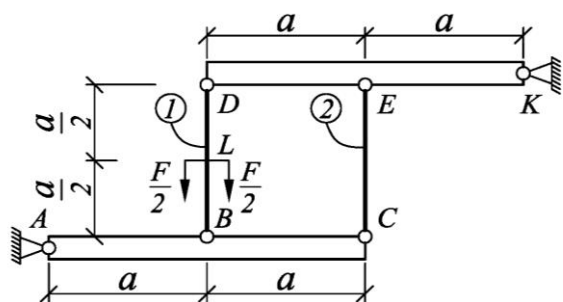


Задача №1



Два жестких бруса соединены деформируемыми стержнями ① и ② одинакового поперечного сечения площадью A .

Найти $|\sigma|_{\max}$ в поперечных сечениях стержней ①, ②.

Решение

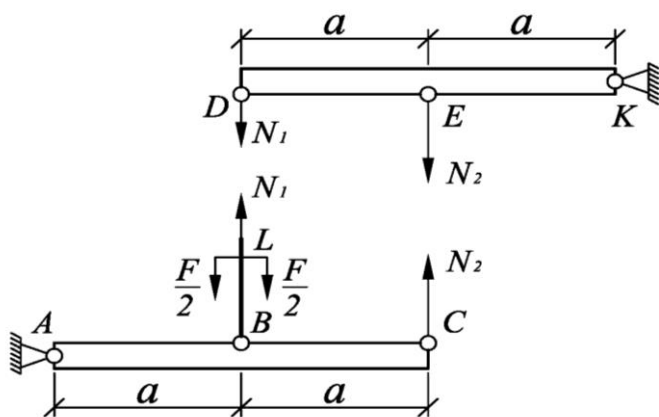


Рис. 1

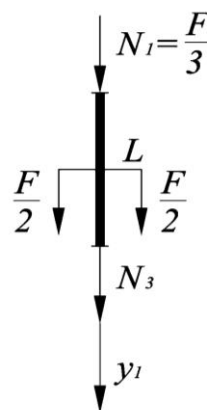


Рис. 2

Определение усилий в стержнях ① и ②:

Уравнение равновесия относительно опоры K (Рис. 1):

$$\sum m_K = N_1 \cdot 2a + N_2 \cdot a = 0 \Rightarrow N_2 = -2N_1. \quad (1)$$

Уравнение равновесия относительно опоры A (Рис. 1):

$$\sum m_A = N_2 \cdot 2a + N_1 \cdot a - F \cdot a = 0. \quad (2)$$

С учётом (1) из (2) получаем: $-4N_1 \cdot a + N_1 \cdot a = F \cdot a \Rightarrow N_1 = -\frac{F}{3}. \quad (3)$

С учётом (3) из (1) получаем: $N_2 = \frac{2F}{3}.$

Уравнение равновесия вдоль оси y_1 (Рис. 2):

$$\sum y_1 = N_3 + F + \frac{F}{3} = 0 \Rightarrow N_3 = -\frac{4F}{3}.$$

Определение напряжений в поперечных сечениях стержней ① и ②:

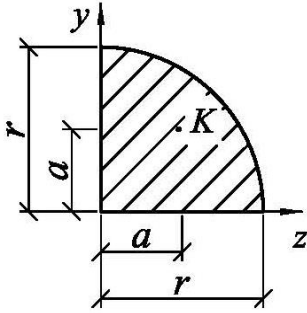
Стержень ①, участок $D-L$: $\sigma_{D-L} = \frac{N_1}{A} = -\frac{F}{3A}.$

Стержень ①, участок $L-B$: $\sigma_{L-B} = \frac{N_3}{A} = -\frac{4F}{3A}.$

Стержень ②: $\sigma_2 = \sigma_{E-C} = \frac{N_2}{A} = \frac{2F}{3A}.$

Ответ: $|\sigma|_{\max} = |\sigma_{L-B}| = \frac{4F}{3A}.$

Задача №2



Определить величину a , при которой любая ось, проходящая через точку K четверти круга радиуса r , является главной.

