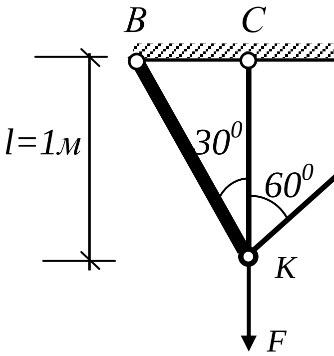
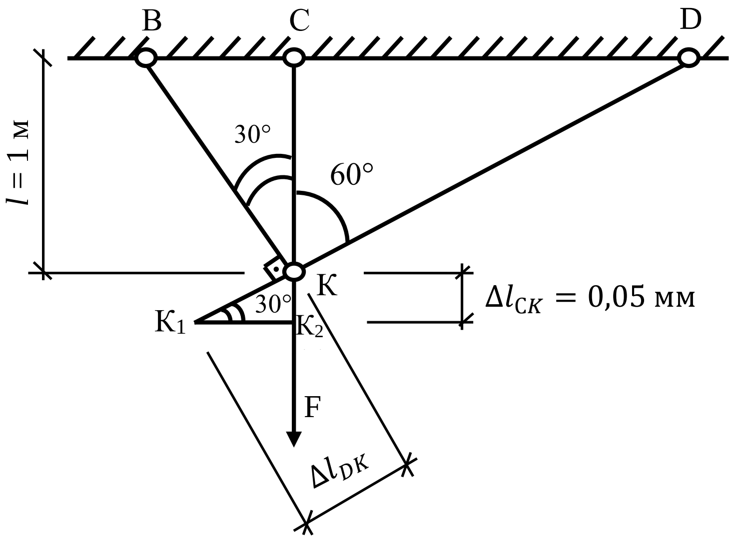
Задача № 1

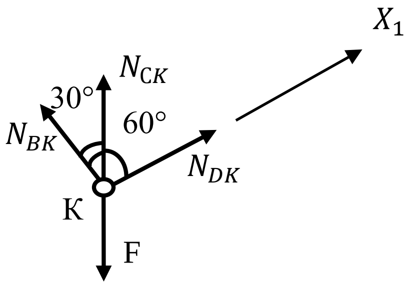


В шарнирной стержневой системе стержень ВК абсолютно жёсткий, а стержни СК и DK выполнены из стали ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа) и имеют одинаковые площади сечения $A = 1$ см^2. Под действием силы F вертикальная составляющая перемещения узла К оказалась равной 0,05 мм.

Определить значение силы F.

Решение





Так как стержень ВК абсолютно жёсткий и перемещения малы, то $KK_1 \perp BK$.

Г.С.З.

$$KK_2 = KK_1 \cdot \sin 30° => KK_1 = 2\,KK_2$$

$$KK_1 = \Delta l_{DK} = \frac{N_{DK} \cdot l_{DK}}{EA} = \frac{N_{DK} \cdot 2(\text{м})}{EA}$$

$$KK_2 = \Delta l_{CK} = \frac{N_{CK} \cdot l_{CK}}{EA} = \frac{N_{CK} \cdot 1(\text{м})}{EA}$$

$$\frac{N_{DK} \cdot 2}{EA} = 2 \cdot \frac{N_{CK} \cdot 1}{EA} \;=>\; N_{DK} = N_{CK}. (1)$$

С.С.З.

$$\sum X_1 = 0 \;=>\; N_{DK} + N_{CK} \cdot \cos 60° -$$

$$-F \cdot \cos 60° = 0 \;=>\; N_{DK} + N_{CK} \cdot 0{,}5 =$$

$$= F \cdot 0{,}5 .$$

Учитывая (1), находим:

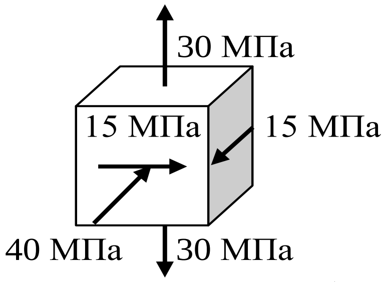
$$3N_{CK} = F \qquad (2).$$

Ф.С.З.

