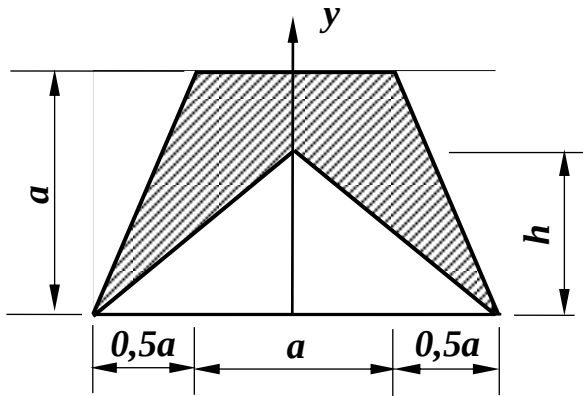


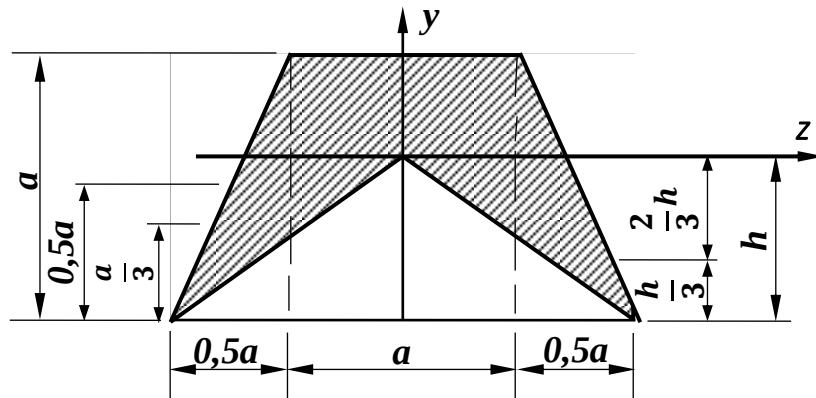
Задача №1

Из равнобокой трапеции вырезан равнобедренный треугольник.

Определить высоту треугольника h , если его вершина является центром тяжести, оставшейся (заштрихованной) фигуры.



Решение



Ось Z – центральная, поэтому статический момент заштрихованной фигуры $S_z = 0$.

Статический момент трапеции:

$$S_z^{\text{трап}} = a^2 \cdot \left(-\left(h - \frac{a}{2}\right)\right) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a \cdot \left(-\left(h - \frac{a}{3}\right)\right) = \frac{2}{3}a^3 - \frac{3}{2}a^2h.$$

Статический момент треугольника:

$$S_z^{\text{треуг}} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot h \cdot \left(-\frac{2}{3}h\right) = -\frac{2}{3}ah^2.$$

$$\text{Тогда } S_z = S_z^{\text{трап}} - S_z^{\text{треуг}} = \frac{2}{3}a^3 - \frac{3}{2}a^2h - \left(-\frac{2}{3}ah^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}ah^2 - \frac{3}{2}a^2h + \frac{2}{3}a^3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 - 2,25ah + a^2 = 0 \Rightarrow$$

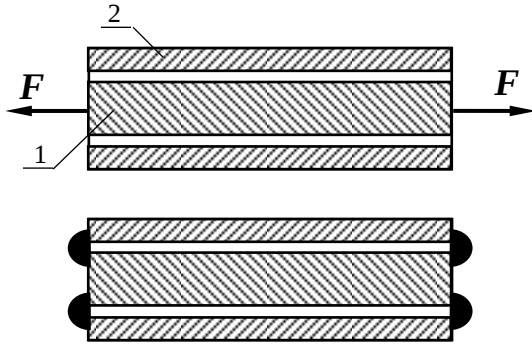
$$\Rightarrow h_{1,2} = 1,125a \pm \sqrt{(1,125a)^2 - a^2} = a \cdot (1,125 \pm 0,515), \text{ откуда:}$$

$$h_1 = 1,64a - \text{не соответствует условию задачи;}$$

$$h_2 = 0,61a.$$

Ответ: $h = 0,61a$.

