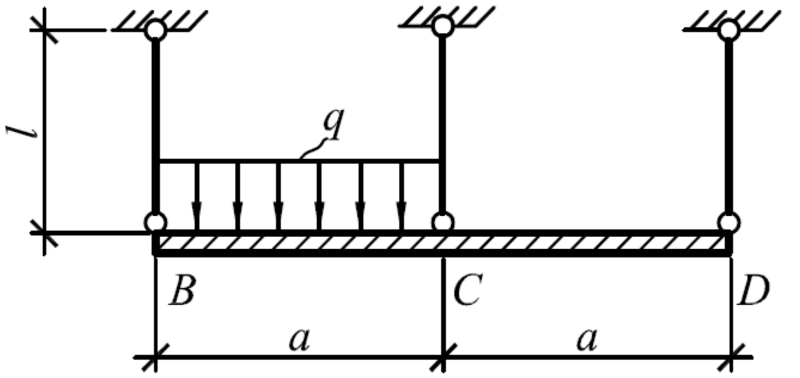


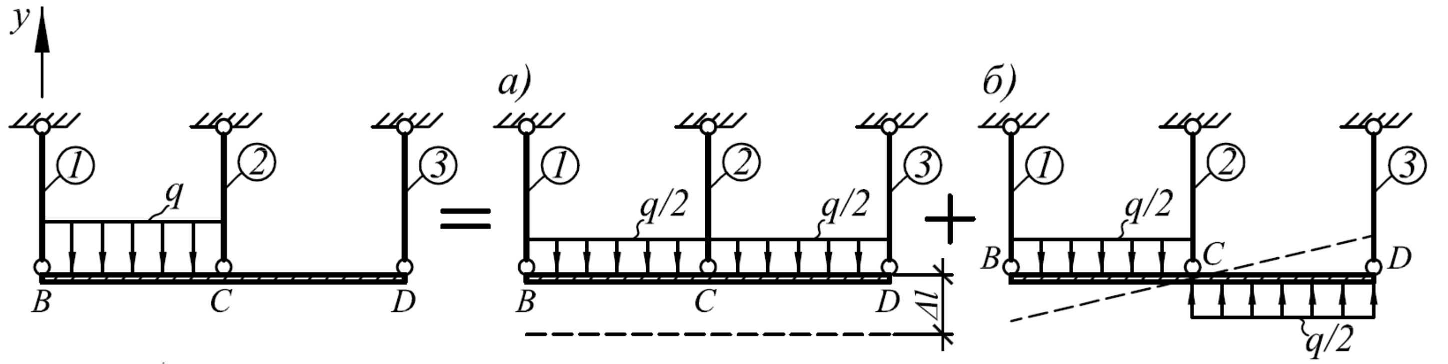
Задача №1

Определить перемещение сечения ***C*** абсолютно жесткого стержня ***BD***, подвешенного на трёх одинаковых упругих стержнях.

Известны ***E***, ***A***, ***l***, ***q***, ***a***. Весом стержня ***BD*** пренебречь.

Решение (1-й вариант)

Заданное воздействие представим как сумму двух воздействий, показанных на схемах (***а***) и (***б***):



Тогда $v_c = v_c^{(a)} + v_c^{(б)}$.

Так как воздействие (***б***) кососимметричное, то $v_c^{(б)} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_c = v_c^{(a)}$.

При воздействии по схеме (***а***): $\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l_3 = \Delta l \quad \Rightarrow \quad N_1 = N_2 = N_3 = N$.

