Предисловие

Настоящая работа посвящена систематическому изложению основ классической теоретической механики и аналитической механики. Это первая часть курса, содержащая два раздела теоретической механики: статику и кинематику. К настоящему времени издано много превосходных учебников механики, часть из которых приведена в конце данного пособия. Можно ли оправдать появление еще одного? Думаем, да. Во-первых, данное пособие – это не учебник, а курс лекций. Авторы намеренно написали его максимально приближенным к аудитории в надежде вызвать отклик и живую реакцию. Во-вторых, мы стремились оставить в этом курсе все самое главное и исключили темы, без которых при первом чтении вполне можно обойтись.

Есть и третья причина. Освоение курса теоретической механики требует усилий и решения значительного числа задач. Поэтому после каждой лекции приводится ряд задач и упражнений, а в конце книг – цикл индивидуальных заданий, без решения которых освоить курс вряд ли удастся.

Мы надеемся, что пособие будет полезно в особенности студентам заочного обучения, лишенным в течение семестра живого лекторского слова.

Курс написан на основе лекций, которые авторы в течение многих лет читают в Новосибирском государственном архитектурно-строительном университете.

Авторы выражают свою глубокую благодарность Н.Б. Смирных за помощь в оформлении рукописи.

Но творения интеллекта переживают шумную суету поколений и на протяжении веков озаряют мир светом и теплом.

Альберт Эйнштейн

Перед лекцией

Когда мы говорим о механике, непрерывно приходится употреблять превосходные степени. Механика – одна из самых древних наук, одно из высших достижений человеческого разума, самая изящная и красивая часть современной физики. Механика, которая является наукой точной и описывает широчайший круг явлений природных и связанных с жизнедеятельностью человека, безусловно, – произведение искусства. Она суть творческое воспроизведение действительности в образах, которые дает нам опыт общения с природой, и математика. Удивление и восторг, который испытывали люди, прикоснувшиеся к достижениям этой науки, породили ее название. Слово механика произошло от греческого μηχαναομαι – изобретаю, искусно придумываю. Любопытно, что Владимир Даль в своем словаре дает, в частности, и такое определение механики: "Механика – искусство применять силу к делу и строить машины". Стоит добавить – и просто строить.

Механика лежит в основе всех наук о природе и человеке и необходима при изучении любой инженерной дисциплины. Этим, однако, не исчерпывается ее значение, потому что механика – еще и уникальный пример удачного математического моделирования. Все математические модели, что бы они ни описывали – движение планет или крови по венам, землетрясения или цунами, работу швейной машинки или функционирование банка, процессы запоминания или развития общества – должны строиться так же, как выстроена теоретическая механика. А если учесть, что моделирование – главный и, по сути, единственный способ научного познания и наука начинается только с появлением модели, а все остальное есть беллетристика (в этом нет ничего обидного, и Л.Н. Толстой, и А.И. Солженицын – беллетристы), то ясно, что изучение механики дает уникальную возможность выработать по-настоящему научные мировоззрение и методологию. Вы такую возможность имеете, так воспользуйтесь ею, ибо, как сказано в Евангелии от Матфея: "Просите и дано будет вам; ищите и найдете; стучите, и отворят вам; ибо всякий просящий получает, и ищущий находит, и стучащему отворят ".

Первые дошедшие до нас исследования в области механики принадлежат античным ученым Египта и Греции. Здесь рассматривались простейшие задачи статики, и эти исследования были обусловлены главным образом потребностями строительной практики. Сегодня и сами задачи, и полученные результаты кому-то могут показаться наивными и простыми, но достаточно взглянуть на египетские пирамиды, чтобы понять необоснованность подобных оценок.

Весомый вклад в развитие механики внес Аристотель, которому мы обязаны не только самим термином *механика*, но и первыми попытками научного обсуждения проблем механического движения, небесной механики, гидро- и аэромеханики. Выстроенные им теории (но еще не модели) отличались умозрительностью и часто опровергались простейшими опытами, хотя им и не откажешь в определенной логике (ведь это Аристотель!) и стройности. Конечно, после того как с уст Гете слетело легкокрылое "теория, мой друг, суха, но зеленеет жизни древо", мы все знаем, что критерием истины является опыт. Однако со всей определенностью можно сказать, не будь 23 века тому назад блестящих теорий Аристотеля, вряд ли человек нашего столетия высадился бы на Луне.

Первые модели, сохранившие свою значимость и до наших дней, были созданы другим великим греком – Архимедом. Он заложил основы статики и гидростатики и, наверное, одним из первых применил математические методы, им же разработанные, для описания сложных явлений природы и инженерной практики.

Период становления и укрепления в Европе христианства практически не продвинул мир в понимании бытия. Вот Вам пример того, как чрезвычайная идеологизированность общества, всегда приводящая к тоталитаризму, не только не стимулирует развитие науки (в частности), но и всячески его тормозит. Только непокорность рождает знание. В Европу оно вновь пришло в эпоху Возрождения (Вы задумывались, почему время постсредневековья названо Возрождением?) с распадом ортодоксального христианства. Заканчивая эту тему, хотелось бы сказать: "Бойтесь догматов, бойтесь людей, которые запрещают сомневаться, подвергайте сомнению слово, и особенно печатное, и размышляйте". Все новое приходит через сомнение и отрицание.

Эпоха Возрождения подарила нам многих гениев, но трех мы вспоминаем чаще других – это Леонардо да Винчи, Николай Коперник и Галилео Галилей. И именно их усилиями механика обрела второе дыхание, почти утерянное за предыдущее тысячелетие. На плечах этих трех гигантов и зиждется здание теоретической механики, выстроенное Исааком Ньютоном. Конечно, за три прошедших столетия много воды утекло, и познания наши, особенно с рождением релятивиской механики Эйнштейна, расширились, кажется, почти безбрежно. Но с седьмого класса факел законов Ньютона освещает нам жизнь и делает ее осмысленной.

