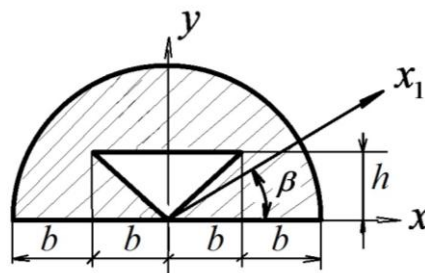


ЗАДАЧА 1

Условие

Дано сечение в виде полукруга с вырезанным треугольником. При каком значении h осевой момент инерции фигуры I_{x_1} относительно оси x_1 не будет зависеть от угла β . Дано: b .



Решение

Осевой момент инерции относительно наклонной оси x_1 можно вычислить по формуле

$$I_{x_1} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\beta - I_{xy} \sin 2\beta$$

Ось y является осью симметрии фигуры, поэтому $I_{xy} = 0$. Таким образом, для того, чтобы I_{x_1} не зависил от угла β необходимо, чтобы $\frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\beta = 0$. Для этого должно выполняться условие, что $I_x = I_y$.

Моменты инерции I_x и I_y можно определить как разность моментов инерции полукруга и треугольника

$$I_x = I_x^{\text{пкр}} - I_x^{\text{тр}}, \quad I_y = I_y^{\text{пкр}} - I_y^{\text{тр}},$$

где $I_x^{\text{пкр}}, I_y^{\text{пкр}}, I_x^{\text{тр}}, I_y^{\text{тр}}$ - осевые моменты инерции относительно осей x и y для полукруга и треугольника соответственно.

Очевидно, что моменты инерции полукруга относительно осей x и y равны. Поэтому для выполнения условия должны быть равняться моменты инерции треугольника относительно этих осей

$$I_x^{\text{тр}} = I_y^{\text{тр}}.$$

Запишем выражение для момента инерции треугольника относительно оси x согласно формуле для параллельного переноса осей

$$I_x^{\text{тр}} = \frac{2b \cdot h^3}{36} + \left(\frac{2}{3}h \right)^2 \cdot \frac{1}{2} 2b \cdot h = \frac{1}{2}bh^3.$$

Далее запишем выражение для момента инерции треугольника относительно оси y

$$I_y^{\text{тр}} = 2 \frac{hb^3}{12} = \frac{hb^3}{6}.$$

Тогда из равенства моментов инерции получаем

$$\frac{1}{2}bh^3 = \frac{hb^3}{6} \Rightarrow h^2 = \frac{b^2}{3}.$$

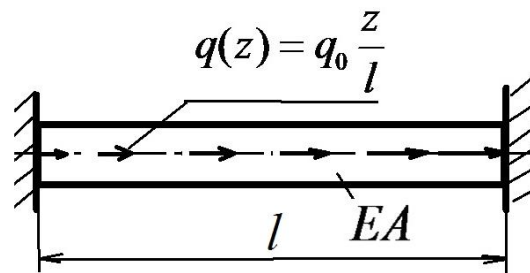
Откуда следует $h = \frac{b}{\sqrt{3}} = 0,577b$.

ЗАДАЧА 2

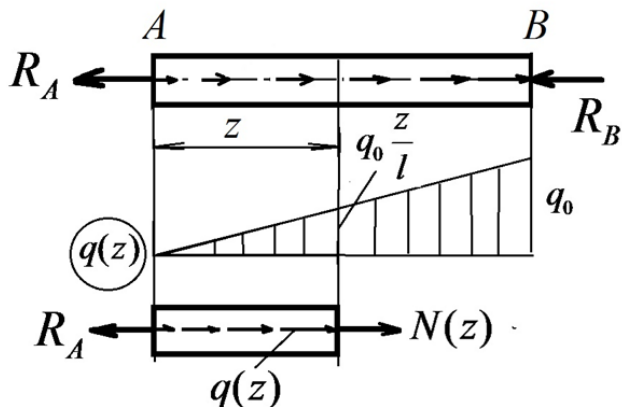
Дан стержень, нагруженный распределённой продольной нагрузкой, изменяющейся по длине по линейному закону. Найти координату сечения, в котором осевое перемещение максимально, а также само это перемещение.

Дано: q_0, l, EA .