Из равновесия абсолютно жесткого стержня ***BD*** $\sum Y = 0$

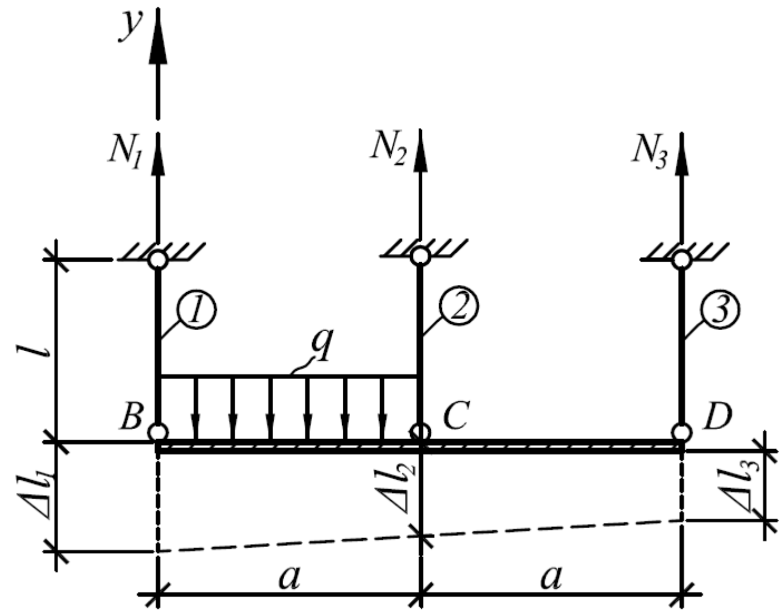
$$N_1 + N_2 + N_3 = \frac{q}{2} \cdot 2a = q \cdot a \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot N = q \cdot a \quad \Rightarrow \quad N_2 = N = \frac{q \cdot a}{3}.$$

Искомое перемещение равно деформации второго стержня:

$$v_c = \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A} = \frac{q \cdot a}{3} \cdot \frac{l}{E \cdot A}.$$

Ответ: $v_c = \dfrac{q \cdot a \cdot l}{3 \cdot E \cdot A}$

Решение задачи №1 (2-й вариант)



Для решения данной статически неопределимой задачи составляем три уравнения, рассматривая её статическую, физическую и геометрическую стороны:

ССЗ: $\sum M_B = N_3 \cdot 2a + N_2 \cdot a - \dfrac{q \cdot a^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2 + 2 \cdot N_3 = \dfrac{q \cdot a}{2}.$ (1)

$\sum Y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 + N_2 + N_3 = q \cdot a.$ (2)

ФСЗ: $\Delta l_i = \dfrac{N_i \cdot l}{E \cdot A}.$

ГСЗ: $\Delta l_2 = \dfrac{\Delta l_1 + \Delta l_3}{2} \quad \Rightarrow \quad \Delta l_1 - 2 \cdot \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{N_1 \cdot l}{E \cdot A} - 2 \cdot \dfrac{N_2 \cdot l}{E \cdot A} + \dfrac{N_3 \cdot l}{E \cdot A} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 - 2 \cdot N_2 + N_3 = 0.$ (3)

Решая систему трех уравнений (1), (2), (3), определяем N_2:

$$\begin{cases} N_2 + 2 \cdot N_3 = \dfrac{q \cdot a}{2} \\ N_1 + N_2 + N_3 = q \cdot a \\ N_1 - 2 \cdot N_2 + N_3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad N_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0{,}5qa & 2 \\ 1 & qa & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-2q \cdot a}{-6} = \frac{q \cdot a}{3}.$$

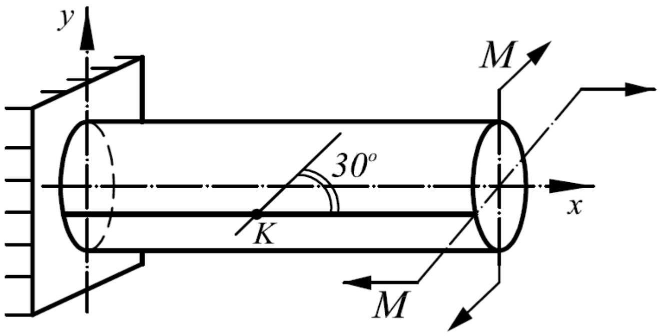
Это же значение может быть найдено по-другому. Для этого умножаем (3) на минус 1 и, складывая с (2), получаем: $3 \cdot N_2 = q \cdot a \quad \Rightarrow \quad N_2 = \dfrac{q \cdot a}{3}.$

Искомое перемещение равно деформации второго стержня:

$$v_c = \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A} = \frac{q \cdot a}{3} \cdot \frac{l}{E \cdot A}.$$