Перед Вами первая часть учебного пособия, состоящая из 14 лекций по статике и кинематике. Исторически именно со статики начала формироваться механика. Она использует чрезвычайно простой математический аппарат и вполне доступна даже ученику 7–8 класса. По этой причине со статики обычно начинают изучение теоретической механики, хотя это в определенной мере и нарушает ее логику. Важность статики, наверное, станет очевидной, если учесть, что она питает своими корнями огромную крону, ветвями которой являются гидростатика, сопротивление материалов, теория упругости, строительная механика, теория металлических и деревянных конструкций, теория оснований и фундаментов, теория прочности, теория гидротехнических сооружений и прочая, и прочая. Но, похоже, звенит звонок, пора начинать лекцию.

И вечный бой! Покой нам только снится.
Александр Блок

Лекция 1. Аксиомы статики

1.1. Модели и основные понятия

В теоретической механике изучается *механическое движение* или просто движение материальных тел. Под движением в механике понимается изменение взаимного расположения тел в пространстве с течением времени, более строгое определение будет дано в лекции 9. Обычно предполагается, что пространство, в котором происходит движение рассматриваемых тел (и в котором мы живем) является однородным и изотропным (т. е. его свойства не меняются при сдвиге на некоторое расстояние или при поворотах). Далее считается, что Господь наделил всех нас часами, и эти часы идут одинаково в Москве и в Лондоне, на Земле и на Марсе, в нашем доме и в летящем самолете. Время является абсолютным. Сегодня мы знаем, что это не совсем так, но если размеры пространства не слишком велики (порядка размеров Земли) и не слишком малы (не меньше размеров атома), то в рамках этих допущений вполне можно строить модель. И еще необходимо, чтобы скорости движения всех рассматриваемых тел были малы по сравнению со скоростью света (см. лекцию 9).

Весь курс теоретической механики обычно подразделяют на три раздела: *статику, кинематику и динамику*. *В статике изучаются условия равновесия (покоя) тел. Кинематика исследует движение тел, но лишь с геометрической точки зрения, без учета сил, вызывающих это движение. В динамике же дается ответ на основной вопрос курса – из-за чего возникает или изменяется движение.*

В статике, изучение которой мы начинаем, рассматриваются две основные задачи.

1. *Первая состоит в замене данной системы сил, приложенных к твердому телу, эквивалентной системой сил.*

2. *Вторая же заключается в формулировании условий равновесия тела под действием данной системы сил.*

В приложениях приходится сталкиваться с решением и других задач: определение возможных положений равновесия, определение условий устойчивости равновесия и т. д.

Уже при формулировании основных задач статики мы использовали ряд понятий, которые нуждаются в определении, хотя интуитивно хорошо ясны. В реальных условиях мы имеем дело с весьма разнообразными материальными объектами: с капелькой жидкости, частичкой пыли, гвоздем, мостом, домом и т. п. Изучение эволюции этих объектов и их взаимодействия в общем случае является задачей чрезвычайно сложной. Чтобы облегчить ее, мы на практике заменяем реальные объекты некоторыми идеализированными моделями: гвоздь – железным стержнем, дом – бетонным кубом, частичку пыли, если ее размеры достаточно малы, – материальной точкой. Заметим, что все подобные идеализации относительны. Известно, например, что самая заметная звезда созвездия Орион, красный гигант Бетельгейзе, примерно в $3\cdot 10^5$ раз больше Солнца. Однако эта звезда столь далеко расположена от Солнечной системы, что во всех практических расчетах мы можем считать ее *материальной точкой*. Отсюда видно, что *любой объект можно считать точечным, если расстояние до него* L *много больше его характерного размера* R;

$$L >> R, \tag{1.1}$$

и внутренней структурой объекта можно пренебречь.

Чтобы охарактеризовать положение данного объекта или материальной точки относительно других объектов, введем систему координат, начало которой свяжем с некоторым материальным объектом – телом отсчета. Обычно всегда удается выбрать такую систему координат, которую можно считать неподвижной[1]. Скажем, когда мы едем в поезде из Новосибирска в Москву, нас реально интересует вопрос о том, какое расстояние мы проехали от Новосибирска и сколько еще осталось. При этом с хорошей точностью систему ко-

[1] Обсуждение вопроса о том, существуют ли вообще неподвижные системы отсчета, мы отложим до второй части этого курса лекций, посвященной кинематике.

ординат, связанную с Землей, можно считать неподвижной[2]. Если же Вы хотите описать движение Земли относительно Солнца, то ясно, что систему координат, связанную с нашим светилом, снова с хорошей точностью можно считать неподвижной. Положение объекта, точки A, на рис. 1.1 в данной системе координат характеризуется радиус-вектором $\mathbf{r}$ или, что то же, тремя координатами (x, y, z).