Условие



Решение



Запишем уравнение равновесия всего бруса для сил в проекции на горизонтальную ось

$$R_A + R_B = \int_0^l q(z) dz = \int_0^l \frac{q_0 z}{l} dz = \frac{q_0 l}{2}.$$

Нормальную силу в z -м сечении определим из уравнения равновесия отрезанной левой части бруса

$$N(z) = R_A - \int_0^z \frac{q_0 \tilde{z}}{l} d\tilde{z} = R_A - \frac{q_0 z^2}{l}.$$

Очевидно, что изменение длины бруса, закрепленного между двумя заделками равно нулю, тогда

$$w_{AB} = \int_0^l \frac{N(z) dz}{EA} = \frac{1}{EA} \int_0^l \left(R_A - \frac{q_0 z^2}{l} \right) dz = 0 \Rightarrow R_A = \frac{q_0 l}{6}, R_B = \frac{q_0 l}{3}.$$

Далее запишем выражение для осевого перемещения z -го сечения

$$w(z) = \frac{1}{EA} \int_0^z \left(\frac{q_0 l}{6} - \frac{q_0 \tilde{z}^2}{2l} \right) d\tilde{z} = \frac{q_0}{EA} \left(\frac{l\tilde{z}}{6} \Big|_0^z - \frac{\tilde{z}^3}{6l} \Big|_0^z \right) = \frac{q_0}{6EA} \left(lz - \frac{z^3}{l} \right)$$

Определим координату z^* , при которой функция w имеет экстремум

$$\left. \frac{dw(z)}{dz} \right|_{z=z^*} = 0 \Rightarrow l - \frac{3(z^*)^2}{l} = 0 \Rightarrow z^* = l / \sqrt{3}.$$

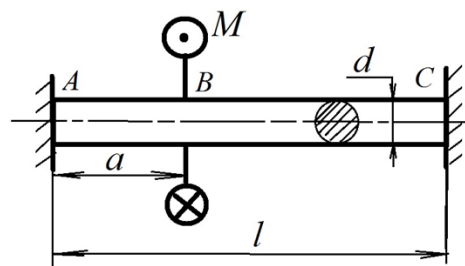
Причем, так как вторая производная от w отрицательная, то экстремальное значение имеет максимум. Тогда максимальное значение осевого перемещения равно

$$w_{\max}(z^*) = \frac{q_0}{6EA} \left(l \cdot l / \sqrt{3} - \frac{(l / \sqrt{3})^3}{l} \right) = \frac{\sqrt{3} q_0 l^2}{27EA}.$$

ЗАДАЧА 3

Условие

Дан вал круглого поперечного сечения диаметром d , нагруженный моментом M в сечении B . На участке AB модуль сдвига равен $2G$, а на участке BC - G . Найти, при каком значении a угол закручивания сечения B будет максимальным. Вычислить это значение угла закручивания. Дано: l, G, d, M .



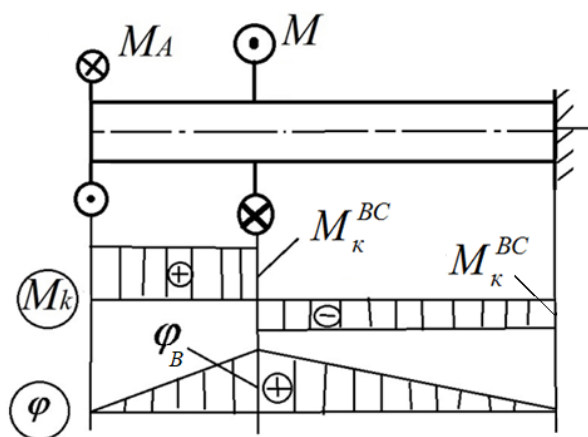
Решение

Задача один раз статически неопределимая. Для раскрытия статической неопределимости отбросим левую заделку, а ее влияние заменим моментом реакции M_A . Для определения M_A запишем уравнение совместности угловых перемещений

$$\varphi_{AC} = \varphi_{AB} + \varphi_{BC} = 0.$$

Расписывая углы закручивания по закону Гука, получим

$$\frac{M_A a}{2GI_p} + \frac{M_{\kappa}^{BC}(l-a)}{GI_p} = 0.$$



На основании метода сечений значения крутящих моментов на участках бруса равны

$$M_{\kappa}^{AB} = M_A, M_{\kappa}^{BC} = M_A - M.$$

Тогда уравнение совместности будет иметь следующий вид

$$\frac{M_A a}{2GI_p} + \frac{(M_A - M)(l-a)}{GI_p} = 0.$$

Откуда получаем значение момента реакции в левой заделке $M_A = M \frac{2(l-a)}{2l-a}$.