Ответ: $v_c = \dfrac{q \cdot a \cdot l}{3 \cdot E \cdot A}$

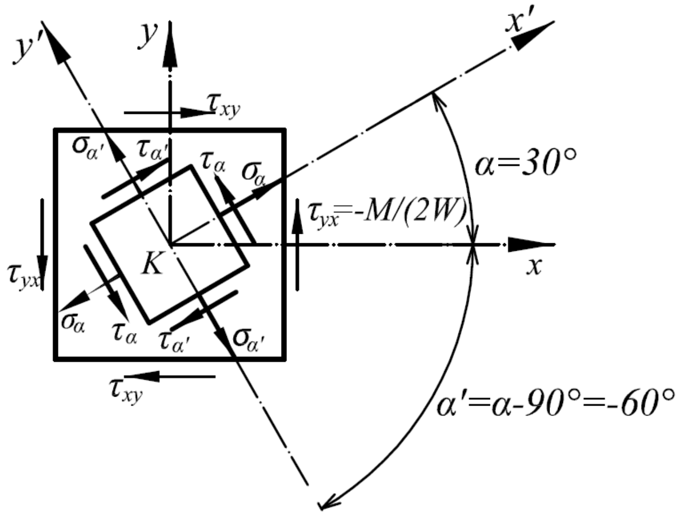
Задача №2



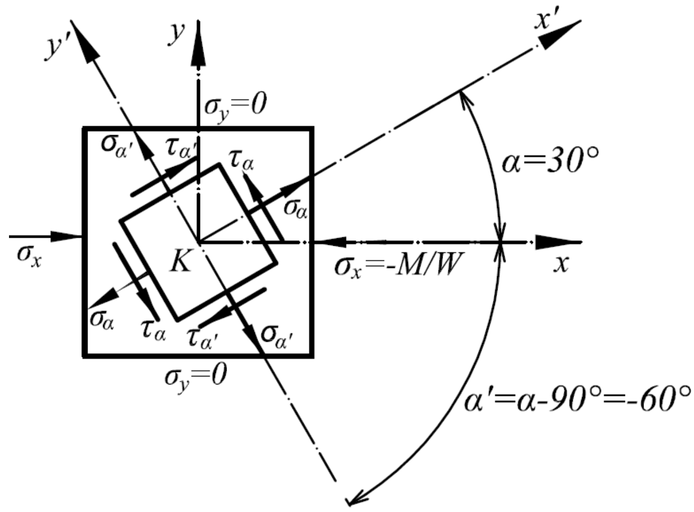
При каком значении коэффициента Пуассона линейная деформация в точке ***K*** на боковой поверхности стержня круглого поперечного сечения в указанном направлении равна нулю? Справедлив принцип суперпозиции.

Решение

Кручение
Плоское напряженное состояние



Изгиб
Линейное наряженное состояние



$$\sigma_\alpha = -\tau_{yx} \cdot \sin 2\alpha = -\left(-\frac{M_t}{W_\rho}\right) \cdot \sin 60^o = \frac{M}{2W} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\sigma_{\alpha'} = -\tau_{yx} \cdot \sin 2\alpha' = -\left(-\frac{M_t}{W_\rho}\right) \cdot \sin(-120^o) = \frac{M}{2W} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$\varepsilon_\alpha^{\text{круч}} = \frac{1}{E} \cdot \left(\frac{M}{2W} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \nu \cdot \left(\frac{M}{2W} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right) \right) = \frac{M}{EW} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \nu \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \right).$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cdot \cos^2\alpha = -\frac{M_y}{W_y} \cdot \cos^2 30^o = -\frac{M}{W} \cdot \frac{3}{4}.$$

$$\sigma_{\alpha'} = \sigma_x \cdot \cos^2\alpha' = -\frac{M_y}{W_y} \cdot \cos^2(-60^o) = -\frac{M}{W} \cdot \frac{1}{4}.$$