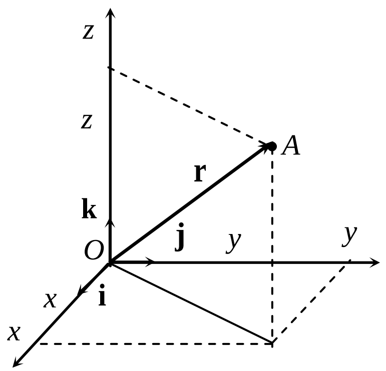

Рис. 1.1

Наряду с материальной точкой важной моделью, используемой в механике, является модель *абсолютно твердого тела*. Разберемся, что это такое. Всякое тело можно разделить на элементы. Выбирая эти элементы достаточно малыми, их можно моделировать материальными точками. Если расстояние между двумя материальными точками не меняется, то говорят, что эти точки твердо связаны друг с другом. *Абсолютно твердым телом называют совокупность материальных точек, расстояния между которыми неизменны во времени.* Можно сказать проще: *абсолютно твердым или просто твердым телом называется такое тело, расстояние между любыми двумя точками которого не меняется.* Конечно, реально существующие в природе тела лишь приближенно можно считать твердыми. Твердым телам можно противопоставить *деформируемые, т. е. системы материальных точек, расстояния между которыми изменяются.* У деформируемых тел изменяются и их объем, и форма. Если заметные деформации происходят за время T, то ясно, что при

$$t << T \qquad (1.2)$$

тело практически не деформируется, и для его описания можно применять модель абсолютно твердого тела. Движение тел с большими деформациями изучаются в специальных курсах механики – теории упругости и пластичности, механике жидкостей и газов.

[2] Правда, если Вы летите на самолете, время полета из Новосибирска в Москву будет существенно отличаться (примерно процентов на 15) от времени обратного полета, и связано это, в частности, с вращением Земли.

Рассмотрим теперь некоторый материальный объект и будем для простоты моделировать его материальной точкой A. В начальный момент времени t положение этого объекта относительно неподвижной системы координат, скажем, связанной с Землей (такая система координат называется геоцентрической), характеризуется радиус-вектором $\mathbf{r}$ (рис. 1.1). Если с течением времени положение точки не изменяется, то говорят, что она покоится. В том случае, когда ее координата с течением времени меняется, говорят, что точка движется. Движение тела описывается, таким образом, изменением его координат во времени. Как показывает многовековой опыт человечества, причиной возникновения движения является *взаимодействие* данного объекта с окружающими его. *Величина, характеризующая меру взаимодействия материальных объектов, называется силой.*

Действие силы на тело определяется следующими тремя факторами: точкой приложения, направлением и численной величиной. Из определения силы следует, что она – векторная величина. Поэтому все действия над данной системой сил производятся по обычным правилам векторной алгебры и векторного анализа. Итак, если тело A (рис. 1.2) взаимодействует с некоторым другим телом, результат этого взаимодействия мы будем описывать действием силы $\mathbf{F}$. Величина силы характеризуется модулем вектора $|\mathbf{F}|$. Направление вектора определяет направление действия силы. *Прямая, вдоль которой направлена сила, называется линией действия силы.* Обычно вектор $\mathbf{F}$ рисуют так, чтобы его начало совпадало с точкой приложения силы.

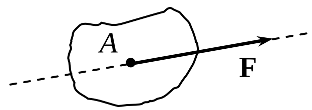

Рис. 1.2

Так как данное тело может одновременно взаимодействовать со многими телами, то в результате на него будет действовать *совокупность сил,* которую мы в дальнейшем будем называть *системой сил*.

Две одинаково направленные силы, приложенные к одной и той же точке и равные по модулю, называют *равными.* Подчеркнем, что равными при этом могут быть силы разной физической природы. Например, сила тяжести и сила натяжения нити, сила трения и сила тяги двигателя. Если одну систему сил ($\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$), действующую на тело, можно заменить другой ($\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \ldots, \mathbf{Q}_m$), не изменяя его состояния, то такие системы называются *эквивалентными*. Если данная система сил эквивалентна одной силе $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n) \sim \mathbf{R}$, то сила $\mathbf{R}$ называется *равнодействующей* системы сил $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n)$.

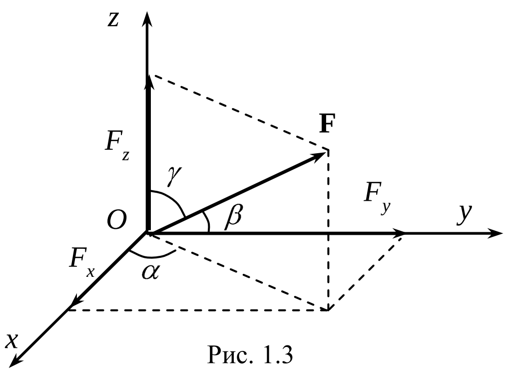

Рис. 1.3

Мы уже отмечали, что под действием системы сил тело может двигаться или покоиться. Если система сил такова, что под ее действием тело покоится или движется равномерно и прямолинейно, то эта система сил называется *уравновешенной*. В таких случаях говорят, что данная система сил *эквивалентна* нулю. Сила, равная равнодействующей по модулю, противоположно ей направленная и действующая вдоль той же прямой, называется *уравновешивающей* силой.

Аналитически силу $\mathbf{F}$ можно задать ее проекциями F_x, F_y, F_z на оси координат (рис. 1.3):

$$\mathbf{F} = \mathbf{i}F_x + \mathbf{j}F_x + \mathbf{k}F_x, \tag{1.3}$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – единичные векторы (орты), направленные вдоль осей Ox, Oy, Oz. Направление же в пространстве определяется направляющими косинусами:

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}, \cos\beta = \frac{F_y}{F}, \cos\gamma = \frac{F_z}{F}.$$

Наконец, модуль силы вычисляется так:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}.$$