Запишем выражение для угла закручивания сечения B

$$\varphi_B = \varphi_{AB}(a) = \frac{M_A a}{2GI_p} = \frac{Ma(l-a)}{GI_p(2l-a)}.$$

Введём обозначение $k = \frac{a}{l}$. Тогда $\varphi_{AB}(k) = \frac{Ml(k-k^2)}{GI_p(2-k)}$

Исследуем функцию $\Delta\varphi_{BA}$ на экстремум

$$\left. \frac{d\varphi_{BA}(k)}{dk} \right|_{k=k_*} = \frac{Ml}{GI_p} \frac{(1-2k_*)(2-k_*) - (k_* - k_*^2)(-1)}{(2-k_*)^2} = 0.$$

Из данного выражения приходим к следующему квадратному уравнению

$$k_*^2 - 4k_* + 2 = 0.$$

Из двух корней этого уравнения пригодным оказывается только один

$$k_* = 2 - \sqrt{2} \approx 0,586 \Rightarrow a_* = k_* l = 0,586l.$$

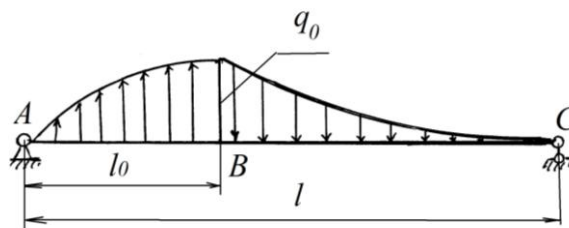
Тогда максимальный угол закручивания сечения B будет равняться:

$$\varphi_{\max} = \varphi_{AB}(a_*) = \frac{Ml}{GI_p} \frac{(1-0,586)0,586}{2-0,586} \approx 0,172 \frac{Ml32}{G\pi d^4} = 1,75 \frac{Ml}{Gd^4}.$$

ЗАДАЧА 4

Условие

Балка нагружена распределённой нагрузкой, меняющейся по параболе. На участке AB имеет место экстремум в точке B , а на участке BC – в точке C . Найти из условия, что реакции в опорах равны друг другу по модулю, значение l_0 . Определить прогиб в точке B при найденном значении длины участка AB .
Дано: l, q_0, EI_x .



Решение

Из условия равенства сил реакций в опорах следует, что равнодействующие распределённых нагрузок должны быть равны друг другу. Тогда

$$\frac{2}{3} q_0 l_0 = \frac{1}{3} q_0 (l - l_0) \Rightarrow l_0 = \frac{1}{3} l.$$

Далее из уравнения равновесия для моментов определим силу реакции в точке C

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} q_0 l_0 \frac{1}{4} l_0 - q_0 l_0 \frac{1}{2} l_0 + \frac{1}{3} q_0 (l - l_0) \left(l_0 + \frac{l - l_0}{4} \right) - R_C l = 0 \Rightarrow R_C = \frac{7}{108} q_0 l.$$

Для вычисления прогиба точки B воспользуемся интегралом Мора. Для этого вначале получим выражение для изгибающего момента от внешней нагрузки, двигаясь от точки C

$$M_x(z) = R_C \cdot z - \frac{1}{3} q_0 (z) \cdot z \cdot \frac{1}{4} z = \frac{7}{108} q_0 l \cdot z - \frac{1}{3} q_0 \left(\frac{3z}{2l} \right)^2 \cdot \frac{1}{4} z^2 = \frac{7}{108} q_0 l \cdot z - \frac{3}{16} q_0 \frac{z^4}{l^2}.$$

Затем построим эпюру изгибающих моментов от единичной силы, приложенной в сечении B . Очевидно, что в z -ом сечении единичный момент, если идти от правого конца балки, будет равен $z/3$. Теперь определим прогиб в точке B по интегралу Мора

$$\begin{aligned} \delta_B &= \frac{1}{EI_x} \int_0^{\frac{2l}{3}} M_x(z) M_{x1}(z) dz = \frac{1}{EI_x} \int_0^{\frac{2l}{3}} \left(\frac{7}{108} q_0 l \cdot z - \frac{3}{16} q_0 \frac{z^4}{l^2} \right) \frac{z}{3} dz = \\ &= \frac{q_0}{EI_x} \left(\frac{7}{108} l \frac{z^3}{9} - \frac{1}{16 l^2} \frac{z^6}{6} \right) \bigg|_0^{\frac{2l}{3}} = 1,219 \cdot 10^{-3} \frac{q_0 l^4}{EI_x}. \end{aligned}$$