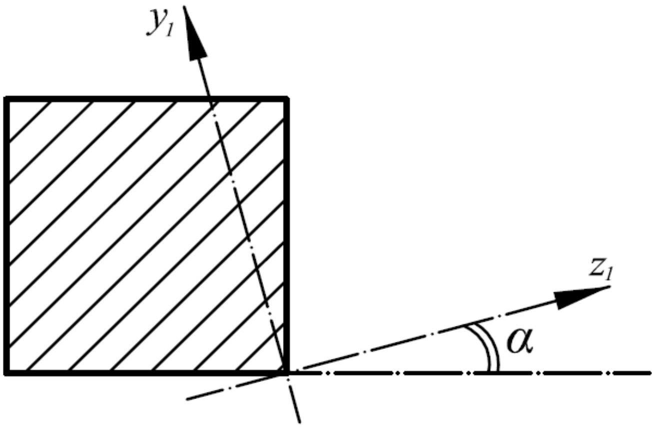
$$\varepsilon_\alpha^{\text{изг}} = \frac{1}{E} \cdot \left(-\frac{M}{W} \cdot \frac{3}{4} - \nu \cdot \left(-\frac{M}{W} \cdot \frac{1}{4} \right) \right) = \frac{M}{EW} \cdot \left(-\frac{3}{4} + \nu \cdot \frac{1}{4} \right).$$

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha^{\text{круч}} + \varepsilon_\alpha^{\text{изг}} = \frac{M}{EW} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \nu \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \right) + \frac{M}{EW} \cdot \left(-\frac{3}{4} + \nu \cdot \frac{1}{4} \right) = 0; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} + \nu \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4} + \nu \cdot \frac{1}{4} = 0; \Rightarrow \nu = \frac{\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} \cong 0,46.$$

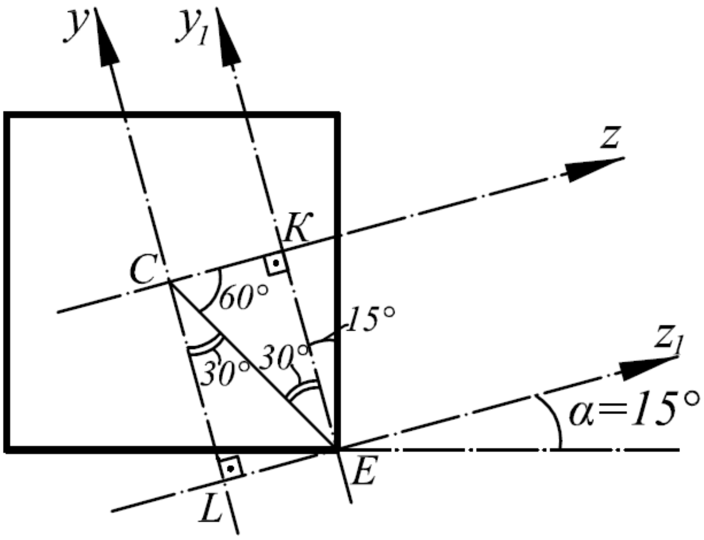
Ответ: $\nu = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} \cong 0,46.$

Задача №3



Опрелить центробежный момент инерции квадрата со стороной a относительно осей z_1, y_1, при $\alpha = 15°$.

Решение



С – центр тяжести квадрата.

Оси Y и Z – главные центральные оси

$(Z \parallel Z_1,\ Y \parallel Y_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow\ I_{zy} = 0;\ I_z = I_y = \dfrac{a^4}{12}.$

$$CK = CE \cdot \cos 60^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 60^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{4};$$

$$CL = CE \cdot \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

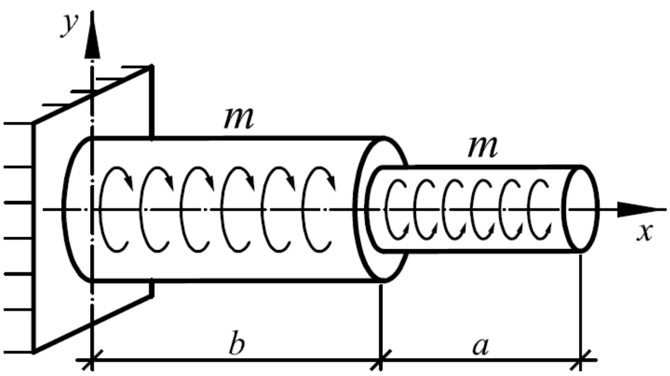
$$I_{z_1 y_1} = I_{zy} + A \cdot (-CK) \cdot CL =$$

$$= I_{zy} + a^2 \cdot \left(-\frac{a\sqrt{2}}{4}\right) \cdot \left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right) =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}a^4}{8} \approx -0,2165a^4.$$