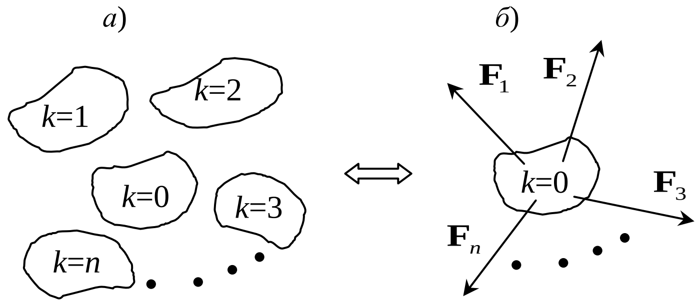

Рис. 1.4

Таким образом, задача о движении рассматриваемого тела (рис. 1.4,*а*, тело $k = 0$) при взаимодействии его с другими телами ($k = 1, \ldots, n$) сводится к задаче о движении данного тела под действием системы сил $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n)$, каждая из которых является результатом взаимодействия этого тела (k=0) с k-м телом (рис. 1.4,*б*). Поэтому, чтобы перейти от реальной задачи о движении тела $k = 0$ при его взаимодействии с системой тел $k = 1, \ldots, n$, показанной на рис. 1.4,*а* к модельной задаче о движении тела под действием системы сил $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n)$ (рис. 1.4,*б*), необходимо в каждом конкретном случае научиться заменять действующие на данное тело другие тела или поля соответствующими силами.

1.2. Аксиомы статики

Статика, к изучению которой мы переходим, является наукой *аксиоматической*. Это означает, что в основе статики лежит ряд недоказываемых утверждений, *аксиом*, на основе которых и строится все здание теории, доказываются необходимые теоремы и разрабатываются методы решения конкретных задач[3]. Конечно, сами аксиомы, к изложению которых мы переходим, являются следствием накопленного человечеством опыта.

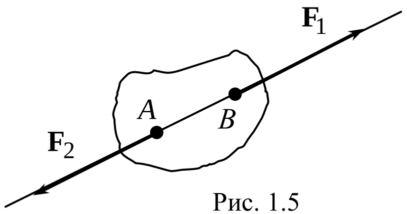

Рис. 1.5

Аксиома 1. *Абсолютно твердое тело находится в равновесии под действием двух сил тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю и противоположно направлены (линии их действия при этом совпадают).*

Эта аксиома определяет простейшую уравновешенную систему сил, т. е. систему сил, эквивалентную нулю $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) \sim 0$ (рис. 1.5).

Аксиома 2. *Действие данной системы сил на абсолютно твердое тело не изменится, если к ней прибавить или отнять уравновешенную систему сил.*

Следствие из 1-й и 2-й аксиом. *Точку приложения силы можно переносить вдоль линии ее действия.*

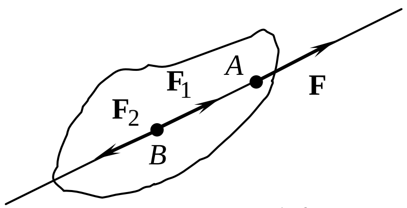

Рис. 1.6

По этой причине силу называют *скользящим вектором*. В самом деле, пусть сила $\mathbf{F}$ приложена к точке A (рис. 1.6). Возьмем произвольную точку B на линии действия этой силы и приложим к ней две уравновешенные силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ такие, что $|\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2| = |\mathbf{F}|$. Согласно аксиоме 2, действие силы $\mathbf{F}$ на тело от этого не изменится. Но силы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}_2$, согласно аксиоме 1, образуют уравновешенную систему сил, которую, согласно аксиоме 2, можно отбросить, т. е.

$$\mathbf{F} \sim (\mathbf{F}, 0) \sim (\mathbf{F}, (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)) \sim ((\mathbf{F}, \mathbf{F}_2), \mathbf{F}_1) \sim (0, \mathbf{F}_1) \sim \mathbf{F}_1 .$$

[3] Аксиома (ἀξίωμα) по определению – положение, принимаемое без доказательств в качестве исходного для данной теории.

В результате на тело будет действовать только одна сила $\mathbf{F}_1$, равная по модулю F и направленная вдоль линии действия силы $\mathbf{F}$, но приложенная в точке B (см. рис. 1.6).

Аксиома 3 (аксиома параллелограмма сил). *Две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и равную их геометрической сумме*

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 ,\ R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha} . \qquad (1.4)$$

Из этой аксиомы следует, что силу можно разложить единственным образом по двум заранее выбранным направлениям (конечно, сила и оба эти направления должны лежать в одной плоскости) или задавшись модулями сил (рис. 1.7). В последнем случае, правда, модули сил должны удовлетворять соотношению (1.4).

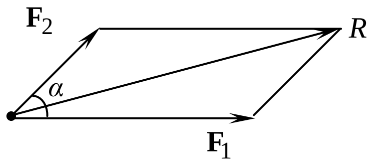

Рис. 1.7

Аксиома 4 (третий закон Ньютона). *Силы, с которыми действуют друг на друга два тела, равны по модулю и направлены в противоположные стороны:* $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$.

Отметим, что силы $\mathbf{F}_{12}$, $\mathbf{F}_{21}$ (рис. 1.8) приложены к разным телам и не образуют уравновешенной системы сил.

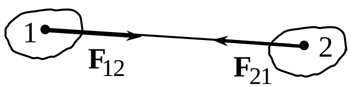

Рис. 1.8

На практике обычно приходится иметь дело с телами, способными в процессе эволюции деформироваться. Однако решение задачи статики и в этом случае оказывается возможным благодаря следующей аксиоме (*аксиоме отвердевания*).

Аксиома 5. *Если деформируемое тело находится в равновесии, то это равновесие не нарушится при замене исходного тела или его части абсолютно твердым.*

Аксиома эта утверждает довольно очевидное обстоятельство, согласно которому условия равновесия твердого тела с необходимостью должны выполняться и для деформируемых тел. Другое дело, что эти условия могут оказаться недостаточными. Например, для равновесия гибкой нити под действием двух сил, приложенных к ее концам, необходимы те же условия, что и для равновесия стержня: приложенные к ней с двух сторон силы должны быть равны по величине и противоположно направлены. Но эти условия не будут достаточными. Требуется еще, чтобы эти силы были растягивающими, т. е. направленными так, как показано на рис. 1.9.