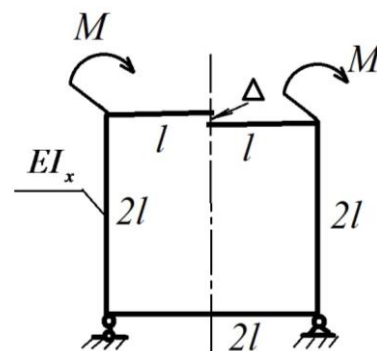
ЗАДАЧА 5

Условие

Дана нагруженная двумя моментами квадратная рама постоянной жесткости EI_x с вертикальным зазором Δ посередине верхнего горизонтального участка. При некотором значении моментов $M^{(1)} = M_0$ зазор перекрывается. После этого в месте сочленения устанавливается шарнир. Моменты продолжают увеличиваться и достигают значения $M^{(2)} = 3M_0$.

Определить возникающую при этом значении моментов внутреннюю нормальную силу в левом вертикальном участке рамы.

Дано: l, EI_x, Δ .



Решение

До перекрытия зазора задача является статически определимой. Найдём значение момента M_0 , при котором зазор перекрывается.

$$\delta_{AB}^{вер} = \frac{1}{EI_x} (M_x \cdot M_{x1}) = \frac{14M_0 l^2}{3EI_x} = \Delta.$$

$$\text{Откуда } M_0 = \frac{3}{14} \frac{EI_x \Delta}{l^2}.$$

После перекрытия зазора задача становится статически неопределимой. Причем, так как рама кососимметричная, то задача является один раз статически неопределимой. Отметим, что силовая эпюра M_{xF} качественно повторяет эпюру M_x в определимой задаче, а эпюра от единичного силового фактора в точности повторяет эпюру M_{x1} .

Вычислим коэффициенты влияния

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_x} (M_{x1} \cdot M_{x1}) = \frac{8l^3}{3EI_x},$$

$$\delta_{1F} = \frac{1}{EI_x} (M_{xF} \cdot M_{x1}) = \frac{7Ml^3}{3EI_x}.$$

Из канонического уравнения метода сил, получим

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{1F} = 0 \Rightarrow X_1 = -\frac{7M}{8l}.$$

Очевидно, что момент M , равен

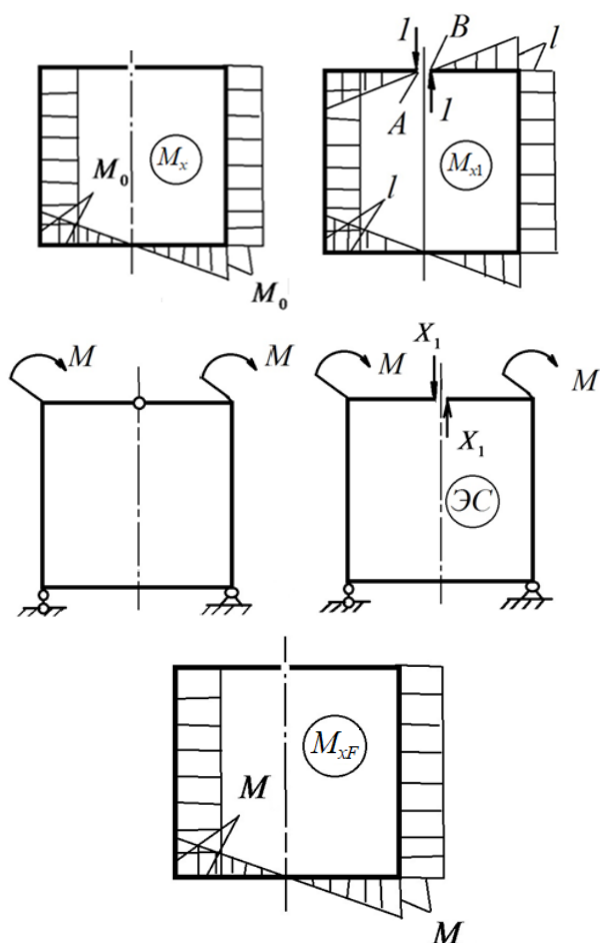
$$M = M^{(2)} - M^{(1)} = 2M_0.$$

Тогда

$$X_1 = -\frac{7M_0}{4l}.$$

На левом верхнем горизонтальном участке рамы сила X_1 направлена вверх, поэтому внутренняя сила в вертикальном левом участке рамы растягивающая и равна

