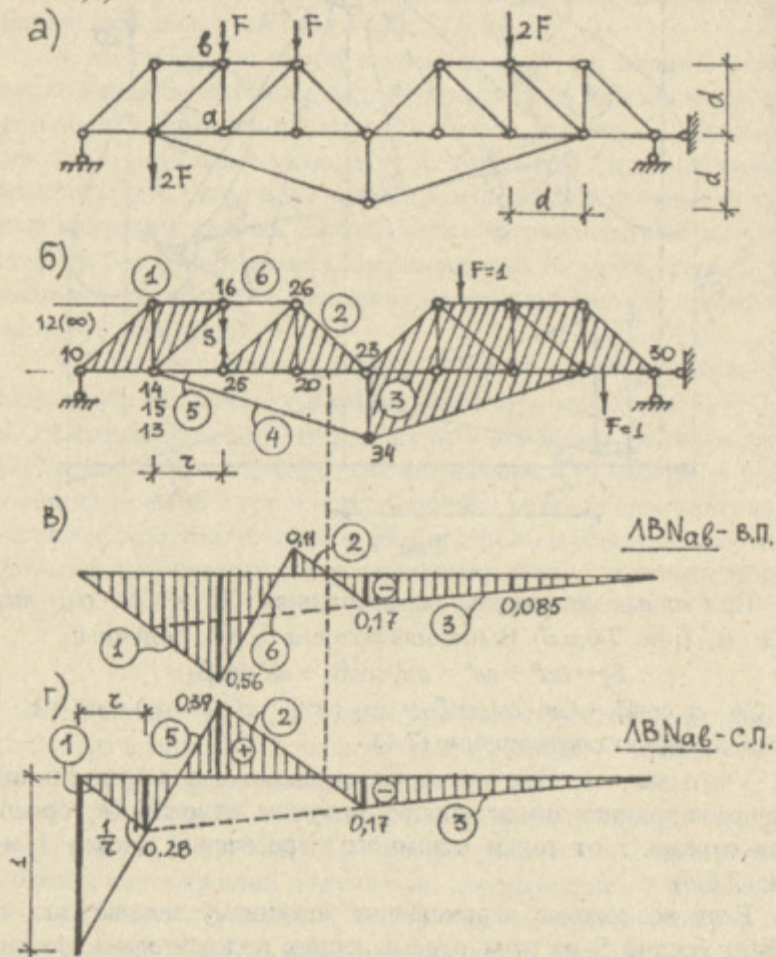


Рис. 7.7

Возможные перемещения механизма, образовавшемуся после удаления из фермы стержня ab (рис. 7.7, б), зададим с помощью мгновенных центров вращения. Абсолютный мгновенный центр вращения диска 3 (30) совпадает с неподвижным узлом

правой опоры фермы. Положение относительных мгновенных центров вращения дисков 1 и 2 (12), 2 и 3 (23), 1 и 4 (14), 1 и 5 (15), 1 и 6 (16), 3 и 4 (34), 2 и 6 (26), 2 и 5 (25) очевидно. Относительный мгновенный центр вращения дисков 1 и 3 (13) находится на пересечении прямых, проходящих через центры 14 и 34, с одной стороны, 12 и 23, с другой. Абсолютный мгновенный центр вращения диска 1 (10) определим, зная положение относительного мгновенного центра вращения 13, т.е. на пересечении прямой, проходящей через центры 30 и 13, с осью левой шарнирно-подвижной опоры.

Эпюры возможных вертикальных перемещений узлов верхнего (рис. 7.7, в) и среднего поясов (рис. 7.7, г) фермы получены с помощью абсолютных и относительных мгновенных центров вращения 10, 30, 13, 23, 12, 15, 25, 16, 26 следующим образом.

1. Повернём диск 1 вокруг своего абсолютного мгновенного центра вращения 10 по часовой стрелке, т.е. в направлении положительного S и зафиксируем положение прямой, соответствующей этому диску на эпюрах возможных вертикальных перемещений узлов фермы в пределах верхнего (рис. 7.7, в) и среднего поясов (рис. 7.7, г).

2. Прямая, соответствующая диску 3, пройдет через абсолютный мгновенный центр вращения 30 и пересечётся с прямой, соответствующей диску 1, под относительным мгновенным центром вращения 13. Границы диска 3 в пределах верхнего и среднего поясов фермы совпадают.