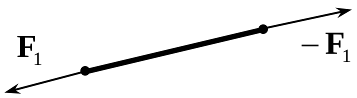

Рис. 1.9

Принцип отвердевания широко используется в инженерных расчетах. Он позволяет при составлении уравнений равновесия любой деформируемой конструкции рассматривать ее как абсолютно жесткую и применять к ней методы статики твердого тела. Если полученных таким образом уравнений окажется недостаточно, то дополнительно составляют уравнения, учитывающие или условия равновесия отдельных частей конструкции, или их деформации.

Мы уже не один раз употребили термин "равновесие твердого тела". Говоря о равновесии материальной точки или тела, мы подразумеваем, что тело это покоится, а значит, его положение остается неизменным относительно начала некоторой системы координат, т. е. относительно некоторого другого тела, с которым мы и связали начало координат. Пикантность ситуации состоит в том, что в одно и то же время рассматриваемое тело может покоиться относительного одного объекта и двигаться относительно другого. Примеров такого рода можно привести сколько угодно. Скажем, человек, сидящий в поезде в кресле, покоится относительно поезда, но движется относительно Земли, а вместе с Землей – вокруг Солнца. И эту карусель можно продолжить до бесконечности. Важен вывод, который из всего этого мы должны сделать. Движение любого объекта, равно как и состояние покоя, относительны. В каком же случае вообще можно говорить о покое и можно ли? Ответ на этот вопрос был сформулирован замечательным английским ученым Галилео Галилеем, хотя обычно его называют первым законом Ньютона. *Материальная точка покоится или равномерно и прямолинейно движется (с постоянной скоростью), если на нее не действуют никакие силы.* Таким образом, в соответствии с этим законом материальная точка будет находиться в равновесии, если на нее не действуют ни-

какие силы. Или, если воспользоваться введенной нами терминологией, на нее действует система сил, эквивалентная нулю. Вы заметили, что мы не сказали "покоится". Закон Ньютона устанавливает эквивалентность состояний покоя и равномерного и прямолинейного движения. Не существует методов, с помощью которых можно было бы различить эти два состояния. Поэтому, когда в будущем мы будем говорить о равновесии того или иного тела, всегда будет подразумеваться, что оно покоится или равномерно и прямолинейно движется. Здесь можно еще раз обратиться к эпиграфу к данной лекции. Только поэтам удаются столь емкие определения.

1.3. Связи и реакции связей

Тело (материальная точка), не взаимодействующее ни с какими другими телами или полями, называется свободным (свободной). Если к свободному телу приложить силу, то оно начнет двигаться. Во многих случаях этому движению, однако, можно воспрепятствовать или ограничить его, накладывая на тело *связи*. *Связью, таким образом, называются ограничения, налагаемые на положения или скорости материальных точек механической системы.*

В статике связи обычно осуществляются при помощи материальных тел. Подобная связь является, таким образом, результатом взаимодействия двух материальных тел. Естественно, здесь возникают две силы. Одна из них приложена со стороны связи к телу и носит название *силы реакции связи*, а другая приложена к связи и называется *силой давления на связь*. Согласно аксиоме 4 эти силы равны по величине и противоположно направлены. При этом *сила реакции связи направлена в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться данному телу.* В дальнейшем все силы, не являющиеся реакциями связей, мы будем называть *активными*. Реакция связи отличается от действующих на тело активных сил тем, что всегда зависит от величины этих сил и, как правило, неизвестна.

Конечно, следует понимать, что и активные силы, действующие на тело, и силы реакций, появляющиеся, если на тело наложены связи, всегда являются следствием взаимодействия тех или иных материальных объектов. Поэтому разделение всех сил на активные и реакции связей является достаточно условным, но очень удобным и полезным. Так, например, движение материальной точки в поле тяжести Земли мы рассматриваем как свободное движение точки под действием активной силы – силы тяжести. Скатывание же материальной точки под действием той же силы с наклонной плоскости мы уже называем несвободным движением материальной точки, на которую наложена связь, наклонная плоскость, и приложена внешняя сила. Но, естественно, само гравитационное поле, силу тяжести, также можно рассматривать как связь, которая препятствует, в частности, движению материальной точки от Земли.

Рассмотрим теперь основные виды связей, широко встречающиеся на практике.

1.3.1. Гладкая поверхность (без трения). *Гладкая поверхность* не дает перемещаться телу, на которое она наложена, под действием внешних сил по направлению общей нормали к соприкасающимся в точке касания поверхностям. Из определения силы реакции связи, таким образом, следует, что для поверхностей без трения она направлена по нормали к соприкасающимся поверхностям в точке касания, что показано на рис. 1.10[4].

1.3.2. Гладкие поверхности с угловой точкой (ребро). Реакция *гладкой поверхности с угловой точкой* перпендикулярна опирающейся поверхности, поскольку вдоль опирающейся поверхности гладкое ребро не препятствует движению (рис. 1.11).

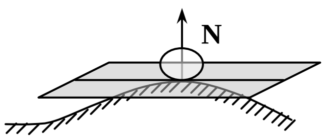

Рис. 1.10

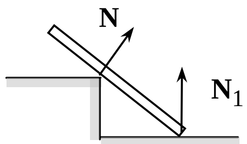

Рис. 1.11

1.3.3. Идеальная нить (гибкая, невесомая, нерастяжимая). Пример *идеальной нити* дан на рис. 1.12. Связь не дает телу двигаться вдоль линии AB в сторону точки B. Реакция $\mathbf{N}$ поэтому направлена также вдоль AB к точке подвеса (такая нить моделирует трос, канат, цепь и т. п.).

