

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	4
ОСНОВЫ ДИНАМИКИ.....	5
1. Динамика материальной точки	5
2. Прямолинейные колебания точки	8
3. Движение точки в неинерциальной системе отсчета	12
4. Введение в динамику механической системы.....	13
5. Общие теоремы динамики	16
6. Принцип Даламбера.....	28
7. Принцип возможных перемещений	31
8. Задание 1. Динамика прямолинейного движения материальной точки	35
9. Задание 2. Динамика криволинейного движения материальной точки	54
10. Задание 3. Исследование колебательного движения материальной точки	65
11. Задание 4. Теоремы о движении центра масс и об изменении количества движения системы	84
12. Задание 5. Теоремы об изменении момента количества движения и кинетической энергии системы.....	91
13. Задание 6. Физический маятник	115
14. Задание 7. Принцип Даламбера	124
15. Задание 8. Применение принципа возможных перемещений к определению реакций опор составной конструкции	133
Приложение 1. Дифференциальные уравнения и методы их решения	142
Приложение 2. Моменты инерции некоторых однородных твердых тел	146

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное учебное пособие посвящено решению задач динамики и является второй частью изданного в прошлом году Сборника индивидуальных заданий по теоретической механике (Статика). Оно содержит восемь индивидуальных заданий по основным темам динамики. Последнее задание фактически посвящено не динамике, а аналитической статике. Здесь с помощью принципа возможных перемещений определяются реакции двухсоставной конструкции. Решение этого задания, однако, как и всех других, требует знания динамики и умения проводить кинематический анализ возможных перемещений плоских механизмов.

Чтобы облегчить процесс выполнения заданий, они предваряются кратким изложением основ динамики и введением в аналитическую механику. Кроме того, в каждом задании подробно разобрана типичная задача. Поэтому, прежде чем выполнять задание, следует ознакомиться с соответствующим теоретическим материалом и разобрать пример решения задачи.

Освоение динамики, в отличие от статики, требует достаточно высокой математической культуры. Ее основы базируются на математическом анализе и теории дифференциальных уравнений, знание которых предполагается. Кроме того, задачи динамики не имеют столь четкого алгоритма решения, как это было в статике. Однако логика решения и этих задач вполне формализуема. Ее следует освоить. В жизни мы постоянно сталкиваемся с нестандартными задачами. От того, как мы их решаем, зависит наша жизнь. Умение решать такие задачи – это главное, чему надо научиться в вузе. Решение задач динамики – первый шаг на этом пути.

Основы динамики

1. Динамика материальной точки

1.1. Задачи динамики. Динамика изучает движение материальных тел, возникающее при их взаимодействии. Но поскольку в механике мерой взаимодействия тел являются силы, то *динамика изучает движение материальных тел под действием сил*. Силы в общем случае могут зависеть от времени, положения тел и их скоростей. Тело будем моделировать системой материальных точек. Если расстояние между любыми двумя точками такой системы не меняется со временем, то она моделирует твердое тело.

Динамика решает *две основные задачи*. *Первая задача* состоит в нахождении по заданному закону движения тела (или системы тел) силы, под действием которой это движение происходит. *Вторая задача*, напротив, состоит в определении закона движения тела по заданным действующим на него силам. Стоит отметить, что на практике часто приходится решать смешанную задачу, когда часть сил известна, а некоторые (например, силы реакций) необходимо найти наряду с законом движения.

Изучение динамики мы начнем с рассмотрения движения материальной точки. Для изучения динамики необходимо знание кинематики, задающей способы описания материальной точки, и ее кинематические характеристик: траектории, скорости, ускорения.

1.2. Аксиомы динамики. В основе динамики точки лежат законы, установленные опытным путем. Систематически их впервые изложил Исаак Ньютон. Они-то и являются аксиомами динамики.

Аксиома 1 (закон инерции Галилея или первый закон Ньютона). *Если на свободную материальную точку не действует сила, то она покоится или равномерно и прямолинейно движется*. Соответствующее этому случаю движение называют *движением по инерции*.

Система отсчета, относительно которой изолированная материальная точка (т.е. не взаимодействующая с другими точками) покоится или движется равномерно и прямолинейно, называется

инерциальной. И наоборот, система отсчета, в которой такая точка движется с ускорением, называется *неинерциальной*. Все инерциальные системы отсчета движутся друг относительно друга с постоянной по модулю и направлению скоростью. Инерциальные системы отсчета являются идеализацией реально существующих. Для большинства технических задач в качестве инерциальной можно принять систему координат, жестко связанную с Землей. Ясно, конечно, что это идеализация. Во многих задачах (например, космической динамики) необходимо учитывать суточное вращение Земли и ее движение вместе с Солнечной системой.

Аксиома 2 (второй закон Ньютона). *Сила, действующая на свободную материальную точку, сообщает ей ускорение $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$, которое в инерциальной системе отсчета пропорционально этой силе и имеет одинаковое с ней направление*

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad \text{или} \quad m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}, \quad (1.1)$$

где m – коэффициент пропорциональности между силой и ускорением, который называется *массой*.

Аксиома 3 (третий закон Ньютона). *Силы, с которыми две материальные точки действуют друг на друга, равны по величине и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны.*

Аксиома 4 (принцип суперпозиции действия сил). *Действие на материальную точку произвольной системы N сил $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_N$ эквивалентно действию одной силы, равной их сумме*

$$\mathbf{F} = \sum_i^N \mathbf{F}_i. \quad (1.2)$$

Аксиома 5 (аксиома связей). *Всякое несвободное движение материальной точки можно рассматривать как свободное, если освободиться от связей и заменить их реакциями. В соответствии с этим несвободное движение материальной точки, на которую наложена связь с реакцией $\mathbf{R}$, описывается следующим уравнением Ньютона (сравни с уравнением (1.1))*

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{R}. \quad (1.3)$$

1.3. Дифференциальные уравнения (ДУ) движения материальной точки. Уравнение Ньютона (1.1) – это векторное урав-

нение, которое в системе координат $Oxyz$ эквивалентно трем уравнениям

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z, \quad (1.4)$$

где F_x, F_y, F_z – проекции силы, а $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ – проекции ускорения точки.

В естественной системе координат, т.е. в проекциях на касательную ось τ , ось главной нормали n и ось бинормали b уравнение (1.1) имеет вид

$$m\ddot{\tau} = F_\tau, \quad mv^2/\rho = F_n, \quad 0 = F_b. \quad (1.5)$$

Уравнения Ньютона (1.4) (или (1.5)) позволяют решить обе указанные выше задачи динамики точки. Решение первой задачи тривиально и сводится к дифференцированию известного закона движения (конечно, масса точки задается).

Вторая же, или обратная, задача требует решения уравнений Ньютона (1.4). Поскольку это дифференциальные уравнения второго порядка, необходимо задать начальные условия (НУ), т.е. координаты и проекции скорости в начальный момент времени $t = t_0$

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0, \\ \dot{x}(t_0) &= v_{x0}, \quad \dot{y}(t_0) = v_{y0}, \quad \dot{z}(t_0) = v_{z0}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Способы интегрирования уравнения Ньютона материальной точки для некоторых типичных задач динамики даны в приложении 1.

1.4. Рекомендации к решению обратной задачи динамики точки. Решать обратную задачу динамики точки рекомендуется в следующей последовательности/

1. *Выбрать систему координат.* Чаще всего используется прямоугольная декартова система. Однако, если известна траектория движения точки, то предпочтительнее может оказаться естественная система. Удачный выбор начала координат и направлений ее осей может существенно упростить ход решения задачи.

2. *Изобразить все силы* – активные $\mathbf{F}_k$ и реакции связей $\mathbf{R}_k$, действующие на точку в произвольный (текущий) момент времени.

3. *Записать второй закон Ньютона*

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \sum_k \mathbf{F}_k + \sum_k \mathbf{R}_k$$

и спроектировать его на оси выбранной системы координат. Все переменные силы нужно при этом представить как функции времени, положения и скорости точки.

4. *Поставить начальные условия* для полученной системы уравнений движения точки.

5. *Проинтегрировать полученную систему ДУ*, определив постоянные интегрирования из НУ. Воспользовавшись найденными законами изменения координат и проекций скоростей? определить все неизвестные задачи.

2. Прямолинейные колебания точки

2.1. Свободные незатухающие колебания (без учета сопротивления среды).

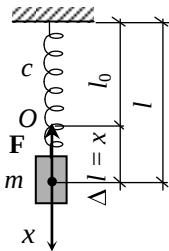


Рис. 2.1

Рассмотрим колебания материальной точки (грузика) на пружинке (рис. 2.1), считая сначала, что сила тяжести не действует? и пренебрегая сопротивлением воздуха. Ось Ox направим в сторону удлинения пружины, а начало оси O возьмем в нижнем ее конце, когда пружина не деформирована и имеет длину l_0 (см. рис. 2.1). Тогда на груз действует единственная сила – сила реакции пружины $\mathbf{F}$, которую называют *восстанавливающей* силой, поскольку эта сила стремится вернуть груз в положение равновесия. По модулю она равна

$$F = c \Delta l, \quad (2.1)$$

где c – жесткость пружины (т.е. сила, необходимая для растяжения пружины на один метр), а $\Delta l = l - l_0$ – ее удлинение. В выбранной нами системе координат, очевидно, $\Delta l = x$ и мы получаем из уравнения Ньютона (1.2) в проекции на ось x *ДУ свободных колебаний*

$$m\ddot{x} = -cx \quad \text{или} \quad \ddot{x} + k^2x = 0, \quad (2.2)$$

где $c/m = k^2$. Его общее решение имеет вид (см. приложение 1)

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt \quad \text{или} \quad x = A \sin(kt + \alpha). \quad (2.3)$$

Такое движение материальной точки называется *гармоническими колебаниями*. Величина A , равная максимальному отклонению точки от положения равновесия, называется *амплитудой колебаний*. Величина $\varphi = kt + \alpha$ – называется *фазой*, при этом α *начальной фазой колебаний*. Величину k называют *частотой*. Промежуток времени $T = 2\pi / k$, в течение которого совершается одно полное колебание, называется *периодом*.

Общее решение (2.3) зависит от двух произвольных постоянных, которые определяются из начальных данных: начального положения груза $x(0) = x_0$, и его начальной скорости $v(0) = v_0$. Легко убедиться, что

$$A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2 / k^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = kx_0 / v_0. \quad (2.4)$$

Из (2.3), (2.4) следуют два важных свойства свободных колебаний:

1. Амплитуда и начальная фаза колебаний зависят от начальных условий задачи.
2. Частота и период колебаний не зависят от начальных условий задачи и полностью определяются параметрами самой колебательной системы (в нашем примере системы из грузика и пружинки).

2.2. Свободные колебания при наличии постоянной силы.

Рассмотрим в качестве примера действия на систему, показанную на рис. 2.1, постоянной силы – силы тяжести $\mathbf{P} = mg$ (рис. 2.2). Заметим, что если бы груз находился в равновесии, то это означало бы, что сила тяжести уравнивается силой упругости пружины, т.е. выполняется равенство $P = c\lambda_s$, где $\lambda_s = \Delta l_s = l - l_0$ – *статическое удлинение пружины*. Возьмем за начало отсчета оси x точку O_1 , отстоящую от конца недеформированной пружины O на расстоянии $OO_1 = \lambda_s$ (см. рис. 2.2). Тогда

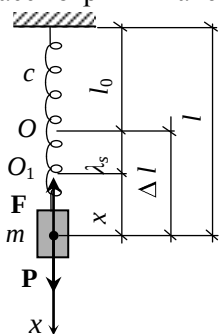


Рис. 2.2

удлинение пружины в этой системе координат равно $\Delta l = (x + \lambda_s)$. Составляя теперь уравнение Ньютона движения груза и проецируя его на ось x , получим $m\ddot{x} = -c(x + \lambda_s) + mg$, но поскольку $c\lambda_s = mg$, то в этой системе координат мы снова приходим к уравнению (2.2). Отсюда заключаем, что *постоянная сила $\mathbf{P}$, не изменяя характера колебаний, смещает их центр в сторону ее действия на величину статического удлинения $\lambda_s = P/c$.*

2.3. Свободные затухающие колебания (с учетом сопротивления среды). Пусть теперь на материальную точку действует еще сила сопротивления среды (воды, воздуха), пропорциональная скорости: $\mathbf{R} = -\mu \mathbf{v}$. В этом случае второй закон Ньютона в проекции на ось x с началом в положении статического равновесия пружины приводит к уравнению

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x}$$

или

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = 0, \quad (2.5)$$

где $b = \mu/2m$.

Здесь возможны три различных случая. В первом, когда сопротивление среды мало по сравнению с восстанавливающей силой, т.е. $b < k$, общее решение уравнения (2.5) имеет вид

$$x = e^{-bt}(C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t) \text{ или } x = Ae^{-bt} \sin(k_1 t + \alpha). \quad (2.6)$$

Постоянные интегрирования определяются из начальных условий $x(0) = x_0$ и $v(0) = v_0$

$$A = \sqrt{x_0^2 + (v_0 + bx_0)^2 / k_1^2}, \quad \operatorname{tg}(\alpha) = x_0 k_1 / (v_0 + bx_0). \quad (2.7)$$

Движение, таким образом, носит колебательный характер с частотой $k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}$ и периодом $T_1 = 2\pi / k_1$. Амплитуда колебаний $A_1 = Ae^{-bt}$ убывает со временем по экспоненциальному закону.

В двух других случаях, когда $b = k$ или $b > k$, решения можно записать соответственно так

$$x = e^{-bt}(C_1 + tC_2) \quad \text{и} \quad x = Ae^{-bt}(C_1 e^{k_2 t} + C_2 e^{-k_2 t}), \quad (2.6a)$$

где $k_2 = \sqrt{b^2 - k^2}$. Следовательно, в этих двух случаях колебательное движение вообще не возникает, а движение материальной точки быстро (почти экспоненциально) затухает.

2.4. Вынужденные колебания без учета сопротивления среды. Пусть теперь наряду с восстанавливающей силой $\mathbf{F}$ и силой тяжести $\mathbf{P}$ на точку действует еще и сила $\mathbf{Q}$, изменяющаяся по гармоническому закону: $Q = Q_0 \sin pt$, где Q_0 – ее амплитуда, а p – частота. Уравнение движения в системе координат с началом в положении статического равновесия тогда имеет вид

$$\ddot{x} + k^2 x = p_0 \sin pt, \quad (2.8)$$

где $k^2 = c/m$, $p_0 = Q_0/m$. Это неоднородное дифференциальное уравнение, и его решение можно записать в форме (см. приложение 1) $x = x_0 + x_n$, где x_0 – общее решение однородного уравнения (с нулевой правой частью), а x_n – частное решение неоднородного уравнения (2.8). Но $x_0 = A \sin(kt + \alpha)$ (см. п. 2.1), частное же решение имеет вид $x_n = [p_0/(k^2 - p^2)] \sin pt$. Поэтому движение точки описывается формулой

$$x = A \sin(kt + \alpha) + [p_0/(k^2 - p^2)] \sin pt. \quad (2.9)$$

Такое движение называют *вынужденными колебаниями*. Постоянные A и α снова определяются из начальных условий задачи. Таким образом, движение точки складывается из собственных колебаний с амплитудой A (зависящей от начальных условий) и частотой k и вынужденных колебаний с амплитудой $p_0/(k^2 - p^2)$ (не зависящей от начальных условий) и частотой p .

Решение (2.10) применимо лишь в случае, когда $p \neq k$. Если собственная частота совпадает с частотой возмущающей силы $p = k$, решение можно представить в форме

$$x = A \sin(kt + \alpha) + (p_0 t / 2k^2) \cos kt. \quad (2.10)$$

Амплитуда вынужденных колебаний, как мы видим, растет линейно со временем. Это явление называется *резонансом*.

2.5. Решение задач на колебательное движение точки. Общие рекомендации для решения обратной задачи динамики материальной точки были даны в п. 1.4. Конкретизируем их применительно к решению задач на колебательное движение точки.

1. Так как колебания прямолинейные, то достаточно ввести одну ось x . Направлять ее лучше в сторону удлинения пружины, а начало оси O взять в положении статического равновесия точки.

2. Силы удобнее изображать в момент времени, соответствующий растянутой пружине.

3. При составлении уравнения движения точки в проекции на ось x необходимо предварительно выразить удлинение пружины Δl , входящее в выражение для силы упругости F , через координату x точки. Для этого следует сделать рисунок, на котором изобразить ось x с началом в точке O , растянутую пружину длиной l и свободную пружину длиной l_0 , а затем уже связать Δl с x .

4. Сформулировать начальные условия, т.е. задать в выбранной системе координат начальное положение материальной точки и ее скорость.

5. Проинтегрировать уравнение движения и определить по сформулированным начальным условиям неизвестные константы.

3. Движение точки в неинерциальной системе отсчета

3.1. Основной закон динамики в неинерциальной системе отсчета. Второй закон Ньютона (1.1) формулируется относительно инерциальной системы отсчета. Если же точка движется относительно неинерциальной системы, то ее ускорение относительно этой системы $\mathbf{a}_r$, как показано в кинематике, связано с абсолютным ускорением относительно инерциальной $\mathbf{a}_a$ соотношением

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c,$$

где $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_e, \mathbf{a}_c$ – соответственно относительное, переносное и кориолисово ускорения. Поэтому второй закон Ньютона относительно этой системы координат задается уравнением

$$m\mathbf{a}_r = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_e - m\mathbf{a}_c.$$

Если ввести *переносную* $\mathbf{F}_e = -m\mathbf{a}_e$ и *кориолисову* $\mathbf{F}_c = -m\mathbf{a}_c$ *силы инерции*, то это уравнение можно переписать так

$$m\mathbf{a}_r = \mathbf{F} + \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_c. \quad (3.1)$$

Таким образом, *при рассмотрении движения точки в неинерциальной системе отсчета к действующим силам нужно добавить переносную и кориолисову силы инерции.*

Рекомендации к решению задач остаются теми же, что и для решения задач на применение второго закона Ньютона в инерциальной системе координат (см. п. 1.4), с той лишь разницей, что наряду с обычными силами следует еще изображать на чертеже и учитывать при составлении уравнения (3.1) переносную и кориолисову силы инерции. Для вычисления этих сил необходимо сначала определить переносное и кориолисово ускорения точки.

3.2. Покой в неинерциальной системе отсчета. Если точка покоится относительно неинерциальной системы отсчета, то $\mathbf{a}_r = \mathbf{v}_r = 0$ и, следовательно, сила инерции Кориолиса также равна нулю ($\mathbf{F}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r = 0$). В результате уравнение (3.1) сводится к следующему

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_e = 0. \quad (3.2)$$

Таким образом, если материальная точка находится в покое по отношению к неинерциальной системе отсчета, то сумма всех сил, приложенных к ней, и переносной силы инерции равна нулю.

4. Введение в динамику механической системы

4.1. Механическая система. До сих пор рассматривалось движение лишь материальной точки. Совокупность взаимодействующих материальных точек называют *механической системой* или *просто системой*. Твердые тела или системы тел, соединенные связями, также можно моделировать механической системой.

Для этого разобьем их на N частей (рис. 4.1). Считая далее N достаточно большим, а каждый k -й ($k = 1, \dots, N$) элемент разбиения достаточно малым, заменим его приближенно материальной точкой массы m_k , равной массе этого элемента.

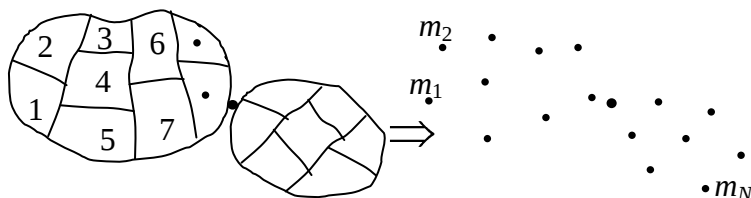


Рис. 4.1

4.2. Уравнения движения механической системы. Рассмотрим теперь движение механической системы в инерциальной системе координат $Oxuz$. Для каждой ее точки k справедлив второй закон Ньютона

$$m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = \mathbf{F}_k, \quad k=1, \dots, N, \quad (4.1)$$

где $\mathbf{r}_k$ – ее радиус-вектор, а под $\mathbf{F}_k$ понимается равнодействующая всех сил (активных и реакций связей), действующих на нее. В проекциях на оси координат уравнения (4.1) имеют вид

$$m_k \ddot{x}_k = F_{kx}, \quad m_k \ddot{y}_k = F_{ky}, \quad m_k \ddot{z}_k = F_{kz}. \quad (4.2)$$

Уравнения (4.2) представляют собой $3N$ дифференциальных уравнений движения механической системы. Общее решение зависит от $6N$ произвольных скалярных постоянных.

4.3. Внешние и внутренние силы. *Внешними* по отношению к данной механической системе называются силы взаимодействия точек этой системы с телами (или полями), не входящими в нее. *Внутренними* называются силы взаимодействия между точками (элементами) данной механической системы. В дальнейшем внешние силы будем обозначать индексом e , а внутренние – индексом i .

Следствием третьего закона Ньютона являются два свойства внутренних сил:

1. *Главный вектор внутренних сил системы равен нулю*

$$\sum_k \mathbf{F}_k^i = 0 \quad \text{или} \quad \sum_k F_{kx}^i = 0, \sum_k F_{ky}^i = 0, \sum_k F_{kz}^i = 0. \quad (4.3)$$

2. *Главный момент внутренних сил системы относительно любого центра O равен нулю*

$$\sum_k \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_k^i) = 0$$

или

$$\sum_k M_{Ox}(\mathbf{F}_k^i) = 0, \sum_k M_{Oy}(\mathbf{F}_k^i) = 0, \sum_k M_{Oz}(\mathbf{F}_k^i) = 0. \quad (4.4)$$

4.4. Масса системы, центр масс, момент инерции относительно оси. Если система состоит из N точек массами $m_1, m_2, \dots, m_N$, то полная ее масса M равна сумме масс ее точек (или тел)

$$M = \sum_k m_k.$$

Мера инертности механической системы, однако, уже не определяется лишь этой массой. Движение системы зависит еще и от распределения масс в пространстве. Поэтому наряду с массой системы вводят еще понятия *центра масс* и *моментов инерции относительно точки и (или) оси*.

Центром масс механической системы называется точка C , координаты которой определяются формулами

$$\mathbf{r}_c = M^{-1} \sum_k m_k \mathbf{r}_k \quad (4.5)$$

или в координатной форме

$$x_c = M^{-1} \sum_k m_k x_k, \quad y_c = M^{-1} \sum_k m_k y_k, \quad z_c = M^{-1} \sum_k m_k z_k. \quad (4.5a)$$

В поле силы тяжести точка C совпадает с центром тяжести системы.

Моментом инерции системы (тела) относительно данной оси z называется скалярная величина J_z , равная сумме произведений масс всех ее (его) точек на квадраты их расстояний h_k до этой оси

$$J_z = \sum_k m_k h_k^2. \quad (4.6)$$

Значения моментов инерции некоторых часто встречающихся тел приведены в приложении 2.

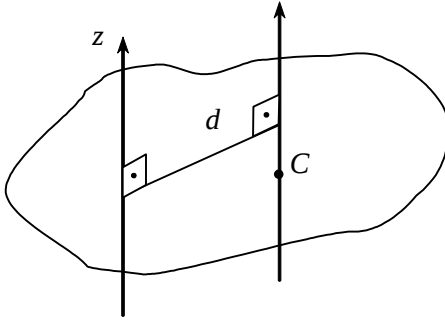


Рис. 4.2

Связь между моментами инерции тела относительно параллельных осей дает теорема Гюйгенса.

Теорема Гюйгенса.

Момент инерции тела относительно данной оси равен сумме момента инерции относительно оси, ей параллельной и проходящей через центр масс тела, и произведения его массы на квадрат расстояния между этими осями (рис. 4.2)

$$J_z = J_c + Md^2. \quad (4.7)$$

5. Общие теоремы динамики

В общем случае произвольных механических систем составление уравнений движения (4.1) или (4.2) и их решение сопряжено с двумя основными трудностями. Первая из них состоит в том, что, как правило, мы не знаем полностью сил $\mathbf{F}_k$. Например, обычно не известны силы реакций связей. Вторая же связана с решением системы большого числа дифференциальных уравнений, поскольку при моделировании твердого тела или конструкции число соответствующих материальных точек может быть очень большим. Однако часто нас не интересует движение каждой материальной точки системы. Вполне достаточно знать поведение некоторых величин, характеризующих движение механической системы в целом. В механике обычно используют для этой цели *центр масс системы, ее количество движения (импульс), момент количества движения (момент импульса) и кинетическую энергию*. Оказывается, для этих величин можно сформули-

ровать теоремы, определяющие их изменение во времени. Этому и посвящены последующие пункты данного раздела.

5.1. Теорема о движении центра масс. *Центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему*

$$M\mathbf{a}_c = \sum_k \mathbf{F}_k^e. \quad (5.1)$$

Из теоремы, в частности, следует, что при моделировании данного тела материальной точкой его движение определяется движением именно центра масс. При поступательном движении твердого тела скорости и ускорения всех его точек равны и поэтому теорема о движении центра масс полностью определяет его движение. В случае же произвольного движения твердого тела теорема определяет лишь поступательную часть его движения.

Практическая ценность теоремы состоит еще и в том, что она позволяет при определении движения центра масс любой механической системы исключить все наперед неизвестные внутренние силы.

5.1.1. Законы сохранения движения центра масс. Из теоремы о движении центра следуют законы сохранения:

1. *Если сумма внешних сил, действующих на механическую систему, равна нулю, то ее центр масс движется равномерно и прямолинейно.* В частности, если в начальный момент времени центр масс покоился, то он и останется в покое.

2. *Если сумма проекций на какую-нибудь ось всех действующих на систему внешних сил равна нулю, то проекция скорости центра масс на эту ось не меняется.* Так, например, если в начальный момент времени $\mathbf{v}_{cx}(0) = 0$, то и в любой момент времени $\mathbf{v}_{cx} = 0$ и центр масс системы вдоль этой оси не движется ($x_c = \text{const}$).

5.2. Теорема об изменении импульса системы. *Количеством движения (импульсом) точки* называется вектор $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, равный произведению ее массы на скорость. Импульс – величина

аддитивная, и поэтому *импульс (количество движения) механической системы* равен

$$\mathbf{P} = \sum_k \mathbf{p}_k = \sum_k m_k \mathbf{v}_k. \quad (5.2)$$

Легко убедиться (см. определение центра масс (4.5)), что

$$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_c, \quad (5.3)$$

т.е. *количество движения системы равно произведению массы всей системы на скорость ее центра масс.*

Импульс $\mathbf{S}$ силы $\mathbf{F}$ за промежуток времени $(t_2 - t_1)$ определяется соотношением

$$\mathbf{S} = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathbf{F}(t). \quad (5.4)$$

В частном случае, когда $\mathbf{F} = \mathbf{const}$, импульс силы равен $\mathbf{S} = \mathbf{F}(t_2 - t_1)$. В общем случае модуль и направление импульса силы могут быть вычислены по его проекциям

$$S_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x(t) dt, \quad S_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y(t) dt, \quad S_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z(t) dt. \quad (5.6)$$

Если к точке приложено несколько сил $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$, то импульс их равнодействующей, очевидно, равен сумме импульсов составляющих ее сил $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \dots + \mathbf{S}_n$, соответственно $S_x = S_{1x} + \dots + S_{nx}$, $S_y = S_{1y} + \dots + S_{ny}$, $S_z = S_{1z} + \dots + S_{nz}$.

5.2.1. Теорема об изменении количества движения (импульса) системы. *Производная по времени от количества движения механической системы равна главному вектору действующих на нее внешних сил*

$$d\mathbf{P} / dt = \sum_k \mathbf{F}_k^e. \quad (5.6)$$

В дифференциальной форме эта теорема фактически совпадает с теоремой о движении центра масс. В интегральной же форме она формулируется так: *изменение количества движения механической системы за конечный промежуток времени равно сумме*

импульсов действующих на нее внешних сил за тот же промежуток времени

$$\mathbf{P}(t_2) - \mathbf{P}(t_1) = \sum_k \int_{t_1}^{t_2} dt \mathbf{F}_k^e(t) = \sum_k \mathbf{S}_k^e \quad (5.7)$$

или в проекциях на координатные оси

$$P_{2x} - P_{1x} = \sum_k \int_{t_1}^{t_2} dt F_{kx}^e(t), \quad P_{2y} - P_{1y} = \sum_k \int_{t_1}^{t_2} dt F_{ky}^e(t),$$

$$P_{2z} - P_{1z} = \sum_k \int_{t_1}^{t_2} dt F_{kz}^e(t). \quad (5.8)$$

5.2.2. Законы сохранения количества движения (импульса) системы. Следствием закона изменения импульса являются соответствующие законы сохранения.

1. Если сумма внешних сил, действующих на механическую систему, равна нулю $\sum_k \mathbf{F}_k^e = 0$, то вектор количества движения сохраняется: $\mathbf{P}(t) = \text{const}$.

2. Если за некоторый промежуток времени от t_1 до t_2 сумма импульсов внешних сил, действующих на систему, равна нулю

$$\sum_k \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_k^e(t) dt = 0,$$

то за этот промежуток времени не меняется и количество движения $\mathbf{P}(t_2) = \mathbf{P}(t_1)$.

3. Если сумма проекций на данную ось α всех действующих на систему внешних сил равна нулю $\sum_k F_{k\alpha}^e = 0$, то проекция количества движения на эту же ось сохраняется: $P_\alpha(t) = \text{const}$.

4. Если равна нулю проекция суммы импульсов внешних сил на ось α за промежуток времени от t_1 до t_2

$$\sum_k \int_{t_1}^{t_2} dt F_{k\alpha}^e(t) = 0,$$

то за этот промежуток времени сохраняется и проекция количества движения системы на эту ось $P_{2\alpha} = P_{1\alpha}$.

5.2.3. Рекомендации к решению задач на применение теорем о движении центра масс и об изменении количества движения. При решении конкретных задач на определение движения системы полезно придерживаться следующих рекомендаций.

1. *Выбрать механическую систему*, к которой и будет применяться одна из теорем. Так как в обеих теоремах участвуют только внешние силы, то удобно выбрать ее так, чтобы наперед неизвестные силы сделать внутренними (это, однако, не всегда возможно). Следует также помнить, что если система состоит из нескольких тел, то они действуют друг на друга силами, равными по величине и противоположно направленными.

2. *Изобразить все внешние силы*, действующие на выбранную систему.

3. *Выбрать оси координат и записать соответствующую теорему в проекциях на эти оси.* Какой из теорем при этом удобнее пользоваться, зависит от решаемой задачи. Обычно, если требуется определить скорости движения отдельных частей системы, применяют теорему об изменении количества движения. Если же требуется определить перемещение отдельных частей, то применяют теорему о движении центра масс.

4. *Проинтегрировать полученную систему уравнений.* Постоянные интегрирования определяются при этом из дополнительных (начальных) условий задачи. Далее находят-ся искомые величины.

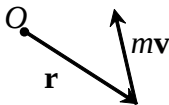


Рис. 5.1

5.3. Теорема об изменении момента количества движения. Момент количества движения (импульса) материальной точки относительно точки O определяется равенством:

$$\mathbf{k}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad (\text{рис. 5.1}).$$

Моменты количества движения (импульса) точки относительно осей определяются соотношениями

$$k_x = m(yv_z - zv_z), k_y = m(yv_x - zv_x), k_z = m(yv_y - zv_y). \quad (5.9)$$

Моментом количества движения (импульса) механической системы относительно точки O называется сумма моментов количеств движения всех ее точек

$$\mathbf{K}_O = \sum_k \mathbf{k}_{kO} = \sum_k \mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{v}_k. \quad (5.10)$$

Аналогично определяются и моменты количества движения системы относительно координатных осей

$$K_x = \sum_k m_k (y_k v_{kz} - z_k v_{ky}), \quad K_y = \sum_k m_k (z_k v_{kx} - x_k v_{kz}), \\ K_z = \sum_k m_k (x_k v_{ky} - y_k v_{kx}), \quad (5.11)$$

где x_k, y_k, z_k – координаты k -й точки ($k = 1, \dots, N$).

Для твердого тела, вращающегося вокруг оси z с угловой скоростью ω , момент количества движения относительно этой оси равен $K_z = J_z \omega$.

Если твердое тело движется поступательно, то его момент количества движения относительно точки O равен $\mathbf{K}_O = \mathbf{r}_c \times M\mathbf{v}$, где $\mathbf{r}_c$ – радиус-вектор центра масс тела относительно точки O .

Моменты количеств движения системы относительно разных точек A и B связаны соотношением

$$\mathbf{K}_B = \mathbf{K}_A + \mathbf{BA} \times (M\mathbf{v}_c), \quad (5.12)$$

где M – масса системы, а $\mathbf{v}_c$ – скорость ее центра масс.

5.3.1. Теорема об изменении момента количества движения (теорема моментов). *Производная по времени от момента количества движения механической системы относительно неподвижной точки O равна сумме моментов всех действующих на эту систему внешних сил относительно той же точки*

$$d\mathbf{K}_O / dt = \sum_{k=1}^N \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_k^e). \quad (5.13)$$

Проектируя обе части уравнения (5.13) на оси инерциальной системы координат $Oxyz$, получим

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum_{k=1}^N M_x(\mathbf{F}_k^e), \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum_{k=1}^N M_y(\mathbf{F}_k^e), \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^N M_z(\mathbf{F}_k^e). \quad (5.14)$$

Эта теорема остается справедливой и в подвижной системе координат с началом в центре масс системы C , оси которой параллельны осям неподвижной системы, если только она сформулирована относительно точки C

$$d\mathbf{K}_C / dt = \sum_{k=1}^N \mathbf{M}_C(\mathbf{F}_k^e). \quad (5.15)$$

Теорема моментов, как и теоремы о движении центра масс и об изменении количества движения, позволяет исключить из рассмотрения все наперед неизвестные внутренние силы.

5.3.2. Законы сохранения момента количества движения. Рассмотрим частные случаи, когда момент количества движения сохраняется.

1. Если сумма моментов относительно точки O всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю $\sum_k \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_k^e) = 0$, то момент количества движения относительно этой же точки сохраняется $\mathbf{K}_O = \text{const}$.

2. Если сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему относительно некоторой оси α , равна нулю $\sum_k M_\alpha(\mathbf{F}_k^e) = 0$, то момент количества движения относительно этой оси сохраняется $K_\alpha = \text{const}$.

Из этих законов следует, что *внутренние силы изменить момент количества движения не могут*.

5.3.3. Уравнение вращательного движения твердого тела. Уравнение вращательного движения твердого тела следует из теоремы (5.15) моментов относительно оси вращения z

$$J_z \ddot{\varphi} = \sum_k M_z(\mathbf{F}_k^e). \quad (5.16)$$

Уравнение (5.16) позволяет полностью определить закон вращательного движения твердого тела при заданных начальных данных $\varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = \omega_0$.

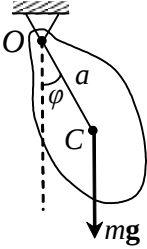


Рис. 5.2

5.3.4. Физический маятник. Физическим маятником называется твердое тело, совершающее колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси под действием силы тяжести. Пусть m – его масса, $OC = a$ – расстояние от центра тяжести C до оси вращения O , J_O – момент инерции маятника относительно оси вращения, φ – угол отклонения линии OC от вертикали (рис. 5.2). Будем считать φ малым, т.е. ограничимся малыми колебаниями физического маятника.

Дифференциальное уравнение таких колебаний получается из уравнения (5.16) и имеет вид

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0, \quad k^2 = mga / J_O, \quad (5.17)$$

а его решение, удовлетворяющее начальным условиям $\varphi(0) = \varphi_0, \omega(0) = \omega_0$, записывается так

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

где $C_1 = \varphi_0, C_2 = \omega_0 / k$. Следовательно, малые колебания физического маятника являются гармоническими, а их период определяется формулой $T = 2\pi / k = 2\pi \sqrt{J_O / mga}$ и не зависит от начальных условий. Величина $l = J_O / am$ называется *приведенной длиной* физического маятника (она равна длине нити маятника с точечным грузом массы m , имеющим тот же период колебаний).

5.3.5. Решение задач с использованием теоремы моментов.

Так как момент количества движения ответствен за вращательную часть движения системы, то теорема моментов обычно применяется в случаях, когда механическая система совершает вращательное движение вокруг неподвижной точки или оси. Нередко ее применяют совместно с теоремой о движении центра масс. При

этом поступательная часть движения определяется теоремой о движении центра масс, а вращательная часть движения относительно центра масс – теоремой моментов. Что же касается рекомендаций, касающихся последовательности решения задач, то они дословно те же, что и при решении задач на применение теорем о движении центра масс или об изменении количества движения.

5.4. Теорема об изменении кинетической энергии системы. *Кинетическая энергия механической системы* равна сумме кинетических энергий всех ее точек

$$T = \sum_k m_k v_k^2 / 2. \quad (5.18)$$

Если механическая система состоит из нескольких тел, то ее кинетическая энергия будет равна сумме кинетических энергий каждого из тел. В случае поступательного движения твердого тела $T = Mv^2/2$, где M – масса тела. Для вращательного движения $T = J_z \omega^2/2$, где J_z – момент инерции тела относительно оси вращения z , а ω – угловая скорость вращения.