3. Прямая, соответствующая диску 2, на эпюре возможных перемещений пересечётся с прямой, соответствующей диску 3, под относительным мгновенным центром вращения 23 и, учитывая, что относительный мгновенный центр вращения 12 находится в бесконечности, будет параллельна прямой, соответствующей диску 1. В пределах верхнего и среднего поясов фермы границы диска 2 различны (рис. 7.7, в, г).

4. Положение прямой, соответствующей диску 6, на эпюре возможных перемещений узлов верхнего пояса определяется из условия совместности перемещений дисков 1 и 6 под относи-

тельным центром вращения 16 и дисков 2 и 6 под относительным центром 26 (рис. 7.7,в).

5. Аналогично, из условия совместности перемещений общих узлов дисков 1, 2 и 5 определится положение прямой, соответствующей диску 5, на эпюре возможных вертикальных перемещений узлов среднего пояса (рис. 7.7,з).

Из условия $\delta_s = 1$ определим взаимный угол поворота дисков 1 и 5. Величина этого угла будет равна $1/\tau$, где τ – перпендикуляр, опущенный из относительного мгновенного центра вращения дисков 15 на линию действия усилия S (рис. 7.7,б). Ординаты ЛВ N_{av} определены путём их измерения масштабным единичным отрезком (рис. 7.7,в,г).

Ранее мы задались поворотом диска 1 вокруг 10 по направлению положительного усилия S . Это обусловило возможные перемещения всех дисков механизма с одной степенью свободы, в том числе и диска 2, который повернулся вокруг своего абсолютного центра вращения 20 по часовой стрелке, т.е. также по направлению положительного усилия S . В этом случае ординаты линии влияния усилия в стержне av выше отсчёта будут положительными, а ниже — отрицательными (рис. 7.7, в, г).

Усилие в стержне av получим путём загрузки соответствующих линий влияния:

$$N_{AB} = -F \cdot 0,56 + F \cdot 0,11 - 2F \cdot 0,085 - 2F \cdot 0,28 = -1,18 F$$

Знак "минус" указывает на то, что это усилие является сжимающим.

7.3. Кинематический способ. Использование плана перемещений

Общий порядок построения линий влияния усилий в стержнях ферм кинематическим способом изложен в п. 7.2 настоящей лекции. Часто после уравнивания стержня, линию влияния усилия которого необходимо построить, ферма преобразуется в механизм с большим количеством дисков. Определение положений абсолютных и относительных мгновенных центров вращения дисков такого механизма затруднительно, а порой и невозможно. В этом случае эпюру возможных перемещений δ_F целесообразно

строить, используя план перемещений узлов механизма фермы. Масштабный отрезок $\delta_s = 1$ определяется непосредственно по плану перемещений.

ПРИМЕР 7.3.1. Построить линию влияния усилия в стойке *av* шпренгельной фермы, показанной на рис. 7.8,а.