[4] Нормалью к поверхности называется перпендикуляр к касательной плоскости, проведенный в точку касания.

1.3.4. Подвижный цилиндрический шарнир. В строительной практике широко используется связь в виде *подвижных катков – подвижной опоры* или *подвижного цилиндрического шарнира*. Схематически эта связь обозначается так, как показано на рис. 1.13. Такая связь, например, всегда применяется при креплении одного из концов мостовой фермы, чтобы компенсировать растягивающие и сжимающие нагрузки, обусловленные сезонным нагреванием или охлаждением. Поскольку этот тип связи препятствует движению в направлении поверхности опирания, то и сила реакции всегда направлена по нормали к ней (рис. 1.13). Реакция направлена перпендикулярно плоскости BC, так как вдоль BC подвижный шарнир не мешает телу перемещаться.

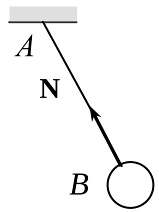

Рис. 1.12

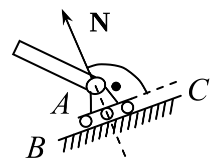

Рис. 1.13

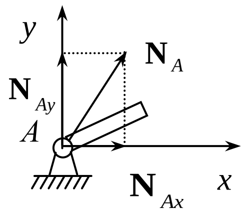

Рис. 1.14

1.3.5. Неподвижный цилиндрический шарнир. *Цилиндрический шарнир* в простейшем случае представляет собой болт, на который засажена втулка, жестко скрепленная со связуемым телом. Схематично обозначается так, как показано на рис. 1.14 или просто кружком. В зависимости от системы сил, приложенной к стержню, болт может прижиматься к различным точкам поверхности втулки. Поэтому сила реакции цилиндрического шарнира может иметь любое направление в плоскости чертежа, а стержень, закрепленный при помощи цилиндрического шарнира, – вращаться вокруг его оси. Реакция, таким образом, лежит в плоскости xAy, ее положение в общем случае не известно, а поэтому ее ищут в виде двух взаимно перпендикулярных составляющих $\mathbf{N}_{Ax}$ и $\mathbf{N}_{Ay}$ (связь не дает телу перемещаться ни вдоль оси Ax, ни вдоль оси Ay).

1.3.6. Неподвижный сферический шарнир. Тело, укрепленное при помощи *сферического шарнира*, может вращаться вокруг точки крепления, но ему запрещены поступательные движения вдоль трех взаимно перпендикулярных осей. В соответствии с этим направление реакции $\mathbf{N}$ не определено, и она может быть представлена тремя взаимно перпендикулярными составляющими $\mathbf{N}_x, \mathbf{N}_y, \mathbf{N}_z$ (рис. 1.15). Пример сферического шарнира каждый видел на креплении лыжной палки.

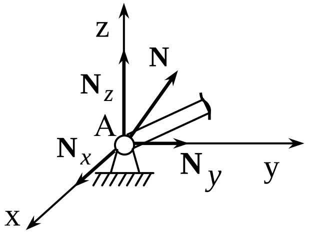

Рис. 1.15

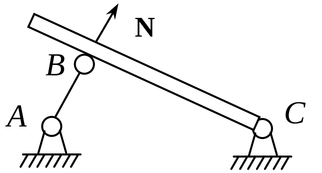

Рис. 1.16

1.3.7. Идеальный стержень (жесткий невесомый стержень, на концах которого шарниры). Связи такого типа широко используются, в частности, в строительстве. В качестве примера на рис. 1.15 показано крепление плиты при помощи стержня *(стержневой опоры*) AB и цилиндрического шарнира C. Обычно весом стержня можно пренебречь по сравнению с воспринимаемыми им нагрузками. Стержни при этом могут растягиваться или сжиматься. В зависимости от этого сила реакции стержня направлена вдоль него от точки крепления либо к точке крепления (рис. 1.16)

С некоторыми другими важными типами связей мы познакомимся позднее.

Наличие многочисленных связей, наложенных на тело, равновесие которого мы изучаем, сильно усложняет ситуацию, но здесь на помощь приходит *аксиома связей*.

Аксиома 6. *Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи и заменить их действие силами реакций связей.*

Таким образом, с помощью этой аксиомы всякое несвободное тело можно формально рассматривать как свободное.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте задачи статики.
2. Что мы называем материальной точкой?

3. Дайте определение абсолютно твердого тела.
4. В каком случае для описания деформируемого тела можно применять модель абсолютно твердого?
5. Что такое сила?
6. Какой вектор называется скользящим?
7. Какие силы называются равными?
8. Какие системы сил называются эквивалентными?
9. Какая система сил называется уравновешенной?
10. Что такое равновесие?
11. Что называется связями?
12. Перечислите типы связей, приведенные в данной лекции.
13. Что такое сила реакции связи?
14. Как определить направление силы реакции связи?
15. Какая сила называется силой давления на связь? Эта сила равна силе реакции связи?
16. Сформулируйте аксиомы статики.
17. Как разложить силу по двум заданным направлениям?
18. Какие экспериментально наблюдаемые законы механики (физики), известные Вам, отражены в аксиомах статики?

Задачи и упражнения

У. 1. Сила $\mathbf{F} = \{1,2,0\}$ (кН) приложена в точке, имеющей координаты $x = 1$, $y = 2$, $z = 2$. Нарисуйте эту силу.

У. 2. Дана сила $\mathbf{F} = \{1,2,0\}$. Найдите направляющие косинусы этой силы.

