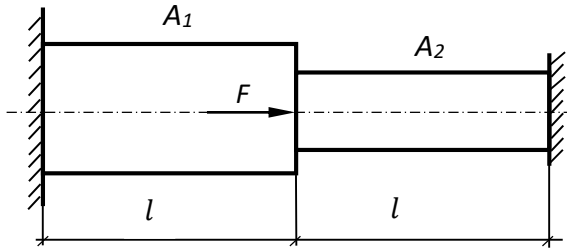
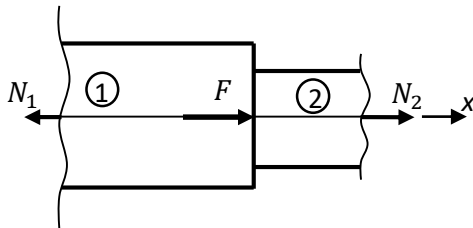


### Задача № 1



Стальной ступенчатый стержень нагружен силой  $F$ . Площади поперечных сечений участков  $A_1$  и  $A_2$ . Коэффициент линейного температурного расширения  $\alpha$ . На сколько градусов необходимо нагреть стержень, чтобы напряжения на первом участке стали равны нулю.

### Решение



Из условия равновесия вырезанной части:

$$\sum x = 0 \Rightarrow -N_1 + N_2 + F = 0.$$

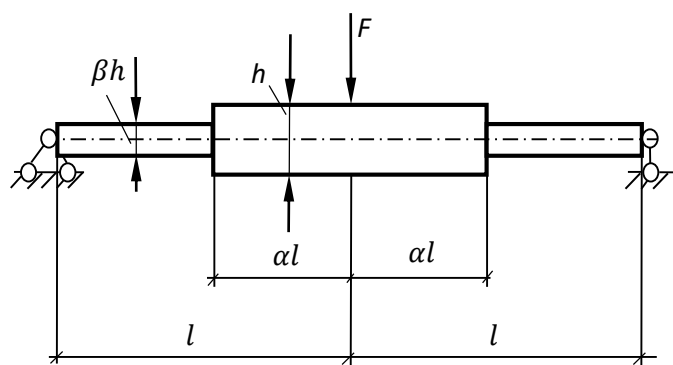
По условию  $\sigma^{\text{I}} = 0 \Rightarrow N_1 = 0 \Rightarrow N_2 = -F.$

Уравнение совместности деформаций:

$$\frac{N_1 \cdot l}{EA_1} + \frac{N_2 \cdot l}{EA_2} + \alpha \cdot 2l \cdot \Delta T = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 - \frac{F \cdot l}{E \cdot A_2} + \alpha \cdot 2l \cdot \Delta T = 0 \Rightarrow \Delta T = \frac{F}{2\alpha EA_2}.$$

Ответ:  $\Delta T = \frac{F}{2\alpha EA_2}.$



## Задача № 2

Ступенчатая балка прямоугольного поперечного сечения шириной  $b$  нагружена сосредоточенной силой  $F$  (см.рис.). Из условия минимума веса балки установить значения параметров  $\alpha$  и  $\beta$  при условии равенства максимальных нормальных напряжений в опасных сечениях.

## Решение

Опасные сечения: 1 – в середине пролёта;

2 – сечения сопряжений ступеней балки.

$$M_z^{\textcircled{1}} = \frac{F}{2} \cdot l \quad M_z^{\textcircled{2}} = \frac{F}{2} \cdot (l - \alpha \cdot l) \quad W_z^{\textcircled{1}} = \frac{b \cdot h^2}{6} \quad W_z^{\textcircled{2}} = \frac{b \cdot (\beta \cdot h)^2}{6}$$

$$\frac{M_z^{\textcircled{1}}}{W_z^{\textcircled{1}}} = \frac{M_z^{\textcircled{2}}}{W_z^{\textcircled{2}}} \Rightarrow \frac{Fl \cdot 6}{2 \cdot b h^2} = \frac{F(l - \alpha l) \cdot 6}{2 \cdot b (\beta h)^2} \Rightarrow \alpha = 1 - \beta^2.$$