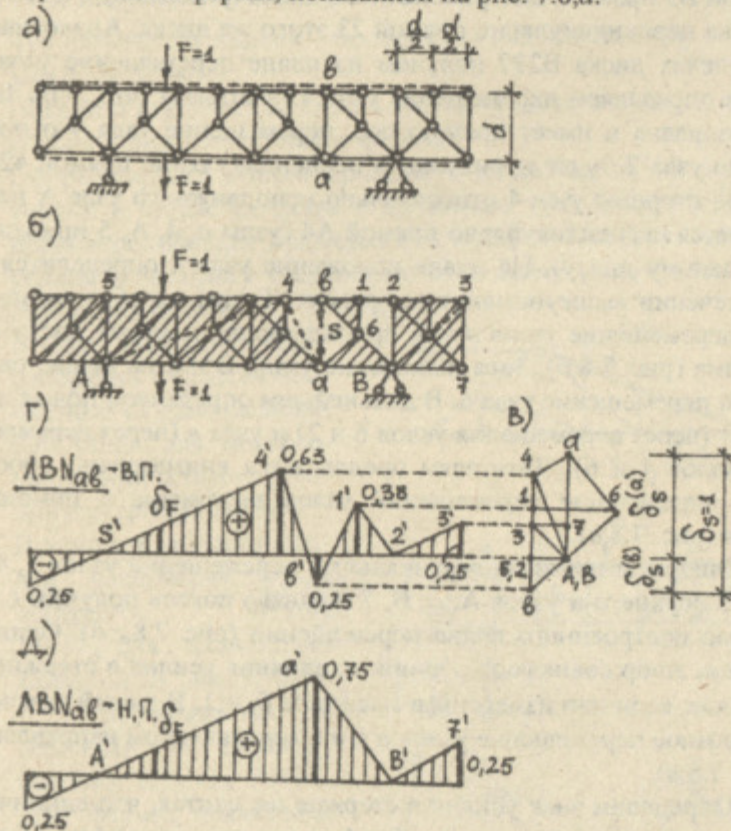


Рис. 7.8

Удаляя из фермы стержень *ав*, образуем механизм с одной степенью свободы, состоящий из шести дисков (рис. 7.8, б). Для определения возможных перемещений узлов механизма используем полярный неповёрнутый план перемещений. В полюс этого

плана помещаем неподвижные узлы фермы А и В (рис. 7.8,в). В произвольном масштабе задаёмся перемещением узла 2 (при малых величинах перемещений перпендикулярно стержню 2В по горизонтали – влево). Перемещение узла 3 определим на пересечении прямых, проведенных из полюса В плана перпендикулярно прямой В3 правого заштрихованного диска (рис. 7.8,б) и из точки 2 плана перпендикулярно прямой 23 этого же диска. Аналогично, в пределах диска В237 получим на плане перемещение узла 7. Далее определяем перемещение узла 4. Учитывая, что цепь 4в12 не разорвана и имеет прямую ось, перемещение узла 4 относительно узла 2 будет происходить перпендикулярно прямой 42. С другой стороны узел 4 относительно неподвижного узла А перемещается перпендикулярно прямой А4 (узлы а, 4, А, 5 принадлежат одному диску). На плане положение узла 4 определится на пересечении вышеупомянутых прямых. Таким же образом получим перемещение узлов а и 5, принадлежащих левому диску механизма (рис. 7.8,б). Зная положение узлов В и а на плане, определим перемещение узла 6. В дальнейшем определяем положение узла 1 (через перемещения узлов 6 и 2) и узла в (через перемещения узлов 4 и 6). Читателям предлагается внимательно проследить определение перемещений узлов механизма с помощью плана (рис. 7.8,в).

Эпюры возможных вертикальных перемещений узлов 5, 4, в, 1, 2, 3 верхнего и узлов А, а, В, 7 нижнего поясов получим с помощью построенного плана перемещений (рис. 7.8,г,д). Ординаты этих эпюр совпадают с линиями влияния усилия в стержне ав в случае, если они измерены в масштабе $\delta_s = 1$. В нашей задаче δ_s – взаимное перемещение узлов а и в в вертикальном направлении (рис. 7.8,е).

Определим знак усилия в стержне ав, считая, что единичная сила находится между узлами 5 и 4 на верхнем поясе фермы и узлами А и а – на нижнем (рис. 7.8,б). В соответствии с принципом возможных перемещений работа всех сил, действующих на механизм, находящийся в равновесии, запишется:

$$-1 \cdot \delta_F + S\delta_S^{(a)} + S\delta_S^{(в)} = 0$$

Из полученного выражения видно, что в пределах рассматриваемых интервалов движения единичной силы $S > 0$, т.е. выше оси отсчёта линии влияния её ординаты положительны, а ниже – отрицательны.

Линии влияния усилия в стержне ав показаны на рис. 7.8,г,д.

7.4. Вопросы для самопроверки

1. Что называется линией влияния усилия в каком-либо стержне заданной фермы?
2. Поясните статический смысл любой ординаты линии влияния усилия в заданном стержне фермы.
3. Сформулируйте общий принцип построения линий влияния усилия в стержнях ферм статическим способом. Можно ли проконтролировать правильность построения линии влияния усилия в заданном стержне по взаимному расположению её отдельных ветвей?
4. В каких ситуациях целесообразно использовать частные случаи равновесия узлов для построения линий влияния усилий в стержнях ферм?
5. Используя частные случаи равновесия узлов построить: ЛВ N_{12} , ЛВ N_{34} для фермы, показанной на рис. 7.9,а ($F = 1$ перемещается по верхнему и нижнему поясам); ЛВ N_{12} , ЛВ N_{34} для фермы, показанной на рис. 7.9,б ($F = 1$ перемещается по верхнему поясу).
6. Изложите общий порядок построения линий влияния усилий в стерж-