У. 3. Дана система двух сил $\mathbf{F}_1 = \{1,2,2\}$ (кН), $\mathbf{F}_2 = \{0,2,1\}$ (кН). Найдите их сумму и начертите полученный вектор.

У. 4. Дано три силы, одна из них $\mathbf{F}_1 = \{0,2,2\}$ (кН). Какой должны быть две другие, чтобы данная система сил являлась уравновешенной? Эта задача имеет решение? Если имеет, то является ли решение единственным?

У. 5. Дано три силы $\mathbf{F}_1 = \{2,2,0\}$ (кН), $\mathbf{F}_2 = \{1,2,0\}$ (кН), $\mathbf{F}_3 = \{1,3,1\}$ (кН). Какой должна быть сила $\mathbf{F}_4$, чтобы системы сил $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$ и $(\mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4)$ были эквивалентными?

После лекции

1. Отметим основные вехи развития статики. Выше уже говорилось, что статика вполне оформилась в науку уже в античные времена. Методы геометрической статики, созданные Архимедом, долгое время оставались вершиной естественнонаучной мысли. Архимед превратил статику в аксиоматическую науку, подобную геометрии Евклида, причем в качестве аксиом не чурался использовать известные эмпирические факты. Может быть, одним из самых заметных достижений Архимеда в этой области было формулирование закона рычага (см. лекции 4 и 5). Объяснение получил, казалось бы, противоестественный и почти волшебный факт о том, что груз большого веса можно поднять почти сколь угодно малой силой!

Другим важным достижением Архимеда явилось определение центров тяжести различных тел. Чрезвычайно элегантно, остроумно и строго он нашел центры тяжести параллелограмма, треугольника, трапеции, параболического сегмента.

Леонардо да Винчи (1464–1642) исследовал равновесие блоков, изучал законы трения.

Аксиоматика статики почти в том же виде, как мы изложили ее в лекции, была сформулирована Исааком Ньютоном (1643–1727). Как всегда бывает в жизни, одновременно с великими важный вклад в развитие статики вносили многие выдающиеся ученые. Француз П. Вариньон (1654–1722) сформулировал окончательно понятие момента силы относительно точки и доказал теорему о моменте равнодействующей, которая теперь носит его имя. Понятие пары сил (лекция 5) было введено французом Пуансо (1777–1859) в начале XIX столетия. Им же была сформулирована теорема, которую мы сегодня называем основной теоремой статики (см. лекцию 6). Фундаментальные результаты по изучению устойчивости движения и равновесия механических систем были получены нашим соотечественником профессором А.М. Ляпуновым (1857–1918).

2. Исаак Ньютон родился 4 января 1643 года в семье английского фермера. В 1661 году окончил Тринити-колледж Кембриджского университета, где обучался в качестве субсайзера, т. е. человека, выполнявшего для заработка обязанности слуги в колледже. Уже спустя семь лет он получил физико-математическую кафедру этого же университета. В 1672 году за выдающийся вклад в науку был избран членом Лондонского королевского общества (организованная много позднее Российская академия наук была некоторым аналогом Лондонского королевского общества), а в следующем году стал его президентом. Вклад И. Ньютона в мировую науку трудно переоценить. Он создал основы механики, теории тяготения, дифференциального и интегрального исчисления, разработал корпускулярную теорию света[5]. Частички любой из этих теорий хватило бы, чтобы обессмертить имя их создателя, а И. Ньютон совершил еще десятки великих деяний. Он, например, изобрел зеркальный телескоп, а в 1695 году руководил перечеканкой всей английской монеты, после чего получил звание директора Монетного двора.

В 1705 году за выдающиеся достижения в науке И. Ньютон был возведен в дворянское достоинство. Скончался он в 31 марта 1727 года и был похоронен в Вестминстерском аббатстве рядом с королями Англии, доказав, что не только смерть, но и талант равняют простолюдина и короля.

[5] Любопытно, что А. Эйнштейн получил Нобелевскую премию за фотоэффект, подтвердивший корпускулярную природу света, точнее, нужно было бы сказать и корпускулярную. Переиначив В. Шекспира, можно сказать: "И состоялась связь времен".

Если на точку действует несколько сил, то она получает от них то же движение, как если бы на нее действовала одна сила, эквивалентная им всем.

Леонард Эйлер

Пронзенные стрела́ми сил,
Сбегают в точку бывшие планеты,
Рождая по пути
Пространство,
Время
И ничто ...

Лекция 2. Система сходящихся сил

2.1. Теорема о равнодействующей системы сходящихся сил

Начнем исследование условий равновесия тела с частного случая – *системы сходящихся сил* (ССС). По определению это *система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке*.

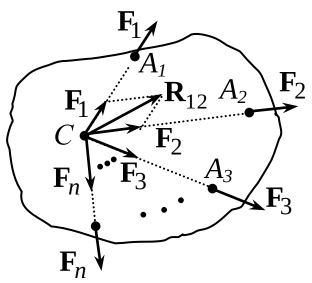

Рис. 2.1

Теорема. *Система сходящихся сил имеет равнодействующую, равную геометрической сумме этих сил и проходящую через точку пересечения их линий действия*.

Доказательство. Перенесем все силы вдоль линии действия в точку пересечения C. Последовательно складывая затем попарно силы с помощью аксиомы 3 (рис. 2.1): $\mathbf{R}_{12} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, $\mathbf{R}_{123} = \mathbf{R}_{12} + \mathbf{F}_3$ и т. д., находим равнодействующую

$$\mathbf{R} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \,. \qquad (2.1)$$

Эта равнодействующая приложена в точке C. Теорема доказана.

