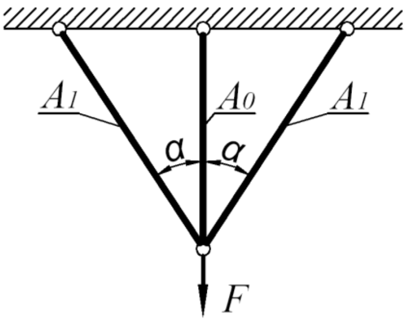



## *Задача №1*

*Все стержни системы изготовлены из одного материала. При каком отношении площадей их поперечных сечений* ***A₀/A₁*** *усилия во всех стержнях будут одинаковыми? Найти значения этих усилий.*

***F, α*** *– заданы.*

Решение

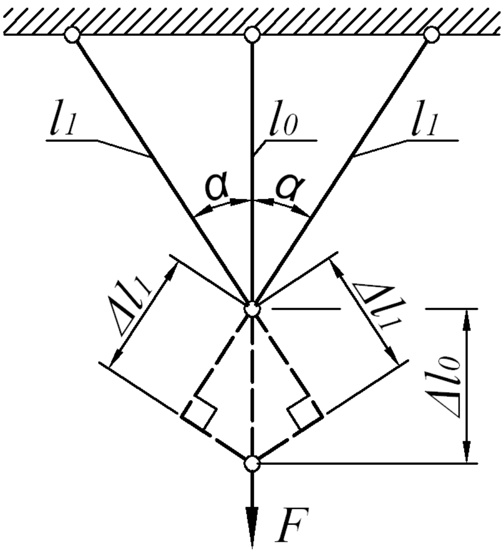



Рис. 1

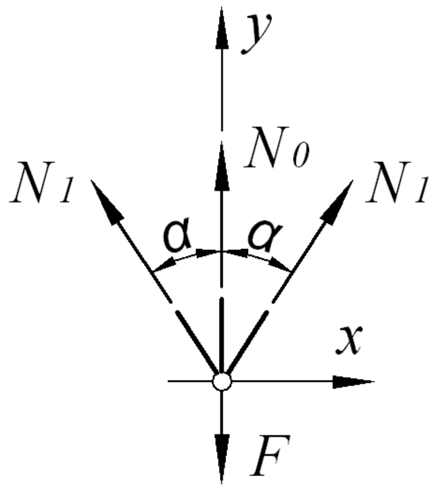



Рис. 2

Из схемы деформации (Рис. 1) получаем: $\Delta l_0 \cdot \cos\alpha = \Delta l_1$. (1)

Уравнение равновесия $\sum y = 0$ (Рис. 2):

$2N_1 \cdot \cos\alpha + N_0 = F$ . (2)

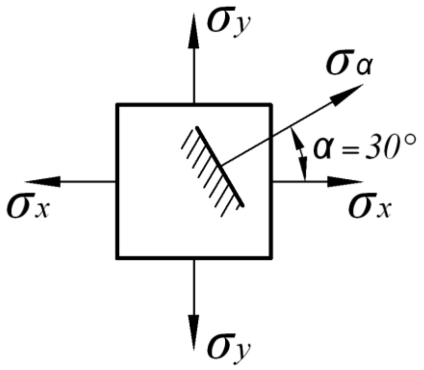
По условию $N_1 = N_0$. (3)

Из (2) и (3) получаем: $N_1 = N_0 = N = \dfrac{F}{(1+2\cdot\cos\alpha)}$.

Из (1) с учётом закона Гука и (3) получаем:

$$\frac{N_0 \cdot l_0}{E \cdot A_0} \cdot \cos\alpha = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} \;\Rightarrow\; \frac{N \cdot l_1 \cdot \cos\alpha}{E \cdot A_0} \cdot \cos\alpha = \frac{N \cdot l_1}{E \cdot A_1} \;\Rightarrow\; \frac{A_0}{A_1} = \cos^2\alpha .$$

Ответ: $N_1 = N_0 = \dfrac{F}{(1+2\cdot\cos\alpha)}$; $\dfrac{A_0}{A_1} = \cos^2\alpha$.