Ответ: $I_{z_1 y_1} = -\dfrac{\sqrt{3}a^4}{8} \approx -0,2165a^4.$

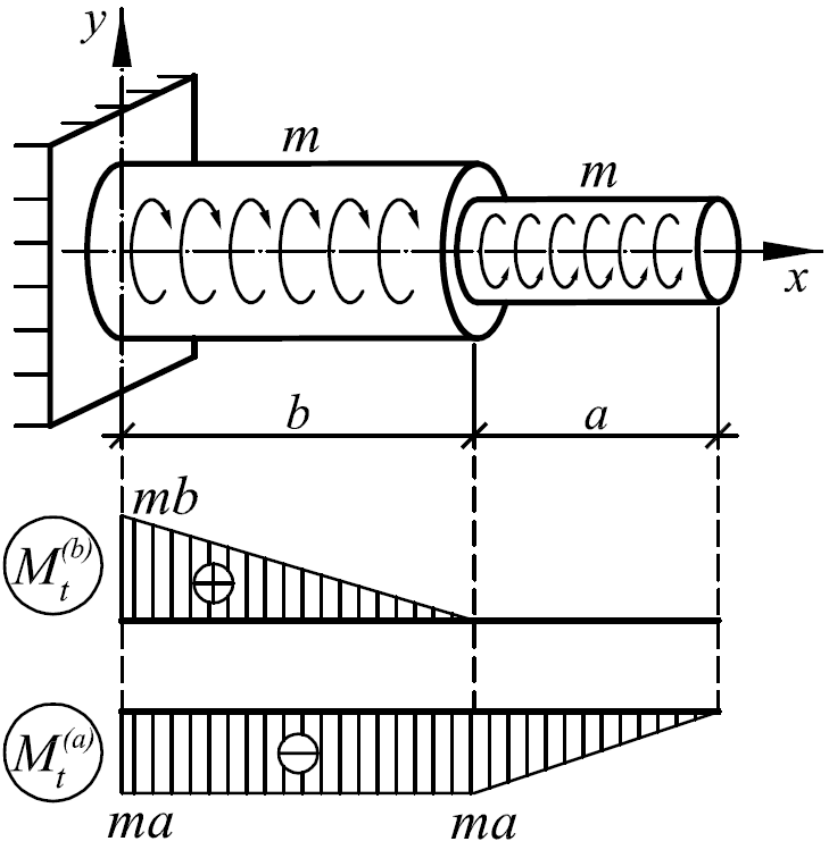
Задача №4



Ступенчатый вал загружен по всей длине распределенными скручивающими моментами постоянной интенсивности ***m***, как показано на рисунке. На правом участке вала $\boldsymbol{GI_\rho^{(a)} = GI_0}$, на левом $\boldsymbol{GI_\rho^{(b)} = 3GI_0}$.

При каком отношении ***b/a*** угол закручивания свободного конца вала будет равен нулю?

Решение



Используя принцип суперпозиции, получаем:

$$\frac{mb\cdot b}{2\cdot 3GI_0}-\frac{ma\cdot b}{3GI_0}-\frac{ma\cdot a}{2GI_0}=0,$$

или после сокращения:

$$\frac{b^2}{6}-\frac{a\cdot b}{3}-\frac{a^2}{2}=0.$$

Обозначив $\frac{b}{a}=k$, получаем:

$k^2a^2-2ka^2-3a^2=0$, или

$k^2-2k-3=0.$

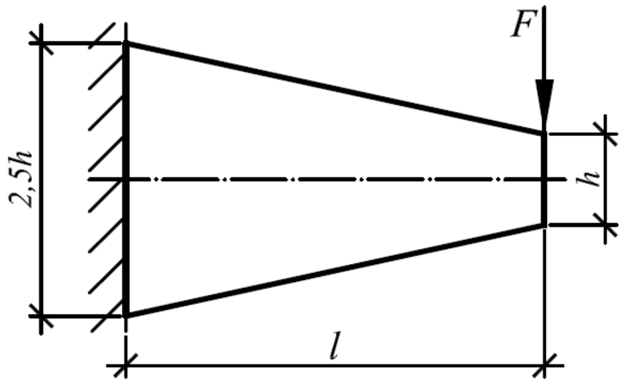
$k_{1,2}=1\pm\sqrt{1+3}=1\pm 2;$

$k_1=3;\;\; k_2=-1;$ − этот корень не отвечает поставленной задаче.