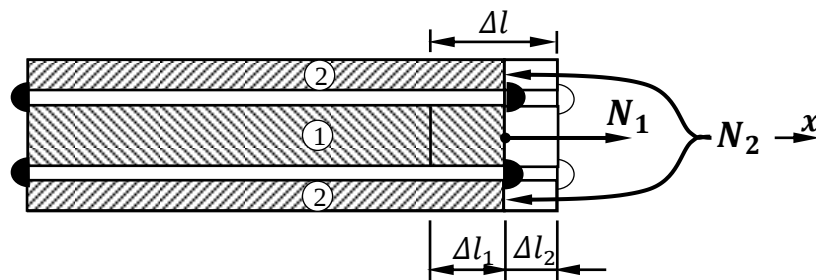
Задача №2



Цилиндрический стержень 1, предварительно растянутый силами F , свободно вставляется в трубу 2. Затем торцы стержней свариваются и силы F убираются.

Определить напряжения в трубе и стержне, если они выполнены из одного материала, а площади их поперечных сечений равны $A_1=A$, $A_2=2A$.

Решение



Из условия равновесия: $\sum x = N_1 - N_2 = 0 \Rightarrow N_1 = N_2$. (1)

С учётом малости относительных деформаций стержней принимаем их начальные длины одинаковыми и равными l ,

$$\text{тогда } \Delta l = \frac{Fl}{EA_1}, \quad \Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EA_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EA_2}.$$

$$\text{Согласно рисунку } \Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 \Rightarrow \frac{Fl}{EA_1} = \frac{N_1 l}{EA_1} + \frac{N_2 l}{EA_2} \Rightarrow$$

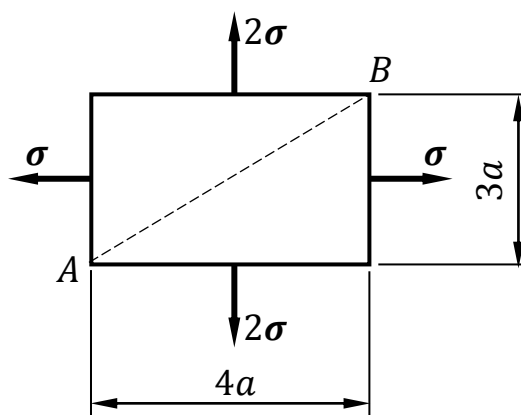
$$\Rightarrow \frac{F}{A} = \frac{N_1}{A} + \frac{N_2}{2A} \Rightarrow 2F = 2N_1 + N_2. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получаем $2F = 3N_1 = 3N_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow N_1 = \frac{2}{3}F \text{ (растяжение)}, \quad N_2 = \frac{2}{3}F \text{ (сжатие)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{2}{3} \frac{F}{A}, \quad \sigma_2 = -\frac{N_2}{A_2} = -\frac{2}{3} \frac{F}{2A} = -\frac{F}{3A}.$$

$$\text{Ответ: } \sigma_1 = \frac{2}{3} \frac{F}{A}, \quad \sigma_2 = -\frac{F}{3A}.$$



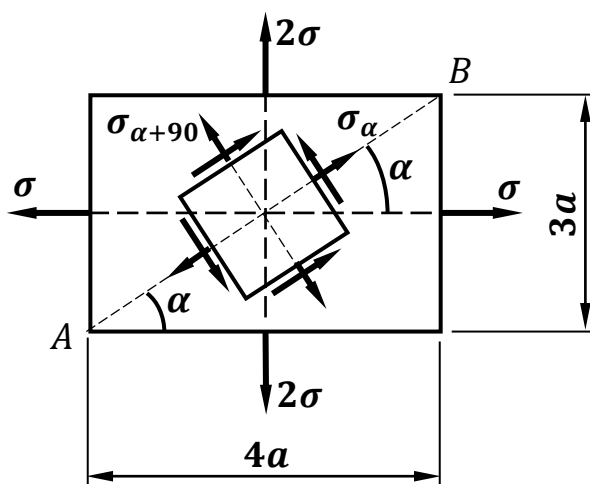
Задача №3

Пластина находится в условиях плоского напряжённого состояния.