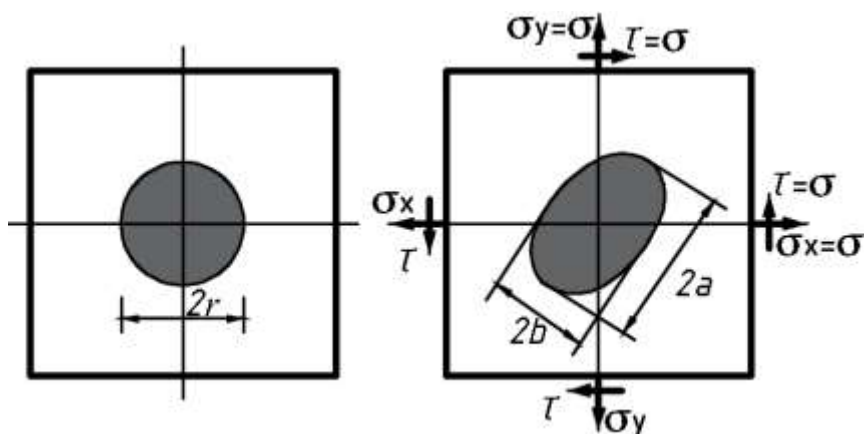
$$V = V_1 + V_2 = 2 \cdot b \cdot \beta h \cdot (l - \alpha l) + 2 \cdot b \cdot h \cdot \alpha l = 2b\beta hl \cdot (1 - \alpha) + 2b\alpha hl = \\ = 2b\beta hl \cdot (1 - 1 + \beta^2) + 2bhl \cdot (1 - \beta^2) = 2bhl \cdot (1 - \beta^2 + \beta^3).$$

$$\frac{dV}{d\beta} = 2bhl \cdot (-2\beta + 3\beta^2) = 0 \Rightarrow \beta = \frac{2}{3}.$$

$$\frac{d^2V}{d\beta^2} = 2bhl \cdot (-2 + 6\beta) > 0 \text{ при } \beta = \frac{2}{3}, \text{ т. е. соответствует минимуму веса.}$$

$$\alpha = 1 - \beta^2 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}.$$

$$\text{Ответ: } \alpha = \frac{5}{9}; \beta = \frac{2}{3}.$$



### Задача № 3

После загрузки тонкой пластинки из изотропного материала,  $E$  и  $\nu$  которого заданы, изображенный на ее поверхности круг радиуса  $r$  превратился в эллипс с полуосями  $a$  и  $b$ .

Определить отношение  $a/b$ .

### Решение

Определяем главные напряжения:

$$\sigma_{\max/\min} = 0,5 \cdot [\sigma_x + \sigma_y \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau^2}] = 0,5 \cdot [\sigma + \sigma \pm \sqrt{(\sigma - \sigma)^2 + 4 \cdot \sigma^2}] = \sigma \pm \sigma \Rightarrow \sigma_1 = 2\sigma, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0.$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_1 - \nu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{E} \cdot [2\sigma - \nu \cdot (0 + 0)] = \frac{2\sigma}{E},$$

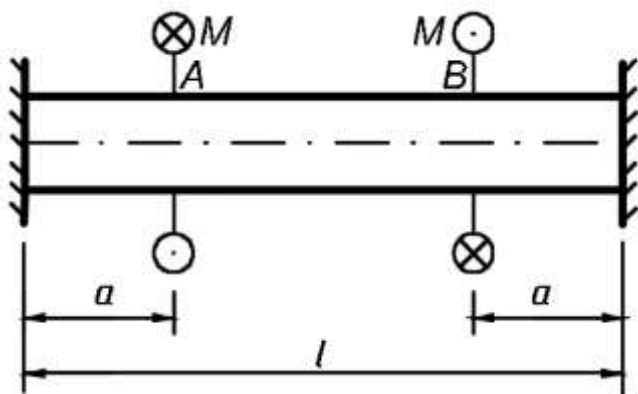
$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_3 - \nu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)] = \frac{1}{E} \cdot [0 - \nu \cdot (2\sigma + 0)] = -\nu \cdot \frac{2\sigma}{E}.$$