$$N = \frac{7}{4l} \frac{3EI_x \Delta}{14l^2} = \frac{3EI_x \Delta}{8l^3}.$$

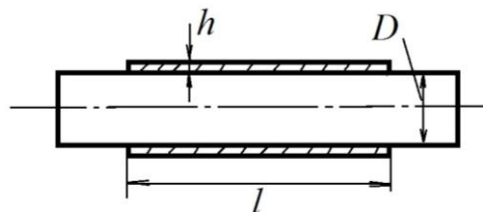


ЗАДАЧА 6

Тонкостенная трубка длиной l и толщиной $h = D/20$ надевается на вал диаметром D с натягом на радиус, равным Δ . Найти изменение длины трубки Δl .

Дано: l, D, Δ, μ .

Условие



Решение

При посадке с натягом трубки на вал между ними возникает контактное давление p_k . Напряженные состояния вала и трубки приведены на рисунках.

Запишем условие совместности перемещений для вала и трубки

$$u_r^{mp}\left(\frac{D}{2}\right) - u_r^e\left(\frac{D}{2}\right) = \Delta, \quad (1)$$

Радиальное перемещение связано с окружной деформацией и радиусом по следующей формуле

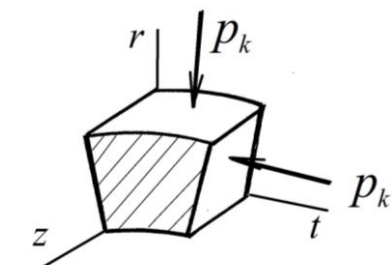
$$u_r = \varepsilon_t r.$$

Тогда, расписывая окружную деформацию по обобщенному закону Гука, получим радиальное перемещение вала

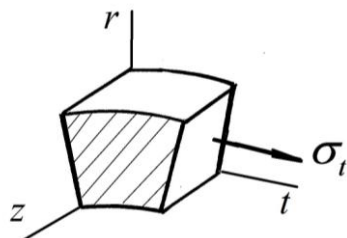
$$\begin{aligned} u_r^e\left(\frac{D}{2}\right) &= \varepsilon_t^e\left(\frac{D}{2}\right) \cdot \frac{D}{2} = \frac{1}{E}(\sigma_t^e - \mu(\sigma_r^e + \sigma_z^e)) \cdot \frac{D}{2} = \\ &= -\frac{p_k}{E}(1-\mu) \cdot \frac{D}{2}, \end{aligned} \quad (2)$$

Теперь найдем радиальное перемещение трубки

$$\begin{aligned} u_r^{mp}\left(\frac{D}{2}\right) &= \varepsilon_t^{mp}\left(\frac{D}{2}\right) \cdot \frac{D}{2} = \frac{1}{E}(\sigma_t^{mp} - \mu(\sigma_r^{mp} + \sigma_z^{mp})) = \\ &= \frac{\sigma_t^{mp} D}{2E}. \end{aligned}$$



Напряженное состояние вала



Напряженное состояние трубки

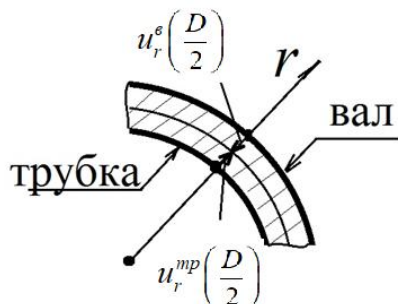


Схема деформирования

Учитывая, что окружное напряжение трубки можно определить по котельной формуле, получим

$$u_r^{mp}\left(\frac{D}{2}\right) = \frac{1}{E} \frac{p_k D}{2h} \cdot \frac{D}{2} = \frac{p_k D^2}{4Eh}. \quad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1) найдем контактное давление

$$\frac{p_k D^2}{4Eh} + \frac{p_k}{E}(1-\mu) \cdot \frac{D}{2} = \Delta \Rightarrow p_k = \frac{2E\Delta}{D(11-\mu)}.$$