Определить удлинение диагонали AB.

E, ν – заданы.

Решение



$$l_{AB} = \sqrt{(4a)^2 + (3a)^2} = 5a \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3a}{5a} = 0,6; \cos \alpha = \frac{4a}{5a} = 0,8.$$

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma + 2\sigma}{2} + \frac{\sigma - 2\sigma}{2} \cdot \cos 2\alpha = 1,5\sigma - 0,5\sigma \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 1,5\sigma - 0,5\sigma \cdot (0,8^2 - 0,6^2) = 1,5\sigma - 0,14\sigma = 1,36\sigma.$$

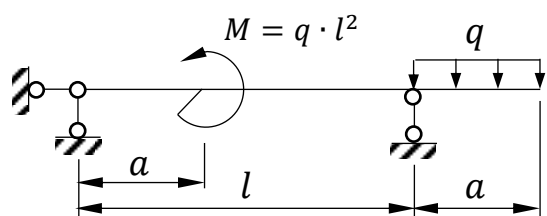
$$\sigma_{\alpha+90} = \frac{\sigma + 2\sigma}{2} + \frac{\sigma - 2\sigma}{2} \cdot \cos 2(\alpha + 90) = 1,5\sigma - 0,5\sigma \cdot (-\cos 2\alpha) = 1,5\sigma + 0,5\sigma \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 1,5\sigma + 0,5\sigma \cdot (0,8^2 - 0,6^2) = 1,5\sigma + 0,14\sigma = 1,64\sigma.$$

$$\varepsilon_{AB} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_{\alpha} - \nu \cdot \sigma_{\alpha+90}) = \frac{\sigma}{E} \cdot (1,36 - \nu \cdot 1,64).$$

$$\Delta l_{AB} = \varepsilon_{AB} \cdot l_{AB} = \frac{\sigma}{E} \cdot (1,36 - \nu \cdot 1,64) \cdot 5a = \frac{\sigma a}{E} (6,8 - 8,2\nu).$$

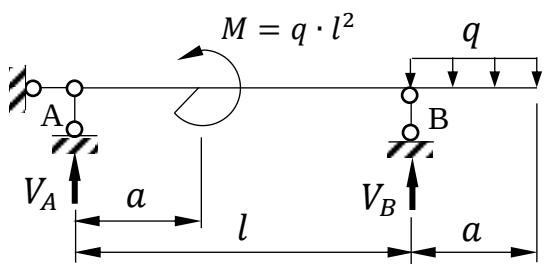
$$\text{Ответ: } \Delta l_{AB} = \frac{\sigma a}{E} (6,8 - 8,2\nu).$$

Задача №4



При каком значении ***a*** в сечении над правой опорой отсутствует перелом на эпюре изгибающих моментов?

Решение

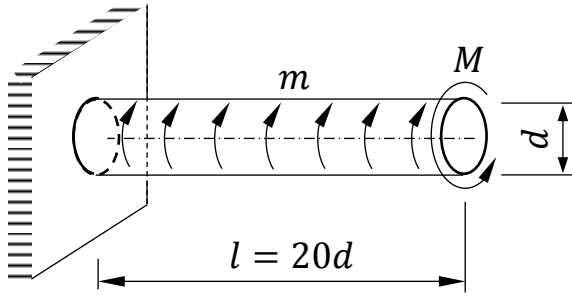


Перелома на эпюре изгибающих моментов в сечении В не будет, если $V_B=0$.

$$\begin{aligned} \sum m_A &= V_B \cdot l + M - q \cdot a \cdot (l + \frac{a}{2}) = 0 \Rightarrow V_B = \frac{1}{l} \cdot (q \cdot \frac{a^2}{2} + q \cdot a \cdot l - q \cdot l^2) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a^2 + 2 \cdot a \cdot l - 2 \cdot l^2 = 0 \Rightarrow a_{1,2} = -l \pm \sqrt{l^2 + 2l^2} = l \cdot (-1 \pm \sqrt{3}), \text{ откуда:} \\ &a_1 \cong 0,732l; \quad a_2 \cong -2,732l - \text{ не имеет физического смысла.} \end{aligned}$$

Ответ: $a \cong 0,732l$.