Для произвольного движения твердого тела кинетическая энергия складывается из кинетической энергии его поступательного движения вместе с центром масс и кинетической энергии его вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс (теорема Кенига),

$$T = Mv_c^2/2 + J_c \omega^2/2.$$

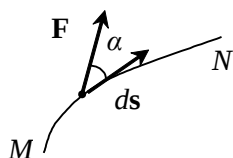


Рис. 5.3

5.4.1. Работа силы. Величина $\delta A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F ds \cos \alpha$ называется *элементарной работой* силы $\mathbf{F}$ на перемещения $d\mathbf{s}$ (рис. 5.3). *Работа силы* на конечном

перемещении равна интегралу от элементарной работы, взятому вдоль этого перемещения

$$A_{MN} = \int_{MN} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{MN} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \stackrel{\sim}{=} \int_{MN} F \cos \alpha ds, \quad (5.19)$$

где интегрирование ведется вдоль траектории материальной точки. Единицей измерения работы является 1 джоуль = 1 Н·м. Если

сила $\mathbf{F}$ задана как функция времени, то для расчета работы из (5.19) можно получить следующее выражение

$$A_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{v}(t) dt . \quad (5.19a)$$

Соотношение (5.19) существенно упрощается, если сила $\mathbf{F}$ является потенциальной, т.е.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -dU/d\mathbf{r} ,$$

где U – некоторая скалярная функция, называемая потенциалом. В этом случае удастся от криволинейного интеграла перейти к обычному определенному. Действительно,

$$A_{12} = \int_{MN} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{MN} \frac{dU(\mathbf{r})}{d\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_1}^{r_2} dU = U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1) . \quad (5.20)$$

Поэтому, например, работа силы тяжести механической системы равна ее весу Mg , умноженному на вертикальное перемещение h_c ее центра тяжести, $A_{12} = Mgh_c$ (положительная, если ее центр тяжести опускается, и отрицательная – если поднимается).

Сила упругости пружины также потенциальна, поэтому работа силы упругости $F = -c\Delta l$, где Δl – удлинение пружины, равна половине произведения коэффициента ее жесткости на разность квадратов начального и конечного удлинений пружины $A_{12} = 0.5c(\Delta l_1^2 - \Delta l_2^2)$.

При естественном способе задания движения работа силы на конечном перемещении точки из положения S_1 в положение S_2 определяется так

$$A_{12} = - \int_{S_1}^{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} . \quad (5.19b)$$

Поэтому работа силы трения $\mathbf{F}_f$ скольжения равна

$$A_{12} = - \int_{S_1}^{S_2} F_f(s) ds = - f \int_{S_1}^{S_2} N(s) ds .$$

Если при этом нормальная реакция $\mathbf{N}$ по величине постоянна (например, при движении тела по горизонтальной поверхности в поле тяжести $N = Mg$), то $A_{12} = -f N(s_2 - s_1)$.

Если тело является твердым, то работа всех внутренних сил равна нулю. Также равна нулю работа внутренних сил нерастяжимой нити.

При поступательном движении твердого тела сумма элементарных работ всех действующих на него внешних сил равна элементарной работе главного вектора этих сил

$$\delta A = \mathbf{R}^e \cdot d\mathbf{s}, \quad \mathbf{R}^e = \sum_k \mathbf{F}_k^e.$$

Элементарная работа внешних сил при вращательном движении твердого тела вокруг оси z равна произведению главного момента внешних сил относительно этой оси на элементарное приращение угла поворота $\delta A = M_z^e d\varphi$. Если угол поворота твердого тела меняется от φ_1 до φ_2 , то работа на конечном перемещении (повороте) будет равна

$$A_{12} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z^e(\varphi) d\varphi.$$

Для плоского движения твердого тела элементарная работа внешних сил равна сумме элементарных работ их главного вектора на перемещении точки его приложения – полюса O и главного момента этих сил относительно этого полюса O на приращении угла поворота $\delta A = \mathbf{R}^e \cdot d\mathbf{s} + M_O^e d\varphi$.

Если система сил имеет равнодействующую, то *работа равнодействующей равна сумме работ составляющей ее сил*.

5.4.2. Теорема об изменении кинетической энергии. В дифференциальной форме указанная теорема записывается в виде

$$dT = \delta A^e + \delta A^i. \quad (5.21)$$

Интегрируя это выражение по времени в пределах от t_1 до t_2 , получим теорему в интегральной форме

$$T_2 - T_1 = A_{12}^e + A_{12}^i. \quad (5.22)$$

Изменение кинетической энергии системы равно сумме работ всех действующих на нее внешних и внутренних сил.

Отметим два обстоятельства, которые отличают теорему об изменении кинетической энергии от других теорем.

1. Уравнение (5.22) скалярное и, следовательно, позволяет получить для определения неизвестных лишь одно уравнение.

2. В уравнение (5.22) входят как внешние, так и внутренние силы, т.е. *под действием внутренних сил кинетическая энергия может изменяться.*

Определение работы сил является основной сложностью при решении задач на применение теоремы об изменении кинетической энергии. Однако в некоторых случаях она равна нулю. В частности, равна нулю работа:

- внутренних сил абсолютно твердого тела и нерастяжимой нити;
- реакций идеальных связей (связей без трения). Идеальными связями являются, например, гладкая поверхность, гладкая опора, идеальный шарнир;
- силы, приложенной к неподвижным или мгновенно неподвижным точкам.

5.4.3. Решение задач с помощью теоремы об изменении кинетической энергии. Для систем, состоящих из нескольких тел, каждое из которых может совершать свой тип движения (например, отдельные части совершают поступательное движение, в то время как другие вращаются или совершают сложное движение), фактически единственный путь решения задачи – использование теоремы об изменении кинетической энергии. Так как основная трудность состоит в расчете работ внутренних сил, то теорема с успехом может быть применена, если система состоит из абсолютно твердых тел, соединенных идеальными связями (без трения), либо когда передача движения от одной части системы к другой происходит посредством нерастяжимых нитей. Эту теорему удобно также использовать, если в задаче необходимо определить путь, пройденный системой или ее элементами.

С помощью данной теоремы обычно находят скорости отдельных точек (или тел) системы либо работу одной из сил, приложенных к системе.

Теорему можно также применять и для определения ускорений отдельных точек либо угловых ускорений тел. В этом случае можно исходить из теоремы, записанной в интегральной форме (5.22), взяв в качестве t_2 текущий момент времени t и определив скорости точек $\mathbf{v}(t)$ или угловые скорости тел $\boldsymbol{\omega}(t)$, затем дифференцировать их по времени. Либо с самого начала применить теорему в дифференциальной форме (5.21), составить ДУ движения системы, из которых уже определить ускорения.

Что же касается последовательности решения задач с использованием этой теоремы, то она остается такой же, как и при применении других теорем динамики, и мы ее изложили в п. 5.2.3.

Необходимо иметь в виду, что теорема дает лишь одно уравнение. Поэтому, если это возможно, решение задачи нужно свести к нахождению одной неизвестной величины. Если же этого сделать не удастся, то наряду с теоремой об изменении кинетической энергии следует использовать другие теоремы динамики. В этом случае нужно исходить из того, чтобы в конечном счете число составленных уравнений движения и число неизвестных задачи совпало.

6. Принцип Даламбера

6.1. Принцип Даламбера для точки. Рассмотрим материальную точку, на которую действует внешняя сила $\mathbf{F}$ и наложена связь с реакцией $\mathbf{R}$. Ее динамика описывается уравнением Ньютона

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{R}. \quad (6.1)$$

Вводя в рассмотрение силу инерции $\mathbf{F}^{in} = -m\mathbf{a}$, запишем (6.1) в виде уравнения

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} + \mathbf{F}^{in} = 0, \quad (6.2)$$

выражающего *принцип Даламбера для точки: если в каждый момент времени к действующим на точку активным силам и силам реакции связей добавить силу инерции, то получится уравновешенная система сил*. В проекциях на оси x, y, z принцип Даламбера запишется в виде

$$F_x + R_x + F_x^{in} = 0, F_y + R_y + F_y^{in} = 0, F_z + R_z + F_z^{in} = 0. \quad (6.3)$$

С помощью принципа Даламбера задача динамики точки сводится к решению уравнений статики (6.3).

6.2. Принцип Даламбера для механической системы. Рассмотрим теперь систему, состоящую из N материальных точек. Для каждой из N материальных точек системы имеем

$$\mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k + \mathbf{F}_k^{in} = 0, \quad (6.4)$$

где $\mathbf{F}_k, \mathbf{R}_k$ – соответственно равнодействующие активных сил и реакций связей, действующих на k -ю точку, а $\mathbf{F}_k^{in} = -m\mathbf{a}_k$ – ее сила инерции. Складывая теперь соотношения (6.4), получим

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} + \mathbf{F}^{in} = 0, \quad (6.5)$$

где

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k, \mathbf{R} = \sum_{k=1}^N \mathbf{R}_k, \mathbf{F}^{in} = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^{in}$$

– соответственно главные векторы активных сил, реакций связи и сил инерции. В проекциях на оси координат уравнение (6.5) дает

$$F_x + R_x + F_x^{in} = 0, F_y + R_y + F_y^{in} = 0, F_z + R_z + F_z^{in} = 0. \quad (6.6)$$

Умножая теперь слева векторно каждое из уравнений (6.4) на радиус-вектор $\mathbf{r}_k$ k -й точки и суммируя полученные уравнения, приходим к следующему уравнению моментов

$$\mathbf{M}_O^F + \mathbf{M}_O^R + \mathbf{M}_O^{in} = 0, \quad (6.7)$$

в котором $\mathbf{M}_O^F, \mathbf{M}_O^R, \mathbf{M}_O^{in}$ – соответственно главные моменты активных сил, сил реакций связей и сил инерции относительно точки O . Векторное уравнение (6.7) эквивалентно трем скалярным

$$M_x^F + M_x^R + M_x^{in} = 0, M_y^F + M_y^R + M_y^{in} = 0, \\ M_z^F + M_z^R + M_z^{in} = 0. \quad (6.8)$$

Векторные уравнения (6.5), (6.7) и соответствующие им шесть скалярных уравнений (6.6), (6.8) являются математической формулировкой принципа Даламбера для механической системы:

если в каждый момент времени к действующим на каждую точку системы активным силам и силам реакции связей добавить силы инерции, то получится уравновешенная система сил.

Принцип Даламбера позволяет задачу динамики механической системы свести к решению уравнений статики (6.6), (6.8).

При вычислении главных векторов и главных моментов относительно центра O активных сил и сил реакций связей следует учитывать только внешние силы, поскольку главные векторы и главные моменты всех внутренних сил равны нулю.

6.3. Вычисление главного вектора и главного момента сил инерции. Для вычисления главного вектора сил инерции будем исходить из уравнений (5.1), (6.5). Сравнивая их и учитывая, что главный вектор внутренних сил равен нулю, получаем

$$\mathbf{F}^{in} = -\mathbf{M}\mathbf{a}_c. \quad (6.9)$$

Аналогично, сравнивая теперь уравнение (6.7) с (5.14), получаем

$$\mathbf{M}_O^{in} = -d\mathbf{K}_O / dt$$

или

$$M_x^{in} = -dK_x / dt, M_y^{in} = -dK_y / dt, M_z^{in} = -dK_z / dt. \quad (6.10)$$

Для поступательного движения твердого тела силы инерции сводятся к равнодействующей $\mathbf{F}^{in} = -\mathbf{M}\mathbf{a}$, проходящей через его центр масс. Для твердого тела, вращающегося вокруг оси z и симметричного относительно плоскости Oxy , систему сил инерции удобно привести к центру, расположенному в начале координат O . Тогда главный вектор сил инерции равен $\mathbf{F}^{in} = -\mathbf{M}\mathbf{a}_c$ и приложен в центре O , а главный момент перпендикулярен плоскости Oxy и равен $M_z^{in} = -J_z \varepsilon$. Если же центр масс тела лежит на оси вращения, то в этом случае $\mathbf{F}^{in} = 0$.

При плоском движении главный вектор и главный момент сил инерции особенно просто вычисляются, если движение происходит параллельно плоскости симметрии тела. В этом случае система сил инерции приводится к лежащим в этой плоскости

главному вектору $\mathbf{F}^{in} = -M\mathbf{a}_c$, приложенному в центре масс, и паре сил с моментом $M_z^{in} = -J_z \varepsilon$.

6.4. Решение задач с помощью принципа Даламбера. Принципом Даламбера удобно пользоваться для нахождения реакций связей, когда движение системы известно или может быть определено из уравнений, не содержащих эти реакции (например, с помощью теоремы об изменении кинетической энергии). При этом исключаются все наперед неизвестные внутренние силы.

В случаях, когда нужно определить реакции внутренних связей, систему следует расчленить на такие части, по отношению к которым искомые силы будут уже внешними.

7. Принцип возможных перемещений

7.1. Введение в аналитическую механику. До сих пор при изучении равновесия или движения механической системы мы пользовались принципом освобождаемости от связей. Действие связей учитывалось введением сил реакций этих связей.

Теперь же мы познакомимся еще с одним подходом. Суть его состоит в том, что действие связей учитывается не путем введения сил реакций связей, а путем рассмотрения лишь тех перемещений точек механической системы, которые допускаются этими связями. Такой подход называется *аналитическим*, а соответствующий раздел механики – *аналитической механикой*.

7.2. Возможные (виртуальные) перемещения. *Возможными перемещениями механической системы называются бесконечно малые ее перемещения, допускаемые в данный момент наложенными связями.* В соответствии с этим определением, чтобы построить возможное перемещение системы, необходимо мысленно остановить время t , затем уже проанализировать, какие перемещения допускаются наложенными на нее связями.

Пример. Связь (шарнир), наложенная на кривошип ОА механизма, показанного на рис. 7.1, позволяет ему лишь вращаться относительно точки О. Поэтому его возможным перемещением и является поворот на бесконечно малый угол $\delta\varphi$ вокруг точки О.

При этом возможное перемещение $\delta \mathbf{s}_A$ точки A направлено перпендикулярно кривошпицу (см. рис. 7.1). В силу того, что направляющие ползуна позволяют точке B шатуна AB двигаться лишь вдоль прямой OB , соответствующее возможное перемещение $\delta \mathbf{s}_B$ точки B будет направлено также вдоль OB . Возможным перемещением самого шатуна является, следовательно, бесконечно малый поворот $\delta \psi$ относительно его мгновенного центра скоростей C (см. рис. 7.1).

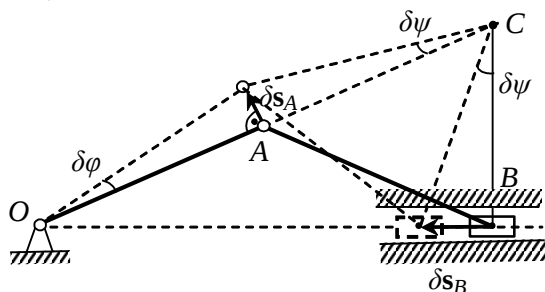


Рис. 7.1

Следует иметь в виду, что реально происходящие перемещения точек системы $d\mathbf{s}_k$, которые называются действительными, обусловлены действием приложенных к системе сил. Действительное перемещение является одним из возможных, правда, если связи не изменяются со временем. Такие связи называются стационарными. В дальнейшем только стационарные связи и будут рассматриваться.

В общем случае связь может накладывать ограничения на перемещения и на скорости точек системы. Связи, не накладывающие ограничения на скорости, называются голономными. Кроме того, связи подразделяются на удерживающие и неудерживающие. Первые задаются некоторыми уравнениями, тогда как вторые – неравенствами. Физически это можно объяснить на таком примере. Если связь представляет собой некоторую поверхность, то для удерживающей связи точки системы всегда находятся на этой поверхности (поверхность "удерживает" их).

Связь называется *идеальной*, если работа реакции этой связи $\mathbf{R}$ на любом возможном перемещении системы $\delta\mathbf{s}$ равна нулю $\delta A = \mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{s} = 0$. Идеальными являются, в частности, следующие связи.

1. *Гладкая удерживающая поверхность*. Реакция связи $\mathbf{N}$ гладкой поверхности направлена по нормали к ней, а любое возможное перемещение $\delta\mathbf{s}$ для удерживающей поверхности направлено по касательной к ней. Следовательно, $\delta A = \mathbf{N} \cdot d\mathbf{s} = 0$.

2. *Цилиндрический шарнир без трения*. Возможным перемещением тела, закрепленного с помощью цилиндрического шарнира, является его поворот $\delta\varphi$ вокруг оси z . При повороте элементарная работа равна $\delta A = M_z \delta\varphi$ (см. п. 5.4.2). Но при отсутствии трения $M_z = 0$, поэтому $\delta A = 0$.

3. *Качение (без проскальзывания) тела по шероховатой поверхности*. Реакция шероховатой поверхности имеет две составляющие $\mathbf{N}$ и $\mathbf{F}_{тр}$, но обе они приложены к точке касания тела с поверхностью, которая является мгновенным центром скоростей, и для нее $\delta\mathbf{s} = 0$, а значит, и $\delta A = 0$.

7.3. Число степеней свободы. Для систем с голономными связями *числом степеней свободы* называется число независимых параметров, полностью определяющих движение системы. Так, материальная точка в пространстве имеет три степени свободы, твердое тело – шесть, стержень на плоскости – три. В данном случае число ее степеней свободы совпадает с числом независимых возможных перемещений системы. Так, у кривошипно-шатунного механизма, представленного на рис. 7.1, одна степень свободы: у него одно независимое возможное перемещение (например, бесконечно малый поворот $\delta\varphi$ кривошипа OA) и один независимый параметр, определяющий его положение (например, угол поворота кривошипа φ).

7.4. Принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа). Если на систему действуют активные силы $\mathbf{F}_i$, $i = 1, \dots, N$, а наложенные на нее связи являются стационарными, удерживающими, голономными и идеальными, то имеет место

принцип возможных перемещений, согласно которому для равновесия механической системы необходимо и достаточно, чтобы сумма работ всех активных сил на любом возможном перемещении равнялась нулю

$$\delta A = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i = 0. \quad (7.1)$$

Принцип возможных перемещений устанавливает общее условие равновесия механической системы, позволяющее исключить из рассмотрения все наперед неизвестные реакции связей и не требующее рассмотрения равновесия отдельных частей (тел) системы.

Вместе с тем этот принцип можно использовать и для определения реакций связей. В этом случае принцип возможных перемещений применяется следующим образом. Сначала следует отбросить ту связь, реакцию которой требуется определить. Теперь к этой новой системе можно применить принцип возможных перемещений, т.е. сообщить ей возможное перемещение, соответствующее имеющейся степени свободы, составить уравнение работ (7.1), в которое войдут как заданные активные силы, так и реакция отброшенной связи и, наконец, найти из этого уравнения требуемую реакцию. Именно таким методом часто определяют реакции связей различных конструкций в статике.

7.5. Рекомендации к решению задач на применение принципа возможных перемещений. Прежде чем применять данный принцип, необходимо проверить, все ли связи, действующие на рассматриваемую механическую систему стационарные, голономные, удерживающие и идеальные. Далее необходимо определить число степеней свободы, т.е. число независимых параметров, полностью определяющих положение механической системы. Для наиболее простого случая системы с одной степенью свободы решение задачи целесообразно проводить в следующей последовательности.

1. *Изобразить все действующие на систему активные силы.*

2. *Сообщить системе возможное перемещение.* При этом на чертеже следует изобразить возможные перемещения $\delta \mathbf{s}_i$ точек и

возможные повороты $\delta\varphi_i$ тел, к которым приложены активные силы $\mathbf{F}_i$.

3. Составить уравнения работ

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i = \sum_i F_i ds_i \cos \alpha_i = 0,$$

где α_i – угол между векторами $\mathbf{F}_i$ и $d\mathbf{s}_i$. Для упрощения уравнения работ следует иметь в виду, что силу можно переносить вдоль линии ее действия и что работу силы $\mathbf{F}$ на перемещении $d\mathbf{s}$ при повороте тела вокруг некоторой точки A можно вычислять как работу момента этой силы на угле поворота $\delta\varphi$ вокруг этой же точки A : $\mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{s}_k = M_A \delta\varphi$.

4. Выразить все $d\mathbf{s}_k$ и $\delta\varphi_k$, входящие в уравнение работ, через какое-нибудь одно и найти искомую величину. При нахождении зависимостей между $d\mathbf{s}_k$ и $\delta\varphi_k$ можно использовать как геометрические соотношения, так и кинематические, считая, что эти зависимости такие же, как и между скоростями $\mathbf{v}_k$ и угловыми скоростями ω_k для соответствующих точек и тел.

Для систем с несколькими степенями свободы задачу можно решать, составляя уравнение работ для каждого из независимых перемещений системы и преобразуя его описанным путем. В результате для системы получится столько уравнений равновесия, сколько она имеет степеней свободы.

В случае, когда на систему наложена неидеальная связь, при решении задачи ее реакцию следует условно перевести в разряд активных сил и дальше действовать с ней как с активной силой.

8. Задание 1. Динамика прямолинейного движения материальной точки

Задание состоит из трех задач. В первой сила, действующая на точку, является функцией времени, во второй – координаты, в третьей – скорости.

Вариант 1

Задача 1. Дрезина массы $m = 500 \text{ кг}$ движется по горизонтальному прямолинейному участку дороги со скоростью $v_0 = 90 \text{ км/ч}$. В некоторый момент времени двигатель выключают. Считая, что сила сопротивления движению определяется формулой $R = 20t^3 \text{ (Н)}$, определить время и путь, пройденный дрезиной от момента выключения двигателя до остановки.

Задача 2. Материальная точка массы $m = 10 \text{ кг}$ совершает прямолинейное движение под действием силы, изменяющейся по закону $F = 1000x \text{ (Н)}$. В начальный момент точка имела скорость $v_0 = 10 \text{ м/с}$ и координату $x_0 = 1 \text{ м}$. Найти уравнение движения точки и момент времени, когда скорость точки увеличится в 3 раза, а также путь, который она пройдет за это время.

Задача 3. Свободная материальная точка массы $m = 5 \text{ кг}$, имеющая начальную скорость $v_0 = 40 \text{ м/с}$, движется прямолинейно. На точку действует сила сопротивления, по величине равная $F = 50 (v)^{1/3} \text{ (Н)}$. Определить время, прошедшее от начала движения точки до остановки, и путь, пройденный точкой.

Вариант 2

Задача 1. На точку веса 50 Н , движущуюся из состояния покоя по горизонтальной прямой Ox , действует в направлении этой оси сила $F(t) = 5t^2 \text{ (Н)}$. Кроме того, на нее действует сила трения. При движении эта сила равна 0.5 Н . Определить момент времени, когда началось движение точки, и найти уравнение ее движения. Считать, что коэффициенты трения покоя и скольжения равны.

Задача 2. Материальная точка массы $m = 1 \text{ кг}$ совершает движение вдоль оси Ox под действием силы $F = 100(x - 2) \text{ (Н)}$. В начальный момент точка имела скорость $v_0 = 5 \text{ м/с}$ и координату $x_0 = 2.5 \text{ м}$. Найти уравнение движения точки и ее скорость в момент времени $t = 3 \text{ с}$.

Задача 3. Сила тяги винтов вертолета массы $m = 5000 \text{ кг}$ при вертикальном подъеме в 1.5 раза больше его веса. Сопротивление воздуха $R = 300v \text{ (Н)}$, где v – скорость подъема вертолета. Считая начальную скорость вертолета $v_0 = 0$, найти закон его движения и предельно достижимую скорость подъема.

Вариант 3

Задача 1. Коэффициент трения лыж о снег при движении лыжника по склону горы вниз $f = 0.1$, угол склона 45° , а его длина 100 м . Определить время спуска и скорость лыжника в конце склона, если в начале она была равна нулю. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Задача 2. Материальная точка массы $m = 1 \text{ кг}$ совершает прямолинейное движение под действием силы сопротивления $F = -100e^{-2x} \text{ (Н)}$. В начальный момент точка имела скорость $v_0 = 10 \text{ м/с}$ и координату $x_0 = 0$. Найти уравнение движения точки, момент времени, когда скорость точки уменьшится в 5 раз, а также путь, который она пройдет за это время.

Задача 3. Самолет массы $m = 15000 \text{ кг}$ в момент приземления имел скорость $v_0 = 50 \text{ м/с}$. Определить, какое расстояние он пройдет и какую будет иметь скорость через 10 с при выключенных моторах, если суммарное сопротивление движению $R = 20v^2 \text{ (Н)}$.

Вариант 4

Задача 1. Автомобиль веса 9.81 кН движется по горизонтальной прямолинейной дороге. В начальный момент его скорость равна 72 км/ч . Затем сила тяги двигателя непрерывно увеличивается пропорционально времени: $F = 180t \text{ (Н)}$. Найти скорость автомобиля через 10 с и расстояние, которое он пройдет за это время, если на него действует еще и постоянная сила трения с коэффициентом трения $f = 0.1$.

Задача 2. Материальная точка массы $m = 5 \text{ кг}$ движется вдоль оси x под действием силы $F = 10(x + 2)^3 \text{ (Н)}$. В начальный момент она имела скорость $v_0 = 4 \text{ м/с}$ и координату $x_0 = 0$. Найти уравнение движения точки, момент времени, когда скорость точки увеличится в 2 раза, а также путь, который она пройдет за это время.

Задача 3. Тело массы $m = 2 \text{ кг}$, принимаемое за материальную точку, движется вдоль горизонтальной прямой под действием силы $F = 50 \text{ (Н)}$. Кроме того, на него действует сила сопротивления $R = \mu v$, где $\mu = 5 \text{ (Н·с)/м}$. Найти закон движения тела, если в начальный момент его скорость равна нулю.

Вариант 5

Задача 1. Хоккеист сообщает шайбе прямолинейное движение. Коэффициент трения шайбы о лед $f = 0.05$. Чему была равна начальная скорость шайбы, если она прошла до остановки 50 м? За какое время шайба прошла это расстояние? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Задача 2. Материальная точка массы $m = 0.5 \text{ кг}$ движется вдоль оси x . В начальный момент точка имела скорость $v_0 = 10 \text{ м/с}$ и координату $x_0 = 0$. Затем на нее начинает действовать сила сопротивления $F = -100(x + 1)^{-3} \text{ (Н)}$. Найти уравнение движения точки, момент времени, когда скорость точки уменьшится в 2 раза, а также путь, который она пройдет за это время.

Задача 3. Парусная лодка веса 2000 Н движется со скоростью 1.5 м/с. После снятия паруса лодка движется, преодолевая сопротивление воды $R = 50v \text{ (Н)}$, где v – скорость лодки, м/с. Определить время, в течение которого скорость лодки уменьшилась в 3 раза, и расстояние, которое она прошла за это время.

Вариант 6

Задача 1. Пуля вылетела из вертикального ствола винтовки со скоростью $v_0 = 880 \text{ м/с}$ и попала в самолет, летевший по горизонтали со скоростью $v_1 = 720 \text{ м/с}$ на высоте $h = 400 \text{ м}$. На каком расстоянии от места попадания пули был самолет в момент выстрела? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Задача 2. Материальная точка массы $m = 0.5 \text{ кг}$ движется вдоль оси x под действием силы $F = 6(x + 0.5)^5 \text{ (Н)}$. В начальный момент она имела скорость $v_0 = 0.25 \text{ м/с}$ и координату $x_0 = 0$. Найти уравнение движения точки, момент времени, когда скорость точки увеличится в 4 раза, а также путь, который она пройдет за это время.

Задача 3. В момент, когда гоночный автомобиль веса 8 кН пересекает финиш со скоростью 360 км/ч, водитель выключает двигатель. Учитывая силу сопротивления воздуха $R = \alpha v^2$, где $\alpha = 0.075 \text{ (Н} \cdot \text{с}^2 \text{)/м}^2$, определить время, прошедшее к моменту, когда скорость автомобиля уменьшилась в 2 раза, и расстояние, которое автомобиль прошел за это время.

Вариант 7

Задача 1. Тяжелая точка поднимается по негладкой наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом. В начальный момент скорость точки равнялась $v_0 = 15 \text{ м/с}$. Коэффициент трения $f = 0.1$. Какой путь пройдет точка до остановки? За какое время она пройдет этот путь?

Задача 2. Материальная точка массы $m = 2 \text{ кг}$ движется вдоль оси x . В начальный момент она имела скорость $v_0 = 10 \text{ м/с}$ и находилась в начале координат. На нее начинает действовать сила $F = 400(x + 1)^{-5} \text{ (Н)}$. Найти уравнение движения точки, момент времени, когда скорость точки уменьшится в 5 раз, а также путь, который она пройдет за это время.

Задача 3. Сила тяги мотора катера $Q = 5 \text{ кН}$, а сопротивление воды определяется формулой $R = 10v \text{ (Н)}$. Определить закон движения катера и его предельную скорость, если движение начинается из состояния покоя, а масса катера 2000 кг .

Вариант 8

Задача 1. Материальная точка массы $m = 5 \text{ кг}$ движется прямолинейно под действием силы $F = F_0 \cos(\omega t)$, где $F_0 = 10 \text{ (Н)}$ и $\omega = \pi/6 \text{ (1/с)}$. В начальный момент она имела скорость $v_0 = 10 \text{ м/с}$. Найти уравнение движения точки и скорость, которую она будет иметь в момент времени $t = 2 \text{ с}$.

Задача 2. Материальная точка массы $m = 2 \text{ кг}$ движется вдоль оси x под действием силы $F = 75(x + 1)^2 \text{ (Н)}$. В начальный момент она имела скорость $v_0 = 5 \text{ м/с}$ и координату $x_0 = 0$. Найти уравнение движения точки, момент времени, когда ее скорость увеличится в 4 раза, а также пройденный за это время путь.

Задача 3. Лодка с человеком, общий вес которых 1.47 кН , двигалась в спокойной воде. Когда человек перестал грести, скорость лодки была равна 2 м/с . Определить расстояние, которое пройдет лодка к моменту, когда ее скорость уменьшится в 4 раза, если сопротивление воды ее движению $R = 40v \text{ (Н)}$.

Вариант 9

Задача 1. Вожатый трамвая, выключая постепенно реостат, увеличивает мощность вагонного двигателя так, что сила тяги

растет пропорционально времени: $F = 1.2t$ (κH). Найти зависимость пройденного пути от времени движения трамвая, если его масса 10000 кг , а начальная скорость равна нулю. Сила трения постоянна и составляет 0.02 веса трамвая.

Задача 2. Материальная точка массы $m = 2 \text{ кг}$ движется вдоль оси x при наличии силы сопротивления $F = 25(x + 1)^{-2}$ (H). В начальный момент она имела скорость $v_0 = 5 \text{ м/с}$ и координату $x_0 = 0$. Найти уравнение движения точки, момент времени, когда ее скорость уменьшится в 10 раз, а также путь, пройденный за это время.

Задача 3. Шарик веса $0.05 H$ вылетает вертикально вверх из пружинного пистолета со скоростью 10 м/с . Считая, что сопротивление воздуха пропорционально первой степени скорости и равно $0.01 H$ при скорости $v = 1 \text{ м/с}$, определить максимальную высоту, на которую поднимется шарик, и время достижения этой высоты.

Вариант 10

Задача 1. На точку веса $49 H$, которая двигалась по горизонтальной прямой, действовала постоянная сила $100 H$. В момент, когда скорость точки равнялась 20 м/с , на нее начала действовать еще сила сопротивления $R = 10t$ (H). Какое расстояние пройдет точка за 6 с после начала действия силы сопротивления? Сколько времени должна действовать эта сила, чтобы скорость точки уменьшилась до нуля?

Задача 2. Материальная точка массы $m = 200 \text{ кг}$ движется вдоль оси x под действием силы $F = 2e^{2x}$ (H). В начальный момент она имела скорость $v_0 = 0.1 \text{ м/с}$ и координату $x_0 = 0$. Найти уравнение движения точки, момент времени, когда ее скорость увеличится в 2 раза, а также путь, который она при этом пройдет.

Задача 3. К моменту прекращения работы двигателя аэросани веса $5 \kappa H$ приобрели скорость $v_0 = 144 \text{ км/ч}$. Сила сопротивления воздуха $R = 2v^2$ (H). Какое расстояние пройдут аэросани по горизонтальной поверхности и какую будут иметь скорость через 10 с ?

Вариант 11

Задача 1. Автомобиль массы $m = 2000 \text{ кг}$ движется по горизонтальному прямолинейному участку дороги со скоростью $v_0 = 80 \text{ км/ч}$. В некоторый момент времени двигатель выключают. Считая, что сила сопротивления определяется формулой $R = 20t^2 \text{ (Н)}$, определить время и путь, пройденный автомобилем от момента выключения двигателя до остановки.

Задача 2. Материальная точка массы $m = 1 \text{ кг}$ движется вдоль оси x под действием силы $F = 400(x + 1) \text{ (Н)}$. В начальный момент точка имела скорость $v_0 = 20 \text{ м/с}$ и координату $x_0 = 0$. Найти уравнение движения точки, момент времени, когда ее скорость увеличится в 2 раза, а также путь, который она при этом пройдет.

Задача 3. Неподвижное в начальный момент времени тело веса 80 Н падает в среде с сопротивлением $R = 20v \text{ (Н)}$. Определить максимальное значение скорости падения, а также время, прошедшее к моменту, когда скорость тела достигнет 0.99 ее максимального значения, и расстояние, пройденное телом за это время.

Вариант 12

Задача 1. На тело веса 100 Н , движущееся из состояния покоя вдоль горизонтальной оси Ox , действуют вдоль этой же оси сила тяги $F = 10t^3 \text{ (Н)}$ и постоянная сила трения, равная во время движения 0.5 Н . Определить момент времени, когда началось движение тела, и найти уравнение этого движения. Считать, что коэффициенты трения покоя и скольжения равны.

Задача 2. Материальная точка массы $m = 2 \text{ кг}$ движется вдоль оси x с начальной скоростью $v_0 = 0$ из положения $x_0 = 1 \text{ м}$. На нее действует сила $F = 800(x - 1) \text{ (Н)}$. Найти уравнение движения точки и ее скорость в момент времени $t = 2 \text{ с}$.

Задача 3. Свободная материальная точка массы $m = 4 \text{ кг}$, имеющая начальную скорость $v_0 = 50 \text{ м/с}$, движется прямолинейно. На точку действует только сила сопротивления $R = 60v^{1/2} \text{ (Н)}$. Определить время, прошедшее от начала движения точки до остановки, и путь, пройденный точкой.

Вариант 13

Задача 1. Автомобиль веса 10 кН движется по горизонтальному прямолинейному участку дороги со скоростью $v_0 = 60 \text{ км/ч}$. В некоторый момент двигатель выключают. Считая, что сопротивление движению определяется формулой $R = 20t^2 \text{ (Н)}$, определить время, за которое скорость автомобиля уменьшилась в 2 раза, и пройденный автомобилем путь от момента выключения двигателя.

Задача 2. Материальная точка массы $m = 10 \text{ кг}$ с начальной скоростью $v_0 = 1 \text{ м/с}$ движется вдоль оси x из положения $x_0 = 0$. На нее действует сила сопротивления $F = -10e^{-2x} \text{ (Н)}$. Найти уравнение движения точки, момент времени, когда ее скорость уменьшится в 2 раза, а также путь, который она пройдет за это время.

Задача 3. Сила тяги винтов вертолета массы $m = 4000 \text{ кг}$ при вертикальном подъеме в 2 раза больше его веса. Сопротивление воздуха $R = 200v \text{ (Н)}$, где v – скорость подъема. Найти закон движения вертолета и определить предельно достижимую скорость вертолета.

Вариант 14

Задача 1. Пуля вылетела из вертикального ствола винтовки со скоростью v_0 и попала в самолет, летевший по горизонтали со скоростью $v_1 = 800 \text{ м/с}$ на высоте $h = 500 \text{ м}$ и находившийся в момент выстрела на расстоянии 300 м от места попадания пули в самолет. Какова была начальная скорость пули? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Задача 2. Материальная точка массы $m = 4 \text{ кг}$ движется вдоль оси x под действием силы $F = 200(x + 1)^3 \text{ (Н)}$. В начальный момент точка имела скорость $v_0 = 5 \text{ м/с}$ и координату $x_0 = 0$. Найти уравнение движения точки, момент времени, когда скорость точки увеличится в 3 раза, а также путь, который она пройдет за это время.

Задача 3. Самолет массы $m = 25000 \text{ кг}$ в момент приземления имел скорость $v_0 = 50 \text{ м/с}$. Определить, какое расстояние он пройдет при выключенных моторах до момента времени, когда его скорость уменьшится в 5 раз, если суммарное сопротивление движению $R = 10v^2 \text{ (Н)}$.

Вариант 15

Задача 1. Автомобиль массы $m = 3000 \text{ кг}$ движется со скоростью 60 км/ч по горизонтальной прямолинейной дороге. Затем сила тяги двигателя увеличивается пропорционально времени: $F = 200t \text{ (Н)}$. Найти момент времени, когда скорость автомобиля увеличится в 2 раза и расстояние, которое он пройдет за это время, если на него действует сила трения с коэффициентом трения $f = 0.2$.

Задача 2. Материальная точка массы $m = 1 \text{ кг}$ движется вдоль оси x с начальной скоростью $v_0 = 5 \text{ м/с}$ из положения $x_0 = 0$. На нее действует сила сопротивления $F = -100(x + 2)^{-3} \text{ (Н)}$. Найти уравнение движения точки, момент времени, когда ее скорость уменьшится в 5 раз, а также путь, который она пройдет за это время.

Задача 3. На тело массы $m = 4 \text{ кг}$, принимаемое за материальную точку, действуют сила $F = 100 \text{ (Н)}$ и сила сопротивления $R = \mu v$, где $\mu = 10 \text{ (Н·с)/м}$. Найти закон движения тела, а также его максимальную скорость, если в начальный момент его скорость равна 2 м/с . Считать, что точка движется вдоль горизонтальной прямой.

Вариант 16

Задача 1. Материальная точка массы $m = 2 \text{ кг}$ прямолинейно движется под действием силы $F = 20\sin(\pi t/12) \text{ (Н)}$. В начальный момент точка имела скорость $v_0 = 20 \text{ м/с}$. Найти уравнение движения точки и скорость, которую она будет иметь в момент времени $t = 4 \text{ с}$.

Задача 2. Материальная точка массы $m = 2 \text{ кг}$ прямолинейно движется под действием силы $F = 0.24(x + 1)^5 \text{ (Н)}$. В начальный момент точка имела скорость $v_0 = 0.2 \text{ м/с}$ и координату $x_0 = 0$. Найти уравнение ее движения, момент времени, когда скорость точки увеличится в 5 раз, а также путь, который она пройдет за это время.