$N_{CK} = \triangle\, l_{CK} \cdot \dfrac{EA}{l}$, откуда, учитывая (2), получаем:

$$F = \frac{3 \cdot \triangle\, l_{CK} \cdot E \cdot A}{l} = \frac{3 \cdot 0{,}05 \cdot 10^{-3}(\text{м}) \cdot 2 \cdot 10^{8}(\text{кПа}) \cdot 1 \cdot 10^{-4}(\text{м}^2)}{1(\text{м})} = 3 \text{ кН}.$$

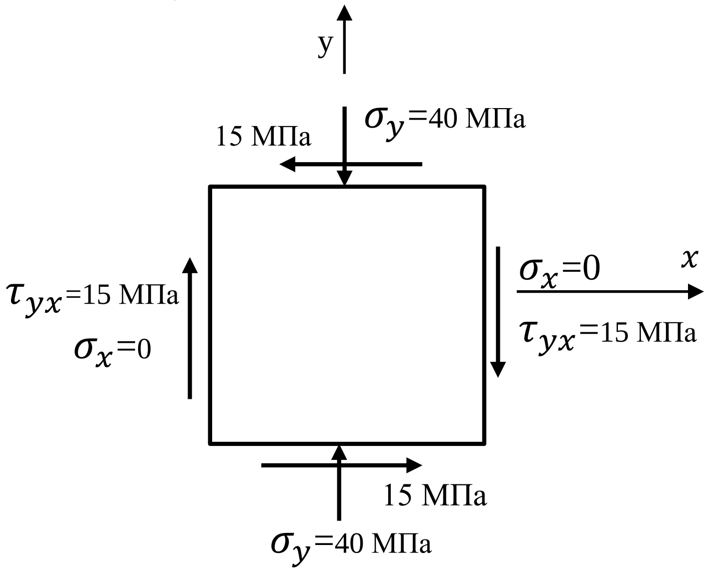
Ответ: $F = 3$ кН.



Задача № 2

Для объёмного напряжённого состояния, показанного на рисунке, определить наибольшее касательное напряжение.

Решение



Одно главное напряжение известно:

$\sigma_{\text{гл}}$ = 30 МПа.

Найдём два других :

$$\sigma_{\text{гл}} = \frac{\sigma_{\text{x}} + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_{\text{x}} - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{y\text{x}}^2} =$$

$$= \frac{0 - 40}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(0 + 40)^2 + 4 \cdot 15^2} =$$

$$= -20 \pm 25.$$

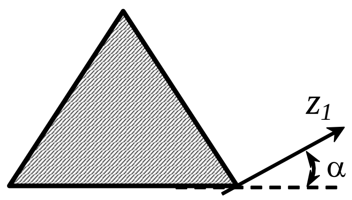
Учитывая, что $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, получаем:

$\sigma_1 =$ 30 МПа, $\sigma_2 =$ 5 МПа , $\sigma_3 =$ –45 МПа .

Тогда $\tau_{max} = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \dfrac{30-(-45)}{2} =$ 37,5 МПа.

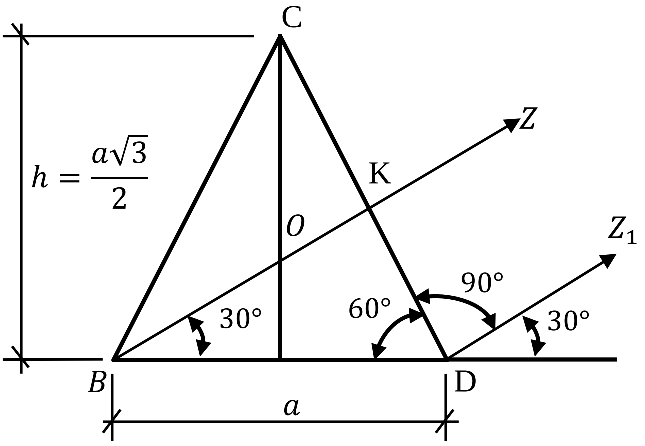
Ответ: $\tau_{max} =$ 37,5 МПа.

Задача № 3



Определить осевой момент инерции равностороннего треугольника со стороной $\boldsymbol{a}$ относительно оси Z_1, $\alpha = 30°$.