$$I_z = I_y = \frac{\pi r^4}{16}; \quad I_{zy} = \frac{r^4}{8}.$$

Решение

Если любые проходящие через точку K оси U, V – главные, то при любом α должно выполняться условие:

$$I_{UV} = \frac{I_{z_1} - I_{y_1}}{2} \cdot \sin 2\alpha + I_{z_1 y_1} \cdot \cos 2\alpha = 0.$$

Но $I_{z_1} = I_{y_1}$, и тогда следует, что

$$I_{z_1 y_1} = I_{zy} + (-a) \cdot S_z + (-a) \cdot S_y + (-a) \cdot (-a) \cdot A = 0. \quad (1)$$

O – центр тяжести четверти круга $\Rightarrow$

$$\Rightarrow c = \frac{4r}{3\pi}.$$

$$A = \frac{\pi r^2}{4}; \quad S_z = S_y = A \cdot c = \frac{\pi r^2}{4} \cdot \frac{4r}{3\pi} = \frac{r^3}{3}. \quad (2)$$

После подстановки (2) в (1) получаем:

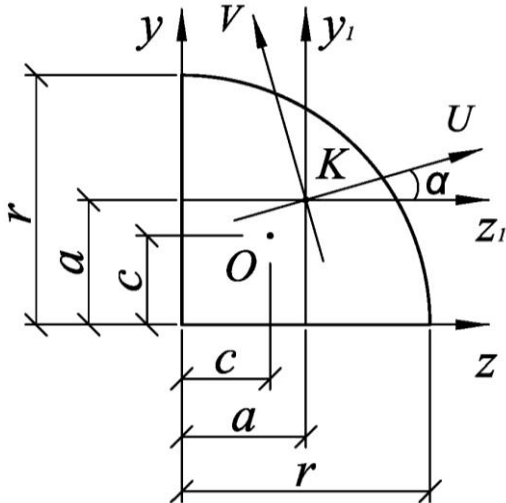
$$\frac{r^4}{8} - a \cdot \frac{r^3}{3} - a \cdot \frac{r^3}{3} + a^2 \cdot \frac{\pi r^2}{4} = 0 \Rightarrow$$

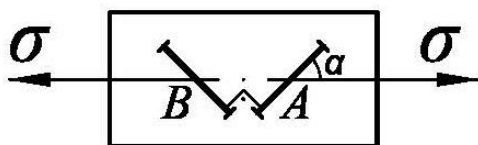
$$\Rightarrow a^2 - \frac{8r}{3\pi} \cdot a + \frac{r^2}{2\pi} = 0.$$

$$a_{1,2} = \frac{4r}{3\pi} \pm \sqrt{\frac{16r^2}{9\pi^2} - \frac{r^2}{2\pi}} = r \cdot \left(\frac{4}{3\pi} \pm \sqrt{\frac{32-9\pi}{18\pi^2}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 \cong 0,57r; \quad a_2 \cong 0,28r.$$

Ответ: $a_1 \cong 0,57r; \quad a_2 \cong 0,28r.$





Задача №3

Пластина находится в линейном напряженном состоянии. На ней взаимно перпендикулярно установлены тензометры A и B . Обнаружено, что деформация $\varepsilon_A = 0$.

Найти деформацию ε_B .

E , σ и ν – заданы.