Задача 3. Парусная лодка веса 2500 Н двигалась со скоростью 2 м/с . После снятия паруса она движется, преодолевая сопротивление воды $R = 40v \text{ (Н)}$, где v – скорость лодки, м/с . Определить время, в течение которого скорость лодки уменьшится в 100 раз, и расстояние, которое она пройдет за это время.

Вариант 17

Задача 1. Вожатый трамвая, выключая постепенно реостат, увеличивает мощность вагонного двигателя так, что сила тяги возрастает по закону $F = 0.8t^2$ (кН). Найти момент начала движения и зависимость пройденного пути от времени движения вагона при следующих данных: масса вагона 8000 кг, сопротивление трения постоянно и составляет 0.05 веса вагона, а начальная скорость равна нулю.

Задача 2. Материальная точка массы $m = 1$ кг движется вдоль оси x под действием силы $F = -50(x + 1)^{-5}$ (Н). В начальный момент она имела скорость $v_0 = 5$ м/с и координату $x_0 = 0$. Найти уравнение движения точки, момент времени, когда ее скорость уменьшится в 5 раз, а также путь, который она пройдет за это время.

Задача 3. В момент, когда гоночный автомобиль веса 9.81 кН пересекает финиш со скоростью 300 км/ч, водитель выключает двигатель. Учитывая силу сопротивления воздуха $R = \alpha v^2$, где $\alpha = 0.05$ (Н·с²)/м², определить время, прошедшее к моменту, когда скорость автомобиля уменьшилась в 5 раз, и расстояние, которое автомобиль прошел за это время.

Вариант 18

Задача 1. Тяга двигателя ракеты при вертикальном старте возрастает по закону $F = 2.5t$ (кН), масса ракеты 5000 кг. Считая силу тяжести постоянной и пренебрегая сопротивлением воздуха, найти закон движения ракеты на начальном этапе движения.

Задача 2. Материальная точка массы $m = 0.1$ кг движется вдоль оси x под действием силы $F = 15(x + 0.5)^2$ (Н). В начальный момент она имела скорость $v_0 = 10$ м/с и координату $x_0 = 0.5$ м. Найти уравнение движения точки, момент времени, когда ее скорость увеличится в 2 раза, а также путь, который она пройдет за это время.

Задача 3. Сила тяги мотора катера $Q = 4$ кН, а сопротивление воды $R = 50v$ (Н). Определить закон движения катера и предельную скорость, которую он может достичь, если движение начинается из состояния покоя, а масса катера 2500 кг.

Вариант 19

Задача 1. Точка веса 49 Н двигалась под действием постоянной силы тяги 100 Н по горизонтальной прямой. В момент, когда скорость точки достигла 10 м/с , на нее начала действовать еще одна сила того же направления $F = 10t\text{ (Н)}$. Какое расстояние пройдет точка за первые 10 с после начала действия второй силы? Сколько времени должна действовать эта сила, чтобы скорость точки увеличилась в 5 раз?

Задача 2. Материальная точка массы $m = 1\text{ кг}$ движется вдоль оси x под действием силы $F = -18(x + 4)^{-2}\text{ (Н)}$. В начальный момент она имела скорость $v_0 = 3\text{ м/с}$ и координату $x_0 = 0$. Найти уравнение движения точки, момент времени, когда ее скорость уменьшится в 3 раза, а также путь, который она пройдет за это время.

Задача 3. Лодка веса 2 кН двигалась со скоростью 2.5 м/с . Определить расстояние, которое пройдет лодка к моменту, когда скорость лодки уменьшится в 5 раз, если сила сопротивления воды $R = 5v^2\text{ (Н)}$.

Вариант 20

Задача 1. Автомобиль массы $m = 5000\text{ кг}$ движется по горизонтальному прямолинейному участку дороги со скоростью $v_0 = 90\text{ км/ч}$. В некоторый момент времени двигатель выключают. Считая, что сопротивление движению определяется формулой $R = 30t^2\text{ (Н)}$, найти время, за которое скорость автомобиля уменьшилась в 3 раза, и пройденный автомобилем путь от момента выключения двигателя.

Задача 2. Материальная точка массы $m = 25\text{ кг}$ прямолинейно движется вдоль оси x под действием силы $F = e^{8x}\text{ (Н)}$. В начальный момент она имела скорость $v_0 = 0.1\text{ м/с}$ и координату $x_0 = 0$. Найти уравнение движения точки, момент времени, когда ее скорость увеличится в 10 раз, а также путь, пройденный за это время.

Задача 3. Шарик веса 0.1 Н вылетает вертикально вверх из пружинного пистолета со скоростью 10 м/с . Считая, что сопротивление воздуха $R = 0.05v\text{ (Н)}$, определить максимальную высоту, на которую поднимется шарик, и время достижения этой вы-

соты. На сколько увеличится максимальная высота подъема, если не учитывать сопротивление воздуха?

Вариант 21

Задача 1. Автомобиль с выключенным двигателем начинает подниматься по негладкой наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом. В начальный момент скорость автомобиля $v_0 = 25 \text{ м/с}$. Коэффициент трения $f = 0.2$. Какой путь пройдет автомобиль до остановки?

Задача 2. Материальная точка массы $m = 2 \text{ кг}$ движется вдоль оси x под действием силы $F = 200(x + 2) \text{ (Н)}$. В начальный момент точка имела скорость $v_0 = 20 \text{ м/с}$ и координату $x_0 = 0$. Найти уравнение движения точки, момент времени, когда ее скорость увеличится в 5 раз, а также пройденный за это время путь.

Задача 3. К моменту прекращения работы двигателя аэросани веса 4 кН приобрели скорость $v_0 = 120 \text{ км/ч}$. Сила сопротивления воздуха $R = 4v^2 \text{ (Н)}$. Какое расстояние пройдут аэросани по горизонтальной поверхности до момента времени, когда их скорость уменьшится в 10 раз?

Вариант 22

Задача 1. Пуля вылетела из вертикального ствола винтовки со скоростью $v_0 = 800 \text{ м/с}$ и попала в самолет, летевший по горизонтали со скоростью $v_1 = 700 \text{ м/с}$ на высоте $h = 500 \text{ м}$. На каком расстоянии от места попадания пули был самолет в момент выстрела? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Задача 2. Материальная точка массы $m = 1 \text{ кг}$ движется вдоль оси x под действием силы $F = 25(x + 2) \text{ (Н)}$. В начальный момент точка имела скорость $v_0 = 5 \text{ м/с}$ и координату $x_0 = -3 \text{ м}$. Найти уравнение движения точки и ее скорость в момент времени $t = 2 \text{ с}$.

Задача 3. Неподвижное в начальный момент времени тело веса 100 Н падает в некоторой среде по вертикали. Считая, что сопротивление среды $R = 40v \text{ (Н)}$, определить максимальное значение скорости падения, время, прошедшее к моменту, когда скорость тела достигнет 0.8 ее максимального значения, и расстояние, пройденное телом за это время.

Вариант 23

Задача 1. Хоккеист сообщает шайбе прямолинейное движение. Чему была равна начальная скорость шайбы, если она прошла до остановки 60 м? За какое время шайба прошла это расстояние, если коэффициент трения шайбы о лед $f = 0.1$? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Задача 2. Материальная точка массы $m = 2$ кг движется вдоль оси x под действием силы $F = -32e^{-8x}$ (Н). В начальный момент она имела скорость $v_0 = 2$ м/с и координату $x_0 = 0$. Найти уравнение движения точки, момент времени, когда скорость точки уменьшится в 2 раза, а также путь, который она пройдет за это время.

Задача 3. Свободная материальная точка массы $m = 5$ кг, имеющая начальную скорость $v_0 = 100$ м/с, движется прямолинейно. На нее действует только сила сопротивления $R = 50 v^{1/2}$ (Н). Определить время, прошедшее от начала движения точки до остановки, и путь, пройденный точкой.

Вариант 24

Задача 1. Вагон массы $m = 500$ кг двигался по горизонтальному прямолинейному участку дороги с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с. Затем на него начала действовать сила сопротивления $R = 20t^2$ (Н). Определить время и путь, пройденный вагоном до остановки.

Задача 2. Материальная точка массы $m = 0.5$ кг движется вдоль оси x под действием силы $F = 100(x + 0.2)^3$ (Н). В начальный момент она имела скорость $v_0 = 0.4$ м/с и координату $x_0 = 0$. Найти уравнение движения точки, момент времени, когда ее скорость увеличится в 5 раз, а также путь, который она пройдет за это время.

Задача 3. Сила тяги винтов вертолета массы $m = 3000$ кг при его вертикальном подъеме в 3 раза больше его веса. Сопротивление воздуха $R = 100v$ (Н), где v – скорость подъема. Считая начальную скорость $v_0 = 0$, найти закон движения вертолета и определить его предельно достижимую скорость подъема.

Вариант 25

Задача 1. Автомобиль веса 9.81 кН движется со скоростью 60 км/ч по горизонтальной прямолинейной дороге. Затем сила тяги двигателя непрерывно увеличивается пропорционально времени: $F = 200t \text{ (Н)}$. Найти скорость автомобиля через 5 с и расстояние, которое он пройдет за это время, если на него действует постоянная сила трения с коэффициентом трения $f = 0.2$.

Задача 2. Материальная точка массы $m = 10 \text{ кг}$ движется вдоль оси x под действием силы $F = -250x^{-3} \text{ (Н)}$. В начальный момент точка имела скорость $v_0 = 5 \text{ м/с}$ и координату $x_0 = 1 \text{ м}$. Найти уравнение движения точки, момент времени, когда скорость точки уменьшится в 5 раз, а также путь, который она пройдет за это время.

Задача 3. Движение планера массы $m = 250 \text{ кг}$ происходит по горизонтальной прямой. Принимая силу сопротивления воздуха в свободном полете планера $R = 8v^2 \text{ (Н)}$, определить расстояние, которое пролетит планер за 10 с от момента времени, когда его скорость была равна 100 м/с .

Вариант 26

Задача 1. Материальная точка массы $m = 4 \text{ кг}$ движется прямолинейно под действием силы $F = 20\cos(\pi t/6) \text{ (Н)}$. В начальный момент она имела скорость $v_0 = 20 \text{ м/с}$. Найти уравнение движения точки и ее скорость в момент времени $t = 3 \text{ с}$.

Задача 2. Материальная точка массы $m = 0.25 \text{ кг}$ движется вдоль оси x под действием силы $F = 0.48(x + 0.5)^5 \text{ (Н)}$. В начальный момент точка имела скорость $v_0 = 0.1 \text{ м/с}$ и координату $x_0 = 0$. Найти уравнение движения точки, момент времени, когда ее скорость увеличится в 5 раз, а также пройденный за это время путь.

Задача 3. Свободная материальная точка массы $m = 10 \text{ кг}$, имеющая начальную скорость $v_0 = 100 \text{ м/с}$, движется прямолинейно. На нее действует только сила сопротивления $R = 90v^{1/3} \text{ (Н)}$. Определить время, прошедшее от начала движения точки до остановки, и пройденный ею путь.

Вариант 27

Задача 1. Тяга двигателя ракеты при вертикальном старте возрастает согласно закону $F = 2.5t^2$ (кН), масса ракеты 10000 кг. Считая силу тяжести постоянной и пренебрегая сопротивлением воздуха найти закон движения ракеты.

Задача 2. Материальная точка массы $m = 0.1$ кг движется вдоль оси x под действием силы $F = -5(x + 0.5)^{-5}$ (Н). В начальный момент точка имела скорость $v_0 = 5$ м/с и координату $x_0 = 0.5$ м. Найти уравнение движения точки, момент времени, когда ее скорость уменьшится в 5 раз, а также путь, который она пройдет за это время.

Задача 3. Самолет массы $m = 10000$ кг в момент приземления имел скорость $v_0 = 150$ м/с. Определить, какое расстояние он пройдет и какую будет иметь скорость через 10 с при выключенных моторах, если суммарное сопротивление движению $R = 10v^2$ (Н).

Вариант 28

Задача 1. Тяжелая точка поднимается по негладкой наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 45^\circ$ с горизонтом. В начальный момент ее скорость $v_0 = 25$ м/с. Коэффициент трения $f = 0.1$. Какой путь пройдет точка до остановки? За какое время точка пройдет этот путь?

Задача 2. Материальная точка массы $m = 2$ кг движется вдоль оси x под действием силы $F = 3(x + 4)^2$ (Н). В начальный момент точка имела скорость $v_0 = 8$ м/с и координату $x_0 = 0$. Найти уравнение движения точки, момент времени, когда ее скорость увеличится в 2.5 раза, а также путь, который она пройдет за это время.

Задача 3. На тело массы $m = 10$ кг, принимаемое за материальную точку, действует постоянная сила $F = 250$ (Н) и сила сопротивления $R = 10v$ (Н). Найти закон движения тела, если в начальный момент его скорость была равна нулю. Движение считать проходящим по горизонтальной прямой.

Вариант 29

Задача 1. На тело веса 250 Н, движущееся из состояния покоя по горизонтальной прямой, действуют горизонтальная сила

$F = 25t$ (Н) и постоянная сила трения, равная во время движения 0.25 Н. Определить момент времени, когда началось движение тела, и найти уравнение этого движения.

Задача 2. Материальная точка массы $m = 0.5$ кг движется вдоль оси x под действием силы $F = -(x + 3)^{-2}$ (Н). В начальный момент точка имела скорость $v_0 = 1$ м/с и координату $x_0 = 1$ м. Найти уравнение движения точки, момент времени, когда ее скорость уменьшится в 2 раза, а также путь, который она пройдет за это время.

Задача 3. Парусная лодка веса 1000 Н двигалась со скоростью 2.5 м/с. После снятия паруса лодка движется, преодолевая сопротивление воды $R = 50v$ (Н), где v – скорость лодки, м/с. Определить время, в течение которого скорость лодки уменьшилась в 3 раза, и расстояние, которое она прошла за это время.

Вариант 30

Задача 1. Автомобиль веса 20 кН движется по горизонтальному прямолинейному участку дороги со скоростью $v_0 = 60$ км/ч. В некоторый момент времени двигатель выключают. Считая, что сопротивление движению определяется формулой $R = 20t^2$ (Н), определить время, за которое скорость автомобиля уменьшилась в 3 раза, и пройденный автомобилем путь от момента выключения двигателя.

Задача 2. Материальная точка массы $m = 2.5$ кг движется вдоль оси x под действием силы, изменяющейся по закону $F = 0.1e^{2x}$ (Н). В начальный момент она имела скорость $v_0 = 0.2$ м/с и координату $x_0 = 0$. Найти уравнение движения точки, момент времени, когда скорость точки увеличится в 5 раз, а также путь, который она пройдет за это время.

Задача 3. В момент, когда гоночный автомобиль веса 10 кН пересекает финиш со скоростью 400 км/ч, водитель выключает двигатель. Учитывая силу сопротивления воздуха $R = \alpha v^2$, где $\alpha = 0.1$ (Н·с²)/м², определить время, прошедшее к моменту, когда скорость автомобиля уменьшилась в четыре раза, и расстояние, которое автомобиль прошел за это время.

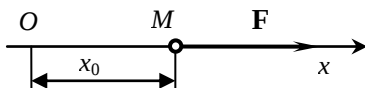


Рис. 8.1

Пример 1. Найти закон движения материальной точки массы m , движущейся вдоль оси x под действием постоянной по модулю силы F

(рис. 8.1) при начальных условиях: $x = x_0$, $v = v_0$ при $t = 0$.

Решение. Составим дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось x : $m\dot{v} = F$. Интегрируя это уравнение, находим: $v = (F/m)t + C_1$. Постоянная C_1 определяется из начального условия для скорости и равна $C_1 = v_0$. Окончательно

$$v = v_0 + \frac{F}{m}t.$$

Далее, учитывая, что $v = dx/dt$, приходим к дифференциальному уравнению: $\dot{x} = v_0 + \frac{F}{m}t$, интегрируя которое методом разделения переменных, получаем

$$x = v_0 t + \frac{F}{2m}t^2 + C_2.$$

Постоянную C_2 определяем из начального условия для координаты точки. Она равна $C_2 = x_0$. Следовательно, закон движения точки имеет вид

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{F}{2m}t^2.$$

Пример 2. Груз веса P начинает двигаться из состояния покоя вдоль гладкой горизонтальной плоскости под действием силы $F = kt$. Найти закон движения груза.

Решение. Выберем начало отсчета системы координат O в начальном положении груза и направим ось x в сторону движения (рис. 8.2). Тогда начальные условия имеют вид: при $x(t = 0) = 0$, $v(t = 0) = 0$. На груз действуют силы F , P и сила реакции плоскости N . Проекции этих сил на ось x имеют значения $F_x = F = kt$, $P_x = 0$, $N_x = 0$,

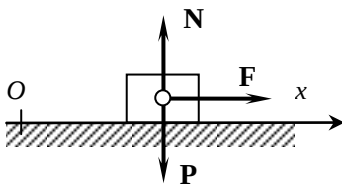


Рис. 8.2

поэтому соответствующее уравнение движения можно записать так: $(P/g)\dot{v} = kt$. Разделяя переменные в этом уравнении и затем интегрируя, получим: $v = gkt^2/2P + C_1$. Подставляя начальные данные ($v(0) = 0$), находим, что $C_1 = 0$, и получаем закон изменения скорости $v = \dot{x} = gkt^2/2P$.

Последнее выражение, в свою очередь, является дифференциальным уравнением, интегрируя которое найдем закон движения материальной точки: $x = g/6P \overline{kt}^3 + C_2$. Входящую сюда постоянную определяем из второго начального условия $x(0) = 0$. Легко убедиться, что $C_2 = 0$. Окончательно

$$x = g/6P \overline{kt}^3.$$

Пример 3. На груз, находящийся в покое на горизонтальной гладкой плоскости (см. рис. 8.2) на расстоянии a от начала координат, начинает действовать в положительном направлении оси x сила $F = k^2(P/g)x$, где P – вес груза. Найти закон движения груза.

Решение. Уравнение движения рассматриваемого груза (материальной точки) в проекции на ось x

$$\frac{P}{g} \frac{dv}{dt} = k^2 \frac{P}{g} x. \quad (8.1)$$

Начальные условия уравнения (8.1) имеют вид: при $x(t=0) = a$, $v(t=0) = 0$.

Входящую в уравнение (8.1) производную по времени от скорости представим так

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dx}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (8.1) и сокращая на (P/g) , получим

$$\frac{1}{2} \frac{dv^2}{dx} = k^2 x.$$

Разделяя переменные в последнем уравнении, находим, что $dv^2 = 2k^2 x dx$. Интегрируя последнее, имеем: $v^2 = k^2 x^2 + C_1$.

Используя начальные условия $v^2(0) = k^2 x^2(0) + C_1$, получаем $C_1 = -k^2 a^2$, и, следовательно,

$$v^2 = k^2 (x^2 - a^2), \quad v = \pm k \sqrt{x^2 - a^2}. \quad (8.2)$$

Поскольку сила действует на груз в положительном направлении оси x , то ясно, что в том же направлении он должен и двигаться. Поэтому в решении (8.2) следует выбрать знак "плюс". Заменяя дальше во втором выражении (8.2) v на dx/dt , получаем дифференциальное уравнение для определения закона движения груза. Откуда, разделяя переменные, имеем

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = k dt.$$

Интегрируя последнее, находим: $\operatorname{arccsh} x/a = kt + C_2$. После нахождения постоянной C_2 окончательно получаем

$$\operatorname{arccsh} x/a = kt \text{ или } x = a \operatorname{ch} kt = \frac{a}{2} (e^{kt} + e^{-kt}).$$

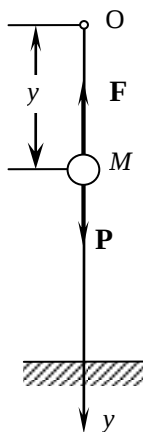


Рис. 8.3

Пример 4. Шар M массы m падает без начальной скорости под действием силы тяжести. При падении шар испытывает сопротивление $R = \mu v$, где μ – постоянный коэффициент сопротивления. Найти закон движения шара.

Решение. Введем систему координат с началом в точке местоположения шара при $t = 0$, направив ось y вертикально вниз (рис. 8.3). Дифференциальное уравнение движения шара в проекции на ось y имеет тогда вид

$$m\dot{v} = mg - \mu v. \quad (8.3)$$

Начальные условия для шара записываются так: $y(t = 0) = 0$, $v(t = 0) = 0$.

Разделяя переменные в уравнении (8.3)

$$dv(g/n - v)^{-1} = ndt$$

и интегрируя, находим: $\ln \frac{g/n - v}{g/n} = -nt + C$, где $n = \mu/m$. Или после нахождения постоянной

$$\ln \left(\frac{g/n - v}{g/n} \right) = -nt \quad \text{или} \quad v = \frac{g}{n} (1 - e^{-nt}). \quad (8.4)$$

Отсюда следует, что предельная скорость, т.е. скорость при $t \rightarrow \infty$, равна $\lim_{t \rightarrow \infty} v = g/n$.

Чтобы найти закон движения, заменим в уравнении (8.4) v на dy/dt . Тогда, интегрируя полученное уравнение с учетом начального условия, окончательно находим

$$y = \frac{g}{n} t - \frac{g}{n^2} (1 - e^{-nt}).$$

9. Задание 2. Динамика криволинейного движения материальной точки

Данное задание состоит из одной задачи. В некоторых задачах используется понятие "плавучесть", означающее разность между подъемной силой Архимеда и силой тяжести.

Вариант 1

Подводная лодка, не имевшая хода, получив небольшую плавучесть $p = 0.01mg$, начинает подниматься с глубины $H = 100$ м. При этом начавший работать двигатель обеспечивает постоянную горизонтальную силу тяги $T = 0.01mg$. Силу сопротивления принять пропорциональной первой степени скорости $\mathbf{V}$ и равной $\mathbf{R} = -0.1m\mathbf{V}$. Определить траекторию лодки и расстояние, пройденное ею по горизонтали к моменту всплытия.

Вариант 2

Определить закон движения $x(t)$, $y(t)$ тяжелой материальной точки M массы $m = 5$ кг, притягиваемой к неподвижному центру

О силой, прямо пропорциональной расстоянию до него. Движение происходит в пустоте, сила притяжения $\mathbf{F} = -k^2 m \mathbf{OM}$, $k = 20 \text{ с}^{-1}$. Ускорение свободного падения $g = 9,8 \text{ м/с}^2$. В начальный момент времени ($t = 0$) $x_0 = 0$, $v_{x0} = 200 \text{ м/с}$, $y_0 = b = 50 \text{ м}$, $v_{y0} = 0$. Ось Ox горизонтальна, а ось Oy направлена по вертикали вверх.

Вариант 3

Подводная лодка, не имевшая хода, находилась в надводном положении на расстоянии $H = 100 \text{ м}$ от дна. Получив отрицательную плавучесть $p = 0.1mg$, она начинает уходить от преследования на очень тихом ходу, который обеспечивается малой постоянной горизонтальной силой тяги двигателя $T = 0.001mg$. Горизонтальной компонентой силы сопротивления можно пренебречь, а ее вертикальную составляющую принять равной $R = -0.05mgV_y^2$, где V_y – вертикальная скорость погружения лодки. Определить закон движения лодки и расстояние, пройденное ею по горизонтали к моменту, когда она ляжет на дно.

Вариант 4

Точка M массы $m = 5 \text{ кг}$ движется под действием силы отталкивания от неподвижного центра O , изменяющейся по закону $\mathbf{F} = k^2 m \mathbf{r}$, где $k = 20 \text{ с}^{-1}$, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки. В начальный момент точка M имела координаты $M_0(a, 0)$, $a = 24 \text{ м}$, и скорость $\mathbf{v}_0$ с проекциями $v_{x0} = 0$, $v_{y0} = 4 \text{ м/с}$. Определить закон движения и траекторию точки M . Силой тяжести Земли пренебречь.

Вариант 5

Подводная лодка, не имевшая хода, получив небольшую положительную плавучесть $p = 0.001mg$, начинает подниматься с глубины $H = 150 \text{ м}$. При этом начавший работать двигатель обеспечивает постоянную горизонтальную силу тяги $T = mg$. Вертикальной компонентой силы сопротивления можно пренебречь, а ее горизонтальную составляющую принять равной

$R = -0.1mV_x^2$, где V_x – горизонтальная скорость лодки. Определить траекторию движения лодки и расстояние, пройденное ею по горизонтали к моменту всплытия.

Вариант 6

Подводная лодка, двигавшаяся в надводном положении с малой скоростью $U_0 = 0.5 \text{ м/с}$, получив отрицательную плавучесть $p = 0.5mg$, начала срочное погружение с выключенными двигателями. Горизонтальной компонентой силы сопротивления можно пренебречь, а ее вертикальную составляющую принять равной $R = -0.05mV_y^2$, где V_y – вертикальная скорость погружения лодки. Определить закон движения лодки и расстояние, пройденное ею по горизонтали к моменту, когда она погрузится на глубину $H = 150 \text{ м}$.

Вариант 7

Телу M массы $m = 8 \text{ кг}$, принимаемому за материальную точку и находящемуся на гладкой наклонной плоскости с углом наклона к горизонту $\alpha = 30^\circ$ (рис. 9.1), сообщена начальная скорость $v_0 = 18 \text{ м/с}$, направленная под углом $\beta = 45^\circ$ к оси x и лежащая в плоскости xu . Ось u горизонтальна. Ускорение свободного падения $g = 9.8 \text{ м/с}^2$. Определить закон движения тела по наклонной плоскости $x(t), y(t)$.

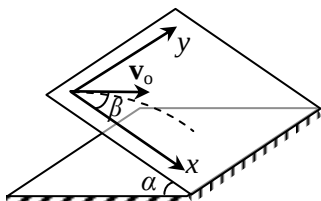


Рис. 9.1

Вариант 8

Подводная лодка, двигавшаяся в надводном положении со скоростью $U_0 = 0.5 \text{ м/с}$, получив отрицательную плавучесть $p = 0.1mg$, начала погружение с выключенными двигателями. Силу сопротивления принять пропорциональной первой степени скорости $\mathbf{V}$ и равной $\mathbf{R} = -0.05m\mathbf{V}$. Определить траекторию движения лодки и расстояние, пройденное ею по горизонтали к моменту, когда она погрузится на глубину $H = 150 \text{ м}$.

Вариант 9

Наибольшая горизонтальная дальность полета снаряда $l_{\max} = 3.5 \cdot 10^4 \text{ м}$ достигается при угле бросания $\alpha_{\max}$ по отношению к горизонту. Определить, чему равны начальная скорость снаряда v_0 и $\alpha_{\max}$. Ускорение свободного падения $g = 9.8 \text{ м/с}^2$. Сопротивлением воздуха пренебречь. Начальная скорость снаряда v_0 при вылете из канала ствола орудия фиксирована.

Вариант 10

Береговое орудие, расположенное на высоте $H = 150 \text{ м}$ над уровнем моря, стреляет снарядами, имеющими при вылете из ствола скорость $U_0 = 1500 \text{ м/с}$. Определить дальность поражения цели при горизонтальном выстреле и закон движения снаряда $x(t)$, $y(t)$, если вертикальной компонентой силы сопротивления можно пренебречь, а ее горизонтальную составляющую принять равной $R = -0.1mV_x^2$, где V_x – горизонтальная скорость снаряда.

Вариант 11

Определить закон движения $x(t)$, $y(t)$ материальной точки M массы $m = 8 \text{ кг}$, притягиваемой к неподвижному центру O силой, прямо пропорциональной расстоянию до него. Движение происходит в пустоте, сила притяжения равна $\mathbf{F} = -k^2 m \mathbf{OM}$, $k = 12 \text{ с}^{-1}$. В начальный момент времени ($t = 0$) $x_0 = 18 \text{ м}$, $v_{x0} = 0$, $y_0 = 0$, $v_{y0} = 6 \text{ м/с}$. Силой тяжести Земли пренебречь.

Вариант 12

Материальная точка массы m движется по гладкой горизонтальной плоскости Oxy под действием силы, направленной параллельно оси x . Модуль силы изменяется по закону $F = 3t^2$. Начальная скорость $v_0 = 5 \text{ м/с}$ направлена под углом α ($\alpha < \pi/2$) к линии действия силы. Получить уравнение траектории точки $y(x)$.

Вариант 13

Точка M массы $m = 8 \text{ кг}$ движется под действием силы отталкивания от неподвижного центра O , изменяющейся по закону $\mathbf{F} = k^2 m \mathbf{r}$, где $k = 12 \text{ с}^{-1}$, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки. Ускорение свободного падения $g = 9.8 \text{ м/с}^2$. В начальный момент времени ($t = 0$) $x_0 = 20 \text{ м}$, $v_{x0} = 0$, $y_0 = 0$, $v_{y0} = 50 \text{ м/с}$. Ось Ox горизонтальна, а ось Oy направлена по вертикали вверх. Определить закон движения $x(t)$, $y(t)$ и траекторию $y(x)$ точки M .

Вариант 14

Материальная точка массы m движется по гладкой горизонтальной плоскости Oxy под действием силы, направленной параллельно оси y (см. рис. 9.1). Модуль силы изменяется по закону $F = 4t^3$. Начальная скорость $v_0 = 5 \text{ м/с}$ направлена перпендикулярно к линии действия силы. Найти закон движения $x(t)$, $y(t)$ и уравнение траектории точки $y = y(x)$.

Вариант 15

Телу M массы $m = 20 \text{ кг}$, принимаемому за материальную точку и находящемуся на гладкой наклонной плоскости с углом наклона к горизонту $\alpha = 60^\circ$ (см. рис. 9.1), сообщена начальная скорость, $v_0 = 2 \text{ м/с}$, направленная под углом $\beta = 30^\circ$ с осью x , лежащая в плоскости xy . Ось y горизонтальна. Ускорение свободного падения $g = 9.8 \text{ м/с}^2$. Определить закон движения тела по наклонной плоскости $x(t)$, $y(t)$.

Вариант 16

При угле бросания $\alpha = 60^\circ$ по отношению к горизонту снаряд имеет горизонтальную дальность полета $l = 2.8 \cdot 10^4 \text{ м}$. Определить, чему при этом равна начальная скорость снаряда v_0 . Найти также горизонтальную дальность и максимальную высоту траектории при угле бросания 30° . Ускорение свободного падения $g = 9.8 \text{ м/с}^2$. Сопротивлением воздуха пренебречь. Начальная скорость снаряда v_0 при вылете из канала ствола орудия фиксирована.

Вариант 17

Определить закон движения $x(t)$, $y(t)$ тяжелой материальной точки M массы $m = 6 \text{ кг}$, притягиваемой к неподвижному центру O силой, прямо пропорциональной расстоянию до него. Движение происходит в пустоте, сила притяжения равна $\mathbf{F} = -k^2 m \mathbf{OM}$, $k = 8 \text{ с}^{-1}$. Ускорение свободного падения $g = 9.8 \text{ м/с}^2$. В начальный момент времени ($t = 0$) $x_0 = 24 \text{ м}$, $v_{x0} = 0$, $y_0 = 40 \text{ м}$, $v_{y0} = 0$. Ось Ox горизонтальна, а ось Oy направлена по вертикали вверх.

Вариант 18

Точка M массы $m = 4 \text{ кг}$ движется под действием силы отталкивания от неподвижного центра O , изменяющейся по закону $\mathbf{F} = k^2 m \mathbf{r}$, где $k = 10 \text{ с}^{-1}$, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки. Ускорение свободного падения $g = 9.8 \text{ м/с}^2$. В начальный момент времени ($t = 0$) $x_0 = 2 \text{ м}$, $v_{x0} = 4 \text{ м/с}$, $y_0 = 0$, $v_{y0} = 0$. Ось Ox горизонтальна, а ось Oy направлена по вертикали вверх. Определить закон движения $x(t)$, $y(t)$ и траекторию $y(x)$ точки M .

Вариант 19

Парашютист массы m падает с раскрытым парашютом на Землю в спокойном воздухе вертикально с установившейся постоянной скоростью $v_0 = 5 \text{ м/с}$. На высоте $h = 100 \text{ м}$ над поверхностью Земли он, натянув стропы, приобретает горизонтальную скорость $u_0 = 2 \text{ м/с}$. Определить величину горизонтального отклонения парашютиста от первоначального направления его движения в момент приземления и закон его движения, если при дальнейшем спуске он удерживает стропы в том же положении. Горизонтальная компонента силы сопротивления, действующая на парашютиста в воздушном потоке, $R_x = -0.01 m V_x$, где V_x – горизонтальная скорость парашютиста. Изменением вертикальной компоненты силы сопротивления, вызванной наклоном купола парашюта, пренебречь.

Вариант 20

Стартуя с поверхности Земли, реактивный снаряд массы $M = 100 \text{ кг}$ движется в течение первых 10 с под действием силы тяги $F = 5000 \text{ Н}$, направленной под углом $\alpha = \pi/4$ к горизонту ($F \sin \alpha > Mg$). Затем сила тяги отключается. Определить траекторию движения снаряда и его дальность полета. Силой сопротивления воздуха пренебречь.

Вариант 21

Телу M массы $m = 28 \text{ кг}$, принимаемому за материальную точку и находящемуся на гладкой наклонной плоскости с углом наклона к горизонту $\alpha = 45^\circ$ (см. рис. 9.1), сообщена в плоскости xy начальная скорость $v_0 = 34 \text{ м/с}$, направленная под углом $\beta = 30^\circ$ к оси x . Ось y горизонтальна. Ускорение свободного падения $g = 9.8 \text{ м/с}^2$. Определить закон движения тела по наклонной плоскости $x(t)$, $y(t)$.

Вариант 22

Подводная лодка, не имевшая хода, получив небольшую положительную плавучесть $p = 0.01mg$, начинает подниматься с глубины $H = 100 \text{ м}$. При этом начавший работать двигатель обеспечивает постоянную горизонтальную силу тяги $T = 0.01mg$. Вертикальной компонентой силы сопротивления можно пренебречь, а ее горизонтальную составляющую принять равной $R = -0.01mV_x$, где V_x – горизонтальная скорость лодки. Определить траекторию движения лодки $y(x)$ и расстояние, пройденное ею по горизонтали к моменту всплытия.

Вариант 23

При угле бросания $\alpha_0 = 42^\circ$ по отношению к горизонту снаряд имеет горизонтальную дальность полета $l(\alpha_0) = 3.8 \cdot 10^4 \text{ м}$. Определить, чему равна начальная скорость снаряда v_0 при вылете из канала ствола орудия. Найти также горизонтальную дальность полета снаряда и время полета снаряда до цели при угле бросания $\alpha_0 = 35^\circ$. Ускорение свободного падения $g = 9.8 \text{ м/с}^2$.

Сопротивлением воздуха пренебречь. Начальная скорость снаряда v_0 при вылете из канала ствола орудия фиксирована.

Вариант 24

Определить угол наклона α ствола орудия к горизонту, чтобы поразить цель, обнаруженную на той же горизонтальной плоскости, что и орудие, на расстоянии $l = 3.2 \cdot 10^4$ м. Дополнительно определить максимальную высоту траектории и время полета снаряда до цели. Начальная скорость снаряда $v_0 = 600$ м/с. Ускорение свободного падения $g = 9.8$ м/с². Сопротивлением воздуха пренебречь.

Вариант 25

Определить зависимость горизонтальной дальности полета снаряда $l(\alpha)$, максимальной высоты его траектории $h(\alpha)$ и времени полета $\tau(\alpha)$ от угла наклона α ствола орудия к горизонту. Найти также значения этих величин для $\alpha_0 = 38^\circ$. Начальная скорость снаряда $v_0 = 980$ м/с. Ускорение свободного падения $g = 9.8$ м/с². Сопротивлением воздуха пренебречь.

Вариант 26*

Воздушный шар массы m под действием выталкивающей силы $F = 1.1mg$ начинает подъем. Горизонтальная компонента силы сопротивления воздуха пропорциональна квадрату горизонтальной компоненты скорости шара относительно воздуха: $R_x = -0.1mV_x^2$, где V_x – его горизонтальная относительная скорость. Вертикальной компонентой силы сопротивления воздуха пренебречь. Определить закон движения шара $x(t)$, $y(t)$, если дует горизонтальный ветер со скоростью $u_0 = 10$ м/с.

Вариант 27*

Тело M массы $m = 8$ кг находится под действием двух сил притяжения $\mathbf{F}_1 = -k^2 m \mathbf{O}_1 \mathbf{M}$, $\mathbf{F}_2 = -k^2 m \mathbf{O}_2 \mathbf{M}$, $k = 20$ с⁻¹ направленных к двум неподвижным центрам $O_1(-a, 0)$ и $O_2(a, 0)$, $a = 24$ м. Движение начинается в точке $A_0(-2a, 0)$ со скоростью

$v_{x0} = 0$, $v_{y0} = 18$ м/с. Определить закон движения $x(t)$, $y(t)$ и траекторию $y(x)$ точки M . Найти моменты времени, когда она пересекает ось Ox , и вычислить ее координаты в эти моменты времени. Силой тяжести Земли пренебречь.

Вариант 28*

Тело M массы $m = 2$ кг находится под действием двух сил притяжения $\mathbf{F}_1 = -k^2 m \mathbf{O}_1 \mathbf{M}$, $\mathbf{F}_2 = -k^2 m \mathbf{O}_2 \mathbf{M}$, $k = 120$ с⁻¹, направленных к двум неподвижным центрам O_1 с координатами $(-a, 0)$ и $O_2 (a, 0)$, $a = 12$ м. Ускорение свободного падения $g = 9.8$ м/с². Движение начинается в точке $A_0 (2a, 0)$ со скоростью $v_{x0} = 0$, $v_{y0} = 12$ м/с. Ось Ox горизонтальна, а ось Oy направлена по вертикали вверх. Определить закон движения $x(t)$, $y(t)$ и траекторию $y(x)$ точки M . Найти моменты времени, когда она пересекает ось Ox , и вычислить ее координаты в эти моменты времени.