$$a = r + \varepsilon_1 \cdot r = r \cdot (1 + \varepsilon_1) = r \cdot (1 + \frac{2\sigma}{E}),$$

$$b = r + \varepsilon_3 \cdot r = r \cdot (1 + \varepsilon_3) = r \cdot (1 - \nu \cdot \frac{2\sigma}{E}).$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{r}{E} \cdot (E + 2\sigma)}{\frac{r}{E} \cdot (E - \nu \cdot 2\sigma)} = \frac{E + 2\sigma}{E - 2\nu \cdot \sigma}.$$

Ответ:  $\frac{a}{b} = \frac{E + 2\sigma}{E - 2\nu \cdot \sigma}.$

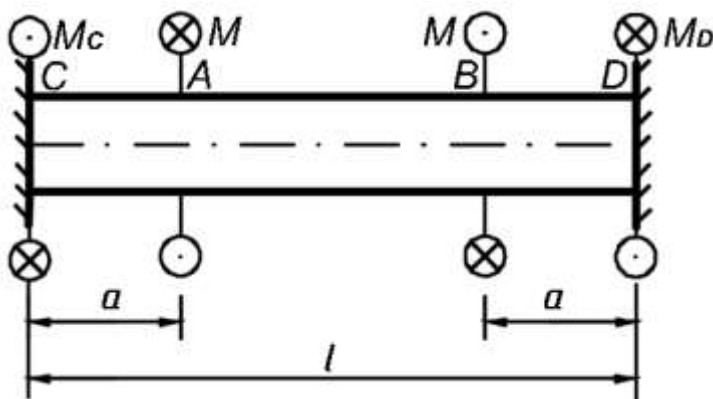


#### Задача № 4

Стержень с постоянной по длине жесткостью  $GJ_p$  нагружен моментами  $M$ .

Определить при каком значении  $a$  угол поворота сечения  $A$  будет максимальным. Найти  $\varphi_{A\max}$ .

#### Решение



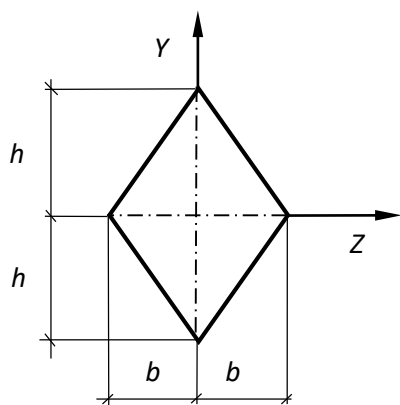
$$\varphi_{CD} = \frac{M_C \cdot l}{GJ_p} - \frac{M \cdot (l-a)}{GJ_p} + \frac{M \cdot a}{GJ_p} = 0 \Rightarrow M_C = M \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{a}{l}\right).$$

$$\varphi_A(a) = \varphi_{CA} = \frac{M_C \cdot a}{GJ_p} = \frac{M \cdot \left(a - 2 \cdot \frac{a^2}{l}\right)}{GJ_p}.$$

$$\frac{d\varphi_A(a)}{da} = \frac{M}{GJ_p} \cdot \left(1 - 4 \cdot \frac{a}{l}\right) = 0 \Rightarrow 4 \cdot \frac{a}{l} = 1 \Rightarrow a = \frac{l}{4}.$$

$$\frac{d^2\varphi_A(a)}{da^2} = -\frac{4M}{GJ_p \cdot l} < 0 \Rightarrow \varphi_A\left(a = \frac{l}{4}\right) = \varphi_{A\max} = \frac{M}{GJ_p} \cdot \left(\frac{l}{4} - 2 \cdot \left(\frac{l}{4}\right)^2\right) = \frac{M \cdot l}{8GJ_p}.$$

$$\text{Ответ: } a = \frac{l}{4}; \quad \varphi_{A\max} = \frac{M \cdot l}{8GJ_p}.$$



### Задача № 5

Для сечения в виде ромба определить, при каком соотношении  $h/b$  будет максимальным осевой момент сопротивления  $W_z$ .