Решение



Вариант 1

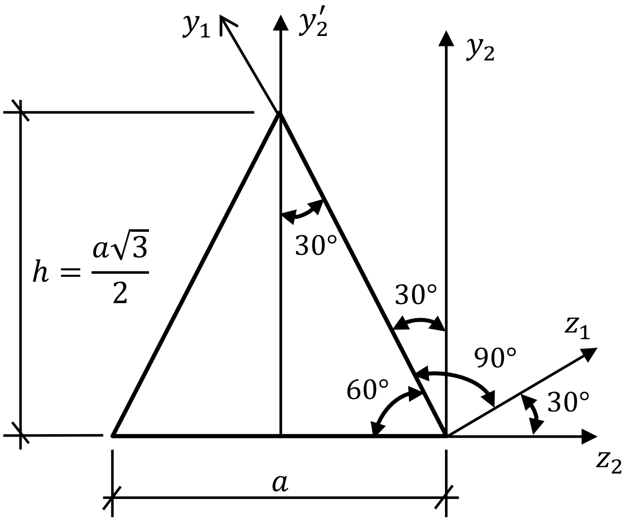
BK- высота =>центральная ось Z ⊥ CD,

также ось Z_1 ⊥ CD => Z ∥ Z_1.

BK – медиана => CK = KD = $\frac{a}{2}$.

$$\mathcal{J}_{z1} = \mathcal{J}_z + A\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^4\sqrt{3}}{96} + \frac{1}{2}a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 =$$

$$= a^4\left(\frac{\sqrt{3}}{96}+\frac{\sqrt{3}}{16}\right) = \frac{7\sqrt{3}}{96}\cdot a^4 \cong 0{,}13\cdot a^4 .$$



Вариант 2

$$\mathcal{J}_{z2} = \mathcal{J}_{y1} = \frac{a\cdot h^3}{12}$$

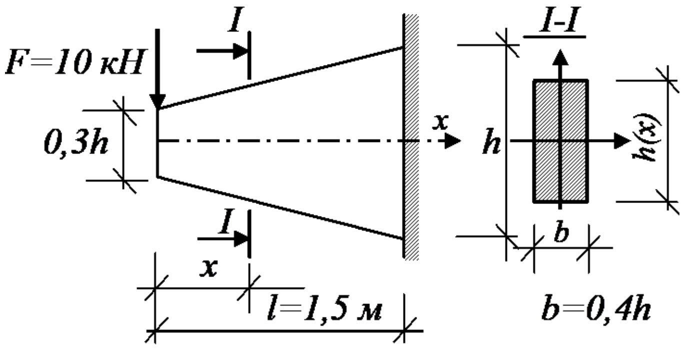
$$\mathcal{J}_{z2} + \mathcal{J}_{y2} = \mathcal{J}_{z1} + \mathcal{J}_{y1} \quad =>$$

$$=> \mathcal{J}_{z1} = \mathcal{J}_{y2} = \mathcal{J}_{y'2} + A\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{a^4\sqrt{3}}{96} + \frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 =$$

$$= a^4\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{96}+\frac{\sqrt{3}}{16}\right) = \frac{7\sqrt{3}}{96}\, a^4 \cong 0{,}13\cdot a^4.$$

Ответ: $\mathcal{J}_{z1} = 0{,}13\cdot a^4$.



Задача № 4

Для консольной балки вычислить наименьшее допускаемое условием прочности значение ***h***, полагая ***F*** = *10* кН, ***R*** = *160* МПа***,*** ***l*** = *1,5* м. Ширина сечения ***b*** =*0,4* ***h*** – постоянна.
Влиянием касательных напряжений на прочность пренебречь.

Решение

Значение ***h*** в текущем поперечном сечении балки (x) :

$$h(x) = h\cdot \left(0{,}3 + 0{,}7 \cdot \frac{x}{l}\right)$$

Максимальные нормальные напряжения в этом сечении:

$$\sigma(x) = \frac{M(x)}{W(x)} = \frac{F\cdot x}{\dfrac{b\cdot h^2(x)}{6}} = \frac{6\cdot F\cdot x}{b\cdot h^2(\,0{,}3+0{,}7\cdot x/l)^2}. \qquad (1)$$

Из условия $\dfrac{d\sigma(x)}{dx} = 0$ находим абсциссу опасного сечения x_0:

$$\frac{6\cdot F}{b\cdot h^2}\cdot\left(\frac{x}{(0{,}3+0{,}7\cdot x/l)^2}\right)' = \frac{6\cdot F}{b\cdot h^2}\cdot\frac{1\cdot(0{,}3+0{,}7\cdot x_0/l)^2 - 2\cdot(0{,}3+0{,}7\cdot x_0/l)\cdot(0{,}7/l)\cdot\ x_0}{((0{,}3+0{,}7x_0\ /l)^2)^2} = 0$$

$$=>\ 0{,}3+0{,}7\cdot\frac{x_0}{l} - 2\cdot\frac{0{,}7}{l}x_0 = 0\ => x_0 = 0{,}43\cdot l.\ \ (2)$$