Вариант 29*

Материальная точка M массы m движется в вертикальной плоскости под действием силы тяжести, постоянной горизонтальной силы тяги $F = 0.1mg$, силы сопротивления $\mathbf{R} = -0.1m\mathbf{V}$, где $\mathbf{V}$ – скорость точки, и вертикальной подъемной силы $Q = 2mv_x$, где v_x – горизонтальная скорость точки. Получить закон движения точки вдоль вертикальной оси y , если в начальный момент времени ($t = 0$) ее положение совпадало с началом системы координат, а ее начальная скорость горизонтальна и равна $v_0 = 5$ м/с.

Вариант 30*

Тело массы m на высоте $H = 500$ м над поверхностью Земли имело скорость $v_0 = 7$ м/с, направленную вертикально вниз. Затем оно попадает в воздушный поток, который движется горизонтально с постоянной скоростью $u_0 = 10$ м/с. В результате на него действует сила $\mathbf{R} = -\mu m \mathbf{V}_r$, где $\mathbf{V}_r$ – скорость тела относительно потока. Определить величину горизонтального отклонения те-

ла от первоначального направления его движения в момент падения на Землю.

Вариант 31*

Парашютист массы m , совершая затяжной прыжок, падает на Землю в спокойном воздухе вертикально с установившейся постоянной скоростью $v_0 = 40$ м/с. На некоторой высоте от поверхности Земли он попадает в воздушный поток, который движется горизонтально с постоянной скоростью $u_0 = 0.5$ м/с, и в это же время открывает парашют. Горизонтальная компонента силы, действующая на парашютиста в воздушном потоке, $R_x = -0.01mV_{gx}$, где V_{gx} – горизонтальная скорость тела относительно потока воздуха. Вертикальная компонента силы сопротивления, действующая на парашютиста, $R_y = -0.1mVR_x = -0.1mV_y^2$, где V_y – его вертикальная скорость. Определить закон движения парашютиста $x(t)$, $y(t)$ после раскрытия парашюта.

Вариант 32*

Материальная точка M массы m движется в вертикальной плоскости под действием силы тяжести, постоянной горизонтальной силы тяги $F = 0.2mg$, силы сопротивления $\mathbf{R} = -0.1m\mathbf{V}$, где $\mathbf{V}$ – скорость точки, и вертикальной подъемной силы $Q = 2mv_x$, где v_x – горизонтальная скорость точки. Получить закон движения точки в направлении горизонтальной оси x , если в начальный момент времени ($t = 0$) ее положение совпадало с началом системы координат, а ее начальная скорость горизонтальна и равна $v_0 = 5$ м/с.

Вариант 33*

Парашютист массы m с раскрытым парашютом падает вертикально с установившейся постоянной скоростью $v_0 = 5$ м/с. На высоте $h = 100$ м над поверхностью Земли он попадает в воздушный поток, который движется горизонтально с постоянной скоро-

стью $u_0 = 5 \text{ м/с}$. Определить величину горизонтального отклонения парашютиста от первоначального направления его движения в момент приземления и закон его движения $x(t)$, $y(t)$. Горизонтальная компонента силы сопротивления, действующая на парашютиста в воздушном потоке, $R_x = -0.01mV_x$, где V_x – горизонтальная скорость парашютиста относительно потока воздуха.

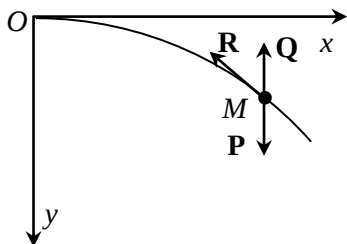


Рис. 9.2

Пример. Научно-исследовательская подводная лодка шарообразной формы и массы $m = 1.5 \cdot 10^5 \text{ кг}$ начинает погружаться с выключенными двигателями, имея горизонтальную скорость $v_{x0} = 30 \text{ м/с}$ и отрицательную плавучесть $P_1 = 0.01mg$, где $\mathbf{P}_1 \equiv m\mathbf{g} + \mathbf{Q}$ – векторная сумма архимедовой выталкивающей силы $\mathbf{Q}$ и силы тяжести $m\mathbf{g}$, действующих на лодку (рис. 9.2). Сила сопротивления воды

$\mathbf{R} = -\alpha \mathbf{v}$, $\alpha = 3 \cdot 10^4 \text{ кг/с}$. Определить уравнения движения лодки и ее траекторию.

Решение. Начало координат выберем в начальном положении лодки, ось Ox направим горизонтально, а ось Oy – вертикально вниз (см. рис. 9.2). На лодку действуют три силы: $\mathbf{P} \equiv m\mathbf{g}$ – вес лодки, $\mathbf{Q}$ – архимедова выталкивающая сила, причем $m\mathbf{g} > \mathbf{Q}$, и сила сопротивления $\mathbf{R}$. Лодку примем за материальную точку M . Тогда второй закон Ньютона запишется так: $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{P}_1 - \alpha \mathbf{v}$. В проекциях на оси Ox и Oy он будет иметь вид: $m\ddot{x} = 0 - \alpha v_x$, $m\ddot{y} = P_1 - \alpha v_y$. Перепишем эти уравнения в форме системы уравнений первого порядка

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\alpha}{m} v_x, \quad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{\alpha}{m} v_y + \frac{P_1}{m}.$$

Интегрируя их методом разделения переменных, получаем

$$\int_{v_{x0}}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = - \int_0^t \frac{\alpha}{m} dt, \quad \int_0^{v_y} \frac{dv_y}{v_y - P_1/\alpha} = - \int_0^t \frac{\alpha}{m} dt.$$

После интегрирования и подстановки численных значений параметров и начальных данных находим

$$v_x(t) = v_{x0} e^{-\frac{\alpha}{m}t} = 30e^{-0.2t} \text{ м/с},$$

$$v_y(t) = \frac{P_1}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t} \right) = 0.49(1 - e^{-0.2t}) \text{ м/с}.$$

Закон движения находим из решения дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = 30e^{-0.2t}, \quad \dot{y} = 0.49(1 - e^{-0.2t}).$$

Он описывается соотношениями

$$x(t) = x_0 + \int_0^t 30e^{-0.2t} dt = 150(1 - e^{-0.2t}) \text{ м},$$

$$y(t) = y_0 + \int 0.49(1 - e^{-0.2t}) dt = 0.49 \left[t - 5(1 - e^{-0.2t}) \right] \text{ м}.$$

В заключение найдем траекторию $y(x)$. Для этого из первого уравнения выразим время t через координату x

$$t = -5 \ln(1 - x/150).$$

Подставляя это выражение во второе уравнение, находим

$$y(x) = 0.49[-5 \ln(1 - x/150) - x/30].$$

10. Задание 3. Исследование колебательного движения материальной точки

В задании требуется найти уравнение движения груза D массы m_D или системы грузов D и E массами m_D и m_E , отнеся движение к оси x . Начало неподвижной системы координат следует выбирать в положении статического равновесия груза или системы грузов. Грузы считать материальными точками. Весом пружин

жин, жестких брусьев, соединительных стержней и демпферов (устройств для создания сил вязкого сопротивления) пренебречь. Варианты заданий приведены на рис. 10.1, необходимые числовые значения заданных величин – в табл. 10.1. Направление начальной скорости v_0 совпадает с положительным направлением оси x . Значение величины λ_0 задается преподавателем.

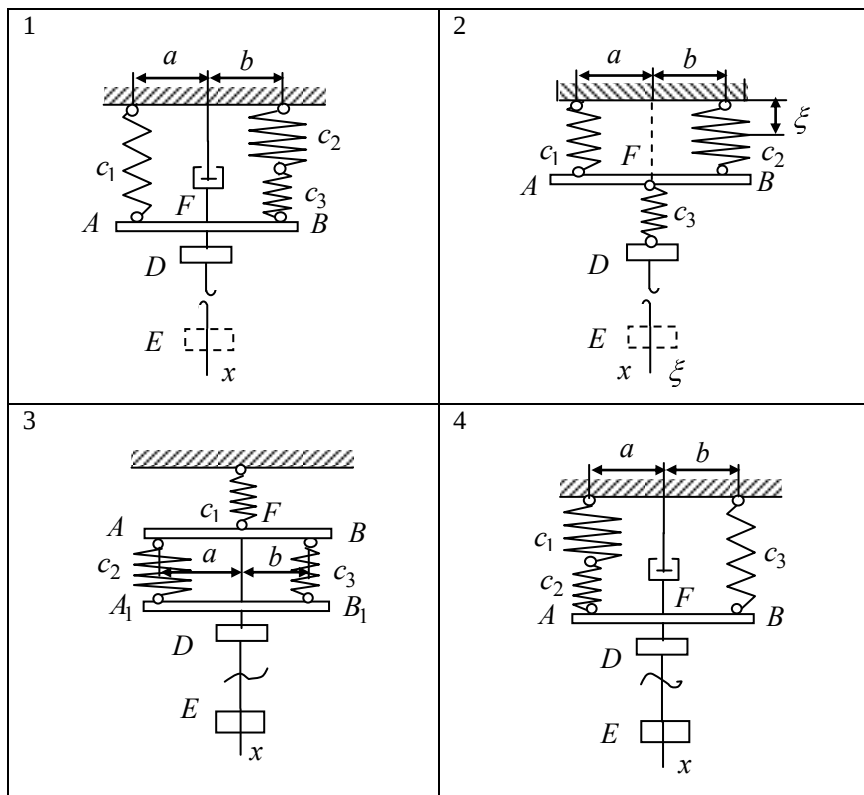


Рис. 10.1

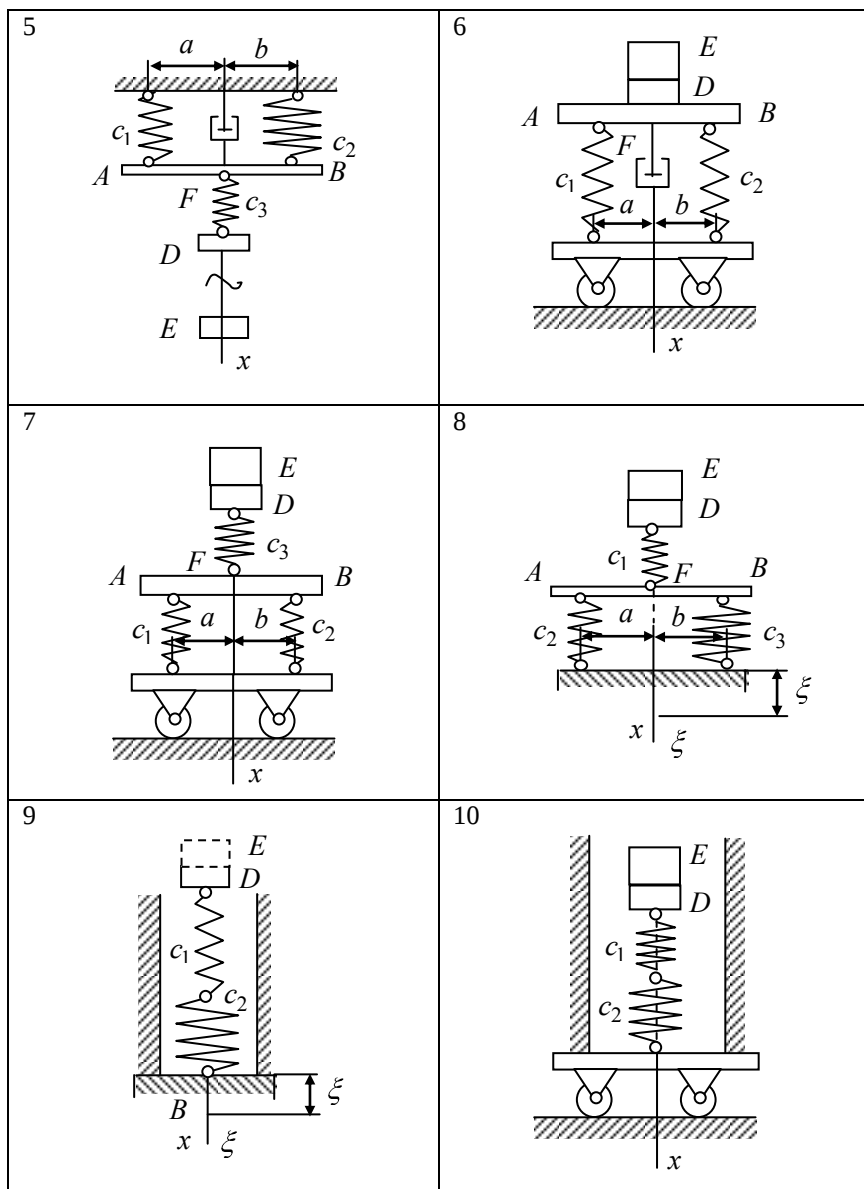


Рис. 10.1 (продолжение)

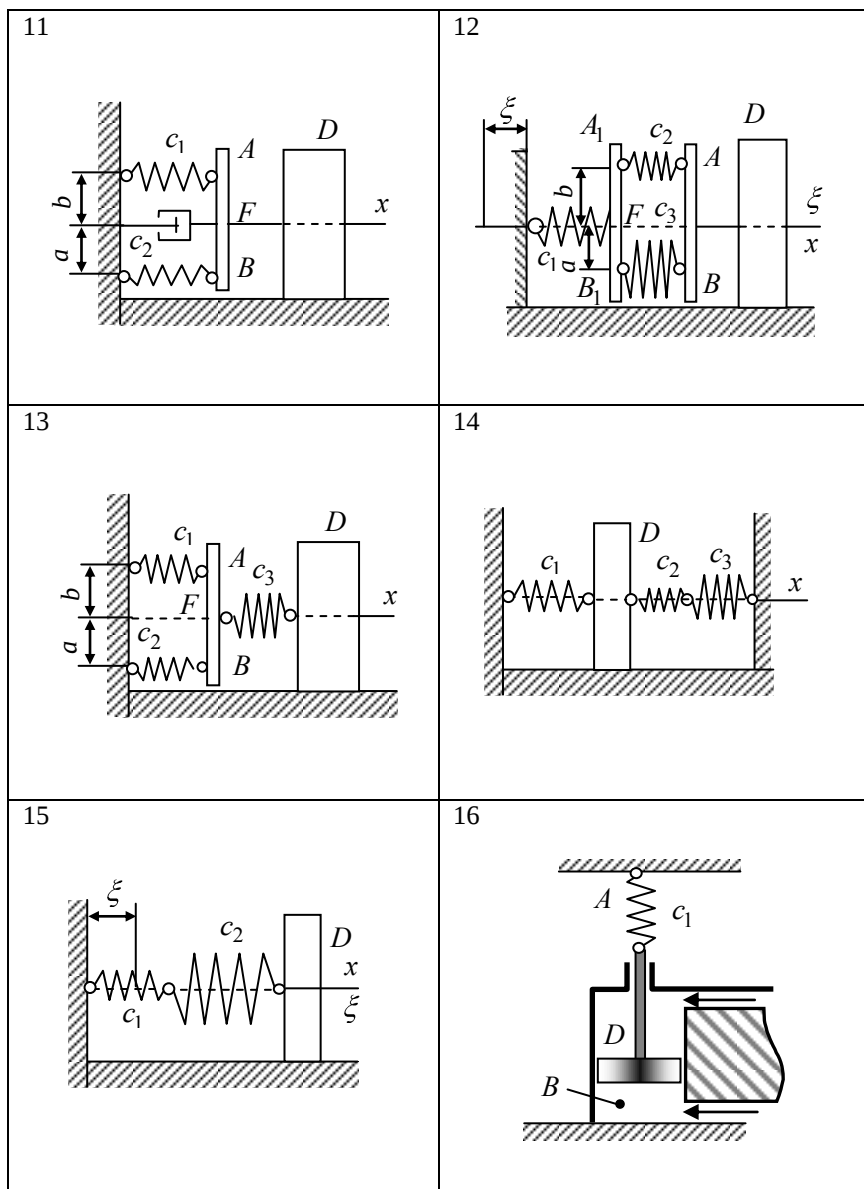


Рис. 10.1 (продолжение)

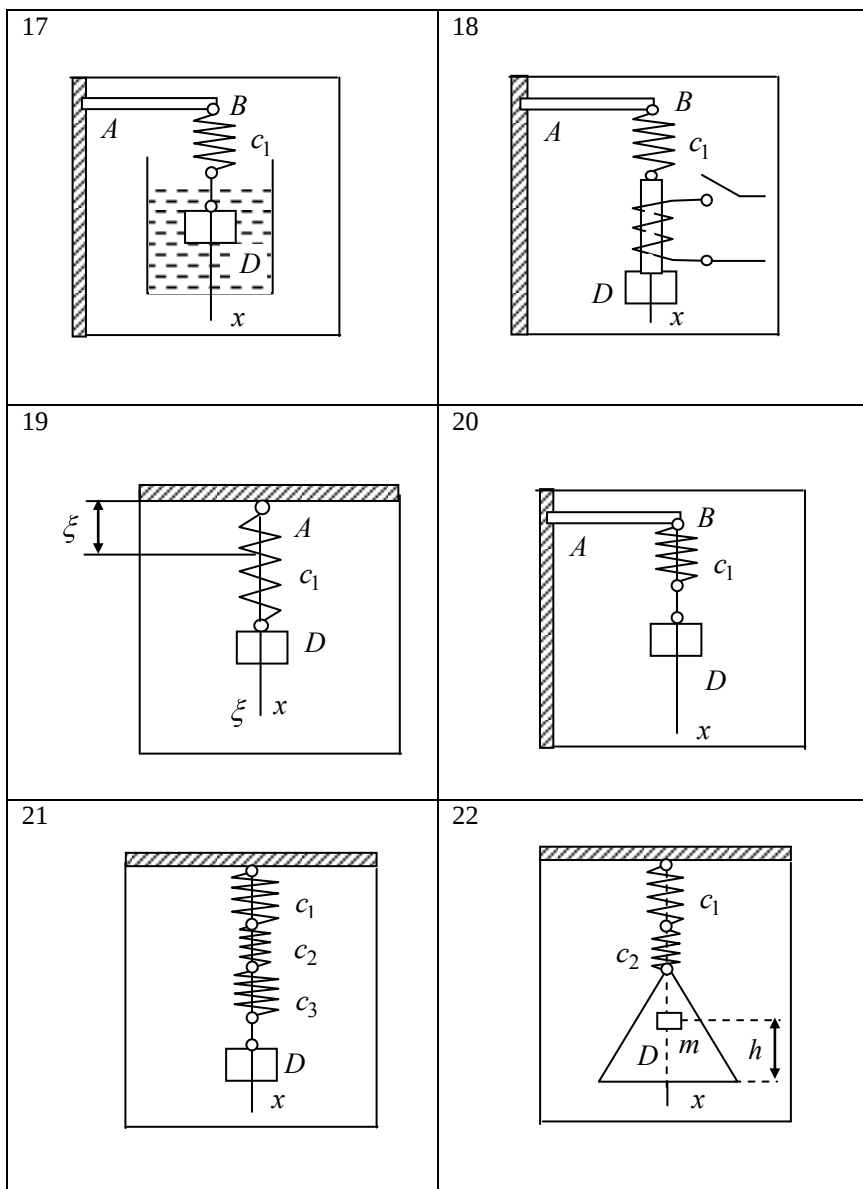


Рис. 10.1 (продолжение)

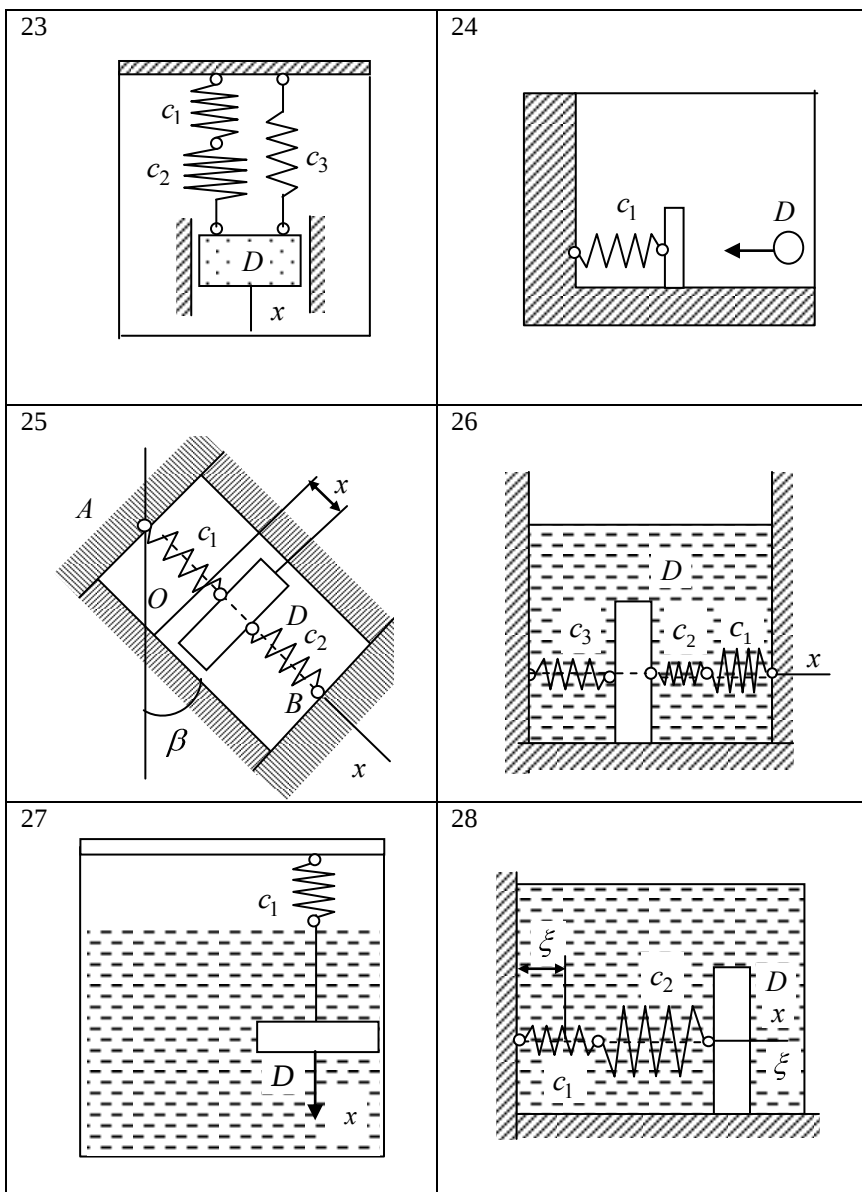


Рис. 10.1 (продолжение)

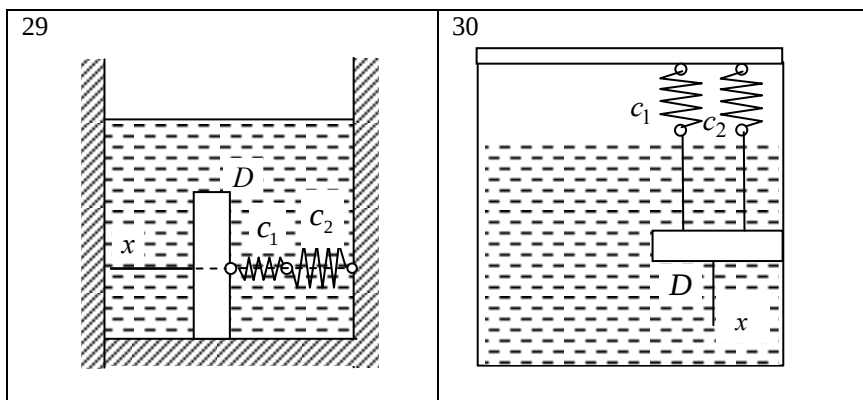


Рис. 10.1 (окончание)

Таблица 10.1

Вариант	m_D , кг	m_E , кг	v_0 , см/с	c_1 , Н/см	c_2 , Н/см	c_3 , Н/см	μ , кг/с	ξ_0 , см	p , 1/с
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	1	11	8	10	12	2	—	—
2	1	2	8	12	36	5	—	1.5	18
3	0.8	3	6	10	4	6	—	—	—
4	0.5	2	7	20	30	25	6	—	—
5	1.6	1	4	6	8	12	8	—	—
6	4	1	5	48	24	—	4	—	—
7	2	3	3	12	6	8	—	—	—
8	1.5	2	10	4	6	15	—	4	15
9	1.2	3	4.8	8	10	—	—	3	12
10	1	3	1.5	16	8	—	—	—	—
11	2.4	—	8	10	14	—	6	—	—
12	3	—	9	8	10	12	—	1.2	8
13	1	—	3	12	6	8	—	—	—
14	1.5	—	6	4.4	2	8	—	—	—
15	1	—	10	4	12	—	—	1.8	12
16	10	—	12	200	—	—	8	—	—
17	12	—	7	100	80	—	6	—	—
18	20	—	5	80	100	—	—	—	—
19	1.5	—	6	250	—	—	—	0.5	30
20	10	—	4	60	40	—	—	—	—

Окончание табл. 10.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
21	2	–	2	20	30	40	–	–	–
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
22	4	–	–	150	–	–	–	–	–
23	3	–	12	10	20	15	–	–	–
24	1	–	30	12	–	–	–	–	–
25	1.5	–	5	14	18	–	6	–	–
26	50	–	8	600	400	100	6	–	–
27	40	–	4	200	–	–	8	–	–
28	20	–	6	100	200	–	400	1.5	15
29	2	–	8	40	60	–	20	–	–
30	10	–	20	20	30	–	12	–	–

Вариант 1

Груз D присоединен к системе трех пружин жесткостью c_1 , c_2 и c_3 посредством бруска AB . Точка F подвеса груза выбрана из условия, что брусок движется поступательно, т.е. $a/b = c_{23}/c_1$, где c_{23} – жесткость пружины, эквивалентной последовательно соединенным пружинам жесткостью соответственно c_2 и c_3 . В некоторый момент времени к покоящемуся грузу D подвешивают груз E и сообщают системе грузов D и E начальную скорость v_0 . Сопротивление движению двух грузов пропорционально их скорости $\mathbf{v}$, $\mathbf{R} = -\mu \mathbf{v}$, где μ – коэффициент сопротивления.

Вариант 2

Груз D присоединен к пружине жесткостью c_3 , которая соединена с бруском AB , подвешенным на двух параллельных пружинах жесткостью c_1 и c_2 . Точка F подвеса пружины выбрана из условия, что брусок движется поступательно, т.е. $a/b = c_2/c_1$. В некоторый момент времени к покоящемуся грузу D подвешивают груз E и сообщают системе грузов D и E начальную скорость v_0 . В это же время потолок, к которому при-

креплены верхние концы пружин 1 и 2, начинает совершать вертикальные колебания по закону: $\xi = \xi_0 \sin pt$.

Примечание. Положение начала отсчета на оси x соответствует среднему положению потолка ($\xi = 0$).

Вариант 3

К пружине жесткостью c_1 присоединен брусок AB , к которому присоединены параллельные пружины жесткостью соответственно c_2 и c_3 , в свою очередь, соединенные с бруском A_1B_1 . К бруску A_1B_1 подвешены покоящиеся грузы D и E . Точка подвеса грузов и точка F подвеса бруска AB выбраны так, что бруски движутся поступательно, т.е. $a/b = c_3/c_2$. В некоторый момент времени стержень, соединяющий грузы, перерезают и сообщают грузу D начальную скорость v_0 .

Вариант 4

Покоящиеся грузы D и E присоединены к системе трех пружин жесткостью соответственно c_1 , c_2 и c_3 посредством бруска AB . Точка F подвеса грузов выбрана из условия, что брусок движется поступательно, т.е. $a/b = c_3/c_{12}$, где c_{12} – жесткость пружины, эквивалентной последовательно соединенным пружинам жесткостью c_1 и c_2 . В некоторый момент времени стержень, соединяющий грузы, перерезают и сообщают грузу D начальную скорость v_0 . Сопротивление движению груза D пропорционально его скорости $\mathbf{v}$, $\mathbf{R} = -\mu \mathbf{v}$, где μ – коэффициент сопротивления.

Вариант 5

Покоящиеся грузы D и E присоединены к пружине жесткостью c_3 , которая соединена с параллельными пружинами жесткостью c_1 и c_2 посредством бруска AB . Точка подвеса F пружины 3 выбрана так, чтобы брусок AB двигался поступательно, т.е.

$a/b = c_2/c_1$. В некоторый момент времени стержень, соединяющий грузы, перерезают и сообщают грузу D начальную скорость v_0 . Сила сопротивления движению груза D пропорциональна его скорости $\mathbf{v}$, $\mathbf{R} = -\mu \mathbf{v}$, где μ – коэффициент сопротивления.

Вариант 6

В некоторый момент времени груз E снимают с груза D , когда оба груза находились в покое, и сообщают грузу D начальную скорость v_0 . Брусок AB , к которому прикреплен груз D , соединен с параллельными пружинами жесткостью соответственно c_1 и c_2 , присоединенными к неподвижной тележке. Положение грузов D и E выбрано так, что брусок движется поступательно, т.е. $a/b = c_2/c_1$. Сила сопротивления движению груза D пропорциональна его скорости $\mathbf{v}$, $\mathbf{R} = -\mu \mathbf{v}$, где μ – коэффициент сопротивления

Вариант 7

В некоторый момент времени груз E снимают с груза D , когда оба груза находились в покое, и сообщают грузу D начальную скорость v_0 . Груз D соединен с пружиной жесткостью c_3 , которая, в свою очередь, присоединена к бруску AB . Последний другой стороной соединен с параллельными пружинами жесткостью c_1 и c_2 , прикрепленными к неподвижной тележке. Точка F соединения пружины с бруском выбрана из условия, что брусок AB движется поступательно, т.е. $a/b = c_2/c_1$.

Вариант 8

В некоторый момент времени ($t = 0$) груз E снимают с груза D , когда оба груза находились в покое, и сообщают грузу D начальную скорость v_0 . Груз D прикреплен к пружине жесткостью c_1 , которая, в свою очередь, соединена с бруском AB . Последний соединен с параллельными пружинами жесткостью c_2 и c_3 , нижние концы которых прикреплены к фундаменту, начинающему в

этот же момент времени совершать вертикальное движение по закону $\xi = \xi_0 \sin pt$. Точка F соединения пружины с бруском выбрана из условия, что брусок движется поступательно, т.е. $a/b = c_3/c_2$.

Примечание. Положение начала отсчета на оси x соответствует среднему положению фундамента ($\xi = 0$).

Вариант 9

В некоторый момент времени ($t = 0$) груз E устанавливают на покоящийся груз D и сообщают системе грузов D и E начальную скорость v_0 . Груз D присоединен к системе последовательно соединенных пружин жесткостью c_1 и c_2 . В этот же момент времени нижний конец пружины (точка B) начинает совершать движение по закону $\xi = \xi_0 \sin pt$.

Примечание. Положение начала отсчета на оси x соответствует среднему положению точки B ($\xi = 0$).

Вариант 10

В некоторый момент времени, когда грузы находились в покое, груз E снимают с груза D и сообщают грузу D начальную скорость v_0 . Груз D присоединен к системе пружин жесткостью c_1 и c_2 . Нижний конец нижней пружины прикреплен к неподвижной тележке.

Вариант 11

Покоящийся груз D соединен с бруском AB , связывающим параллельные пружины жесткостью c_1 и c_2 , которые присоединены к стене. Точка F соединения груза с бруском выбрана из условия, что брусок движется поступательно, т.е. $a/b = c_1/c_2$. В некоторый момент времени груз D отклоняют на величину λ_0 вправо и сообщают ему начальную скорость v_0 . Сила сопротивления движению груза D пропорциональна его скорости $\mathbf{v}$, $\mathbf{R} = -\mu \mathbf{v}$, где μ – коэффициент сопротивления.

Вариант 12

Покоящийся груз D присоединен к бруску AB , который, в свою очередь, связан параллельными пружинами жесткостью c_2 и c_3 с бруском A_1B_1 . Брусок A_1B_1 другой стороной соединен с пружиной жесткостью c_1 , прикрепленной к стене. Точка F соединения пружины с бруском A_1B_1 и точка соединения груза с бруском AB выбраны так, что бруски движутся поступательно, т.е. $a/b = c_2/c_3$. В некоторый момент времени ($t = 0$) груз D отклоняют на величину λ_0 вправо от положения, когда пружины не деформированы, и ему сообщается начальная скорость v_0 . В тот же момент времени ($t = 0$) точка соединения пружины со стеной начинает движение по закону $\xi = \xi_0 \sin pt$.

Примечание. Положение начала отсчета на оси x соответствует среднему положению стены ($\xi = 0$).

Вариант 13

Покоящийся груз D соединен с пружиной жесткостью c_3 , другой конец которой присоединен к бруску AB . Другой стороной брусок AB соединен с параллельными пружинами жесткостью c_1 и c_2 , которые прикреплены к стене. Точка F соединения пружины с бруском выбрана из условия, что брусок движется поступательно, т.е. $a/b = c_1/c_2$. В некоторый момент времени груз отклоняют влево на величину λ_0 и сообщают ему начальную скорость v_0 .

Вариант 14

Груз D прикреплен одной стороной к недеформированной пружине жесткостью c_1 , а другой стороной – к системе недеформированных пружин жесткостью c_2 и c_3 . В некоторый момент времени груз отклоняют на величину λ_0 влево и одновременно сообщают ему начальную скорость v_0 .

Вариант 15

Покоящийся груз D присоединен к пружине жесткостью c_2 , соединенной последовательно с пружиной жесткостью c_1 , прикрепленной к стене. В некоторый момент времени груз отклоняют на величину λ_0 влево и сообщают ему начальную скорость v_0 . В тот же момент времени ($t = 0$) точка соединения пружины со стеной начинает движение по закону $\xi = \xi_0 \sin pt$.

Примечание. Положение начала отсчета на оси x соответствует среднему положению стены ($\xi = 0$).

Вариант 16

Пружина A жесткостью c_1 скреплена с невесомым штоком поршня, который находится в камере B . В эту камеру попеременно сверху и снизу поступает сжатый воздух, вследствие чего возникает сила, действующая на поршень D , изменяющаяся по закону $F = \xi_0 \sin pt$ (ξ_0 – в ньютонах). В начальный момент ($t = 0$) поршень был отклонен от положения статического равновесия на расстояние λ_0 вниз и ему была сообщена скорость v_0 , направленная вниз. Массу штока не учитывать.

Вариант 17

К свободному концу B упругой горизонтальной балки, другой конец которой закреплен неподвижно, подвешен на пружине груз D , который движется в жидкости. Коэффициент жесткости пружины – c_1 , коэффициент жесткости балки – c_2 . В начальный момент груз смещен вниз на расстояние λ_0 от положения статического равновесия и ему сообщена начальная скорость v_0 . Сила сопротивления движению груза в жидкости пропорциональна первой степени скорости $\mathbf{v}$ тела, $\mathbf{R} = -\mu \mathbf{v}$, где μ – коэффициент сопротивления. Упругую силу балки считать пропорциональной стреле прогиба, горизонтальным отклонением точки B пренебречь.

Вариант 18

К свободному концу B упругой горизонтальной балки, другой конец которой закреплен неподвижно, подвешен на пружине груз D с помощью невесомого магнитного стержня, проходящего через соленоид. По соленоиду течет переменный ток, действующий на стержень с вертикальной силой $F_1 = 4 \sin pt$ (Н), причем p выражено в c^{-1} . Коэффициент жесткости пружины – c_1 , коэффициент жесткости балки – c_2 . В начальный момент груз D смещен вниз на расстояние λ_0 от положения статического равновесия и отпущен с начальной скоростью v_0 . Упругая сила балки пропорциональна стреле прогиба, горизонтальным отклонением точки B пренебречь.

Вариант 19

Груз D массы m подвешен на пружине, коэффициент жесткости которой равен c_1 . Другой конец пружины прикреплен в точке A к пластине, совершающей вертикальные колебания около этой точки по закону $\xi = \xi_0 \sin pt$, где p выражено в c^{-1} , расстояние ξ – в сантиметрах, время t – в секундах. В начальный момент груз смещен вниз на расстояние λ_0 от положения статического равновесия и ему сообщена начальная скорость v_0 .

Примечание. Положение начала отсчета на оси x соответствует среднему положению точки A ($\xi = 0$).

Вариант 20

К свободному концу B упругой горизонтальной балки, другой конец которой закреплен неподвижно, подвешен на пружине груз D . Коэффициент жесткости балки – c_2 , коэффициент жесткости пружины – c_1 . В начальный момент груз смещен вниз на расстояние λ_0 от положения статического равновесия и имеет скорость v_0 , направленную вниз. Упругая сила балки пропорциональна стреле прогиба, горизонтальным отклонением точки B пренебречь.

Вариант 21

Груз D подвешен на трех пружинах, как показано на соответствующем рисунке. Коэффициенты жесткости пружин равны c_1 , c_2 , c_3 . В начальный момент груз отклонен от положения статического равновесия вертикально вниз на расстояние λ_0 и имеет скорость v_0 .

Вариант 22

На невесомую чашку весов, подвешенную на пружинах, с высоты $h = 5$ см без начальной скорости падает груз D и остается на чашке, не отрываясь от нее. Коэффициенты жесткости пружин равны соответственно c_1 и c_2 .

Вариант 23

Груз D подвешен на трех пружинах, как показано на соответствующем рисунке. Коэффициенты жесткости пружин равны c_1 , c_2 , c_3 . В начальный момент груз отклонен от положения статического равновесия вертикально вниз на расстояние λ_0 и имеет направленную вниз скорость v_0 .

Вариант 24

Груз D , пройдя некоторое расстояние, присоединяется с начальной скоростью v_0 к невесомому бруску, соединенному с предварительно растянутой с удлинением λ_0 пружиной жесткостью c_1 .

Вариант 25

К грузу D прикреплены концы двух пружин, коэффициенты жесткости которых соответственно равны c_1 и c_2 . Концы A и B пружин закреплены неподвижно. Груз может скользить без трения в неподвижных направляющих, расположенных под углом $\beta = 30^\circ$ к вертикали. В начальный момент груз смещен на величину λ_0 от положения статического равновесия и ему сообщена скорость v_0 .