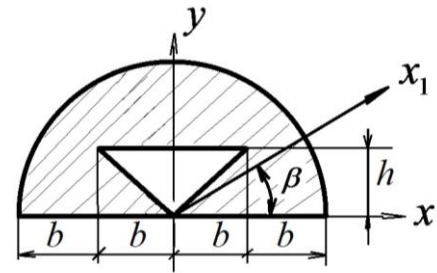
Далее по осевой деформации трубки, записанной по обобщенному закону Гука, вычислим изменение длины трубки

$$\Delta l = \varepsilon_z^{mp} l = l \frac{1}{E}(\sigma_z^{mp} - \mu(\sigma_t^{mp} + \sigma_r^{mp})) = -\frac{l}{E} \frac{\mu p_k D}{2h} = -\frac{20l\Delta\mu}{(11-\mu)D}.$$

Знак минус, полученный в ответе, говорит о том, что длина трубки после посадки на вал уменьшается.

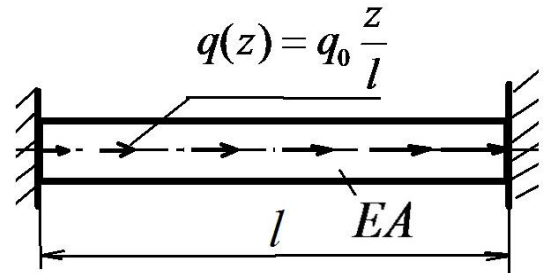
ЗАДАЧИ XXXXIV ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

1. Дано сечение в виде полукруга с вырезанным треугольником. При каком значении h осевой момент инерции фигуры I_{x_1} относительно оси x_1 не будет зависеть от угла β . Дано: b, b .



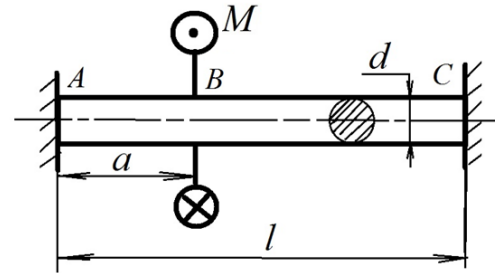
2. Дан стержень, нагруженный распределённой продольной нагрузкой, изменяющейся по длине по линейному закону. Найти координату сечения, в котором осевое перемещение максимально, а также само это перемещение.

Дано: q_0, l, EA .



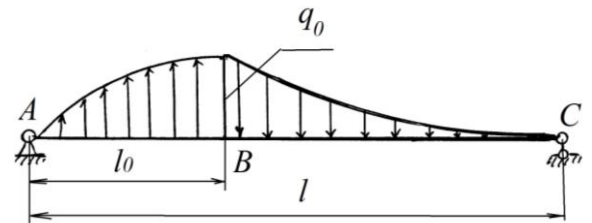
3. Дан вал круглого поперечного сечения диаметром d , нагруженный моментом M в сечении B . На участке AB модуль сдвига равен $2G$, а на участке BC - G . Найти, при каком значении a угол закручивания сечения B будет максимальным. Вычислить это значение угла закручивания.

Дано: l, G, d, M .

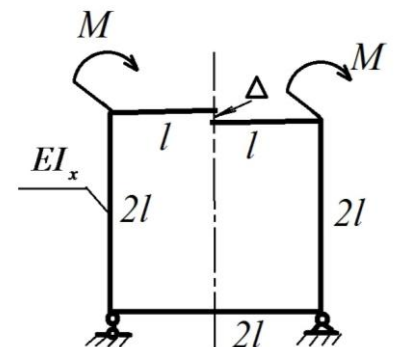


4. Балка нагружена распределённой нагрузкой, меняющейся по параболе. На участке AB имеет место экстремум в точке B , а на участке BC - в точке C . Найти из условия, что реакции в опорах равны друг другу по модулю, значение l_0 . Определить прогиб в точке B при найденном значении длины участка AB .

Дано: l, q_0, EI_x .



5. Дана нагруженная двумя моментами квадратная рама постоянной жесткости EI_x с вертикальным зазором Δ посередине верхнего горизонтального участка. При некотором значении моментов $M^{(1)} = M_0$ зазор перекрывается. После этого в месте сочленения устанавливается шарнир. Моменты продолжают увеличиваться и достигают значения $M^{(2)} = 3M_0$. Определить возникающую при этом значении моментов внутреннюю нормальную силу в левом вертикальном участке рамы.



6. Тонкостенная трубка длиной l и толщиной $h = D/20$ надевается на вал диаметром D с натягом на радиус, равным Δ . Найти изменение длины трубки Δl .

Дано: l, D, Δ, μ .