Подставляем (2) в (1):

$$\sigma_{max}(x=x_0) = \frac{6\cdot F\cdot 0{,}43\cdot l}{b\cdot h^2\cdot(0{,}3+0{,}7\cdot 0{,}43\ l\ /l)^2} = 7{,}14\cdot\frac{F\cdot l}{b\cdot h^2} = 7{,}14\cdot\frac{F\cdot l}{0{,}4\cdot h\cdot h^2} = 17{,}85\cdot\frac{F\cdot l}{h^3}.$$

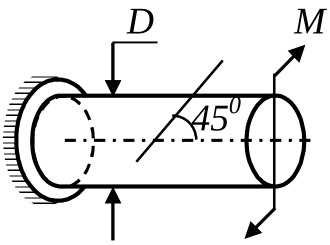
Из условия прочности по нормальным напряжениям получаем:

$$\sigma_{max} \le R\ => 17{,}85\cdot\frac{F\cdot l}{h^3} \le R\ =>\ \ h \ge \sqrt[3]{\frac{17{,}85\cdot F\cdot l}{R}}\ =>$$

$$=> \mathrm{h_{min}} = \sqrt[3]{\frac{17{,}85\cdot 10\ (\text{кН})\cdot 1{,}5\ (\text{м})}{160\cdot 10^3\ (\text{кПа})}} = 0{,}119\text{м}\ \cong 0{,}12\ \text{м}.$$

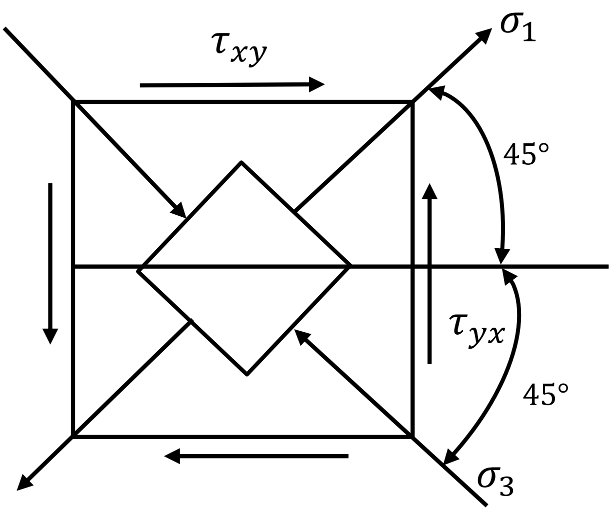
Ответ: $\mathrm{h_{min}} = 0{,}12$ м.

Задача № 5



На поверхности вала, скручиваемого моментом ***M***, под углом 45^0 замерена деформация $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ (см. рис.). Определить коэффициент Пуассона материала вала, если $M = 15{,}7$ кН · м, $D = 100$ мм, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа .

Решение



При кручении элементы поверхности вала находятся в состоянии чистого сдвига

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \tau = \frac{M_t}{W_\rho} = \frac{M}{\frac{\pi \cdot D^3}{16}} =$$

$$= \frac{16 \cdot 15{,}7(\text{кН} \cdot \text{м})}{3{,}14 \cdot 0{,}1^3(\text{м}^3)} = 80 \cdot 10^3\text{кПа} = 80\text{МПа}.$$

Главные напряжения на площадках

под углом 45°: $\sigma_{\text{гл}} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{yx}^2} =$

$$= \frac{0+0}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(0-0)^2 + 4 \cdot \tau_{yx}^2} = \pm\tau_{xy} = \pm\tau.$$

Учитывая, что $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, получаем : $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau$,

Тогда $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{E} \cdot (\sigma_1 - \nu \cdot \sigma_3) = \dfrac{1}{E} \cdot \big(\tau - \nu \cdot (-\tau)\big) = \dfrac{1+\nu}{E} \cdot \tau$,

откуда $\nu = \dfrac{E \cdot \varepsilon_1}{\tau} - 1 = \dfrac{2 \cdot 10^5\ (\text{МПа}) \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{80\ (\text{МПа})} - 1 = 1{,}25 - 1 = 0{,}25.$

Ответ: $\nu = 0{,}25$.