Вариант 26

Груз D прикреплен с одной стороны к недеформированной пружине жесткостью c_3 , а другой стороной – к системе недеформированных пружин жесткостью c_1 и c_2 . В некоторый момент времени груз отклоняют на величину λ_0 влево и одновременно сообщают ему начальную скорость v_0 . Сила сопротивления движению пропорциональна первой степени скорости $\mathbf{v}$ тела, $\mathbf{R} = -\mu \mathbf{v}$, где μ – коэффициент сопротивления.

Вариант 27

Груз D прикреплен к горизонтальной крышке с помощью пружины жесткостью c_1 . В некоторый момент времени груз отклоняют на величину λ_0 из положения статического равновесия вниз и одновременно сообщают ему начальную скорость v_0 . Сила сопротивления движению пропорциональна первой степени скорости $\mathbf{v}$ тела, $\mathbf{R} = -\mu \mathbf{v}$, где μ – коэффициент сопротивления.

Вариант 28

Груз D присоединен к стенке с помощью двух пружин жесткостью c_1 и c_2 соответственно. В некоторый момент времени ($t = 0$) груз D отклоняют на величину λ_0 вправо от положения, когда пружины не деформированы, и ему сообщается начальная скорость v_0 . В тот же момент времени ($t = 0$) точка соединения пружины со стеной начинает движение по закону $\xi = \xi_0 \sin pt$. Сила сопротивления движению пропорциональна первой степени скорости $\mathbf{v}$ тела, $\mathbf{R} = -\mu \mathbf{v}$, где μ – коэффициент сопротивления.

Примечание. Положение начала отсчета на оси x соответствует среднему положению стенки ($\xi = 0$).

Вариант 29

Груз D прикреплен к системе двух недеформированных пружин жесткостью c_1 и c_2 . В некоторый момент времени груз отклоняют на величину λ_0 влево и одновременно сообщают ему

начальную скорость v_0 . Сила сопротивления движению пропорциональна первой степени скорости $\mathbf{v}$ тела, $\mathbf{R} = -\mu \mathbf{v}$, где μ – коэффициент сопротивления.

Вариант 30

Груз D прикреплен к горизонтальной крышке с помощью двух пружин жесткостью c_1 и c_2 соответственно. В некоторый момент времени груз отклоняют на величину λ_0 вниз и одновременно сообщают ему начальную скорость v_0 , направленную вниз. Сила сопротивления движению пропорциональна первой степени скорости $\mathbf{v}$ тела, $\mathbf{R} = -\mu \mathbf{v}$, где μ – коэффициент сопротивления. Сопротивлением движению груза по стенке пренебречь.

Пример. Тело D массы $m_D = 10$ кг расположено на гладкой плоскости, наклоненной под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, и прикреп-

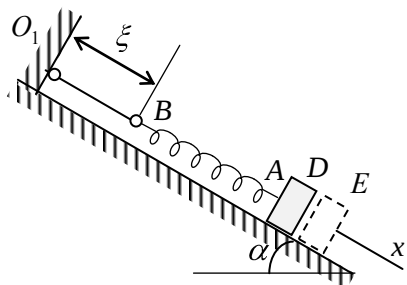


Рис. 10.2.

лено к концу A пружины, коэффициент жесткости которой $c = 36.1$ Н/см (рис. 10.2). В некоторый момент к грузу D присоединяют груз E массы $m_E = 15$ кг. В тот же момент времени верхний конец пружины B начинает двигаться вдоль наклонной плоскости по закону $O_1B = \xi = 2\sin(15t)$ см, причем точка O_1 совпадает со средним по-

ложением точки B (при $\xi = 0$). Сопротивление движению двух грузов пропорционально их скорости $\mathbf{v}$, $\mathbf{R} = -\mu \mathbf{v}$, где $\mu = 100$ (Н·с)/м – коэффициент сопротивления. Найти уравнение движения грузов D и E .

Решение. Направим оси Ox и $O_1\xi$ вдоль наклонной плоскости вниз, в сторону растяжения пружины (рис. 10.3). Начало O

координатной оси Ox совместим с положением покоя грузов D и E , соответствующим статической деформации пружины, при условии, что точка B занимает свое среднее положение ($\xi = 0$). В этом положении пружина растянута на величину $\lambda = \lambda_D + \lambda_E$,

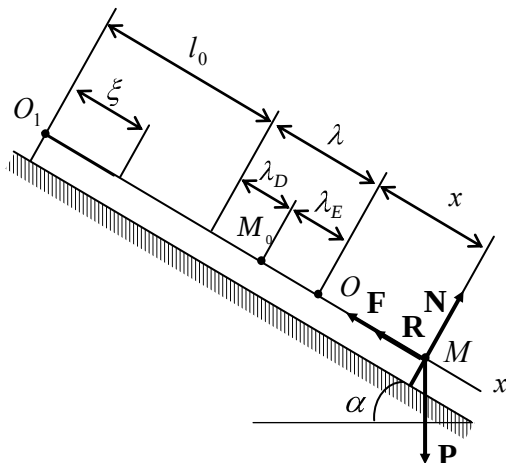


Рис. 10.3

где λ_D и λ_E – статические деформации пружины под действием груза D и E . Изобразим грузы в промежуточном положении, отстоящем от начала координат на величину x (точка M). Если бы верхний конец пружины был неподвижен, то в этом положении пружина была бы растянута на величину $(\lambda + x)$. Но при смещении вниз верхнего конца пружины на некоторую величину ξ удлинение пружины окажется меньшим на эту величину ξ , т.е. $\Delta l = \lambda + x - \xi$. Следовательно, проекция силы упругости пружины на ось x в точке M будет определяться выражением: $F_x = -c\Delta l = -c(\lambda + x - \xi)$. Проекция силы сопротивления $R_x = -\mu v_x = -\mu \dot{x}$. Таким образом, дифференциальное уравнение движения грузов в проекции на ось x имеет вид

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - c(\lambda + x - \xi) - \mu \dot{x},$$

где $m = m_D + m_E$. Учитывая, что в состоянии статического равновесия грузов $mg \sin \alpha - c\lambda = 0$ (см. гл. 2), получим

$$m\ddot{x} = -c(x - \xi) - \mu\dot{x},$$

или

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = h \sin pt, \quad (10.1)$$

где

$$2b = \mu/m = 100/(10 + 15) = 4 \text{ c}^{-1},$$

$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{36.1}{10 + 15} \cdot 100 \approx 144 \text{ c}^{-2}, \quad k = 12 \text{ c}^{-1},$$

$$h = \frac{2c}{m} = \frac{2 \cdot 36.1}{10 + 15} \cdot 100 = 288.8 \text{ см/с}^2, \quad p = 15 \text{ c}^{-1}.$$

Начальные условия для уравнения (10.1) определяются соотношениями

$$x(0) = x_0 = -\lambda_E = -\frac{m_E g \sin \alpha}{c} = -2.04 \text{ см}, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v_0 = 0.$$

Как известно, решение линейного дифференциального уравнения (10.1) складывается из общего решения x_1 соответствующего однородного уравнения

$$\ddot{x}_1 + 2b\dot{x}_1 + k^2x_1 = 0 \quad (10.2)$$

и частного решения x_2 неоднородного уравнения (10.1)

$$\ddot{x}_2 + 2b\dot{x}_2 + k^2x_2 = h \sin pt. \quad (10.3)$$

Общее решение однородного уравнения (10.2) имеет вид (см. п. 2.3)

$$x_1 = e^{-bt} [C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t]. \quad (10.4)$$

Частное решение неоднородного уравнения (10.3) будем искать в виде

$$x_2 = A_1 \cos pt + A_2 \sin pt. \quad (10.5)$$

Определив производные $\dot{x}_2$, $\ddot{x}_2$, подставив их в уравнение (10.3), получим

$$\left[2bpA_1 + (k^2 - p^2)A_2 - h \right] \sin pt + \left[(k^2 - p^2)A_1 + 2bpA_2 \right] \cos pt = 0 .$$

Чтобы полученное равенство выполнялось в любой момент времени, необходимо равенство нулю выражений в квадратных скобках. Таким образом, для определения коэффициентов A_1 и A_2 имеем систему из двух линейных уравнений

$$-2bpA_1 + (k^2 - p^2)A_2 = h, \quad (k^2 - p^2)A_1 + 2bpA_2 = 0,$$

решение которой записывается так

$$A_1 = 2bph / \Delta, \quad A_2 = -(k^2 - p^2)h / \Delta, \quad \Delta = -(k^2 - p^2)^2 - 4b^2 p^2, \quad (10.6)$$

или после подстановки численных данных

$$A_1 = -0.7472 \text{ см}, \quad A_2 = -0.0034 \text{ см}.$$

Таким образом, следовательно, решение уравнения (10.1) принимает вид

$$x = e^{-bt} \left[C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t \right] + A_1 \cos pt + A_2 \sin pt ,$$

причем скорость точки равна

$$\begin{aligned} \dot{x} = & -be^{-bt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + \\ & + e^{-bt} (-k_1 C_1 \sin(k_1 t) + k_1 C_2 \cos(k_1 t)) - A_1 p \sin pt + A_2 p \cos pt . \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определим из начальных условий: $C_1 = -1.2928 \text{ см}$, $C_2 = -0.2181 \text{ см}$. В результате уравнение движения груза имеет вид

$$\begin{aligned} x = e^{-2t} & (-1.2928 \cos k_1 t - 0.2181 \sin k_1 t) - \\ & - 0.7472 \cos pt - 0.0034 \sin pt \text{ см}. \end{aligned}$$

11. Задание 4. Теоремы о движении центра масс и об изменении количества движения системы

Механические системы, движение которых в данном разделе изучается с помощью теорем о движении центра масс системы и об изменении ее количества движения, представляют собой плоские механизмы (рис. 11.1–11.9). Прежде чем сформулировать задания, опишем эти механизмы.

Плоский механизм установлен вертикально на призматической подставке M , которая представляет собой твердое тело и может перемещаться по гладким горизонтальным направляющим. В начальный момент времени стержень OA под действием внутренних сил системы начинает вращаться вокруг жестко связанной с телом M оси O согласно закону $\varphi = \varphi(t)$ и приводит в движение остальные части механизма. Одновременно с этим вдоль продланного в теле подставки горизонтального канала из точки E , являющейся центром масс тела M , начинает двигаться материальная точка D по закону $ED = s(t)$ (для механизма на рис. 11.3 наряду с D по этому же закону вдоль стержня OA движется точечное тело 2). Расстояние между точками O и E в проекции на горизонталь равно a (для части механизмов $a = 0$). Входящие в механизмы стержни и диски являются однородными. Длина стержня OA (деталь 1) равна l , его масса – m_1 , масса детали 2 – m_2 , масса точки D – m_3 , суммарная масса подставки и тех деталей системы, которые не упомянуты выше или не отмечены специально на рисунках, равна m_0 .

Задача 1. В предположении, что тело M в начальный момент времени покоилось, для интервалов времени, пока значения угла φ не противоречат физическому смыслу, определить, используя теорему об изменении центра масс, закон движения $x_0(t)$ подставки M по направляющим и нормальную реакцию $N(t)$ направляющих. Кроме того, в предположении, что подставка M жестко прикреплена к направляющим болтам и не может двигаться, найти суммарное срезающее (горизонтальное) усилие $F(t)$ на болты.

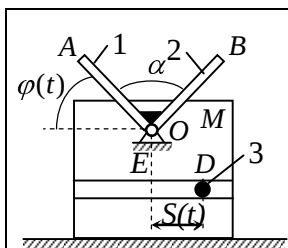
Соответствующие каждому варианту задачи номер рисунка и вид функций $\varphi(t)$ и $s(t)$ приведены в табл. 11.1. Входящие в эти функции величины ε_0 , ω_0 , v_0 , w_0 являются постоянными. На всех рисунках тело D показано в положении, когда $s > 0$. Если в таблице дано $s < 0$, то это означает, что точка D находится по другую сторону от точки E .

При решении задачи возможность опрокидывания механизма в процессе работы не учитывать и не рассматривать.

Задача 2. С помощью теоремы об изменении количества движения системы найти скорость $u(t)$ подставки M по направляю-

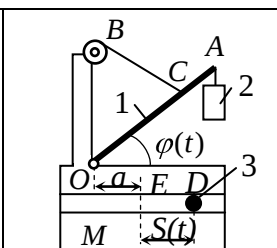
шим, если при $t_0 = 0$ она имела направленную вправо скорость u_0 , а на тело M действует постоянная по величине внешняя горизонтальная сила G , направленная влево.

Убедиться, что скорость $v(t)$ для частного случая $u_0 = 0$, $G = 0$ является производной по времени от закона движения $x_0(t)$, полученного в задаче 1.



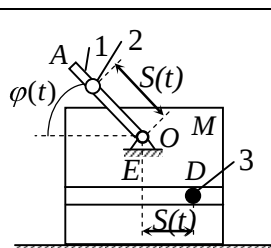
Стержни OA и OB жестко скреплены друг с другом.

Рис. 11.1



Считать, что трос с грузом 2 остается всегда вертикальным.

Рис. 11.2



Ползун 2 рассматривать как точечную массу.

Рис. 11.3

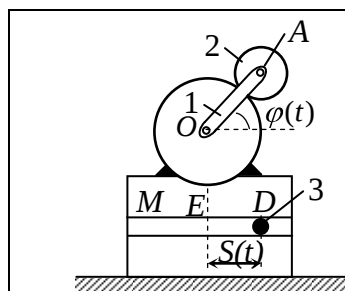


Рис. 11.4

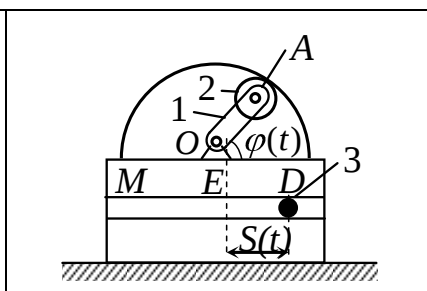


Рис. 11.5

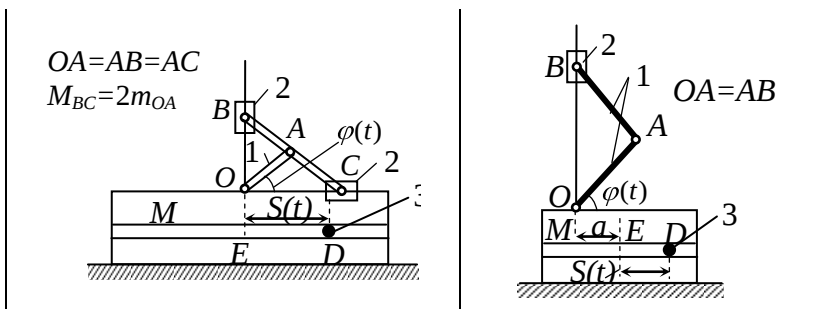


Рис.11.6

Рис.11.7

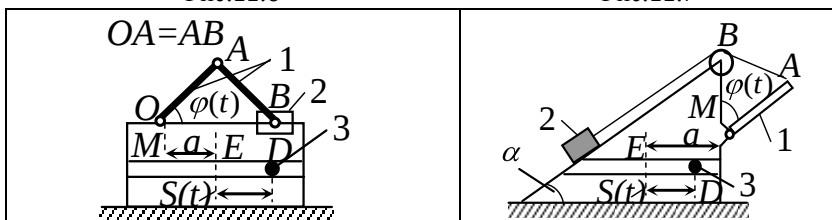


Рис. 11.8

Рис. 11.9

Примечание. Ползуны 2 (рис. 11.6–11.8) рассматривать как точечные массы, перемещающиеся без трения по своим направляющим.

Таблица 11.1

Вариант	Рисунок	$\varphi(t)$	$s(t)$	Дополнительная информация
1	2	3	4	5
1	11.1	$0.5\varepsilon_0 t^2$	$v_0 t$	$\alpha = 90^\circ$
2	11.2	$\omega_0 t$	$0.5 w_0 t^2$	$a = 0.5l$
3	11.4	$0.5\varepsilon_0 t^2$	$-v_0 t$	
4	11.5	$\omega_0 t$	$0.5 w_0 t^2$	
5	11.6	$\omega_0 t$	$-v_0 t$	$a = l$
6	11.2	$0.5\pi - \omega_0 t$	$-0.5 w_0 t^2$	$a = l$
7	11.8	$0.5\varepsilon_0 t^2$	$v_0 t$	$a = 2l$
8	11.5	$\pi - \omega_0 t$	$0.5 w_0 t^2$	
9	11.9	$0.5\varepsilon_0 t^2$	$-v_0 t$	$a = l, \alpha = 30^\circ$
10	11.4	$\pi - 0.5\varepsilon_0 t^2$	$v_0 t$	

1	2	3	4	5
11	11.7	$0.5\varepsilon_0 t^2$	$0.5 w_0 t^2$	$a = l$
12	11.6	$0.5\varepsilon_0 t^2$	$v_0 t$	$a = l$
13	11.3	$\pi - \omega_0 t$	$v_0 t$	
14	11.1	$\omega_0 t$	$0.5 w_0 t^2$	$\alpha = 90^\circ$
15	11.2	$0.5\varepsilon_0 t^2$	$v_0 t$	$a = l$
16	11.8	$\omega_0 t$	$0.5 w_0 t^2$	$a = l$
17	11.9	$0.5\pi - \omega_0 t$	$v_0 t$	$a = l, \alpha = 30^\circ$
18	11.4	$\omega_0 t$	$0.5 w_0 t^2$	
19	11.6	$\pi - 0.5\varepsilon_0 t^2$	$-v_0 t$	$a = 2l$
20	11.7	$\omega_0 t$	$0.5 w_0 t^2$	$a = l$
21	11.5	$0.5\varepsilon_0 t^2$	$v_0 t$	
22	11.2	$0.5(\pi - \varepsilon_0 t)$	$-v_0 t$	$a = 0.5l$
23	11.6	$0.5\pi - \omega_0 t$	$-0.5 w_0 t^2$	$a = l$
24	11.8	$\pi - 0.5\varepsilon_0 t^2$	$-v_0 t$	$a = 2l$
25	11.1	$0.5\varepsilon_0 t^2$	$-v_0 t$	$\alpha = 60^\circ$
26	11.4	$\pi - \omega_0 t$	$-0.5 w_0 t^2$	
27	11.5	$\pi - 0.5\varepsilon_0 t^2$	$-v_0 t$	
28	11.9	$\omega_0 t$	$-0.5 w_0 t^2$	$a = 2l, \alpha = 60^\circ$
29	11.3	$0.5\pi - \omega_0 t$	$v_0 t$	
30	11.7	$\pi - \omega_0 t$	$-0.5 w_0 t^2$	$a = l$

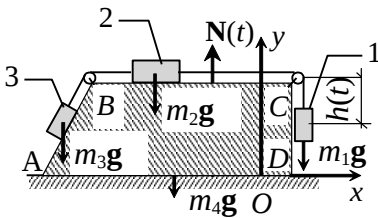


Рис. 11.10

Пример 1. Три груза массы m_1, m_2, m_3 соединены невесомыми нерастяжимыми нитями (рис. 11.10). Нити переброшены через невесомые блоки, закрепленные на трапециевидном твердом теле $ABCD$ массы m_4 . Первый груз перемещается вниз по закону

$h(t) = at^2$ ($a = \text{const}$), приводя в движение всю систему. Определить закон движения тела $ABCD$ вдоль гладкой горизонтальной

ной плоскости и его давление на эту плоскость. Угол BAD равен α , в начальный момент времени система покоилась.

Решение. На данную систему (тело $ABCD$ с закрепленными на нем блоками и грузами, соединенными нитями) действуют следующие внешние силы: вес тела $m_4\mathbf{g}$, веса грузов $m_1\mathbf{g}$, $m_2\mathbf{g}$, $m_3\mathbf{g}$ и сила нормальной реакции гладкой плоскости $\mathbf{N}$ (см. рис. 11.10). Согласно теореме о движении центра масс (5.1),

$$M\mathbf{a}_c = m_1\mathbf{g} + m_2\mathbf{g} + m_3\mathbf{g} + m_4\mathbf{g} + \mathbf{N}, \quad (11.1)$$

где $M = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$.

В проекции на горизонтальную ось Ox соотношение (11.1) дает: $M\ddot{x}_c = 0$. Следовательно, $\dot{x}_c = C_1$. Постоянная $C_1 = 0$, так как в начальный момент времени система покоилась. Но тогда $x_c = \text{const}$ или $x_c(t) = x_c(0)$ для любого момента времени t , следовательно,

$$\begin{aligned} m_1x_1(t) + m_2x_2(t) + m_3x_3(t) + m_4x_4(t) = \\ = m_1x_1(0) + m_2x_2(0) + m_3x_3(0) + m_4x_4(0), \end{aligned} \quad (11.2)$$

где x_1, x_2, x_3, x_4 – абсциссы центров масс грузов и тела.

Выберем начало O системы координат Oxy так, чтобы $x_4(0) = 0$, т.е. так, что ось Oy проходит через центр масс тела $ABCD$ в начальный момент времени. В этой системе отсчета координаты грузов и тела связаны соотношениями

$$\begin{aligned} x_1(t) = x_1(0) + x_4(t), \quad x_2(t) = x_2(0) + h(t) + x_4(t), \\ x_3(t) = x_3(0) + h(t) \cos \alpha + x_4(t). \end{aligned}$$

Подставляя эти соотношения в уравнение (11.2), получим закон движения тела $ABCD$: $x_4(t) = -(m_2 + m_3 \cos \alpha)at^2 / M$. Знак "минус" означает, что призма перемещается влево относительно плоскости.

Давление тела $ABCD$ на плоскость с точностью до знака совпадает с нормальной реакцией плоскости. Уравнение для ее определения получается, если спроектировать (11.1) на ось Oy : $M\dot{y}_c = Mg + N$. Откуда

$$N = M \dot{y}_c + Mg, \quad (11.3)$$

где ордината центра масс системы определяется соотношением

$$My_c = m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + m_4 y_4. \quad (11.4)$$

Здесь y_1, y_2, y_3, y_4 – ординаты центров масс грузов и тела. Для нахождения $\ddot{y}_c$ продифференцируем дважды по времени равенство (11.4), учитывая, что

$$y_1(t) = y_1(0) - h(t), \quad y_2(t) = y_2(0),$$

$$y_3(t) = y_3(0) + h(t) \sin \alpha, \quad y_4(t) = y_4(0).$$

Подставляя полученное в уравнение (11.3), находим

$$N(t) = Mg - 2m_1 a + 2m_3 a \sin \alpha.$$

Пример 2. Пуля веса P_1 , летящая горизонтально со скоростью u , попадает в закрепленный на неподвижной тележке ящик с песком веса P_2 . С какой скоростью будет двигаться тележка после удара, если трением колес о Землю можно пренебречь?

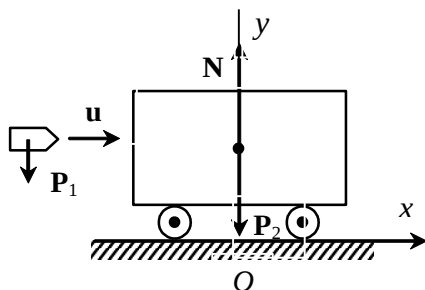


Рис. 11.11

Решение. Будем рассматривать пулю и тележку с песком как одну систему (рис. 11.11). На нее действуют внешние силы: вес пули P_1 , вес тележки P_2 , а также силы реакции колес. Поскольку трение отсутствует, то эти последние направлены вертикально вверх и их можно заменить равнодействующей N . Для решения задачи воспользуемся теоремой об изменении количества движения системы в интегральной

форме. В проекции на ось Ox (см. рис. 11.11) тогда имеем

$$Q_{2x} - Q_{1x} = \sum S_{kx}^e = \sum S_k \overset{e}{\curvearrowright},$$

где Q_{1x} – количество движения системы до удара, а Q_{2x} – после удара. Поскольку все внешние силы вертикальны, то правая часть этого уравнения равна нулю и поэтому $Q_{2x} = Q_{1x}$.

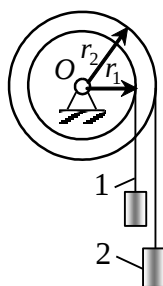
Так как до удара тележка покоилась, то $Q_{1x} = P_1 u / g$. После удара система движется как единое целое с искомой скоростью v и, следовательно, $Q_{2x} = (P_1 + P_2)v / g$. Приравнявая эти выражения, находим искомую скорость: $v = P_1 u / (P_1 + P_2)$.

12. Задание 5. Теоремы об изменении момента количества движения и кинетической энергии системы

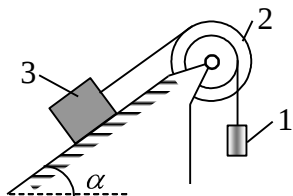
Данное индивидуальное задание включает две задачи. Первая из них должна быть решена с помощью теоремы об изменении момента количества движения, а вторая – с применением теоремы об изменении кинетической энергии системы.

Вариант 1

Задача 1. Блоки радиусами r_1 и r_2 жестко скреплены между собой и насажены на общую ось. Грузы 1 и 2 массами m_1 и m_2 , разматывая нити, намотанные на блоки, приводят их во вращение. Пренебрегая массой нитей и считая блоки однородными дисками массами M_1 и M_2 , соответственно, определить, через сколько времени скорость груза 1 станет равной v_1 , если движение начинается из состояния покоя и при вращении на блоки действует постоянный момент сопротивления M .

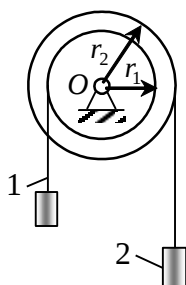


Задача 2. Груз 1 массы m_1 , опускаясь вертикально вниз, раскручивает ступенчатый блок 2 посредством невесомой и нерастяжимой нити, которая намотана на колесо блока радиуса r_1 . На большее колесо блока, имеющее радиус r_2 , намотана другая нить, второй конец которой привязан к грузу 3 массы m , скользящему по наклонной плоскости с коэффициентом трения скольжения, f , и углом наклона α . Блок состоит из однородных дисков массами μ_1 и μ_2 соответственно, жестко соединенных друг с другом и имеющих



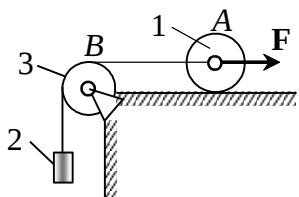
общую ось вращения. Определить скорость груза 3 в зависимости от пройденного им расстояния и его ускорение, если движение начинается из состояния покоя.

Вариант 2



Задача 1. Блоки радиусами r_1 и r_2 жестко скреплены между собой и насажены на общую ось. Груз 2 массы m_2 , разматывая намотанную на блок нить, приводит блоки во вращение и поднимает груз 1 массы m_1 . Считая, что на блоки действует момент сил сопротивления $M = \alpha\omega$, где α – постоянная, определить угловую скорость вращения блоков, если движение начинается из состояния покоя. Блоки считать

однородными дисками массами M_1 и M_2 соответственно, массой нитей пренебречь.



Задача 2. Каток 1 массы m и радиуса r катится без скольжения под действием силы F по горизонтальной плоскости и поднимает груз 2 массы m_1 при помощи невесомой нити, переброшенной через блок 3, который имеет такие же, как и каток, массу и радиус.

Определить скорость груза 2 в зависимости от пройденного им расстояния и его ускорение, если коэффициент трения качения k , участок нити AB горизонтален, а движение начинается из состояния покоя.

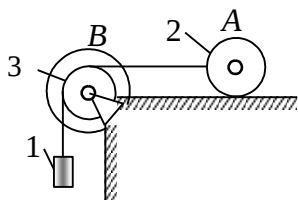


Вариант 3

Задача 1. Груз 1 массы m_1 поднимается посредством каната, навитого на барабан 2, к которому приложен постоянный вращающий момент M . Барабан 2 представляет собой однородный цилиндр радиуса r и массы m_2 . Определить угловую скорость вращения барабана как

функцию времени, если движение начинается из состояния покоя, а при вращении возникает момент M_1 сил сопротивления, пропорциональный угловой скорости ω , $M_1 = \alpha\omega$, где α – постоянная.

Задача 2. Груз 1, падая по вертикали, раскручивает ступенчатый блок 3 посредством невесомой и

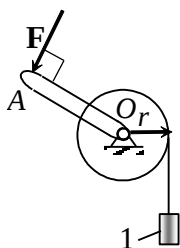


и нерастяжимой нити, которая намотана на колесо блока радиуса r_1 . На меньшее колесо блока, имеющее радиус r_2 , намотана другая нить, второй конец которой привязан к оси цилиндрического катка, катящегося без скольжения. Масса гру-

за m_1 , масса катка m_2 , коэффициент трения качения k , радиус катка r . Пренебрегая массой блока, определить скорость груза 1 в зависимости от пройденного им расстояния и его ускорение, если участок нити AB горизонтален, а движение начинается из состояния покоя.

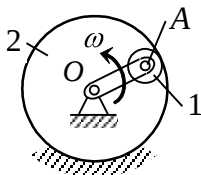
Вариант 4

Задача 1. Груз 1 массы m поднимается при помощи ворота, на который действует момент сопротивления,



пропорциональный угловой скорости его вращения, $M_1 = \alpha\omega$, где α – постоянная. Масса барабана ворота равна m_1 , радиус барабана r , длина рукоятки $OA = l$. Считая силу F , приложенную перпендикулярно к рукоятке OA , постоянной по величине, определить закон движения груза 1, если в начальный момент он покоился. Барабан считать

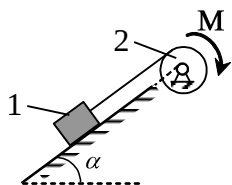
однородным цилиндром, массой рукоятки пренебречь.



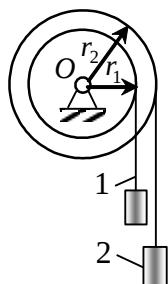
Задача 2. Кривошип OA гипоциклического механизма, расположенного в горизонтальной плоскости, вращался с постоянной угловой скоростью ω . В некоторый момент времени двигатель был отключен и под действием постоянного момента M_0 сил сопротивления на

оси сателлита (подвижной шестерни 1) механизм остановился. Определить угол поворота кривошипа до остановки, если его масса равна m_0 , масса сателлита m , r_1 – его радиус, а r – радиус неподвижной шестерни 2. Кривошип принять за однородный стержень, сателлит – за однородный диск.

Вариант 5

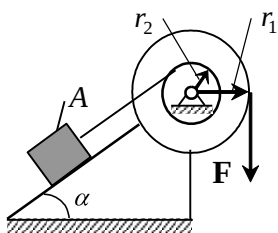


Задача 1. Груз 1 массы m_1 из состояния покоя поднимают вверх по шероховатой наклонной плоскости посредством веревки, намотанной на барабан 2, к которому ложен вращающий момент $M = at$, где a – постоянная. Определить закон движения груза 1, если коэффициент трения тела 1 о плоскость равен f , а угол наклона плоскости к горизонту α , причем при $t = 0$ груз коился. Кроме того, определить момент времени, когда груз 1 начнет движение. Барабан считать однородным цилиндром радиуса r и массы m .

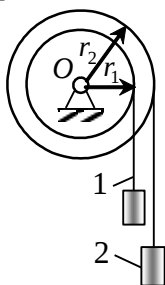


Задача 2. Блоки радиусами r_1 и r_2 жестко скреплены между собой и насажены на общую ось. Грузы 1 и 2 сами m_1 и m_2 , разматывая нити, намотанные на блоки, приводят их во вращение. При вращении на блоки действует постоянный момент сил сопротивления M . Пренебрегая массой нитей и считая блоки однородными дисками массами M_1 и M_2 соответственно, определить скорость v_1 груза 1 как функцию пройденного им расстояния и его ускорение, если движение начинается из состояния покоя.

Вариант 6

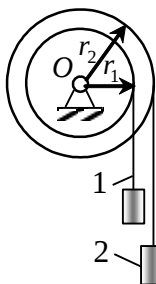


Задача 1. Два блока массами m_1 и m_2 и соответственно радиусами r_1 и r_2 жестко соединены между собой и насажены на общую ось вращения O . К концу одной веревки, намотанной на блок, прикреплен груз A массы m , поднимаемый по шероховатой наклонной плоскости с углом α наклона к горизонту. К концу другой веревки приложена постоянная сила F . Считая блоки однородными дисками и полагая, что коэффициент трения скольжения



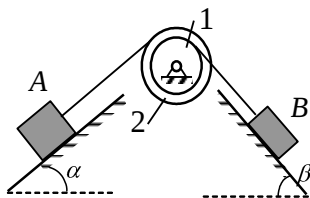
равен f , а веса веревок и трением в блоках можно пренебречь, определить зависимость угловой скорости вращения от времени, если движение началось из состояния покоя.

Задача 2. Блоки радиусами r_1 и r_2 жестко скреплены между собой и насажены на общую ось. Грузы 1 и 2 массами m_1 и m_2 , разматывая нити, намотанные на блоки, приводят их во вращение. При вращении на блоки действует момент сил сопротивления $M = a\varphi$, где a – постоянная, а φ – угол поворота. Пренебрегая массой нитей и считая блоки однородными дисками массами M_1 и M_2 соответственно, определить угловую скорость и угловое ускорение блоков как функции угла поворота φ , а также момент времени, когда система под действием сил сопротивления остановится, если движение начинается из состояния покоя.



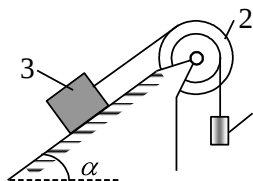
Вариант 7

Задача 1. Блоки радиусами r_1 и r_2 жестко скреплены между собой и насажены на общую ось. Грузы 1 и 2 массами m_1 и m_2 , разматывая нити, намотанные на блоки, приводят их во вращение. Пренебрегая массой нитей и считая блоки однородными дисками массами M_1 и M_2 , соответственно, определить угловое ускорение блоков, если при вращении на блоки действует момент сил со-



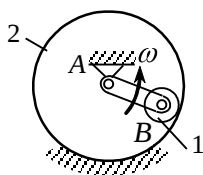
противления $M = at$, где a – постоянная, а также момент времени, когда система под действием сил сопротивления остановится, если движение начинается из состояния покоя.

Задача 2. К грузам A и B массами m_1 и m_2 соответственно прикреплены нерастяжимые нити, вторые концы которых намотаны на однородные диски 1 и 2 массами μ_1 , μ_2 и радиусами r_1 и r_2 ($r_2 > r_1$). Диски жестко соединены между собой и насажены на общую ось. Груз A , спускаясь по наклонной плоскости с углом α наклона к горизонту, раскручивает диски и поднимает груз B вверх по наклонной плоскости с углом β . Определить скорость груза A в зависимости от пройденного им расстояния и его ускорение. Силами трения и массой нитей пренебречь.



Вариант 8

Задача 1. Груз 1 массы m_1 , опускаясь вертикально вниз, раскручивает ступенчатый блок 2 посредством невесомой и нерастяжимой нити, которая намотана на колесо блока радиуса r_1 . На большее колесо блока, имеющее радиус r_2 , намотана другая нить, второй конец которой привязан к грузу 3 массы m , скользящему по наклонной плоскости с коэффициентом трения скольжения, равным f , и углом наклона α . Блок состоит из однородных дисков массами μ_1 и μ_2 соответственно, жестко соединенных друг с другом и имеющих общую ось вращения. Определить угловую скорость блока $\omega(t)$ и его угловое ускорение, если движение начинается из состояния покоя.

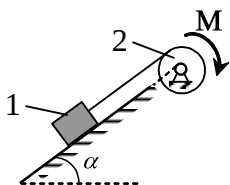


Задача 2. Кривошип BA гипоциклического механизма, расположенного в горизонтальной плоскости, вращался с постоянной угловой скоростью ω . В некоторый момент времени двигатель был отключен и под действием постоянных моментов M_B и M_A сил сопротивления на оси сателлита (подвижной шестерни 1) и на оси кривошипа механизм остановился. Определить угол поворота кривошипа до остановки, если его масса равна m_0 , масса сателлита m , r_0 – его

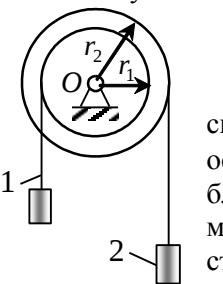
радиус, а r – радиус неподвижной шестерни 2. Кривошип принять за однородный тонкий стержень, сателлит – за однородный диск.

Вариант 9

Задача 1. Груз 1 массы m_1 из состояния покоя скользит вниз по шероховатой наклонной плоскости и посредством невесомой нити раскручивает барабан 2, на который действует момент сил сопротивления M , пропорциональный угловой скорости барабана, $M = a\omega$, где a – постоянная. Определить угловую скорость барабана как функцию времени и ускорение груза 1, если коэффициент трения тела 1 о плоскость равен f , а угол наклона плоскости к горизонту α . Барабан считать однородным цилиндром радиуса r и массы m .



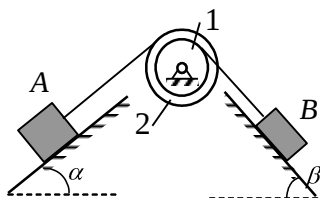
Задача 2. Зубчатые колеса 1 и 2, насаженные на неподвижные параллельные оси O_1 и O_2 , имеют внутреннее зацепление. Колесо 1 является однородным диском и имеет радиус r_1 и массу m_1 , а колесо 2 – радиус r_2 , а его масса m_2 распределена по ободу равномерно. На колесо 2 намотана невесомая нить, к концу которой прикреплен опускающийся груз 3 массы m_3 . Пренебрегая трением и считая, что движение начинается из состояния покоя, определить угловую скорость колеса 2 в зависимости от его угла поворота, а также его угловое ускорение.



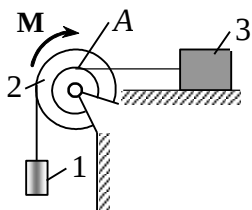
Вариант 10

Задача 1. Блоки радиусами r_1 и r_2 жестко скреплены между собой и насажены на общую ось. Груз 2 массы m_2 , разматывая намотанную на блок нить, приводит блоки во вращение и поднимает груз 1 массы m_1 . Считая, что на блоки действует момент сил сопротивления $M = at$, где a – постоянная, определить угловое ускорение бло-

ков, а также момент времени, когда система под действием сил сопротивления остановится, если движение начинается из ния покоя. Блоки считать однородными дисками массами M_1 и M_2 соответственно, массой нитей пренебречь.