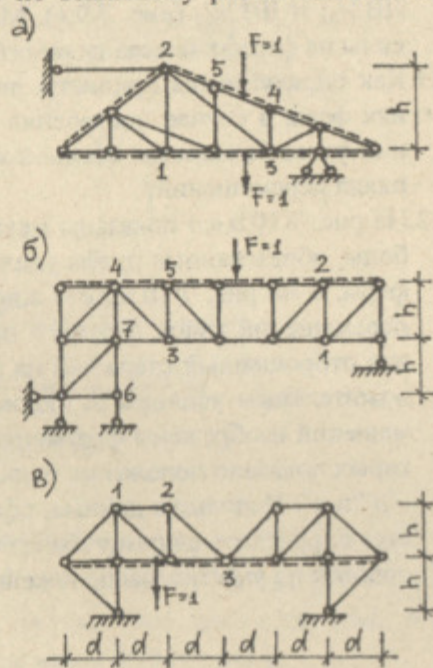


Рис. 7.9

ниях ферм кинематическим способом.

7. Запишите соотношение, на котором основано построение линий влияния усилий в стержнях ферм кинематическим способом. Что такое δ_s ? Почему перемещение δ_s принимается равным единице? Что такое δ_F ?
8. Как определяются ординаты линий влияния усилий в случае построения эпюры возможных перемещений узлов фермы с помощью мгновенных центров вращения дисков механизма с одной степенью свободы?
9. Как определяются знаки линий влияния усилий в стержнях ферм, построенных кинематическим способом?
10. Кинематическим способом, используя мгновенные центры вращения дисков соответствующих механизмов построить: ЛВ N_{23} , ЛВ N_{25} (рис. 7.9, а), ЛВ N_{45} и ЛВ N_{67} (рис. 7.9, б), ЛВ N_{12} и ЛВ N_{23} (рис. 7.9, в). Маршруты движения единичной силы на фермах показаны пунктирной линией.
11. Как определяются ординаты линий влияния усилий в стержнях ферм в случае построения эпюры возможных перемещений узлов механизма с одной степенью свободы с помощью плана перемещений?
12. На рис. 7.10, а, в, д показаны механизмы с одной степенью свободы, образованные путём удаления стержня $ав$ из различных ферм, а на рис. 7.10, б, г, е – эпюры возможных вертикальных перемещений узлов верхнего пояса этих механизмов. Действие отброшенных стержней на всех механизмах заменено положительным усилием S . Рядом с эпюрами возможных перемещений изображены фрагменты планов перемещений, на которых показано положение полюсов P и узлов механизма a и $в$ – a'' и $в''$. Используя данные, сформулированные выше, требуется определить единицу масштаба ординат ЛВ $N_{ав}$ и знак этих ординат на участке, расположенном под силой $F = 1$.

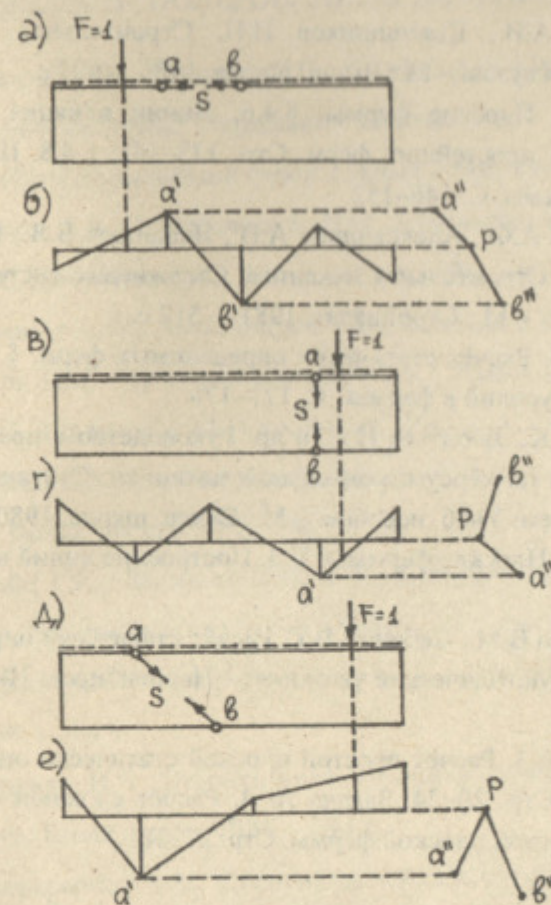


Рис. 7.10

7.5. Рекомендуемая литература

1. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем: Учеб. для вузов. – М.: Изд-во ассоциации строительных вузов, 1996. – 541 с.
Глава 4. Расчёт типичных статически определимых систем.
§ 4.3. Расчёт плоских ферм. С. 80–86.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

2. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика: Учеб. для вузов. – М.: Высш. школа, 1986. – 607 с.
Глава 4. Плоские фермы. § 4.6. Линии влияния усилий в стержнях простейших ферм. Стр. 133–142. § 4.8. Шпренгельные системы. С. 146–152.
3. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лащенко Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Стержневые системы: Учеб. для вузов. – М.: Стройиздат, 1981. – 512 с.
Глава VI. Расчёт статически определимых ферм. § 31. Линии влияния усилий в фермах. С. 171–178.
4. Клейн Г.К., Леонтьев Н.Н. и др. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. Статика стержневых систем: Учеб. пособие. – М.: Высш. школа, 1980. – 384 с.
Глава V. Плоские фермы. § V.3. Построение линий влияния. С. 73–81.
5. Проценко В.М., Себешев В.Г. Расчёт статически определимых систем: Методические указания. – Новосибирск: НИСИ, 1990. – 52 с.
Задача № 3. Расчёт простой плоской статически определимой фермы. Стр. 20–24. Задача № 4. Расчёт сложной статически определимой плоской фермы. Стр. 27–36.

1. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем: Учеб. для вузов. – М.: Изд-во ассоциации строительных вузов, 1996. – 541 с.
2. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика: Учеб. для вузов. – М.: Высш. школа, 1986, – 607 с.
3. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лащенко Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Стержневые системы: Учеб. для вузов. – М.: Стройиздат, 1981, – 512 с.
4. Снитко Н.К. Строительная механика: Учеб. для вузов. – М.: Высш. школа, 1972. – 487 с.
5. Клейн Г.К., Леонтьев Н.Н. и др. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. Статика стержневых систем: Учеб. пособие. – М.: Высш. школа, 1980. – 384 с.
6. Доценко И.С. Строительная механика: Учеб. пособие. – Киев: Вища школа, 1986. – 294 с.
7. Крамаренко А.А. Статически определимые стержневые системы. Кинематический анализ. Балки и рамы: Учеб. пособие. – Новосибирск: НГАС, 1997. – 76 с.
8. Крамаренко А.А. Статически определимые многопролётные балки: Метод. указ. – Новосибирск: НГАСУ, 2000. – 28 с.

9. Крамаренко А.А. Статически определяемые фермы: Метод. указ. – Новосибирск: НГАСУ, 2000. – 28 с.
10. Крамаренко А.А., Широких Л.А. Статически определяемые трёхшарнирные арки и рамы: Метод. указ. – Новосибирск: НГАС, 1996. – 53 с.
11. Крамаренко А.А. Построение эпюр внутренних усилий: Метод. указ. – Новосибирск: НИСИ, 1992. – 48 с.
12. Проценко В.М., Себешев В.Г. Расчёт статически определимых систем: Методические указания. – Новосибирск: НИСИ, 1990. – 52 с.
13. Себешев В.Г. Расчёт арок с применением ЭВМ: Метод. указ. – Новосибирск: НИСИ, 1986. – 36 с.
14. Крамаренко А.А., Широких Л.А. Статически определяемые сооружения: Сборник задач. – Новосибирск: НГАС, 1995. – 44 с.

Учебное издание
Крамаренко Анатолий Алексеевич

ЛЕКЦИИ ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Часть 1

СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

Темплан 2000 г.

Редактор Г.К. Найденова

Лицензия ЛР № 020462 от 10.08.98 г.

Подписано к печати 28.11.2000. Формат 60х84 1/16 д.л.

Бумага типографская. Печать офсетная.

Объём 8,0 уч.-изд.л.; 8,75 п.л. Тираж 550 экз. Заказ № 207.

Новосибирский государственный архитектурно-
строительный университет

630008, Новосибирск, ул. Ленинградская, 113

Отпечатано мастерской оперативной полиграфии НГАСУ