## *Задача №2*

*Относительное изменение объёма элемента, находящегося в условиях плоского напряжённого состояния, составляет 1%* $\left(\theta = \frac{\Delta V}{V} = 0{,}01\right)$.

*Определить* $\boldsymbol{\sigma_x}$ *и* $\boldsymbol{\sigma_y}$ *, если* $\boldsymbol{\sigma_\alpha}$*=0.*
***E***, $\boldsymbol{\nu}$ *– заданы.*

<u>Решение</u>

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0{,}01. \quad \varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\cdot\sigma_y\right), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\cdot\sigma_x\right), \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) \Rightarrow$$

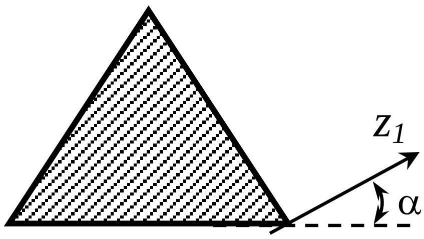
$$\Rightarrow \frac{1}{E}\cdot\left(\sigma_x - \nu\cdot\sigma_y + \sigma_y - \nu\cdot\sigma_x - \nu\cdot\sigma_x - \nu\cdot\sigma_y\right) = 0{,}01 \;\Rightarrow\; \frac{(1-2\nu)}{E}\cdot\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = 0{,}01. \quad (1)$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cdot\cos 2\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cdot\cos 60^0 =$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cdot\frac{1}{2} = 2\sigma_x + 2\sigma_y + \sigma_x - \sigma_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 3\sigma_x + \sigma_y = 0. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получаем: $\sigma_x = -0{,}005\frac{E}{1-2\nu}; \quad \sigma_y = 0{,}015\frac{E}{1-2\nu}$.

Ответ: $\sigma_x = -0{,}005\frac{E}{1-2\nu}; \quad \sigma_y = 0{,}015\frac{E}{1-2\nu}$.

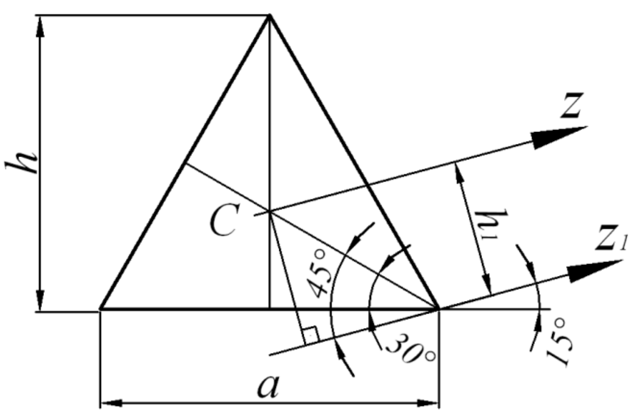



## Задача №3

*Определить осевой момент инерции равностороннего треугольника со стороной* $\boldsymbol{a}$ *относительно оси* $\mathbf{Z_1}$.

$\boldsymbol{\alpha} = 15^0$.

<u>Решение</u>




*С – центр тяжести треугольника. Равносторонний треугольник имеет более двух осей симметрии, поэтому ось Z – главная центральная ось.*

$$Z_1 \| Z \Rightarrow I_{Z1} = I_Z + A \cdot h_1^2$$

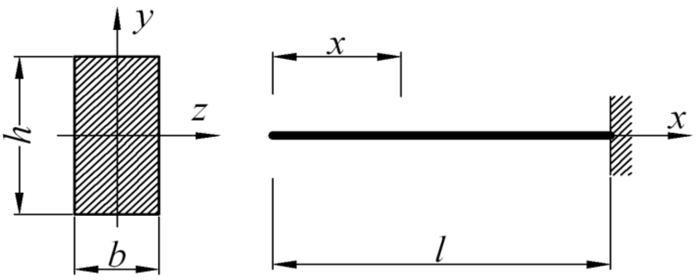
$$I_Z = \frac{a \cdot h^3}{36} = \frac{a \cdot \left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}{36} = \frac{a^4 \cdot \sqrt{3}}{96}.$$