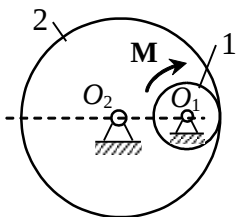
Задача 2. К грузам А и В массами m_1 и m_2 соответственно прикреплены нерастяжимые нити, вторые концы которых намотаны на однородные диски 1 и 2 массами μ_1 , μ_2 и радиусами r_1 и r_2 ($r_2 > r_1$). Диски жестко соединены между собой и насажены на общую ось. Груз В, спускаясь по наклонной плоскости с углом β наклона к горизонту, раскручивает диски и поднимает груз А вверх по наклонной плоскости с углом α . В блоке действует постоянный момент сил сопротивления M . Определить скорость груза В в зависимости от пройденного им расстояния и его ускорение. Силами трения и массой нитей пренебречь.



Вариант 11

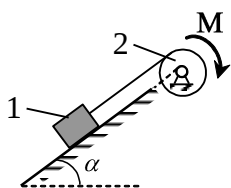
Задача 1. Груз 1 массы m_1 , падая по вертикали, раскручивает ступенчатый блок 2 посредством невесомой и нерастяжимой нити, которая намотана на колесо блока радиуса r_1 . На меньшее колесо А блока, имеющее радиус r_2 , намотана другая нить, второй конец которой привязан к грузу 3 массы m , скользящему по горизонтальной плоскости с коэффициентом трения скольжения, равным f . Блок состоит из однородных дисков массами μ_1 и μ_2 соответственно, жестко соединенных друг с другом и имеющих общую ось вращения. При вращении блока на него действует постоянный момент сил сопротивления M . Определить угловую скорость вращения блока как функцию времени и ускорение груза 3, если движение начинается из состояния покоя.

Задача 2. Зубчатые колеса 1 и 2, насаженные на неподвижные параллельные оси O_1 и O_2 , имеют внутреннее зацепление.

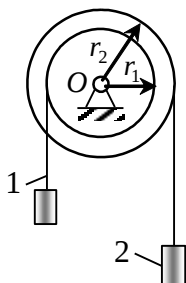


Колесо 1 радиуса r_1 и массы m_1 , начальная угловая скорость которого равна нулю, приводится в движение вращающим моментом $M = a\varphi_1$, где a – постоянная, а φ_1 – угол поворота колеса 1. Масса m_2 колеса 2 распределена по ободу равномерно. Считая колесо 1 однородным диском и пренебрегая трением, определить его угловую скорость в зависимости от φ_1 , а также его угловое ускорение.

Вариант 12



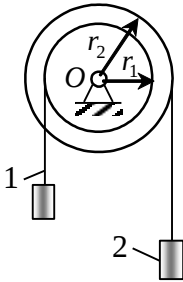
Задача 1. Груз 1 массы m_1 из состояния покоя поднимают вверх по шероховатой наклонной плоскости посредством веревки, намотанной на барабан 2, к которому приложен вращающий момент $M = at^2$, где a – постоянная. Определить зависимость угловой скорости барабана от времени, если коэффициент трения тела 1 о плоскость равен f , а угол наклона плоскости к горизонту α , причем при $t = 0$ груз покоился. Кроме того, определить момент времени, когда груз 1 начнет движение. Барабан считать однородным цилиндром радиуса r и массы m .



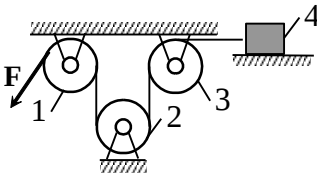
Задача 2. Блоки радиусами r_1 и r_2 жестко скреплены между собой и насажены на общую ось. Груз 2 массы m_2 , разматывая намотанную на блок нить, приводит блоки во вращение и поднимает груз 1 массы m_1 . При вращении на блоки действует постоянный момент сил сопротивления M . Пренебрегая массой нитей и считая блоки однородными дисками массами M_1 и M_2 соответственно, определить скорость груза 2 v_2 как функцию пройденного им расстояния и его ускорение, если движение начинается из состояния покоя.

Вариант 13

Задача 1. Блоки радиусами r_1 и r_2 жестко скреплены между собой и насажены на общую ось. Груз 2 массы m_2 , разматывая намотанную на блок нить, приводит блоки во вращение и поднимает груз 1 массы m_1 . Считая, что на блоки действует постоянный момент сил сопротивления M , определить скорость груза 1 как функцию времени t , если движение начинается из состояния покоя. Блоки считать однородными дисками массами M_1 и M_2 соответственно. Массой нитей пренебречь.

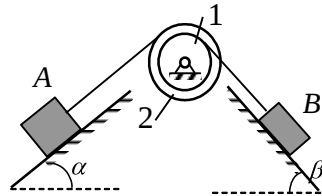


Задача 2. Через блоки 1, 2 и 3 переброшена невесомая нерастяжимая нить, к одному концу которой прикреплен груз 4 массы m , а к другому приложена постоянная сила F . Масса каждого блока равна m_0 и распределена по ободу равномерно. Считая, что груз 4 движется по горизонтальной плоскости с коэффициентом трения f и движение начинается из состояния покоя, определить скорость груза в зависимости от пройденного им пути и его ускорение.

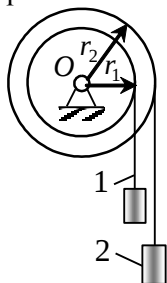


Вариант 14

Задача 1. К грузам A и B массами m_1 и m_2 соответственно прикреплены нерастяжимые нити, вторые концы которых намотаны на однородные диски 1 и 2 массами μ_1 , μ_2 и радиусами r_1 и r_2 ($r_2 > r_1$). Диски жестко соединены между собой и насажены на общую ось. Груз A , спускаясь по наклонной плоскости с углом α наклона к горизонту, раскручивает диски и поднимает груз B вверх по наклонной плоскости с углом β . Определить угловую скорость вращения блока как функцию времени и ускорение груза A . Силами трения и массой нитей пренебречь, движение начинается из состояния покоя.



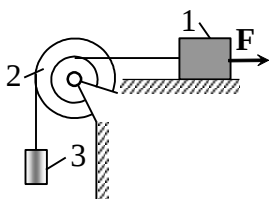
Задача 2. Блоки радиусами r_1 и r_2 жестко скреплены между собой и насажены на общую ось. Грузы 1 и 2 массами m_1 и m_2 , разматывая нити, намотанные на блоки, приводят их во вращение.



При вращении на блоки действует момент сил сопротивления $M = a\varphi^2$, где a – постоянная, а φ – угол поворота. Пренебрегая массой нитей и считая блоки однородными дисками массами M_1 и M_2 соответственно, определить угловую скорость и угловое ускорение блоков как функции угла поворота φ , если движение начинается из состояния покоя.

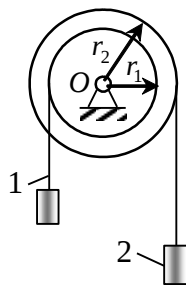
Вариант 15

Задача 1. Груз 1 массы m_1 , скользящий под действием постоянной горизонтальной силы F по горизонтальной плоскости с коэффициентом трения скольжения f , раскручивает ступенчатый блок 2 посредством невесомой и нерастяжимой нити, которая намотана на колесо блока радиуса r_1 . На большее колесо блока, имеющее радиус r_2 , намотана другая нить, второй конец которой привязан к грузу 3 массы m .



Блок состоит из однородных дисков массами μ_1 и μ_2 соответственно, жестко соединенных друг с другом и имеющих общую ось вращения. Определить угловую скорость вращения блока как функцию времени и ускорение груза 3, если движение начинается из состояния покоя.

Задача 2. Блоки радиусами r_1 и r_2 жестко скреплены между собой и насажены на общую ось. Груз 2 массы m_2 , разматывая намотанную на блок нить, приводит блоки во вращение и поднимает груз 1 массы m_1 . При вращении на блоки действует момент сил сопротивления $M = a\varphi$, где a – постоянная, а φ – угол поворота. Пренебрегая массой нитей и считая блоки од-

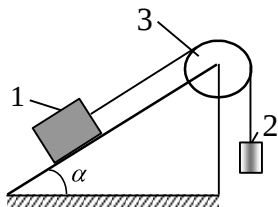


нородными дисками массами M_1 и M_2 соответственно, определить угловую скорость и угловое ускорение блоков как функции угла поворота φ , если движение начнется из состояния покоя.

Вариант 16



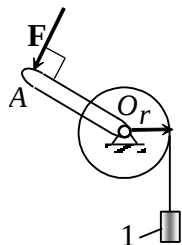
Задача 1. Груз 1 массы m_1 поднимается посредством каната, навитого на барабан 2, к которому приложен вращающий момент $M = at$, где a – постоянная. В начальные моменты времени, из-за малости величины вращающего момента, груз на самом деле будет опускаться и лишь с некоторого момента времени начнет подниматься. Полагая, что движение начинается из состояния покоя, определить угловую скорость вращения барабана как функцию времени, а также момент времени, когда система остановится и барабан начнет вращаться в другую сторону. Барабан 2 считать однородным цилиндром радиуса r и массы m_2 .



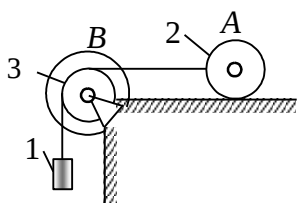
Задача 2. Грузы 1 и 2 массами m_1 и m_2 соединены невесомой нерастяжимой нитью, переброшенной через блок 3 радиуса r и массы m . Груз 1, опускаясь вниз по гладкой наклонной плоскости, поднимает груз 2 вверх. Считая блок однородным диском и полагая, что при вращении блока возникает постоянный момент сил сопротивления M , определить скорость груза 2 в зависимости от пройденного им расстояния и его ускорение, если угол наклона плоскости к горизонту α . Движение начинается из состояния покоя.

Вариант 17

Задача 1. Груз 1 массы m поднимается при помощи ворота (жестко соединенных барабана и стержня), на который действует момент сил сопротивления $M_1 = at$, где a – постоянная. Масса барабана ворота равна m_1 , радиус барабана r , длина рукоятки $OA = l$. Считая, что сила F приложена

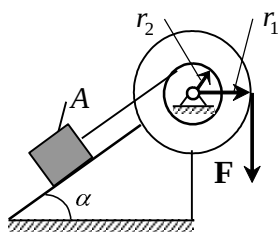


перпендикулярно к рукоятке OA и постоянна по величине, определить закон движения груза 1 и момент времени, когда он остановится, если в начальный момент груз покоился. Барабан считать однородным цилиндром, массой рукоятки пренебречь.

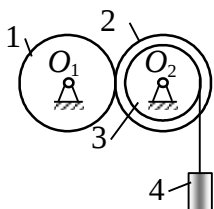


Задача 2. Груз 1, опускаясь по вертикали, посредством невесомой и нерастяжимой нити, переброшенной через блок 3 массы m_3 , заставляет катиться без скольжения однородный цилиндрический каток 2, на который намотан второй конец нити. Масса груза m_1 , масса катка m_2 , коэффициент трения качения k , радиусы катка и блока r . Определить скорость груза 1 в зависимости от пройденного им расстояния и его ускорение, если участок нити AB горизонтален, а движение начинается из состояния покоя.

Вариант 18



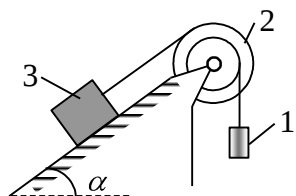
Задача 1. Два блока массами m_1 и m_2 и радиусами r_1 и r_2 соответственно жестко соединены между собой и насажены на общую ось вращения O . К концу одной веревки, намотанной на блок, прикреплен груз A массы m , поднимаемый по наклонной плоскости с углом α наклона к горизонту и с коэффициентом трения f . К концу другой веревки приложена сила $F = at$, где a – постоянная. Считая, что блоки являются однородными дисками, а веса веревок и трением в блоках можно пренебречь, определить зависимость угловой скорости вращения от времени, если движение началось из состояния покоя. Кроме того, определить момент времени, когда груз A начнет движение.



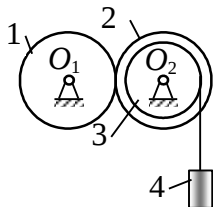
Задача 2. На неподвижную горизонтальную ось O_1 насажено зубчатое колесо 1 радиуса r_1 и массы m_1 , а на параллельную ей ось O_2 насажены жестко скрепленные между собой зубчатое колесо 2 таких же радиуса и массы и вал

3 радиуса r_2 и массы m_2 . На вал намотана невесомая веревка, к концу которой прикреплен груз 4 массы m . Считая колеса 1 и 2 однородными дисками, а вал однородным цилиндром, определить скорость и ускорение груза 4, если он опустился вниз на расстояние h без начальной скорости.

Вариант 19

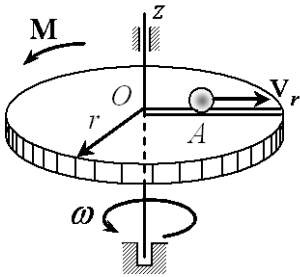


Задача 1. Груз 1 массы m_1 , опускаясь вертикально вниз, раскручивает ступенчатый блок 2 посредством невесомой и нерастяжимой нити, которая намотана на колесо блока радиуса r_1 . На большее колесо блока, имеющее радиус r_2 , намотана другая нить, второй конец которой привязан к грузу 3 массы m , скользящему по гладкой наклонной плоскости с углом наклона α . Блок состоит из однородных дисков массами μ_1 и μ_2 соответственно, жестко соединенных друг с другом и имеющих общую ось вращения, причем при вращении на блок действует момент сил сопротивления $M = at$, где a – постоянная. Определить угловую скорость блока $\omega(t)$ и момент его вторичной остановки, если движение начинается из состояния покоя.

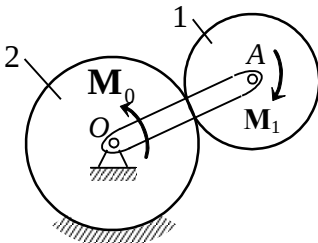


Задача 2. На неподвижную горизонтальную ось O_1 насажено зубчатое колесо 1 радиуса r_1 и массы m_1 , а на параллельную ей ось O_2 насажены жестко скрепленные между собой зубчатое колесо 2 радиуса r_2 и массы m_2 и гладкое колесо 3 радиуса r_3 и массы m_3 . На колесо 3 намотана невесомая веревка, к концу которой прикреплен груз 4 массы m . Считая все колеса однородными дисками, определить скорость и ускорение груза 4, если он опустился вниз на расстояние h без начальной скорости.

Вариант 20

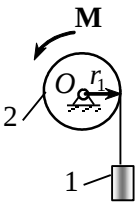


Задача 1. Однородный горизонтальный диск радиуса r и массы m может вращаться вокруг проходящей через его центр O вертикальной оси. Вдоль радиуса OA по направляющей может двигаться точечное тело A массы m_0 . В начальный момент времени к диску приложили вращающий момент $M = at$, где a – постоянная, а тело A начало двигаться от точки O с постоянной относительной скоростью $v_r = v_0$. Определить зависимость угловой скорости вращения $\omega(t)$ и ее величину, когда тело A достигнет края диска.



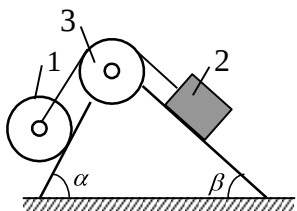
Задача 2. К кривошипу OA эпициклического механизма, расположенного в горизонтальной плоскости, приложен вращающий момент M_0 . На оси сателлита (подвижной шестерни 1) действует постоянный момент M_1 сил сопротивления. Считая кривошип тонким однородным стержнем массы m_0 , а сателлит – однородным диском массы m_1 и радиуса r_1 , определить угловую скорость кривошипа как функцию угла поворота и его угловое ускорение, если в начальный момент система находилась в покое, а радиус неподвижной шестерни 2 равен r_2 .

Вариант 21



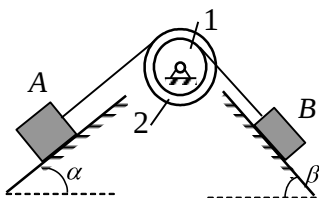
Задача 1. Груз 1 массы m_1 поднимается посредством каната, навитого на барабан 2, к которому приложен вращающий момент $M = at^2$, где a – постоянная. В начальные моменты времени, из-за малости величины вращающего момента, груз на самом деле будет опускаться. И лишь с некоторого момента времени начнет подниматься. Полагая, что движение начинается из состояния покоя, определить угловую

скорость вращения барабана как функцию времени, а также момент времени, когда система остановится и барабан начнет щаться в другую сторону. Барабан 2 считать однородным цилиндром радиуса r и массы m_2 .

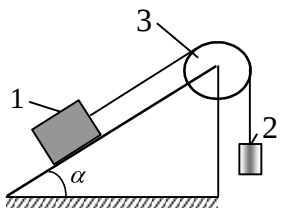


Задача 2. Каток 1, который катится без скольжения вниз по наклонной плоскости с углом α наклона к горизонту, с помощью невесомой и нерастяжимой нити поднимает из состояния покоя груз 2 массы m_1 вверх по наклонной плоскости с углом β . Нить перекинута через блок 3. Считая каток 1 и блок 3 однородными дисками массы m и радиусом r каждый, определить скорость тела 2 в зависимости от пройденного им пути и его ускорение. Коэффициент трения скольжения f , трением качения пренебречь.

Вариант 22



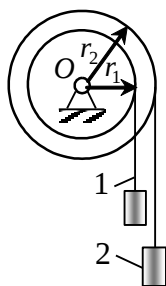
Задача 1. К грузам A и B массами m_1 и m_2 соответственно прикреплены нерастяжимые нити, вторые концы которых намотаны на однородные диски 1 и 2 массами μ_1 , μ_2 и радиусами r_1 и r_2 ($r_2 > r_1$). Диски жестко соединены между собой и насажены на общую ось. Груз B , спускаясь по наклонной плоскости с углом β наклона к горизонту, раскручивает диски и поднимает груз A вверх по наклонной плоскости с углом α , при этом на блок действует постоянный момент сил сопротивления M . Определить угловую скорость вращения блока как функцию времени и ускорение груза B . Силами трения и массой нитей пренебречь, движение начинается из состояния покоя.



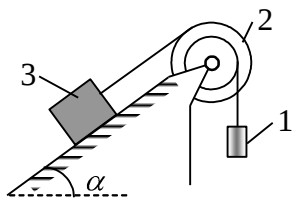
Задача 2. Грузы 1 и 2 массами m_1 и m_2 соединены невесомой нерастяжимой нитью, переброшенной через блок 3 радиуса r и массы m . Груз 2, опускаясь, поднимает груз 1 вверх по шероховатой

наклонной плоскости. Считая блок однородным диском, определить скорость груза 2 в зависимости от пройденного им расстояния и его ускорение, если коэффициент трения скольжения f , а угол наклона плоскости к горизонту α . Движение начинается из состояния покоя.

Вариант 23



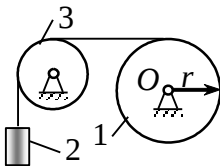
Задача 1. Блоки радиусами r_1 и r_2 жестко скреплены между собой и насажены на общую ось. Грузы 1 и 2 массами m_1 и m_2 , разматывая нити, намотанные на блоки, приводят их во вращение. Пренебрегая массой нитей и считая блоки однородными дисками массами M_1 и M_2 соответственно, определить скорость груза 2 как функцию времени, если движение начинается из состояния покоя и при вращении на блоки действует момент сил сопротивления $M = a\omega$, где a – постоянная.



Задача 2. Груз 1 массы m_1 , опускаясь вертикально вниз, раскручивает ступенчатый блок 2 посредством невесомой и нерастяжимой нити, которая намотана на колесо блока радиуса r_1 . На большее колесо блока, имеющее радиус r_2 , намотана другая нить, второй конец которой привязан к грузу 3 массы m , скользящему по наклонной плоскости с коэффициентом трения скольжения, равным f , и углом наклона α . Блок состоит из однородных дисков массами μ_1 и μ_2 соответственно, жестко соединенных друг с другом и имеющих общую ось вращения. Определить скорость груза 3 в зависимости от пройденного им расстояния и его ускорение, если движение начинается из состояния покоя.

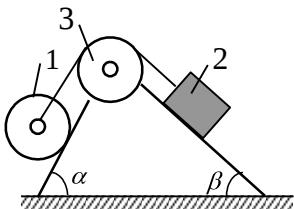
Вариант 24

Задача 1. Барабан 1 массы m_1 и радиуса r приводится во вращение посредством груза 2 массы m_2 , привязанного к концу нерастяжимого троса. Трос переброшен через идеальный блок 3 и



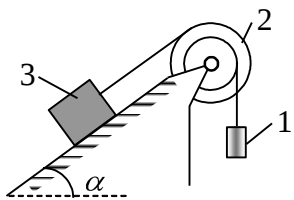
намотан на барабан 1. При вращении барабана появляется момент сил сопротивления M , пропорциональный времени, $M = at$, где a – постоянная. Полагая, что движение начинается из состояния покоя, определить зависимость угловой скорости барабана от времени и момент времени, когда система снова остановится. Барабан считать однородным цилиндром, массой каната пренебречь.

Задача 2. Груз 1 массы m_1 , спускаясь по наклонной плоскости с углом β наклона к горизонту, с помощью невесомой и нерастяжимой нити поднимает из состояния покоя каток 2,

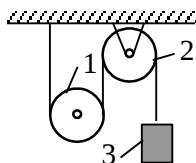


который катится без скольжения по наклонной плоскости с углом α . Нить перекинута через блок 3. Считая каток 2 и блок 3 однородными дисками массы m и радиуса r каждый, определить скорость тела 1 в зависимости от пройденного им пути и его ускорение. Коэффициент трения скольжения f , трением качения пренебречь.

Вариант 25

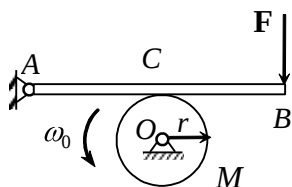


Задача 1. Груз 1 массы m_1 , опускаясь вертикально вниз, раскручивает ступенчатый блок 2 посредством невесомой и нерастяжимой нити, которая намотана на колесо блока радиуса r_1 . На большее колесо блока, имеющее радиус r_2 , намотана другая нить, второй конец которой привязан к грузу 3 массы m , скользящему по гладкой наклонной плоскости с углом наклона α . Блок состоит из однородных дисков массами μ_1 и μ_2 соответственно, жестко соединенных друг с другом, причем при вращении на блок действует момент сил сопротивления $M = at^2$, где a – постоянная. Определить скорость $v_1(t)$ груза 1 и момент его остановки, если движение начинается из состояния покоя.

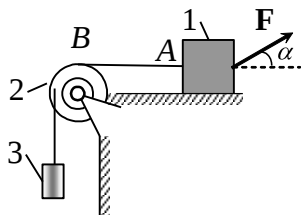


Задача 2. Нить, один конец которой плен неподвижно, огибает подвижный блок 1 (масса m , радиус r , момент инерции относительно центра масс J) и неподвижный блок 2 с тем же радиусом и моментом инерции J_1 . На другом конце нити подвешен груз 3 массы m_0 . Считая свободные участки нити вертикальными, определить скорость и ускорение груза 3, если он опустил вниз на расстояние h без начальной скорости.

Вариант 26

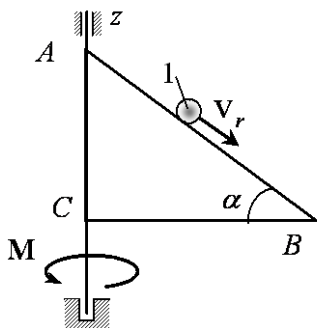


Задача 1. Шкив M , вращающийся с угловой скоростью ω_0 , тормозится при помощи ручного тормоза AB . Сила, с которой давят на ручку тормоза, $F = at$, где a — постоянная. Считая шкив однородным диском радиуса r , определить, через какое время шкив остановится и сколько он совершит оборотов, если коэффициент трения между тормозом и шкивом f , длина рукоятки $AB = l$, расстояние $AC = b$.



Задача 2. Груз 1 массы m движется по горизонтальной плоскости под действием постоянной силы F , направленной под углом α к горизонту, и при помощи нити вращает ступенчатый блок 2, представляющий собой два однородных диска, жестко соединенных друг с другом и имеющих общую ось вращения. На больший диск, имеющий радиус r_1 и массу m_1 , намотана нить от груза 1, а на меньший, имеющий радиус r_2 и массу m_2 , намотана другая нить, ко второму концу которой прикреплен груз 3 массы m_3 . Определить скорость груза 1 в зависимости от пройденного им расстояния и его ускорение, если коэффициент трения скольжения равен f , участок нити AB горизонтален, а движение начинается из состояния покоя.

Вариант 27

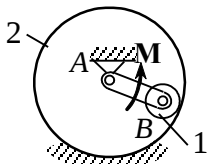


Задача 1. Находящаяся в вертикальной плоскости однородная пластина в виде прямоугольного треугольника ABC может вращаться вокруг вертикальной оси z , совпадающей со стороной AC . Масса пластины m , ее радиус инерции относительно указанной оси равен ρ . В начальный момент времени из вершины A вдоль стороны AB начинает двигаться точечное тело 1 массы m_1 с относительной

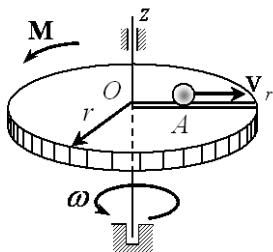
скоростью $v_r = at$, где a – постоянная, а к пластине прикладывается вращающий момент $M = bt$, где b – постоянная. Определить угловое ускорение пластины. Угол наклона стороны AB к горизонту равен α .

Задача 2. Кривошип BA гипоциклического механизма, расположенного в горизонтальной плоскости, вращается из состояния покоя под действием постоянного момента M и приводит в движение сателлит (подвижную шестерню 1). Считая кривошип тонким однородным стержнем массы m_0 , а сателлит – однородным диском

массы m_1 и радиуса r_1 , определить угловую скорость кривошипа как функцию угла поворота и его угловое ускорение. Радиус неподвижной шестерни 2 равен r_2 .

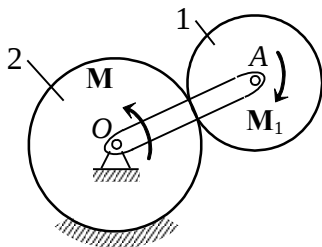


Вариант 28



Задача 1. Однородный горизонтальный диск радиуса r и массы m может вращаться вокруг проходящей через его центр O вертикальной оси. Вдоль радиуса OA по направляющей может двигаться точечное тело A массы m_0 . В начальный момент времени к диску приложили постоянный вращающий момент M , а тело A начало двигаться от точки O с относи-

тельной скоростью $v_r = at$, где a – постоянная. Определить угловое ускорение диска.

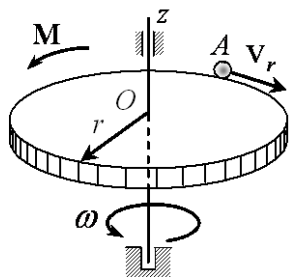


(подвижную шестерню 1) – однородным диском массы m_1 и радиуса r_1 , определить угловую скорость кривошипа как функцию угла поворота и его угловое ускорение, если в начальный момент система находилась в покое, а радиус неподвижной шестерни 2 равен r_2 .

Задача 2.

К кривошипу OA эпициклического механизма, расположенного в горизонтальной плоскости, приложен вращающий момент $M = M_0 - a\omega$, где M_0 и a – положительные постоянные, а ω – угловая скорость кривошипа. Считая кривошип тонким однородным стержнем массы m_0 , а сателлит

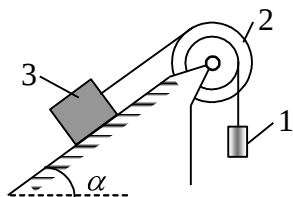
Вариант 29



угловое ускорение диска.

Задача 1.

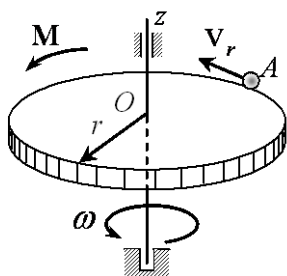
Однородный горизонтальный диск радиуса r и массы m вращается вокруг проходящей через его центр O вертикальной оси под действием момента $M = at$, где a – постоянная. По краю диска в противоположном вращению направлении движется точечное тело A массы m_0 с относительной скоростью $v_r = at$, где a – постоянная. Определить



Задача 2. Груз 1 массы m_1 , опускаясь по вертикали, раскручивает ступенчатый блок 2 посредством невесомой и нерастяжимой нити, которая намотана на колесо блока радиуса r_1 . На меньшее колесо блока, имеющее радиус r_2 , намотана другая нить, второй конец которой

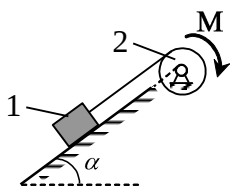
привязан к грузу 3 массы m_3 , скользящему по горизонтальной плоскости с коэффициентом трения скольжения равным f . Блок состоит из однородных дисков массами μ_1 и μ_2 соответственно, жестко соединенных друг с другом и имеющих общую ось вращения. При вращении блока на него действует постоянный момент сил сопротивления M_c . Определить скорость груза 3 в зависимости от пройденного им расстояния и его ускорение, если движение начинается из состояния покоя.

Вариант 30



Задача 1. Однородный горизонтальный диск радиуса r и массы m вращается вокруг проходящей через его центр O вертикальной оси под действием момента $M = at$, где a – постоянная. По краю диска в направлении его вращения движется точечное тело A массы m_0 с относительной скоростью $v_r = at^2$, где a – постоянная. Определить угловое ускорение диска.

Задача 2. К барабану 1 ворота радиуса r_1 и массы m_1 при $t = 0$ приложен вращающий момент $M = a\varphi$, где a – постоянная, а φ – угол поворота. При вращении барабана по наклонной плоскости с



углом α при помощи намотанного на барабан невесомого троса из состояния покоя поднимается груз 2 массы m . Считая, что коэффициент трения скольжения равен f , определить угловую скорость вращения барабана в зависимости от угла φ . Определить также ускорение груза 2 и момент времени, когда груз начнет движение.

Пример 1. Барабан 1 веса P начинает раскручиваться из состояния покоя под действием груза 2 веса Q (рис. 12.1). Определить зависимость угловой скорости вращения барабана от времени. Весом нити и трением барабана об ось пренебречь, барабан считать однородным диском радиуса r .

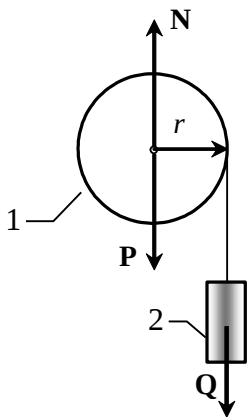


Рис. 12.1

Решение. В качестве системы возьмем совокупность тел барабан + нить + груз (см. рис. 12.1). Тогда внешними силами, действующими на выбранную систему, являются: силы тяжести барабана $\mathbf{P}$ и груза $\mathbf{Q}$, а также реакция оси $\mathbf{N}$. Направим ось Oz вдоль оси вращения барабана и запишем теорему об изменении момента импульса K_z системы в проекции на эту ось

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z \left(\mathbf{F}_k^e \right). \quad (12.1)$$

Моменты сил $\mathbf{P}$ и $\mathbf{N}$ относительно выбранной оси равны нулю, так как линия их действия проходит через ось, а момент силы $\mathbf{Q}$ есть $M_z(\mathbf{Q}) = -Qr$. Момент импульса системы складывается из моментов импульса барабана 1 (K_{z1}) и груза 2 (K_{z2}), относительно данной оси: $K_z = K_{z1} + K_{z2}$, где $K_{z1} = -J_z \omega = -(Pr^2/2g)$, а $K_{z2} = -(Qvr/g) = -(Q\omega r^2/g)$. Подставляя все эти выражения в (12.1), приходим к уравнению

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Qg}{r(P+Q)},$$

интегрируя которое с учетом начального условия $\omega(0) = 0$, получаем искомый закон изменения угловой скорости

$$\omega(t) = Qgt/[r(P+Q)].$$

Пример 2. Доска веса $\mathbf{P}$ положена на два катка веса $\mathbf{Q}$ каж-

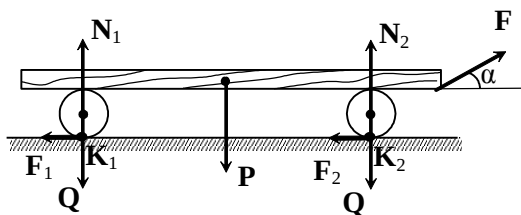


Рис. 12.2

дый. На доску действует постоянная сила $\mathbf{F}$, составляющая с горизонтом угол α (рис. 12.2). Катки являются однородными дисками, а проскальзывания катков с доской и с горизонталь-

ной плоскостью нет. В начальный момент времени система покоилась. Определить ускорение доски.

Решение. Исследуемой механической системой в данной задаче является доска вместе с катками. Для решения задачи применим теорему об изменении кинетической энергии: $T_2 - T_1 = \sum A^e - \sum A^i$. В качестве T_2 и T_1 возьмем значения кинетической энергии системы в произвольный момент времени $T_2 = T(t)$ и в начальный момент времени $T_1 = T(0)$. По условию задачи в начальный момент времени система покоилась, поэтому $T(0) = 0$. Кинетическая энергия в момент времени t складывается из кинетической энергии доски T_d и двух катков $2T_k$: $T(t) = T_d + 2T_k$. Так как доска движется поступательно, то $T_d = PV^2/2g$. Каждый из катков совершает плоское движение, поэтому, согласно теореме Кенига,

$$T_k = QV_c^2/2g + J_c\omega^2/2,$$

где V_c – скорость оси катка, ω – угловая скорость его вращения, а J_c – момент инерции катка относительно его оси. Так как каток является однородным диском, то $J_c = Qr^2/2g$, где r – радиус катка. Учитывая теперь условие отсутствия проскальзывания катков с доской и с плоскостью, выпишем кинематические соотношения, связывающие V , V_c и ω : $V = 2V_c$, $V_c = \omega r$. Следовательно, $T_k = 3QV^2/16g$, и тогда $T(t) = (8P + 3Q)V^2/16g$.

Вычислим теперь работу всех внешних и внутренних сил за интервал времени от 0 до t . Так как система состоит из абсолютно твердых тел и при этом проскальзывание между доской и катками отсутствует, то сумма работ всех внутренних сил $\sum A^i = 0$. Внешними силами, действующими на систему, являются силы тяжести доски $\mathbf{P}$ и катков $\mathbf{Q}$, постоянная сила $\mathbf{F}$, нормальные реакции плоскости $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$ и силы трения между катками и плоскостью $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, приложенные в точках контакта K_1 и K_2 катков (см. рис. 12.2). Из всех сил работу совершает

только сила $\mathbf{F}$, т.е. $\sum A^e = FS \cos \alpha$, где S – перемещение доски за время t . Действительно, силы тяжести работу не совершают, так как перемещения точек приложения этих сил перпендикулярны их направлениям. Нормальные же реакции $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ и силы трения $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ работу не совершают, так как они приложены к мгновенным центрам скоростей K_1 и K_2 катков (в силу отсутствия проскальзывания между катками и плоскостью). Поэтому элементарные перемещения этих точек равны нулю $ds_{K_1} = ds_{K_2} = 0$, тем самым равна нулю и элементарная работа указанных сил. Следовательно, равна нулю и суммарная их работа за время от 0 до t .

Таким образом, теорема об изменении кинетической энергии в данном случае имеет вид

$$(8P + 3Q)V^2 / 16g = FS \cos \alpha. \quad (12.2)$$

Для определения ускорения доски a продифференцируем равенство (12.2) по времени

$$(8P + 3Q)Va / 8g = F\dot{S} \cos \alpha.$$

Учитывая теперь, что $\dot{S} = V$ и сокращая последнее равенство на общий множитель V , окончательно получаем

$$a = 8Fg \cos \alpha / (8P + 3Q).$$

13. Задание 6. Физический маятник

Задача 1. Физический маятник представляет собой твердое тело (варианты 1–30), состоящее из круглой или полукруглой однородной пластины диаметром $d = 0.2$ м, однородного стержня длиной $l = 0.8$ м и пластины с вырезом. Форма пластин с вырезом варьируется. Так, в вариантах 1–5 она имеет форму полукруга радиусом $R = 1$ м, в вариантах 6–10 – это правильный шестиугольник со стороной $R = 1$ м, в вариантах 11–15 и 21–25 – квадрат со стороной $R = 1$ м, в вариантах 16–20 – правильный треугольник со стороной $R = 1$ м, в вариантах 26–30 – сектор с центральным углом 270° и 90° . Вырез(ы) изображены на рис. 13.1 и имеют характерный размер $r = 0.25$ м. Масса погонного метра стержня

$\rho_1 = 10 \text{ кг/м}$, масса 1 м^2 пластин $\rho_2 = 150 \text{ кг/м}^2$. Определить закон движения малых колебаний физического маятника в поле тяжести. Начальное положение маятника и его начальная угловая скорость даны в табл. 13.1.

Задача 2. На твердое тело, описанное в задаче 1 (варианты 1–30 на рис. 13.1), действует в отсутствии силы тяжести в плоскости движения маятника вращающий момент $M_z = bt + c$, где постоянные b и c даются в табл. 13.1. Найти закон вращения данного тела и определить для произвольного момента времени кинетическую энергию, кинетический момент относительно оси вращения и работу, совершенную внешними силами. Начальное положение тела и его начальная угловая скорость даны в табл. 13.1.