Решение

Главные напряжения и соответствующие им главные деформации равны:

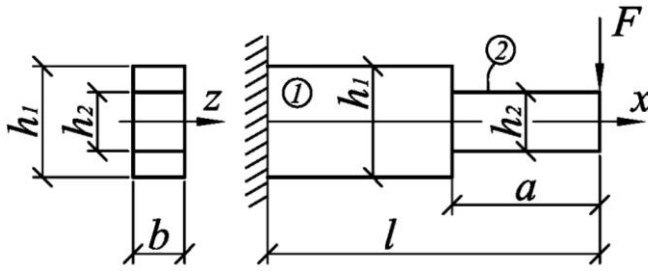
$$\sigma_1 = \sigma; \quad \sigma_2 = 0; \quad \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} = \frac{\sigma}{E}; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_2 - \nu \cdot \sigma_1] = -\frac{\nu \cdot \sigma}{E}.$$

$$\varepsilon_A + \varepsilon_B = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{\sigma}{E} - \frac{\nu \cdot \sigma}{E} = \frac{\sigma}{E} \cdot (1 - \nu).$$

$$\varepsilon_A = 0 \Rightarrow \varepsilon_B = \frac{\sigma}{E} \cdot (1 - \nu).$$

$$\text{Ответ: } \varepsilon_B = \frac{\sigma}{E} \cdot (1 - \nu).$$

Задача №4



Для консольной балки, выполненной из одного материала, определить соотношения h_1/h_2 и l/a , удовлетворяющие условиям прочности по нормальным напряжениям, при которых вес балки постоянной ширины будет минимальным.

Решение

$$M_{\max,1} = Fl, \quad M_{\max,2} = Fa. \quad W_{z,1} = \frac{bh_1^2}{6}, \quad W_{z,2} = \frac{bh_2^2}{6}.$$

Из условия равнопрочности $\sigma_{\max,1} = \sigma_{\max,2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{M_{\max,1}}{W_{z,1}} = \frac{M_{\max,2}}{W_{z,2}} \Rightarrow \frac{6Fl}{bh_1^2} = \frac{6Fa}{bh_2^2} \Rightarrow \frac{h_2^2}{h_1^2} = \frac{a}{l} \Rightarrow h_2 = h_1 \cdot \left(\frac{a}{l}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1)$$

Вес балки будет минимальным при минимуме её объема

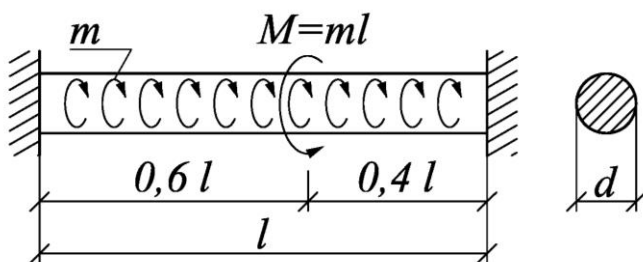
$$V = b \cdot h_1 \cdot (l-a) + b \cdot h_2 \cdot a = b \cdot h_1 \cdot (l-a) + b \cdot h_1 \cdot \left(\frac{a}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot a = b \cdot h_1 \cdot \left(l-a + \frac{a^{3/2}}{l^{1/2}}\right).$$

Условие минимума объема балки

$$\frac{dV}{da} = b \cdot h_1 \cdot \left(-1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{a^{1/2}}{l^{1/2}}\right) = 0 \Rightarrow -1 + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{a}{l}\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{l}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{l}{a} = \frac{9}{4} = 2,25.$$

$$\text{Из (1)} \quad \frac{h_1}{h_2} = \left(\frac{l}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