$$A = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a \cdot \left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}..$$

$$h_1 = \frac{2}{3} h \cdot \sin 45^{\circ} = \frac{2}{3} \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}. \quad I_{Z1} = \frac{a^4 \cdot \sqrt{3}}{96} + \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 = \frac{5\sqrt{3}}{96} a^4 \cong 0{,}09 a^4.$$

Ответ: $I_{Z1} = \frac{5\sqrt{3}}{96} a^4 \cong 0{,}09 a^4$.

## *Задача №4*

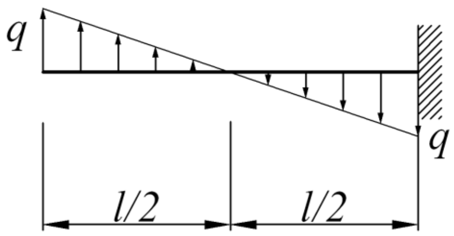



*Определить действующую на консольную балку нагрузку, если изгибающий момент в сечении с координатой **x** определяется выражением* $M(x)=\frac{1}{2}qx^2\left(1-\frac{2}{3}\frac{x}{l}\right)$.

*Определить значения максимального нормального и максимального касательного напряжений в поперечных сечениях балки.*

***b**, **h**, **l** – заданы.*

Решение




$$M(x)=\frac{1}{2}qx^2\left(1-\frac{2}{3}\frac{x}{l}\right)=\frac{1}{2}qx^2-\frac{1}{3}q\frac{x^3}{l}$$

$$Q(x)=\frac{dM(x)}{dx}=qx-q\frac{x^2}{l}=qx(1-\frac{x}{l})$$

Характер действующей на балку нагрузки опеделяется выражением:

$$q(x)=\frac{dQ(x)}{dx}=q-2q\frac{x}{l}=q\left(1-2\frac{x}{l}\right).$$

Значения нагрузки в характерных сечениях балки:

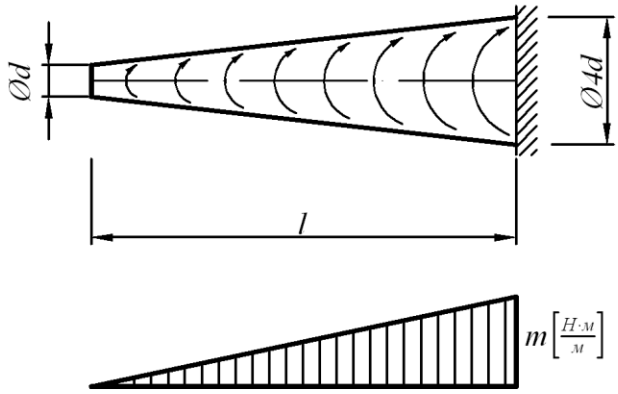
$$q(0)=q,\quad q(l/2)=0,\quad q(l)=-q.$$

Схема загружения балки представлена на рисунке.

$$\frac{dQ(x)}{dx}=0\quad \text{при}\quad x=\frac{l}{2}\quad \Rightarrow\quad Q_{\max}=Q(l/2)=\frac{ql}{4}\quad \Rightarrow\quad \tau_{\max}=\frac{3}{2}\frac{Q_{\max}}{A}=\frac{3}{2}\frac{ql}{4\cdot bh}=\frac{3}{8}\frac{ql}{bh},$$

$$\frac{dM(x)}{dx}=0\quad \text{при}\quad x=l\quad \Rightarrow M_{\max}=M(l)=\frac{ql^2}{6}\quad \Rightarrow\quad \sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W}=\frac{ql^2\cdot 6}{6\cdot bh^2}=\frac{ql^2}{bh^2}.$$