Таблица 13.1

Варианты	φ_0	$\dot{\varphi}_0$	b	c
1, 6, 11, 16, 21, 26	$\pi/25$	0.0	2	-32
2, 7, 12, 17, 22, 27	$\pi/35$	0.2	-4	16
3, 8, 13, 18, 23, 28	$\pi/45$	0.4	8	-8
4, 9, 14, 19, 24, 29	$\pi/55$	0.5	-16	4
5, 10, 15, 20, 25, 30	$\pi/65$	0.6	32	-2

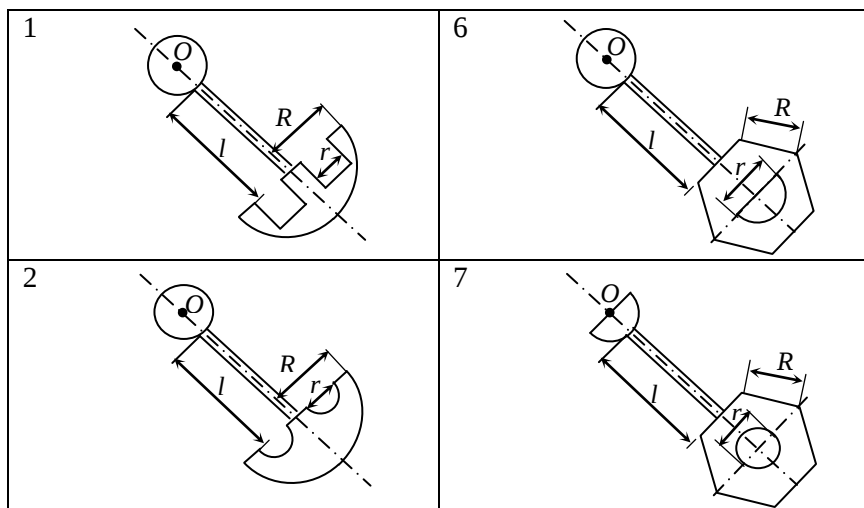


Рис. 13.1

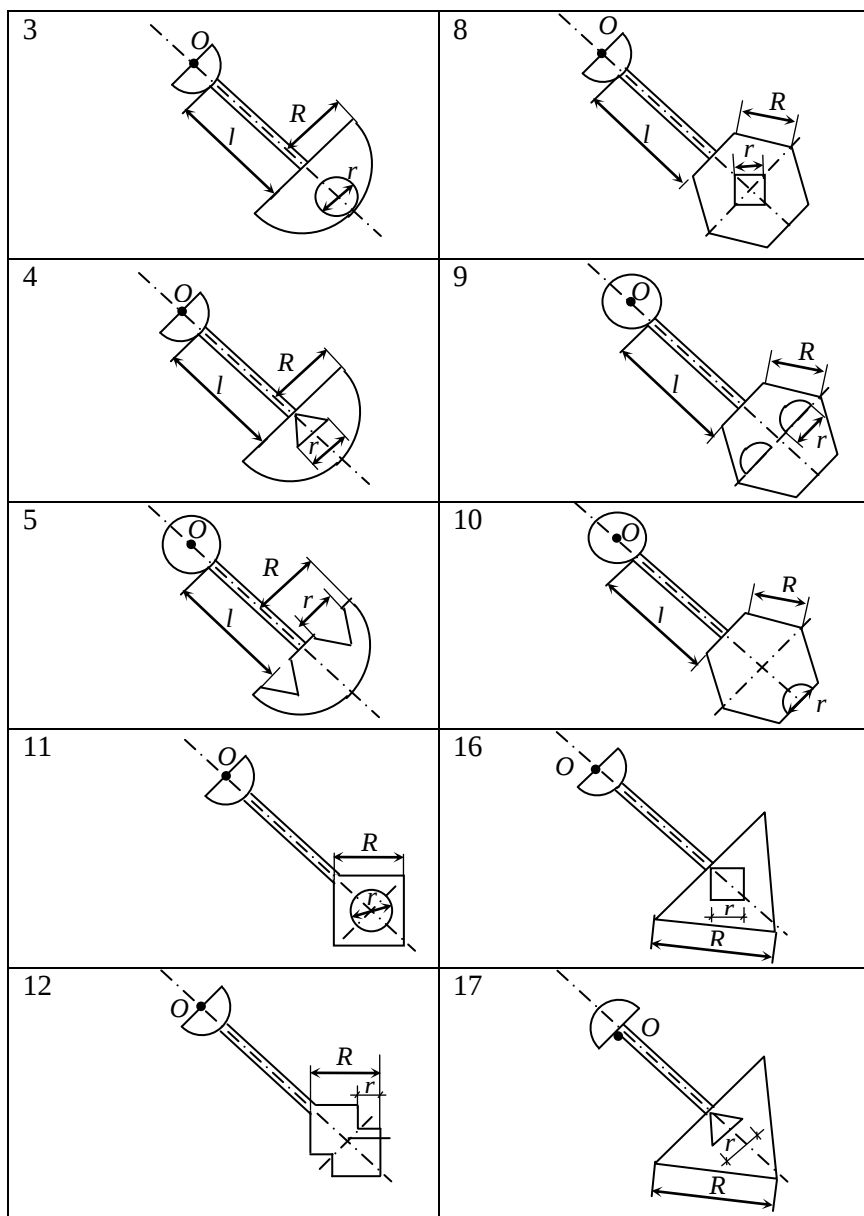


Рис. 13.1 (продолжение)

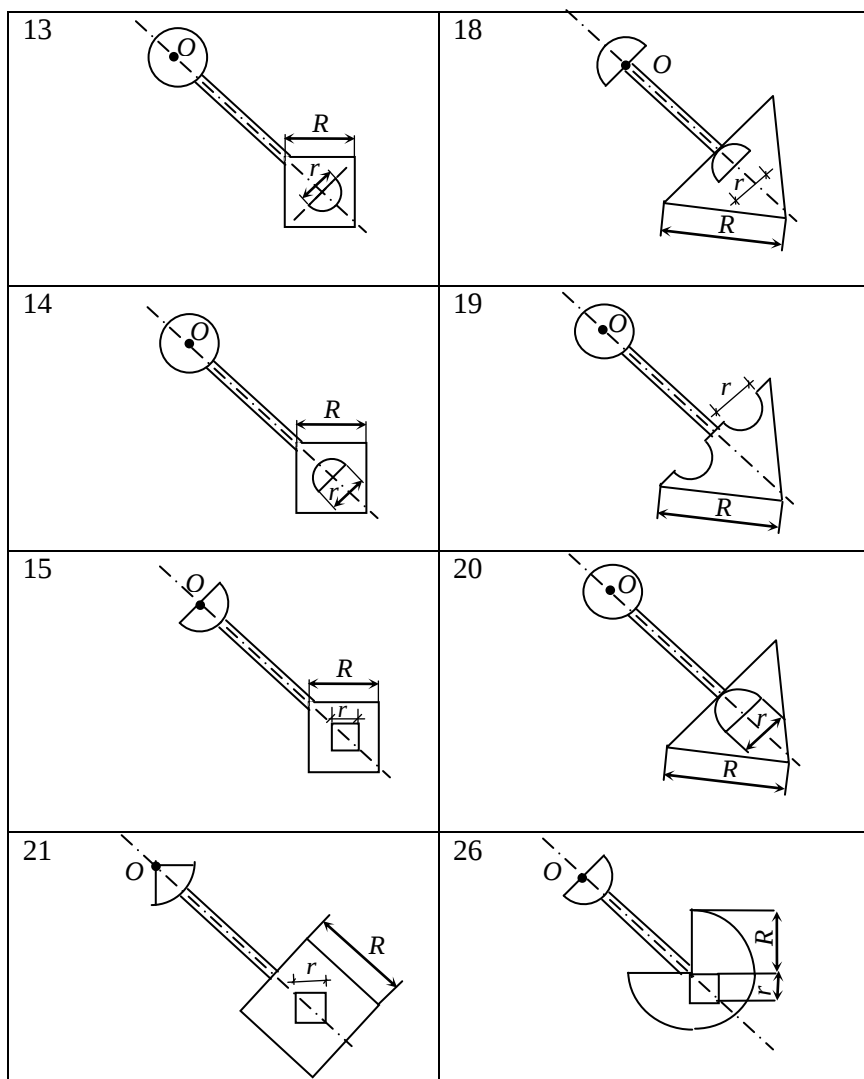


Рис. 13.1 (продолжение)

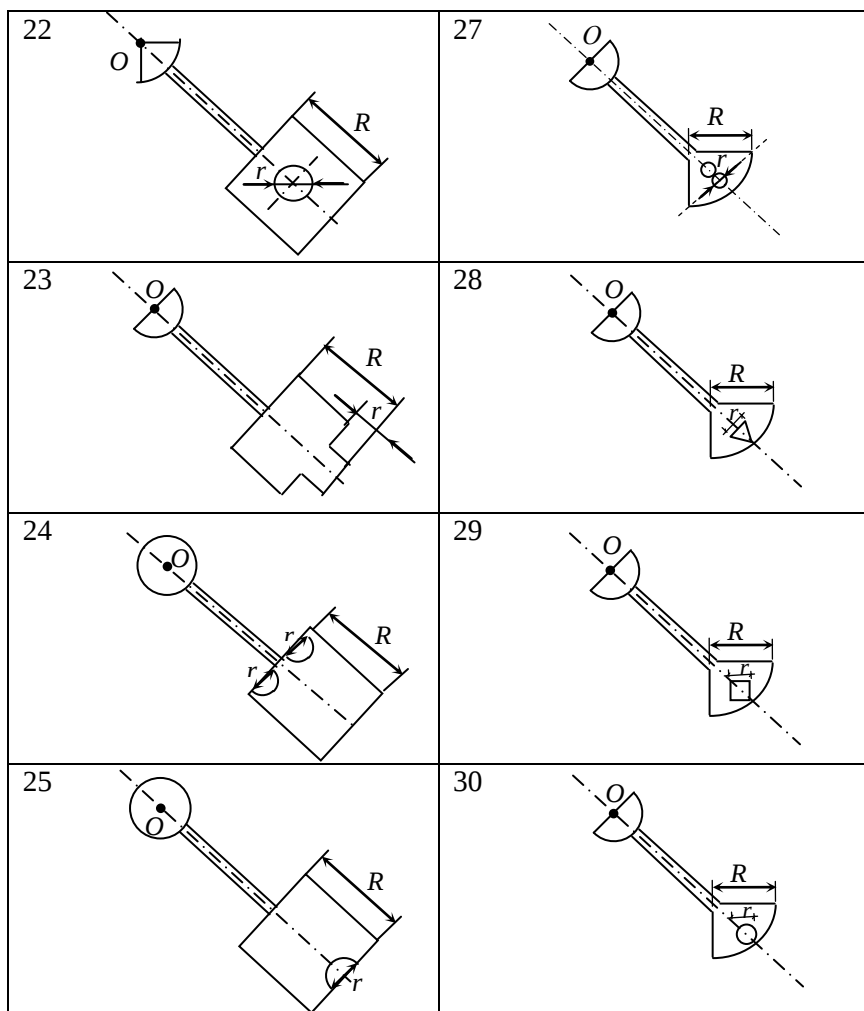


Рис. 13.1 (окончание)

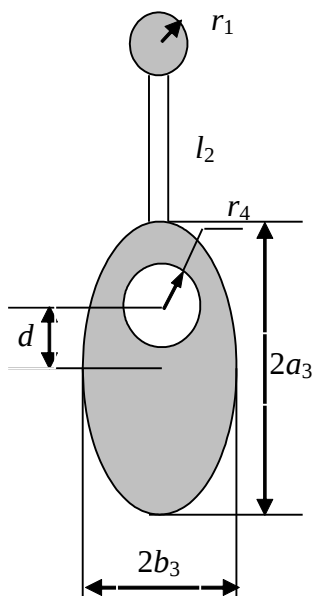


Рис. 13.2

Пример 1. Физический маятник (рис. 13.2) состоит из тонкого однородного стержня длиной $l_2 = 0.4$ м и двух пластин, одна из которых круглая радиусом $r_1 = 0.1$ м, а другая представляет собой эллипс с круглым вырезом. Длина полуосей эллипса $a_3 = 0.6$ м, $b_3 = 0.3$ м, радиус выреза $r_4 = 0.2$ м. Центр выреза смещен в сторону оси вращения от центра эллипса на расстояние $d = 0.3$ м. Плотность стержня и пластин соответственно: $\rho = 25$ кг/м, $\rho_s = 150$ кг/м². Ось вращения этого маятника проходит через центр верхней круговой пластины радиуса r_1 перпендикулярно плоскости тела. В начальный момент времени он отклоняется от вертикали на угол $\varphi_0 = \pi/25$ и предоставляется самому себе. Определить закон движения малых колеба-

ний физического маятника в поле тяжести.

Решение. Уравнение вращательного движения маятника следует из теоремы моментов относительно оси вращения Oz

$$J_z \ddot{\varphi} = \sum_k M_z(\mathbf{F}_k^e). \quad (13.1)$$

На маятник, представленный на рис. 13.2, действуют две силы – сила тяжести и сила реакции шарнира в точке подвеса (рис. 13.3). Поскольку момент последней силы относительно оси Oz равен нулю, то уравнение (13.1) для данного физического маятника сводится к следующему

$$J_z \ddot{\varphi} = -Mga \sin \varphi, \quad (13.2)$$

где a – расстояние от центра тяжести до

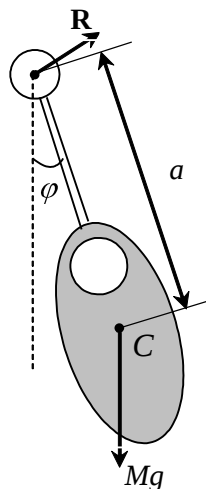


Рис. 13.3

оси вращения. Уравнение малых колебаний физического маятника тогда принимает вид

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0, \quad k^2 = Mga/J_z. \quad (13.2a)$$

Начальные условия для уравнения (13.2) имеют вид:

$$\varphi(t=0) = \varphi_0 = \pi/25, \quad \dot{\varphi}(t=0) = \omega_0 = 0. \quad (13.3)$$

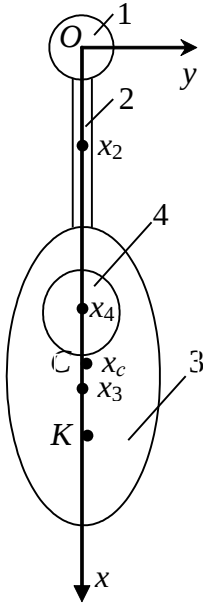


Рис. 13.4

Теперь следует определить входящие в уравнение (13.2a) положение центра тяжести a физического маятника и его момент инерции J_z . Поскольку нам необходимо знать лишь расстояние от центра тяжести до оси вращения, то достаточно определить координату x_c центра тяжести маятника в положении равновесия (рис. 13.4), которая и равна a . Для этого разобьем тело на следующие части: 1 – круговую пластину радиуса r_1 , 2 – тонкий стержень длиной l_2 , 3 – эллиптическую пластину без выреза, 4 – круговую пластину (вырез) радиусом r_4 . Выберем систему координат Oxy с началом на оси вращения. Тогда, воспользовавшись методом дополнений, для искомой координаты получим выражение

$$x_c = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_3 x_3 + M_4 x_4}{M_1 + M_2 + M_3 - M_4},$$

где x_c, x_k – координаты центров тяжести по оси Ox всего тела и k -й его части соответственно, а M_k – масса k -й его части. Положения центров масс частей и всего тела показаны на рис. 13.4. Вычисляя эти величины, имеем

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & M_1 &= \pi r_1^2 \rho_s = 4.71 \text{ кг}, \\ x_2 &= r_1 + l_2/2 = 0.3 \text{ м}, & M_2 &= l_2 \rho_1 = 10 \text{ кг}, \\ x_3 &= r_1 + l_2 + a_3 = 1.1 \text{ м}, & M_3 &= \pi a_3 \rho_s = 84.82 \text{ кг}, \\ x_4 &= x_3 - d = 0.8 \text{ м}, & M_4 &= \pi r_4^2 \rho_s = 18.85 \text{ кг}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$x_c = \frac{0.3 \cdot 10 + 1.1 \cdot 84.82 - 0.8 \cdot 18.85}{4.71 + 10 + 84.82 - 18.85} = 1.01 \text{ м.}$$

Вычислим теперь момент инерции данного маятника. Для этого снова воспользуемся введенным разбиением тела. Тогда

$$J_z = J_{z1} + J_{z2} + J_{z3} - J_{z4}. \quad (13.4)$$

Здесь J_z , J_{zk} – соответственно моменты инерции всего тела и k -й его части относительно оси вращения.

Согласно теореме Гюйгенса – Штейнера, $J_{zk} = J_{zck} + M_k x_k^2$, где J_{zck} – моменты инерции k -й части тела относительно оси, проходящей через центр масс этой части и параллельной оси вращения. Тогда

$$J_{z1} = (1/2)M_1 r_1^2 = (1/2)4.71(0.1)^2 = 0.02 \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

$$J_{z2} = (M_2/12)l_2^2 + M_2 x_2^2 = (10/12)(0.4)^2 + 10(0.3)^2 = 1.03 \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

$$J_{z3} = (M_3/4)(a_3^2 + b_3^2) + M_3 x_3^2 = (84.82/4)(0.6^2 + 0.3^2) + 84.82(1.1)^2 = 112.17 \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

$$J_{z4} = (M_4/2)r_4^2 + M_4 x_4^2 = (18.85/2)(0.2)^2 + 18.85(0.8)^2 = 12.44 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Откуда, используя формулу (13.4), находим

$$J_z = 0.02 + 1.03 + 112.17 - 12.44 = 100.78 \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

В результате входящая в уравнение (13.2а) частота колебаний k равна

$$k = \sqrt{\frac{Mga}{J_z}} = \sqrt{\frac{80.68 \cdot 9.81 \cdot 1.01}{100.78}} = 2.82 \text{ с}^{-1}.$$

Общее решение уравнения (13.2а) имеет вид: $\varphi(t) = A \sin(\kappa t + \theta)$. Закон же изменения угловой скорости физического маятника тогда описывается выражением: $\dot{\varphi}(t) = Ak \cos(\kappa t + \theta)$. Используя начальные данные (13.3), окончательно находим

$$\varphi(t) = 0.13 \sin(2.82t + \pi/2).$$

Пример 2. Задача 2 состоит в определении характеристик вращательного движения твердого тела, описанного в задаче 1 (см. рис. 13.2), если к нему прикладывается момент внешних сил $M_z = 8t + 2 \text{ (Н} \cdot \text{м)}$, а сила тяжести отсутствует (рис. 13.5). Итак, для указанного тела необходимо найти закон движения и определить для произвольного момента времени кинетическую энергию, кинетический момент относительно оси вращения и работу, со-

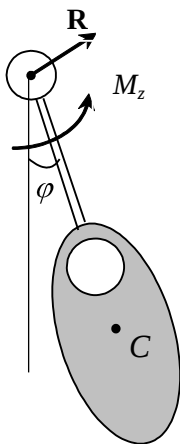


Рис. 13.5

вершенную внешними силами. Начальное жение тела и его начальная угловая скорость заданы так

$$\varphi(t=0)=0, \quad \omega(t=0)=0. \quad (13.5)$$

Решение. Начнем с определения закона движения тела. Уравнение движения теперь, в отличие от уравнения (13.2), имеет вид

$$J_z \ddot{\varphi} = M_z$$

или

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = 8t + 2.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим закон изменения угловой скорости тела

$$\omega \stackrel{\curvearrowright}{=} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{8}{2J_z} t^2 + \frac{2}{J_z} t + c_1$$

и закон его движения

$$\varphi \stackrel{\curvearrowright}{=} \frac{8}{6J_z} t^3 + \frac{2}{2J_z} t^2 + c_1 t + c_2.$$

Из начальных условий (13.5) находим, что $c_1 = 0$, $c_2 = 0$. Учитывая дальше вычисленное выше значение момента инерции относительно оси z , окончательно получаем

$$\omega \stackrel{\curvearrowright}{=} 0.04t^2 + 0.02t, \quad \varphi \stackrel{\curvearrowright}{=} 0.0132t^3 + 0.01t^2.$$

Момент количества движения рассматриваемого твердого тела относительно оси вращения равен

$$K_z \stackrel{\curvearrowright}{=} J_z \omega \stackrel{\curvearrowright}{=} 100.78[0.04t^2 + 0.02t].$$

Кинетическая энергия тела определяется соотношением

$$E \stackrel{\curvearrowright}{=} J_z \omega^2 \stackrel{\curvearrowright}{=} 2 = 50.39[0.04t^2 + 0.02t]^2.$$

Наконец, работа, произведенная за время t внешним моментом, равна

$$\begin{aligned} T(t) &= \int_0^\varphi M_z d\varphi = \int_0^\varphi (8t' + 2)(0.04t'^2 + 0.02t') dt' = \\ &= 0.32t^4 + 0.16t^3 + 0.08t^2 + 0.04t. \end{aligned}$$

14. Задание 7. Принцип Даламбера

Применяя принцип Даламбера, определить:

- силы реакции внешних связей – подпятника и цилиндрического подшипника (задачи 1–24) или двух подшипников (задачи 25–30);
- внутренние усилия: в пружине (задачи 1–12), в сечении S невесомого стержня 1 (задачи 13–24), в сечении Y вала (задачи 25–30).

Силы реакций и внутренние усилия требуется определить в положении систем, указанных на рис. 14.1, т.е. в момент времени, когда все элементы системы находятся в плоскости рисунка.

Положения сечений S и Y заданы соответственно расстоянием от конца стержня 1, лежащего на оси вращения, и от точки A вала. Величины этих расстояний приведены в табл. 14.1 в столбцах 1 и 2 соответственно. Точка A крепления вала фиксирована, а положение другой точки крепления в подшипнике приведено в табл. 14.1 в столбце 3. Точки крепления невесомого (прямолинейного или ломаного) стержня 1 и однородного стержня 2 указаны в табл. 14.1 в столбцах 4 и 5 соответственно. Точки B , C , D в табл. 14.1 делят вал AE на четыре равные части $AB = BC = CD = DE = 1.5\text{ м}$.

Все стержни имеют одинаковую длину L , стержень 1 невесомый, а стержни 2, 3, 4 имеют одинаковую массу ρ (кг/м) единицы длины. Величины L и ρ , а также углы α, β, θ в градусах приведены в табл. 14.1. Положение стержня 4 и конца ломаного стержня 1 с точечной массой не зависит от угла θ , а соответствует горизонтальному или вертикальному положению, показанному на рисунках.

Масса m точечного груза, закрепленного на стержне 1, равна 5 кг . Невесомая пружина, удерживающая стержень 3 в заданном положении (задачи 1–12), соединена с валом и стержнем 2 идеальным цилиндрическим подшипником. Все остальные связи также считать идеальными. Поперечными размерами стержней и вала, а также веса вала можно пренебречь.

Закон изменения угла поворота вала $\varphi(t)$ (рад) при вращении приведен в табл. 14.2 для каждого варианта, остальные углы заданы в градусах. Строка в табл. 14.1 определяет подвариант и дается преподавателем.

Таблица 14.1

Вариант	Условия									
	1	2	3	4	5	$L, м$	α	β	θ	ρ
1	$0.5L$	4	E	D	B	1.5	60	120	30	3
2	$0.7L$	4	D	E	C	1	30	150	60	4
3	$0.8L$	2	C	B	D	1.2	45	135	30	2
4	$0.3L$	2	E	D	C	1	60	120	45	4

Таблица 14.2

1	2	3	4	5	6	7
$3(t+1)$	$4(2-t)$	$5(2+t)$	$(1+t)/3$	$(1+4t)/5$	$(5-2t)/3$	$(1+t)/3$
8	9	10	11	12	13	14
$(3t+1)/5$	$3(1-t)$	$(2+3t)/5$	$(1+4t)/8$	$(1-2t)/2$	$4(1-2t)$	$5(1+t/2)$
15	16	17	18	19	20	21
$5(t/2+2)$	$2(2-t/3)$	$5(2+t/4)$	$(5+2t)/3$	$(4t-2)/2$	$3(5-t/2)$	$(1+4t)/3$
22	23	24	25	26	27	28
$5(t/4+2)$	$3(2-t/5)$	$5(2+t/4)$	$(1+3t)/4$	$(1+t)/5$	$(1-4t)/3$	$(5+5t)/3$
29	30					
$3t+7$	$8-t/3$					

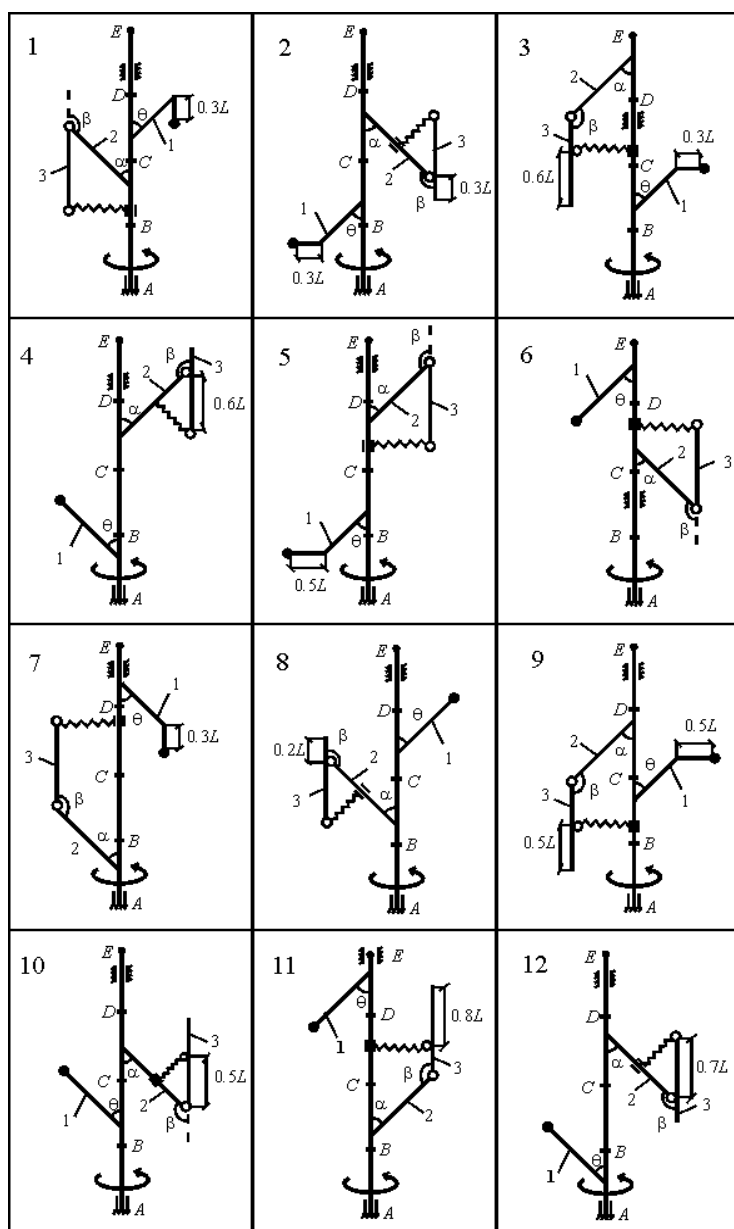


Рис. 14.1

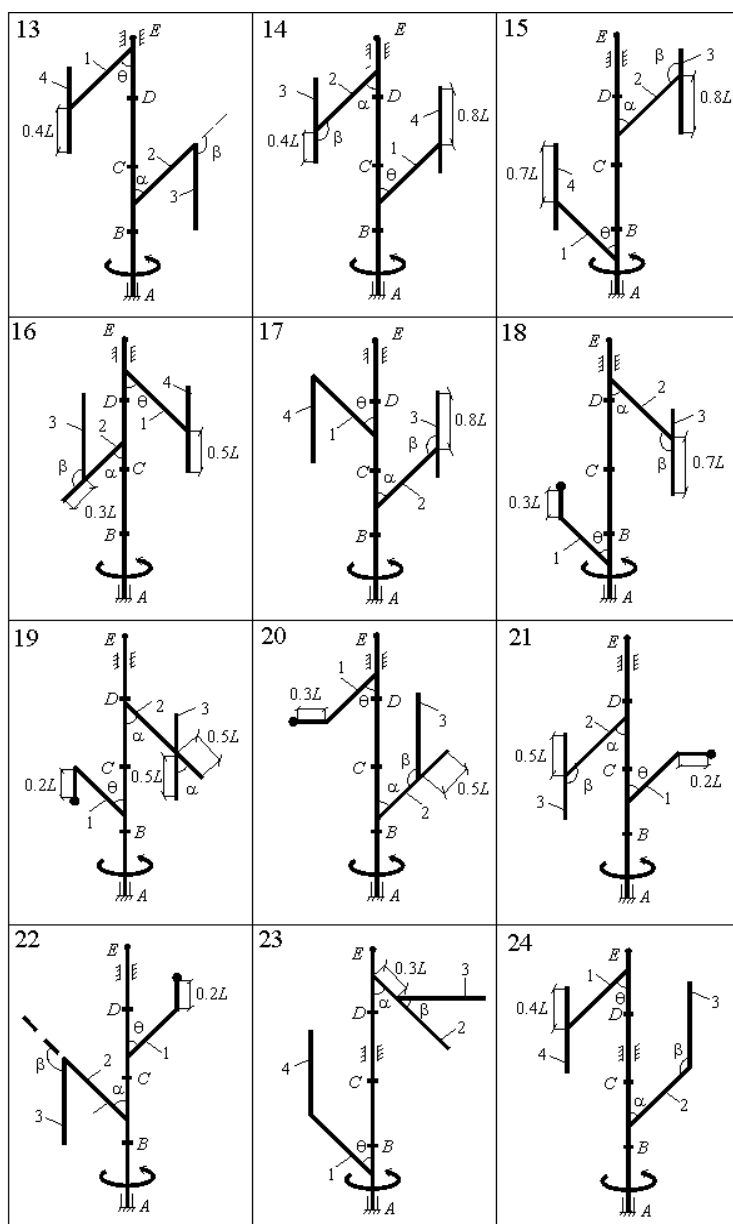


Рис. 14.1 (продолжение)

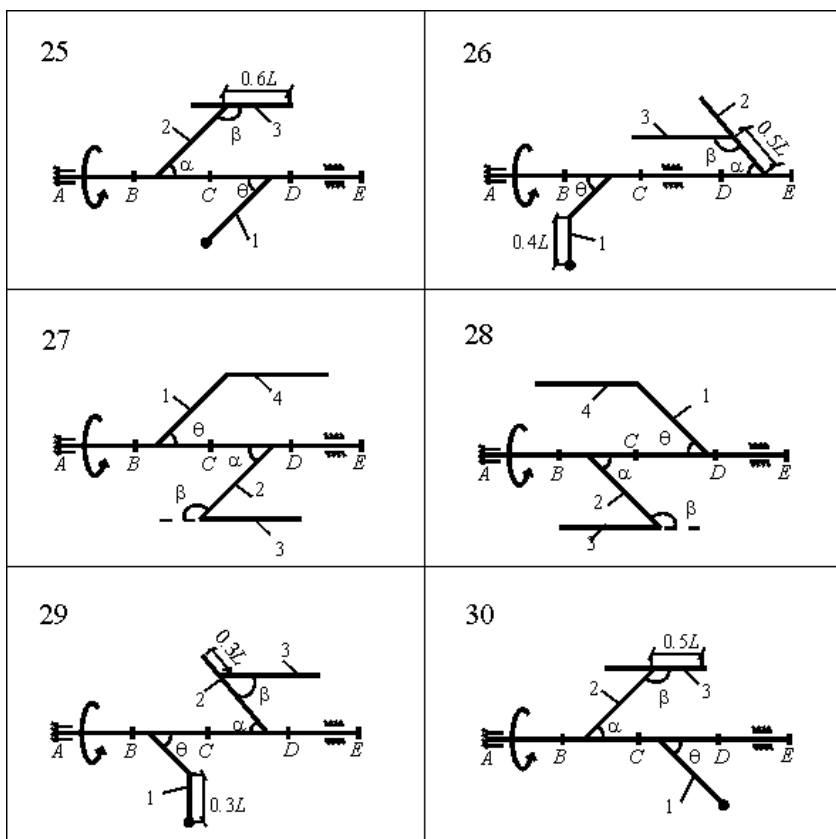


Рис. 14.1 (окончание)

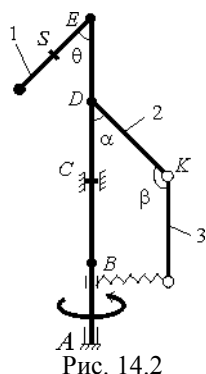


Рис. 14.2

Пример. Невесомый вал AE (рис. 14.2) длиной 6 м ($AB = BC = CD = DE = 1.5\text{ м}$) вращается по закону $\varphi = 8\pi t / \sqrt{10}$. К валу в точке E жестко прикреплен невесомый стержень 1, а в точке D – однородный стержень 2. На конце стержня 1 закреплен точечный груз массы $m = 3\text{ кг}$. К стержню 2 шарнирно прикреплен однородный стержень 3, свободный конец которого удерживается в заданном состоянии невесомой пружиной. Все стержни имеют одина-

ковую длину $L = 2 \text{ м}$, а масса единицы длины однородных стержней 2, 3 $\rho = 2 \text{ кг/м}$. Углы $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\theta = 60^\circ$.

В момент времени, когда все элементы системы находятся в плоскости рис. 14.1, определить:

- реакции связей, подпятника и подшипника в точках А и С вала;
- усилия в пружине и в сечении S стержня 1, если расстояние $ES = 0.5 L$.

Решение. Для определения искомых реакций связей рассмотрим движение заданной механической системы и применим принцип Даламбера. Введем координаты x, y (рис. 14.3) и определим величину, направление действия и точки приложения сил, действующих на систему. Начнем с определения сил инерции. Так как вал вращается равномерно с угловой скоростью $\omega = \dot{\phi}(t) = 8\pi / \sqrt{10} \approx 8 \text{ рад/с}$, то все элементы системы, обладающие массой, имеют только нормальные составляющие ускорения $a_n = \omega^2 x_j$, где x_j – кратчайшее расстояние от j -го элемента точечной массы Δm_j до оси вращения.

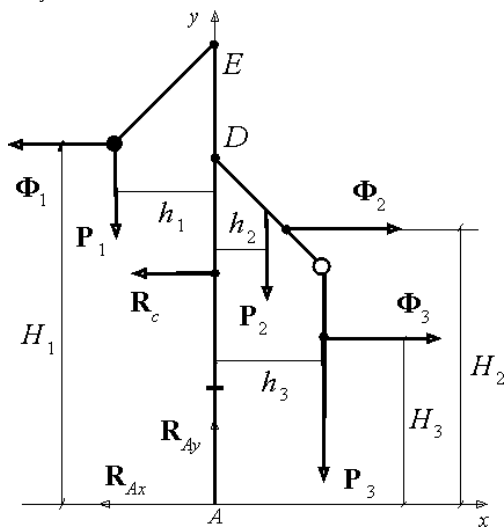


Рис. 14.3

Следовательно, силы инерции Φ_j в рассматриваемом случае направлены от вала, перпендикулярно ему и лежат в плоскости рисунка (рис. 14.4). Для точечной массы, закрепленной на стержне 1, имеем

$$\Phi_1 = m\omega^2 h_1 = 331.2 \text{ Н}, \quad (14.1)$$

где радиус вращения точечной массы равен $h_1 = L \sin \theta = 1.73 \text{ м}$.

Что касается однородных стержней 2 и 3, то на каждый j -й элемент длины Δl_j этих стержней

действует сила инерции $\Delta \Phi_j = \rho \Delta l_j \omega^2 x_j$. Эпюры параллельных сил инерции для стержня 2 образуют треугольник DGK , а для стержня 3 – прямоугольник $KFNG$ (см. рис. 14.4). Каждую из

полученных систем сил инерции заменим ее равнодействующей. Так как модуль главного вектора сил инерции любого тела имеет значение $\Phi = m a_c$, где m – масса тела, а a_c – ускорение центра масс, то для стержней 2 и 3 соответственно получим

$$\Phi_2 = m_2 a_{c2} = \rho L a_{c2}, \quad \Phi_3 = m_3 a_{c3} = \rho L a_{c3}. \quad (14.2)$$

Ускорения центров масс стержней 2 и 3 равны

$$a_{c2} = \omega^2 h_{c2}, \quad a_{c3} = \omega^2 h_{c3}, \quad (14.3)$$

где h_{c2} , h_{c3} – расстояния от центров масс стержней 2 и 3 до оси вращения: $h_{c2} = 0.5L \sin \alpha = 0.5 \text{ м}$, $h_{c3} = L \sin \alpha = 1.0 \text{ м}$

Подставив в (14.2) формулы (14.3) и вычисляя полученное, находим: $\Phi_2 = \rho L \omega^2 h_{c2} = 128 \text{ Н}$, $\Phi_3 = \rho L \omega^2 h_{c3} = 256 \text{ Н}$. При этом линии действия равнодействующих Φ_2 , Φ_3 пройдут через центры тяжести соответствующих эпюр сил инерции. Следова-

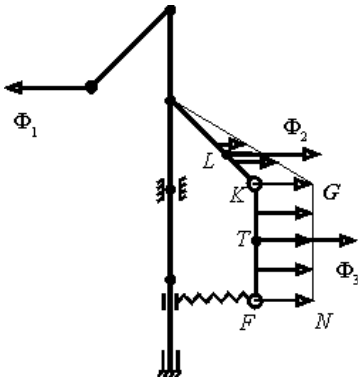


Рис. 14.4

тельно, точка приложения силы Φ_2 расположена на расстоянии $Dl = 2/3L$ от точки D , а силы Φ_3 – на расстоянии $Kt = L/2$ от точки K (см. рис. 14.3, 14.4).

Определим теперь активные силы – силы тяжести точечного груза P_1 и стержней P_2 и P_3 :

$$P_1 = mg = 30 \text{ Н}, P_2 = P_3 = \rho g L = 40 \text{ Н}.$$

Точки приложения этих сил совпадают с центрами масс рассматриваемых элементов системы, а направления – с направлением ускорения свободного падения g (см. рис. 14.3).