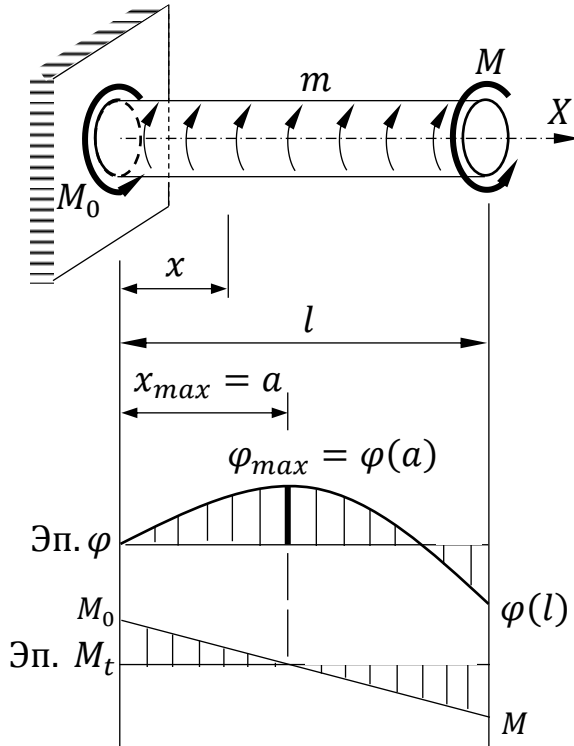
Задача №5



Наибольший угол закручивания сечения ($\varphi_{\max}$) и угол закручивания торцевого сечения вала равны по абсолютной величине.

Найти наибольшее касательное напряжение при $m=100 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{м}$, $d=10 \text{ мм}$.

Решение



Угол закручивания в сечении x

:

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{1}{GJ_p} \cdot \left(M_0 \cdot x - \frac{m \cdot x^2}{2} \right),$$

где $\varphi(0) = 0$.

Находим координату сечения с наибольшим углом закручивания:

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{1}{GJ_p} \cdot (M_0 - m \cdot x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{\max} = a = \frac{M_0}{m}. \quad (1)$$

По условию $\varphi(a) = -\varphi(l) \Rightarrow$

$$\Rightarrow M_0 \cdot a - \frac{m \cdot a^2}{2} = -\left(M_0 \cdot l - \frac{m \cdot l^2}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{M_0}{m} \cdot a - \frac{a^2}{2} + \frac{M_0}{m} \cdot l - \frac{l^2}{2} = 0. \quad (2)$$

Подставляем (1) в (2), преобразуем и получаем:

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot l - l^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{1,2} = -l \pm \sqrt{l^2 + l^2} = l \cdot (-1 \pm \sqrt{2}), \text{ откуда: } a_1 \cong 0,414l, \quad a_2 \cong -2,414l.$$

Физический смысл имеет только корень $a = 0,414l$. (3)

Из (1) и (3) получаем: $M_0 = 0,414ml$. Подставив это значение в уравнение равновесия $\sum m_t = M - m \cdot l + M_0 = 0$, получаем: $M = M_{\max} = 0,586ml$.

Определяем искомое значение наибольшего касательного напряжения:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_p} = \frac{0,586ml}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{0,586 \cdot 100 \cdot 20 \cdot 10^{-2} \cdot 16}{3,14 \cdot (10^{-2})^3} = 59,7 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \cong 60 \text{ МПа}.$$

Ответ: $\tau_{\max} \cong 60 \text{ МПа}$.