Ответ: $\tau_{\max}=\frac{3}{8}\frac{ql}{bh};\quad \sigma_{\max}=\frac{ql^2}{bh^2}.$



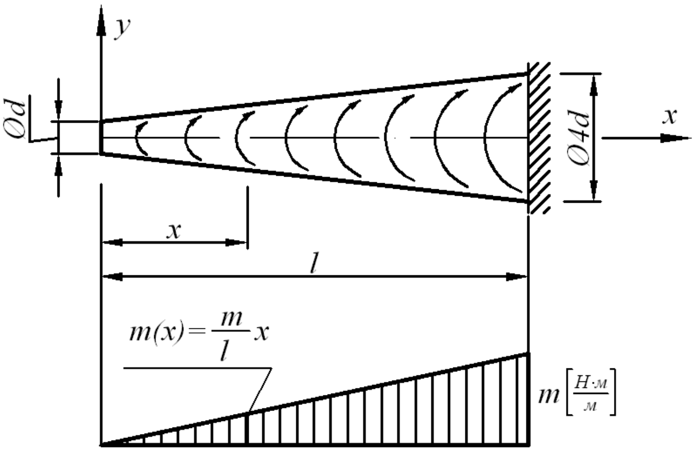

## *Задача №5*

*Интенсивность действующей на вал распределённой моментной нагрузки линейно изменяется от нуля до* ***m***.

*Определить наибольшие касательные напряжения.*

***m***, ***d***, ***l*** *– заданы.*

Решение




В произвольном сечении вала с координатой ***x***:

$$M_t(x) = \frac{1}{2}\cdot x \cdot \frac{m}{l}x = \frac{mx^2}{2l};$$

$$d(x) = d + \frac{3d}{l}x = d\left(1+\frac{3x}{l}\right);$$

$$\tau(x) = \left|\frac{M_t(x)}{W_\rho(x)}\right| = \frac{M_t(x)}{\frac{\pi d^3(x)}{16}} = \frac{8m}{\pi d^3 l}\cdot\frac{x^2}{\left(1+\frac{3x}{l}\right)^3}.$$

Условие максимума касательных напряжений: $\dfrac{d\tau(x)}{dx} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left|\frac{8m}{\pi d^3 l}\cdot\frac{x^2}{\left(1+\frac{3x}{l}\right)^3}\right|' = 0 \quad \Rightarrow \left|\frac{x^2}{\left(1+\frac{3x}{l}\right)^3}\right|' = 0 \quad \Rightarrow \frac{2x_0\cdot\left(1+\frac{3x_0}{l}\right)^3 - 3\left(1+\frac{3x_0}{l}\right)^2\cdot\frac{3}{l}\cdot x_0^2}{\left(1+\frac{3x_0}{l}\right)^6} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\left(1+\frac{3x_0}{l}\right)^2\cdot x_0\cdot\left(2-\frac{3x_0}{l}\right)}{\left(1+\frac{3x_0}{l}\right)^6} = 0. \qquad \left(1+\frac{3x_0}{l}\right) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_0\cdot\left(2-\frac{3x_0}{l}\right) = 0.$$

При $x_0 = 0 \quad \tau(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 - \frac{3x_0}{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{2}{3}l.$

$$\tau_{\max} = \tau\left(\frac{2}{3}l\right) = \frac{8m}{\pi d^3 l}\cdot\frac{\left(\frac{2}{3}l\right)^2}{\left(1+\frac{3}{l}\cdot\frac{2}{3}l\right)^3} = \frac{32ml}{243\pi d^3} \cong 0{,}042\frac{ml}{d^3}.$$

Ответ: $\tau_{\max} \cong 0{,}042\dfrac{ml}{d^3}.$