$$\text{Ответ: } \frac{h_1}{h_2} = 1,5; \quad \frac{l}{a} = 2,25.$$

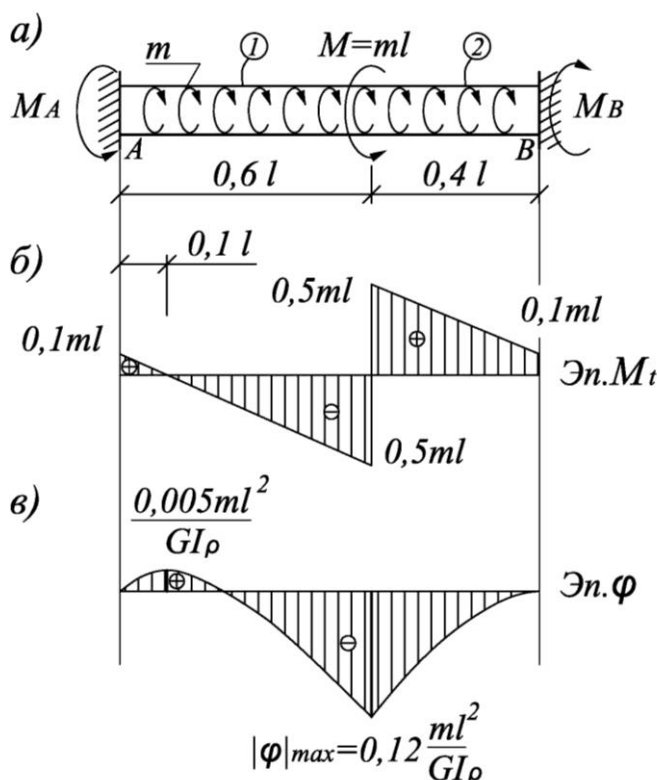


Задача №5

Определить отношение l/d вала, при котором от показанной на рисунке нагрузки $|\varphi|_{\max} = 0,05 \text{ рад.}$, $\sigma_{\max} = 100 \text{ МПа.}$

$$G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа.}$$

Решение



Реактивные моменты в опорах:

от равномерно распределенной моментной нагрузки m — $M_{A,1} = M_{B,1} = 0,5ml$;

от сосредоточенного момента $M = ml$ — значения реактивных моментов обратно пропорциональны расстояниям от места приложения момента до опор — $M_{A,2} = 0,4ml$, $M_{B,2} = 0,6ml$. Они действуют в направлении, противоположном реактивным моментам от нагрузки. Суммарные опорные реактивные моменты — $M_A = 0,1ml$ и $M_B = 0,1ml$ имеют противоположные направления.

Эпюра M_t показана на рис. б).

$$\sigma_{\max} = \tau_{\max} = \frac{|M_t|_{\max}}{W_{\rho}} = 100 \text{ МПа} \Rightarrow \frac{0,5ml \cdot \frac{d}{2}}{J_{\rho}} = 100 \Rightarrow \frac{ml}{J_{\rho}} = \frac{400}{d}. \quad (1)$$

$$\varphi_1(x) = \varphi_0 + \int_0^x \frac{M_{t1}(x)}{GJ_{\rho}} dx, \quad \varphi_0 = 0, \quad M_{t1}(x) = 0,1ml - mx \Rightarrow \varphi_1(x) = (0,1ml \cdot x - m \frac{x^2}{2}) \cdot \frac{1}{GJ_{\rho}}.$$

$$\text{Локальный экстремум при } x_0 = 0,1l: \quad \varphi_1(0,1l) = (0,1ml \cdot 0,1l - m \frac{(0,1l)^2}{2}) \cdot \frac{1}{GJ_{\rho}} = \frac{0,005ml^2}{GJ_{\rho}}.$$

$$|\varphi|_{\max} = |\varphi_1(0,6l)| = |(0,1ml \cdot 0,6l - m \frac{(0,6l)^2}{2}) \cdot \frac{1}{GJ_{\rho}}| = 0,12 \cdot \frac{ml^2}{GJ_{\rho}} = 0,05. \quad (2)$$

$$\text{Из (2) с учётом (1) получаем } 0,12 \cdot \frac{400 \cdot l}{Gd} = 0,05 \Rightarrow \frac{l}{d} = \frac{0,005 \cdot 0,8 \cdot 10^5}{0,12 \cdot 400} = \frac{250}{3} = 83,33.$$

$$\text{Ответ: } \frac{l}{d} = 83,33.$$