### Решение

Обозначаем через  $a$  сторону ромба, тогда:

$$b = a \cdot \cos \alpha; \quad h = a \cdot \sin \alpha.$$

$$J_z = 2 \cdot \frac{2b \cdot h^3}{12} = \frac{b \cdot h^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \cos \alpha \cdot (a \cdot \sin \alpha)^3 =$$

$$= \frac{a^4}{3} \cdot \sin^3 \alpha \cdot \cos \alpha.$$

$$W_z = \frac{J_z}{|y|_{\max}} = \frac{J_z}{h} = \frac{a^4 \cdot \sin^3 \alpha \cdot \cos \alpha}{3 \cdot a \cdot \sin \alpha} = \frac{a^3}{3} \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha.$$

$$\frac{dW_z}{d\alpha} = \frac{a^3}{3} \cdot ((2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha) \cdot \cos \alpha + \sin^2 \alpha \cdot (-\sin \alpha)) =$$

$$= \frac{a^3}{3} \cdot (2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{3} \cdot \sin \alpha \cdot (2 \cdot \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0 \Rightarrow 2 \cdot \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = 2 \Rightarrow \frac{h}{b} = \sqrt{2}.$$

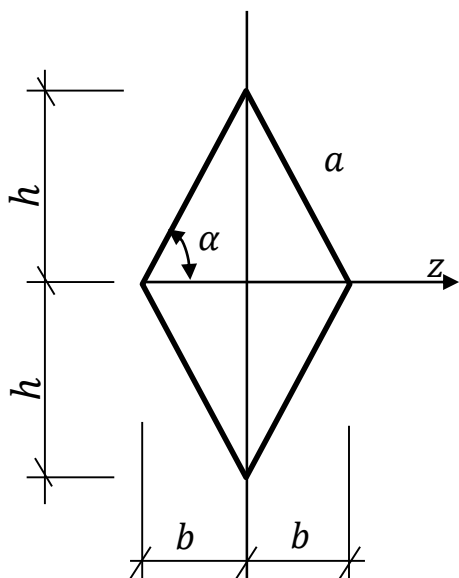
$$\frac{d^2 W_z}{d\alpha^2} = \frac{a^3}{3} \cdot (2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos^2 \alpha + 2 \cdot \cos \alpha \cdot (-\sin \alpha) \cdot 2 \cdot \sin \alpha - 3 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha =$$

$$= \frac{a^3}{3} \cdot \cos \alpha \cdot (2 \cdot \cos^2 \alpha - 4 \cdot \sin^2 \alpha - 3 \cdot \sin^2 \alpha) = \frac{a^3}{3} \cdot \cos \alpha \cdot (2 \cdot \cos^2 \alpha - 7 \cdot \sin^2 \alpha) =$$

$$= \frac{a^3}{3} \cdot \cos \alpha \cdot (2 - 2 \cdot \sin^2 \alpha - 7 \cdot \sin^2 \alpha) = \frac{a^3}{3} \cdot \cos \alpha \cdot (2 - 9 \cdot \sin^2 \alpha).$$

При  $\alpha = \arctg \sqrt{2}$   $\frac{d^2 W_z}{d\alpha^2} < 0 \Rightarrow \frac{h}{b} = \sqrt{2}$  соответствует  $\max W_z$ .

Ответ:  $\frac{h}{b} = \sqrt{2}.$



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{b}$$

$$\sin \alpha \neq 0$$