Следовательно $k=3 \Rightarrow \frac{b}{a}=3.$

Ответ: $\frac{b}{a}=3.$

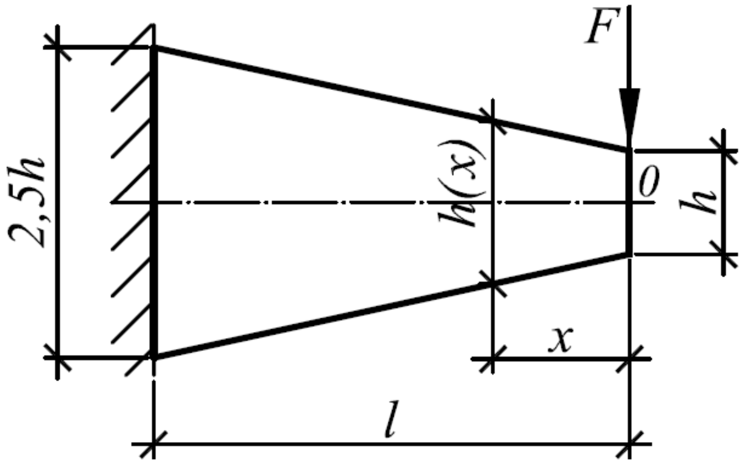
Задача №5



Балка консоль прямоугольного поперечного сечения нагружена на конце силой $\boldsymbol{F}$. Ширина балки постоянна и равна $\boldsymbol{b}$, а высота меняется по линейному закону от $\boldsymbol{h}$ до $\boldsymbol{2{,}5h}$ (см. рис.).

Определить величину $\sigma_{\max}$, если известны $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{h}$.

Решение



$$\sigma_{\max} = \left|\frac{M(x)}{W(x)}\right|_{\max}.$$

$$|M(x)| = F\cdot x.$$

$$W(x) = \frac{b\cdot h^2(x)}{6}.$$

$$h(x) = h + \frac{1{,}5h}{l}x = h\left(1+\frac{1{,}5x}{l}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W(x) = \frac{b}{6}\cdot h^2\left(1+\frac{1{,}5x}{l}\right)^2.$$

$$\left|\frac{F\cdot x}{\frac{b}{6}\cdot h^2\left(1+\frac{1{,}5x}{l}\right)^2}\right|' = 0 \Rightarrow \left|\frac{x}{\left(1+\frac{1{,}5x}{l}\right)^2}\right|' = 0 \Rightarrow \frac{1\cdot\left(1+\frac{1{,}5x_o}{l}\right)^2 - 2\cdot\left(1+\frac{1{,}5x_o}{l}\right)\cdot\frac{1{,}5}{l}\cdot x_o}{\left(1+\frac{1{,}5x_o}{l}\right)^4} = 0.$$

$1+\frac{1{,}5x_o}{l} \neq 0 \Rightarrow 1+\frac{1{,}5x_o}{l} - \frac{3x_o}{l} = 0 \Rightarrow \frac{1{,}5x_o}{l} = 1 \Rightarrow x_o = \frac{2l}{3}$. Следовательно, опасное сечение находится на расстоянии $\frac{2l}{3}$ от свободного конца балки.

Тогда $$\sigma_{\max} = \frac{F\cdot\frac{2}{3}l}{\frac{b}{6}\cdot h^2\left(1+\frac{1{,}5}{l}\cdot\frac{2}{3}l\right)^2} = \frac{\frac{2}{3}Fl}{\frac{2}{3}bh^2} = \frac{Fl}{bh^2}.$$

Ответ: $\sigma_{\max} = \frac{Fl}{bh^2}$.