Освободим механическую систему от внешних связей, заменим действие подпятника реакциями R_{Ax}, R_{Ay} , а действие подшипника – реакцией R_C , которая направлена перпендикулярно к валу (см. рис. 14.3).

Таким образом, определив все силы и изобразив их на отдельном рисунке, приступим к нахождению реакций опор. Согласно принципу Даламбера, приложенные к механизму активные силы, силы реакции и силы инерции образуют уравновешенную систему сил (см. рис. 14.3). Поскольку система плоская, то для нее можно составить три уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \sum_k F_{kx} &= -\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 - R_C - R_{Ax} = 0, \\ \sum_k F_{ky} &= -P_1 - P_2 - P_3 + R_{Ay} = 0, \end{aligned} \quad (14.4)$$

$$\sum_k m_A(F_k) = P_1 h_1 - P_2 h_2 - P_3 h_3 + \Phi_1 H_1 - \Phi_2 H_2 - \Phi_3 H_3 - R_C AC = 0.$$

В уравнении моментов сил относительно точки A плечи сил равны: $H_1 = AE - L \cos 60^\circ = 5 \text{ м}$, $H_2 = AD - 2L \cos 30^\circ / 3 = 3.34 \text{ м}$, $H_3 = AD - L \cos 30^\circ = 1.77 \text{ м}$.

Решая систему уравнений (14.4), находим искомые реакции связей: $R_C = -257 \text{ Н}$, $R_{Ax} = -206 \text{ Н}$, $R_{Ay} = 110 \text{ Н}$.

Определим теперь реакцию пружины и внутренние усилия стержня 1 в сечении S . Для нахождения усилия пружины рассмотрим отдельно равновесие стержня 3, на который действует

реакция пружины R_{II} . Действие шарнира K заменим реакциями R_{Kx} и R_{Ky} . Изобразим стержень 3 вместе с действующими на него силами – силой тяжести P_3 , реакциями R_{Kx} , R_{Ky} , R_{II} и

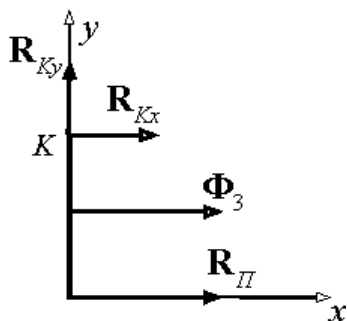


Рис. 14.5

силой инерции Φ_3 на отдельном рисунке (рис. 14.5).

Вектор силы R_{II} направлен вдоль пружины, которая в силу идеальности связи с валом и отсутствия веса перпендикулярна валу (при отклонении пружины от нормали появляется реакция R_{IIy} вдоль вала, которая будет возвращать пружину в исходное состояние). Согласно принципу Даламбера, система сил, действующих на стержень 3, вместе с силой инерции Φ_3 находится в равновесии. Для определения R_{II} достаточно составить одно уравнение равновесия – уравнение моментов относительно точки K

$$\sum_k m_k(F_k) = \Phi_3 0.5L + R_{II}L = 0.$$

Откуда получаем $R_{II} = 128 \text{ Н}$. Усилие, растягивающее пружину, равно по величине и противоположно по направлению R_{II} . Из уравнения видно, что это усилие вызвано только силой инерции.

Усилия в сечении S стержня 1 являются внутренними. Чтобы найти их, условно разрежем стержень и рассмотрим движение

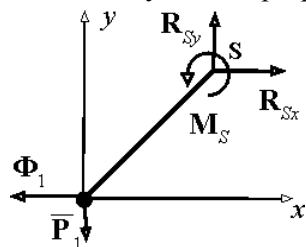


Рис. 14.6

части mS (рис. 14.6). Действие отброшенной части стержня необходимо заменить составляющими реакции $R_S = R_{Sx} + R_{Sy}$ и парой сил с моментом M_S . Для вычисления этих величин воспользуемся принципом Даламбера и составим для части mS три уравнения кинетостатического равно-

веса

$$\sum_k F_{kx} = -\Phi_1 + R_{Sx} = 0, \quad \sum_k F_{ky} = -P_1 + R_{Sy} = 0,$$

$$\sum_k m_S(F_k) = P_1 h_4 - \Phi_1 H_4 + M_S = 0,$$

где плечи сил P_1 и Φ_1 соответственно равны: $h_4 = L \cos 30^\circ / 2 = 0.87 \text{ м}$, $H_4 = L \sin 30^\circ / 2 = 0.5 \text{ м}$. В результате решения данной системы уравнений находим: $M_S = 140 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $R_{Sx} = 322.2 \text{ Н}$, $R_{Sy} = 30 \text{ Н}$.

15. Задание 8. Применение принципа возможных перемещений к определению реакций опор составной конструкции

Применяя принцип возможных перемещений, определить реакции связей составных конструкций. Схемы конструкций показаны на рис. 15.1, а необходимые для решения данные приведены в табл. 15.1. На рисунках все размеры указаны в метрах.

Таблица 15.1

Вариант	Нагрузка				Вариант	Нагрузка			
	P_1 , кН	P_2 , кН	q , кН/м	M , кН·м		P_1 , кН	P_2 , кН	q , кН/м	M , кН·м
1	15	14	3	10	16	3	10	2	10
2	13	12	2	6	17	1	8	1	8
3	11	10	1	5	18	3	6	3	6
4	9	8	3	14	19	5	4	2	7
5	7	6	2	12	20	7	2	1	5
6	8	5	1	4	21	10	9	2	4
7	7	4	2	10	22	8	7	1	7
8	6	6	1	7	23	6	5	2	8
9	5	8	3	8	24	4	3	1	3
10	4	10	2	6	25	2	1	2	2
11	12	11	1	12	26	7	1	2	7
12	10	6	2	10	27	6	2	1	5
13	9	5	1	6	28	5	3	2	10
14	7	10	2	13	29	4	4	1	5
15	6	8	1	5	30	3	5	2	10

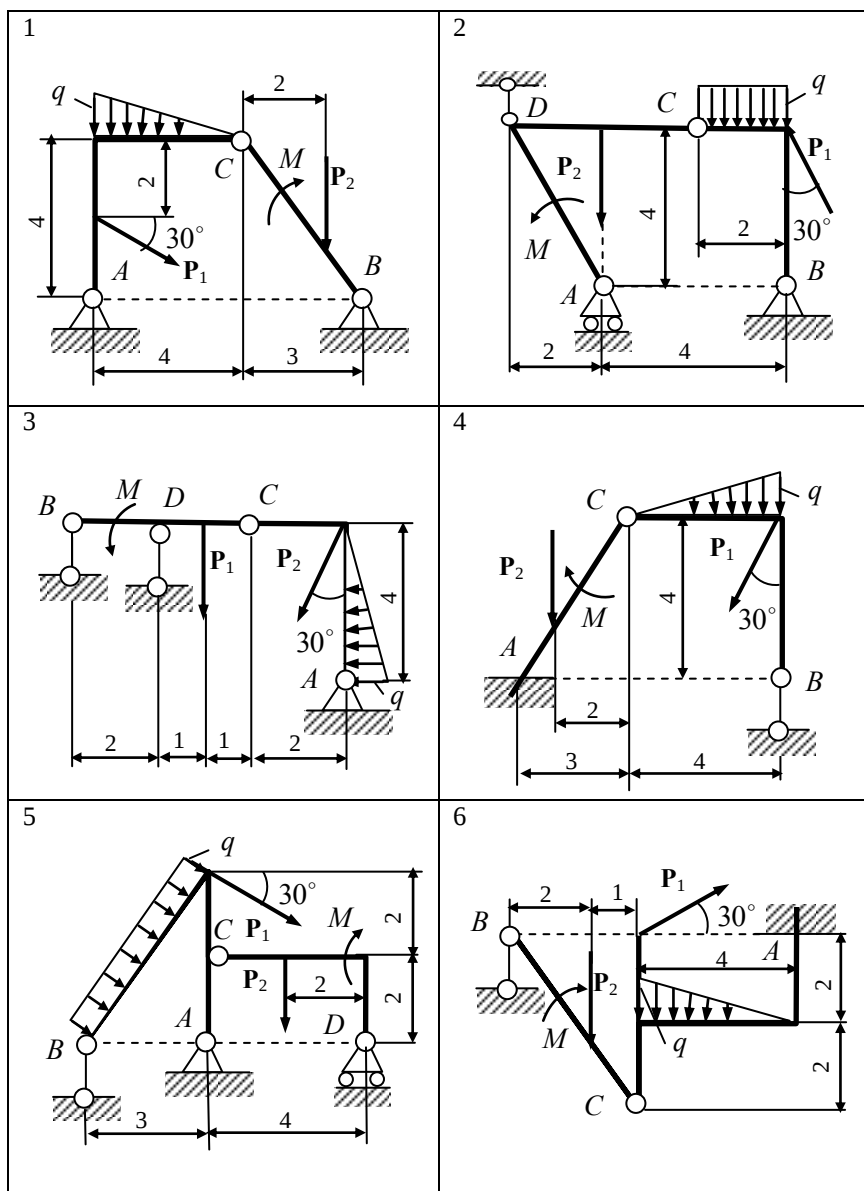


Рис. 15.1

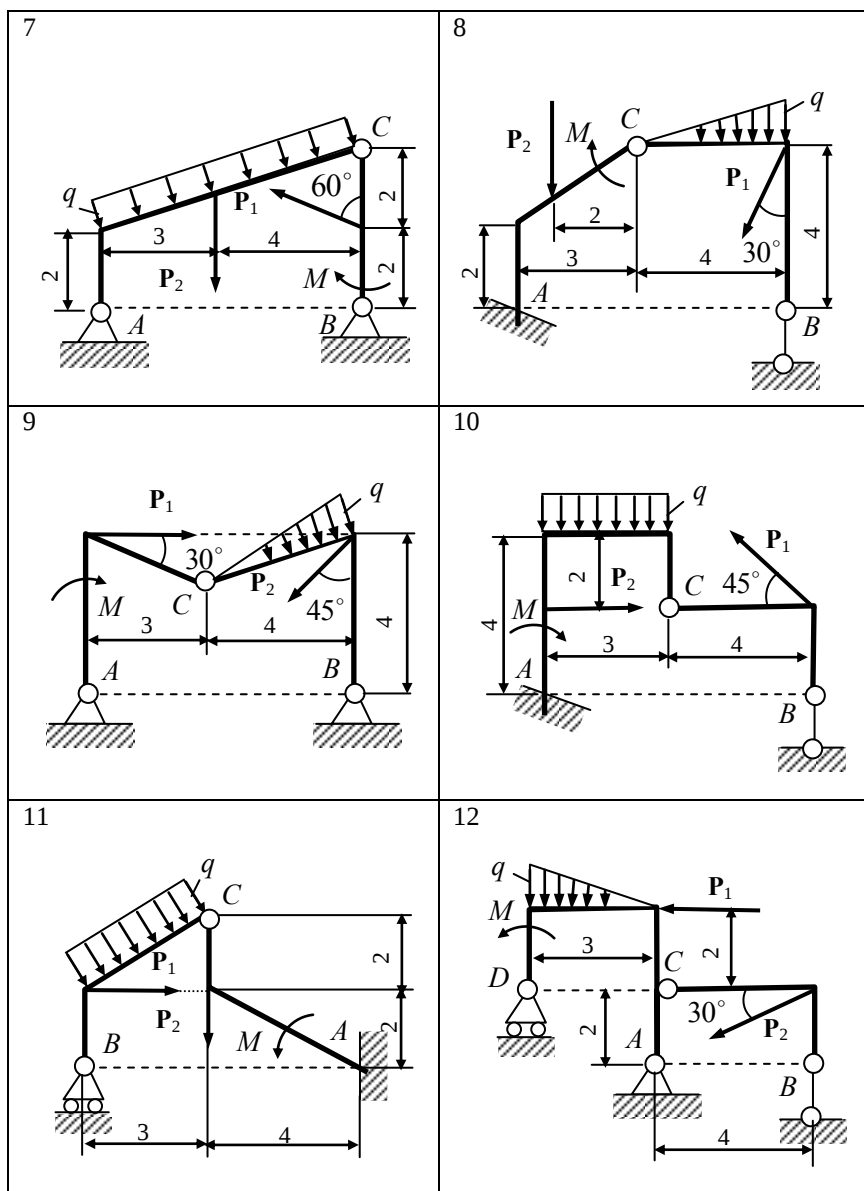


Рис. 15.1 (продолжение)

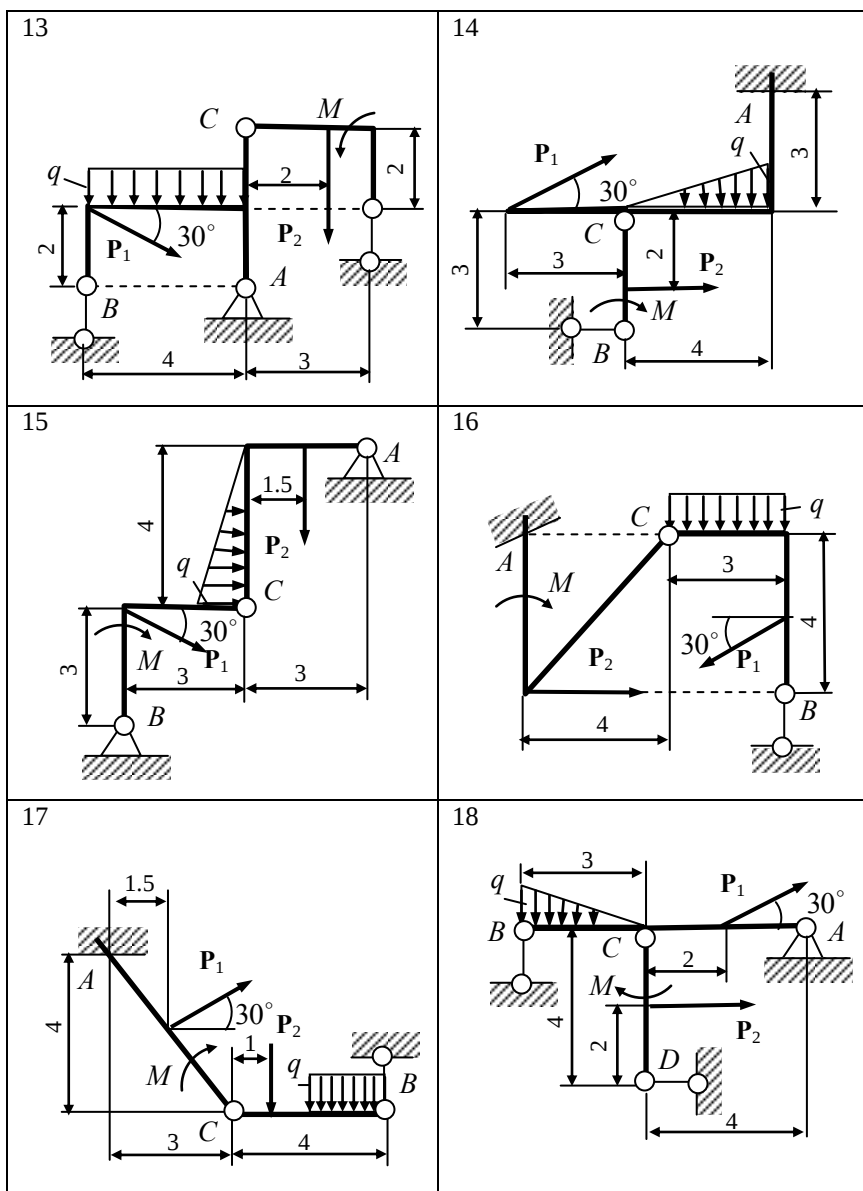


Рис. 15.1 (продолжение)

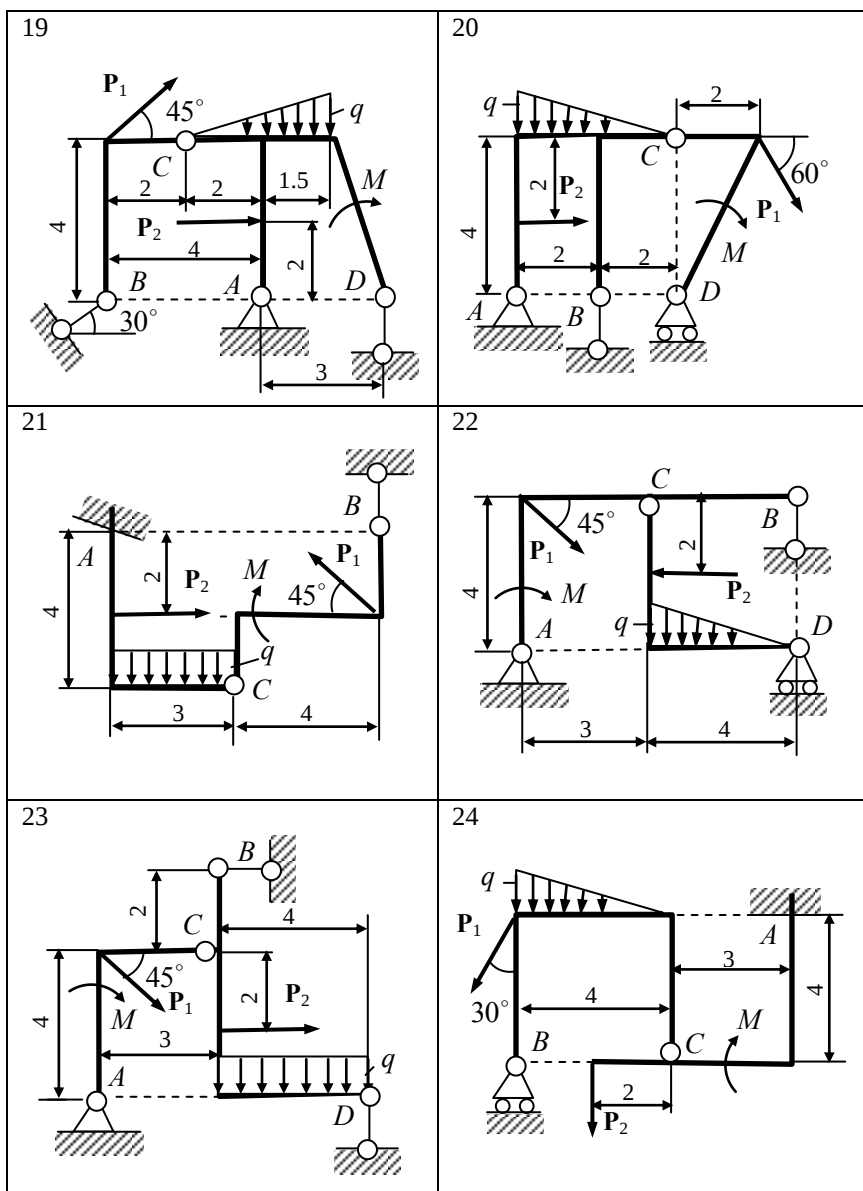
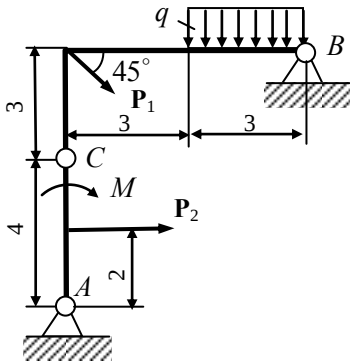
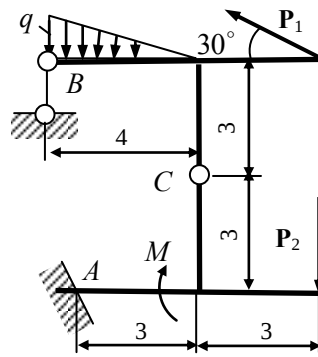


Рис. 15.1 (продолжение)

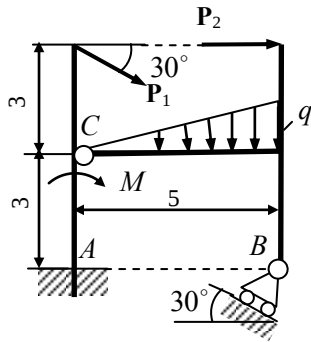
25



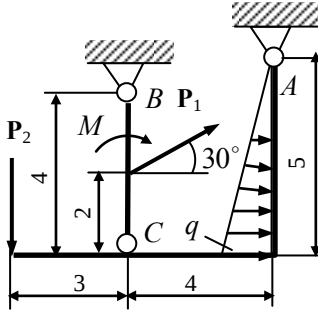
26



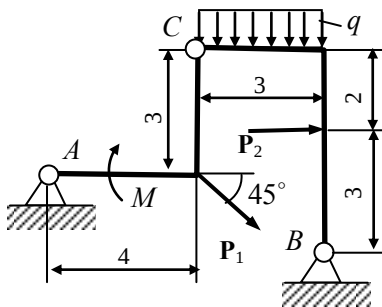
27



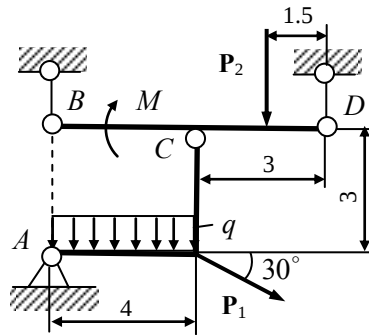
28



29



30



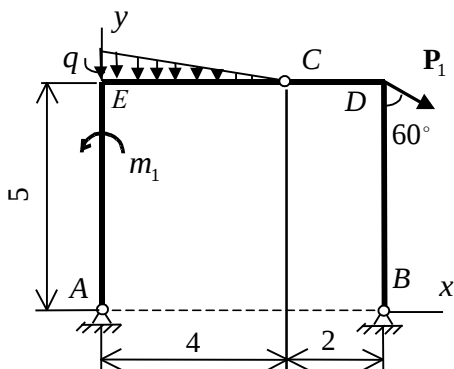


Рис. 15.2

на участке EC распределенная по линейному закону нагрузка с максимальной интенсивностью $q = 4 \text{ кН/м}$ и пара сил с моментом $m_1 = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$ (см. рис. 15.2). Определить горизонтальную составляющую реакции шарнирной опоры A . Трение в шарнирах отсутствует. Размеры элементов рам на рис. 15.2 даны в метрах.

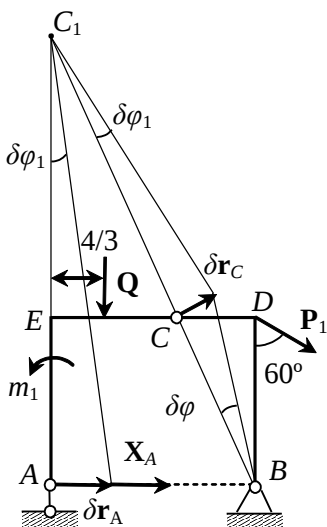


Рис. 15.3

Рис. 15.1 (окончание)

Пример. Дана двухсоставная рама, части которой соединены шарниром в точке C (рис. 15.2), закрепленная в точках A и B с помощью неподвижных шарнирных опор. В точке D на раму CDB действует сила $P_1 = 10 \text{ кН}$, на раму AEC действуют на уча-

Решение. Легко проверить, что в данной задаче все условия применения принципа Лагранжа выполнены (система находится в равновесии, связи являются стационарными, голономными, удерживающими и идеальными).

Начнем решение задачи с определения горизонтальной (вдоль оси x) составляющей силы реакции X_A шарнира A . Освободимся от связи, соответствующей реакции X_A (рис. 15.3). Для этого в точке A неподвижный шарнир следует заменить, например, стержневой опорой, при этом система получает одну степень свободы. Как уже отмечалось,

возможное перемещение системы определяется связями, наложенными на нее и не зависит от приложенных сил. Поэтому определение возможных перемещений является кинематической задачей. Поскольку в данном примере рама может двигаться лишь в плоскости рисунка, то и возможные ее движения являются плоскими. При плоском же движении перемещение тела можно рассматривать как поворот вокруг мгновенного центра скоростей. Если же мгновенный центр скоростей лежит в бесконечности, то это соответствует случаю мгновенно поступательного движения, когда перемещения всех точек тела одинаковы.

Для нахождения мгновенного центра скоростей необходимо знать направления скоростей двух каких-либо точек тела. Поэтому определение возможных перемещений составной конструкции следует начинать с нахождения возможных перемещений того элемента, у которого такие скорости известны. В данном случае следует начать с рамы CDB , поскольку ее точка B неподвижна и, следовательно, возможным перемещением этой рамы является ее поворот на угол $\delta\varphi$ вокруг оси, проходящей через шарнир B . Теперь, зная возможное перемещение $\delta\mathbf{r}_C$ точки C (она одновременно принадлежит обеим рамам системы) и возможное перемещение $\delta\mathbf{r}_A$ точки A (возможным перемещением точки A является ее перемещение вдоль оси x), находим мгновенный центр скоростей C_1 рамы AEC . Таким образом, возможным перемещением рамы AEC является ее поворот вокруг точки C_1 на угол $\delta\varphi_1$. Связь между углами $\delta\varphi$ и $\delta\varphi_1$ определяется через перемещение точки C (см. рис. 15.3)

$$|\delta\mathbf{r}_C| = BC\delta\varphi = CC_1\delta\varphi_1.$$

Из подобия треугольников EC_1C и BCD имеем

$$\frac{BC}{CC_1} = \frac{DC}{EC} = \frac{1}{2}, \quad \frac{EC_1}{BD} = \frac{EC}{CD} = 2, \quad EC_1 = 2BD = 10.$$

В результате получим зависимости:

$$\delta\varphi_1 = BC / CC_1 = \delta\varphi / 2, \quad |\delta\mathbf{r}_C| = BC\delta\varphi = \sqrt{30}\delta\varphi,$$

$$|\delta \mathbf{r}_A| = AC_1 \delta \varphi_1 = 2AC_1 \delta \varphi = 20 \delta \varphi_1.$$

Согласно принципу возможных перемещений

$$\sum \delta A_k^a = \delta A(\mathbf{P}_1) + \delta A(\mathbf{Q}) + \delta A(m_1) + \delta A(\mathbf{X}_A) = 0.$$

Последовательно вычислим входящие сюда возможные работы:

$$\delta A(\mathbf{P}_1) = m_B(\mathbf{P}_1) \delta \varphi = P_1 \sin 60^\circ BB_1 \delta \varphi = 5 \sqrt{3}/2 P_1 \delta \varphi.$$

$Q = 2q$ – равнодействующая распределенной нагрузки, точка приложения которой показана на рис. 15.3; совершаемая ею возможная работа равна:

$$\delta A(\mathbf{Q}) = m_{C_1}(\mathbf{Q}) \delta \varphi_1 = -(4/3)Q \delta \varphi_1 = -(4/3)q \delta \varphi.$$

Далее $\delta A(m_1) = m_1 \delta \varphi_1 = (1/2)m_1 \delta \varphi$ и

$$\delta A(\mathbf{X}_A) = m_{C_1}(\mathbf{X}_A) \delta \varphi_1 = X_A AC_1 \delta \varphi_1 = (15/2)X_A \delta \varphi.$$

Следовательно,

$$5P_1 \sqrt{3}/2 - (4/3)q + m_1/2 + (15/2)X_A \delta \varphi = 0 \quad (\delta \varphi \neq 0).$$

Отсюда

$$X_A = \left(15P_1 \sqrt{3} + 8q - 3m_1 \right) / 45.$$

Приложение 1. Дифференциальные уравнения и методы их решения

П1.1. Основные понятия и определения. *Дифференциальным* называется уравнение, содержащее производные неизвестной функции. *Обыкновенным* называется такое дифференциальное уравнение, в котором неизвестная функция зависит от одного аргумента, например,

$$x''(t) + 2bx'(t) + k^2x(t) = B. \quad (\text{П1})$$

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей из производных, входящих в него (уравнение (П1) – уравнение второго порядка). *Решением дифференциального уравнения* называется функция, при подстановке которой в это уравнение последнее обращается в тождество. *Частным решением* дифференциального уравнения называется любое из возможных его решений. Например, подстановкой в уравнение (П1) значения $x = A$ легко убедиться, что оно обращается в тождество при $x = A = B/k^2$. Это и есть одно из его частных решений.

Общим решением дифференциального уравнения называется совокупность всех его частных решений. Если уравнение второго порядка является интегрируемым, т.е. его общее решение можно записать в известных функциях, то оно будет иметь вид: $x = \varphi(t, C_1, C_2)$, где C_1 и C_2 – некоторые постоянные, x – искомая функция аргумента t . Разные значения C_1 и C_2 дают разные частные решения. В механике обычно требуется найти частное решение дифференциального уравнения при $t = t_0$, $x = x_0$, $x' = V_0$. С этой целью данные подставляются в общее решение. В результате для определения постоянных C_1 и C_2 получается два уравнения

$$x_0 = \varphi(t_0, C_1, C_2), \quad V_0 = \varphi'(t_0, C_1, C_2).$$

П1.2. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Если дифференциальное уравнение может быть представлено в виде $P(x)dx = Q(t)dt$, где функция $P(x)$ зависит только от x , а функция $Q(t)$ зависит только от t , то говорят, что переменные разделяются. В этом случае имеем

$$\int P(x)dx = \int Q(t)dt + C.$$

Пример 1. Точка движется прямолинейно со скоростью $V = gt$ (V в м/с, t в с). Найти закон ее движения, если при $t = 0$ $x_0 = 1$ м.

Решение. Так как

$$V = \frac{dx}{dt}, \text{ то } \frac{dx}{dt} = gt$$

и движение точки описывается дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными: $dx = gtdt$. В результате интегрирования получаем: $x = gt^2/2 + C$. Подставив в это уравнение начальное условие $x_0 = 1$ м при $t = 0$, получим: $C = 1$ м. Следовательно, закон движения точки имеет вид: $x = (gt^2/2 + 1)$ м.

Пример 2. Точка движется прямолинейно со скоростью $V = 5x$ м/с. Найти закон движения точки, если при $t = 0$ $x_0 = e$ м.

Решение. Так как

$$V = \frac{dx}{dt}, \text{ то } \frac{dx}{dt} = 5x \text{ и } dx/x = 5dt.$$

В результате интегрирования получаем: $\ln x = 5t + C$. Используя начальные данные, находим постоянную: $C = \ln e = 1$ м. Следовательно, закон движения точки имеет вид $x = e^{5t+1}$ м.

П1.3. Линейные уравнения второго порядка. *Линейным уравнением* второго порядка называется уравнение вида

$$x''(t) + P(t)x'(t) + Q(t)x(t) = R(t). \quad (\text{П2})$$

Если правая часть в этом уравнении равна нулю, т.е. $R(t) = 0$, уравнение называется *однородным*, в противном случае – *неоднородным*.

Общее решение неоднородного уравнения (П2) $x(t)$ складывается из общего решения $x_1(t)$ соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения $x_2(t)$ неоднородного уравнения (П2)

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t). \quad (\text{П3})$$

Для выполнения индивидуальных заданий необходимо уметь решать дифференциальное уравнение вида

$$x''(t) + 2bx'(t) + k^2x(t) = R(t), \quad (\text{П4})$$

которое является линейным неоднородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Для нахождения общего решения дифференциального уравнения (П4) необходимо знать общее решение однородного линейного уравнения

$$x''(t) + 2bx'(t) + k^2x(t) = 0, \quad (\text{П5})$$

которое ищется в виде $x = x_1 = e^{\lambda t}$. В результате его подстановки в уравнение (П5) получается *характеристическое уравнение*

$$\lambda^2 + 2b\lambda + k^2 = 0. \quad (\text{П6})$$

При решении данного уравнения возможны три случая:

- $k < b$, когда характеристическое уравнение (П6) имеет два

неравных действительных корня $\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - k^2}$. В этом случае имеется два линейно независимых решения и общее решение уравнения (П5) является их линейной комбинацией

$$x_1 = C_1 e^{\lambda_{1t}} + C_2 e^{\lambda_{2t}}; \quad (\text{П7})$$

- $k = b$, когда характеристическое уравнение (П6) имеет два равных корня $\lambda_1 = \lambda_2 = -b$. Общее решение тогда имеет вид

$$x_1 = C_1 e^{\lambda_{1t}} + C_2 t e^{\lambda_{2t}}; \quad (\text{П8})$$

- $k > b$, когда характеристическое уравнение (П5) имеет два комплексных корня $\lambda_{1,2} = -b \pm i\sqrt{k^2 - b^2} = -b \pm ik_1$. Общее решение уравнения (П5) снова является линейной комбинацией соответствующих частных

$$x_1 = C_1 e^{-bt+ik_1t} + C_2 e^{-bt-ik_1t} = e^{-bt} (C_1 e^{ik_1t} + C_2 e^{-ik_1t}). \quad (\text{П9})$$

Далее, используя формулу Эйлера, $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$, можно показать, что решение (П9) сводится к следующему

$$x_1 = e^{-bt} (D_1 \sin k_1 t + D_2 \cos k_1 t), \quad (\text{П9a})$$

где D_1, D_2 – некоторые постоянные.

В частном случае, когда $b = 0$ и $k \neq 0$, общее решение уравнения (П5) принимает вид

$$x_1 = D_1 \sin k_1 t + D_2 \cos k_1 t. \quad (\text{П10})$$

Для нахождения общего решения неоднородного дифференциального уравнения (П4) необходимо еще найти какое-либо его

частное решение. В индивидуальных заданиях встречаются варианты, в которых $R(t) = A = \text{const}$ и $R(t) = A \cos(pt + \alpha)$. В первом случае частное решение уравнения (П4) можно искать в виде $x_2 = B = \text{const}$. Действительно, подставив это выражение в уравнение (П4), убеждаемся, что при $B = A/k^2$ оно удовлетворяется при любом t .

В случае, когда $R(t) = A \cos(pt + \alpha)$ и $p \neq k$, частное решение можно искать в виде: $x_2 = K \cos(pt + \beta)$, где K и β – постоянные. Если же $R(t) = A \cos(pt + \alpha)$, но $p = k$, частное решение следует искать в виде $x_2 = Kt \cos(pt + \beta)$.

Пример 3. Решить уравнение $\ddot{x} + \omega^2 x = h \sin pt$. Однородное уравнение здесь имеет решение (см. (П10)) $x_1 = D_1 \sin \omega t + D_2 \cos \omega t$. Частное решение при $p \neq \omega$ ищем в виде: $x_2 = K \sin pt$. Подставляя это выражение в уравнение и учитывая, что $\ddot{x}_2 = -Kp^2 \sin pt$, находим: $K = h/(\omega^2 - p^2)$. Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$x_1 = D_1 \sin \omega t + D_2 \cos \omega t + \frac{h}{\omega^2 - p^2} \sin pt.$$

В случае, когда $p = \omega$, частное решение будем искать в виде $x_2 = Kt \sin(pt + \beta)$. Поскольку

$$\dot{x}_2 = K \sin(pt + \beta) + Kpt \cos(pt + \beta),$$

то

$$\ddot{x}_2 = 2Kp \cos(pt + \beta) - Kp^2 t \sin(pt + \beta).$$

Подставляя эти функции в уравнение, находим

$$2Kp \cos(pt + \beta) - Kp^2 t \sin(pt + \beta) + \omega^2 Kt \sin(pt + \beta) = h \sin pt.$$

Отсюда, учитывая, что $p = \omega$, получаем: $2Kp \cos(pt + \beta) = h \sin pt$.

Это уравнение удовлетворяется тождественно, если

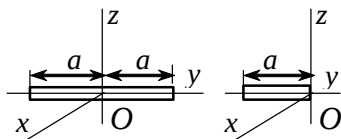
$$\beta = \pi/2 \text{ и } K = -h/2p.$$

Следовательно, в данном случае общее решение имеет вид

$$x_1 = D_1 \sin \omega t + D_2 \cos \omega t + \frac{ht}{2\omega^2} \cos \omega t.$$

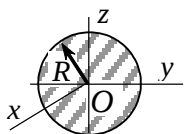
Приложение 2. Моменты инерции некоторых однородных твердых тел

1. Тонкий прямолинейный стержень.



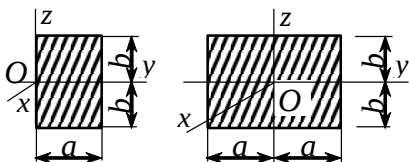
$$J_z = \frac{ma^2}{3}, J_x = \frac{ma^2}{3}, J_y = 0.$$

2. Круглая пластина (диск).



$$J_x = \frac{mR^2}{2}, J_y = \frac{mR^2}{4}, J_z = \frac{mR^2}{4}.$$

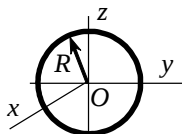
3. Прямоугольная пластина.



$$J_y = \frac{mb^2}{3}, J_z = \frac{ma^2}{3},$$

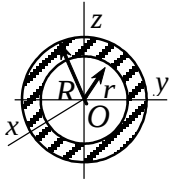
$$J_x = \frac{m(a^2 + b^2)}{3}.$$

4. Окружность (тонкий обруч).



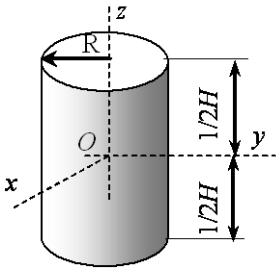
$$J_x = mR^2, J_y = J_z = \frac{1}{2} mR^2.$$

5. Кольцо.



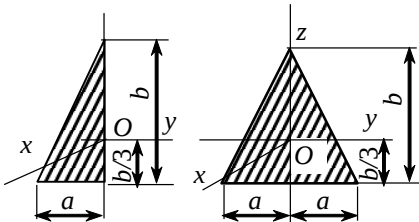
$$J_x = \frac{m(R^2 + r^2)}{2}, J_y = J_z = \frac{m(R^2 + r^2)}{4}$$

6. Цилиндр.



$$J_z = \frac{1}{2}mR^2, J_x = J_y = m \frac{(3R^2 + H^2)}{12}.$$

7. Треугольная пластина.



$$J_x = \frac{m(3a^2 + b^2)}{18},$$

$$J_y = \frac{mb^2}{18},$$

$$J_z = \frac{ma^2}{6}.$$