Геометрически равнодействующая может быть найдена как замыкающая сторона силового многоугольника, что показано на рис. 2.2. Сам многоугольник необходимо строить в заданном масштабе, выстраивая последовательно векторы сил $\mathbf{F}_i$.

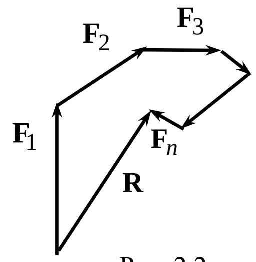

Рис. 2.2

Аналитические выражения проекций равнодействующей на оси координат определяются по формулам

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}\,,\ R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}\,, R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}\,, \qquad (2.2)$$

где R_x, R_y, R_z – проекции равнодействующей силы на оси Ox, Oy, Oz. Модуль и направление равнодействующей определяются так:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}\,,$$

$$\cos(\mathbf{R}, x) = \frac{R_x}{R},\ \cos(\mathbf{R}, y) = \frac{R_y}{R},\ \cos(\mathbf{R}, z) = \frac{R_z}{R}\,.$$

2.2. Условия равновесия и уравнения равновесия системы сходящихся сил

Теорема, доказанная в предыдущем разделе, решает первую задачу статики – действие на тело произвольной системы сходящихся сил $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n)$ заменяется действием одной силы: равнодействующей (2.1). Отсюда с очевидностью следует, что *тело, на которое действует система сходящихся сил, будет находиться в равновесии, если равнодействующая этих сил равна нулю*[6]

$$\mathbf{R} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k = 0\,. \qquad (2.3)$$

Соотношение (2.3) является векторным уравнением равновесия тела под действием системы сходящихся сил. Его можно переписать так:

[6] Здесь мы воспользовались тем, что если тело находится в равновесии под действием одной силы, то эта сила должна равняться нулю (покажите это, используя аксиомы).

$$\mathbf{i}R_x + \mathbf{j}R_y + \mathbf{k}R_z = 0\,. \tag{2.3а}$$

Поскольку в правой части последнего уравнения стоит сумма трех взаимно перпендикулярных векторов, то для выполнения условия (2.3а) необходимо, чтобы каждый из них обращался в нуль, и, воспользовавшись соотношениями (2.2), мы приходим к трем скалярным уравнениям равновесия тела под действием системы сходящихся сил:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0\,,\; R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0\,, R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0\,. \tag{2.4}$$

Если система сил, действующих на тело, плоская, то уравнения равновесия существенно упрощаются. Одно из уравнений системы (2.4), скажем, последнее (это означает, что система сил, действующих на тело, лежит в плоскости xOy), в этом случае удовлетворяется тождественно, и условия равновесия сводятся к следующим:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0\,,\; R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0\,. \tag{2.5}$$

Геометрически условие (2.3) означает, что *силовой многоугольник сил (*$\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$*) – замкнутый.*

2.3. Теорема о трех силах

При решении плоских задач статики часто полезной оказывается так называемая теорема о трех силах.

Теорема. *Если твердое тело находится в равновесии под действием трех сил, причем линии действия двух из них пересекаются, то это система сходящихся сил.*

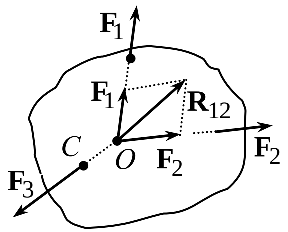

Рис. 2.3

Доказательство. Доказательство теоремы почти очевидно. Действительно, пусть тело находится в равновесии под действием системы трех сил $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3)$, приложенных соответственно в точках A, B и C (рис. 2.3). Будем считать, что линии действия первых двух пересекаются. Продолжим линии действия сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$

до их пересечения в точке O (они не параллельны и лежат в одной плоскости). Тогда, согласно аксиоме 3, действие этих двух сил можно заменить равнодействующей $\mathbf{R}_{12} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, которая равна их сумме. В результате исходная система трех сил эквивалентно заменяется двумя:

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3) \sim (\mathbf{R}_{12}, \mathbf{F}_3)\,.$$

Но по условию тело находится в равновесии, следовательно, по аксиоме 1 последние две силы должны быть равны по величине и противоположно направлены. Это, в свою очередь, означает, что линия действия силы $\mathbf{F}_3$ также проходит через точку O, что и доказывает теорему.

2.4. Решение задач статики. Статически определимые и статически неопределимые задачи

В предыдущих двух разделах этой лекции были решены обе задачи статики для системы сходящихся сил. Сначала произвольная система сходящихся сил была эквивалентно заменена одной силой – равнодействующей, а затем установлены соответствующие условия равновесия. Как полученные теоретические результаты применить при решении практических задач? Если тело под действием данной системы сил и набора связей находится в равновесии, то в статике приходится обычно решать задачу определения сил реакций этих связей или давления на них. Во всех случаях решение задачи алгоритмизируется и состоит из следующих этапов:

1. Необходимо установить, исследование равновесия какого тела (точки, системы тел) следует рассмотреть.
2. Освободить исследуемое тело от связей и изобразить действующие на него активные силы и силы реакций отброшенных связей.
3. Установить, какая система сил действует на тело, и сформулировать условия равновесия этой системы.
4. Составить уравнения равновесия.

5. Если тел несколько, то следует рассмотреть другие тела (повторив пункты 1–4), исходя из того, чтобы в конечном счете общее число уравнений и неизвестных совпало[7].
6. Решить уравнения равновесия и определить тем самым искомые величины.

Поскольку число линейно независимых уравнений равновесия конечно (в частности, для системы сходящихся сил в пространстве имеем 3 уравнения, а на плоскости – 2), то и определить мы можем не больше неизвестных величин, чем имеется уравнений равновесия. *Если число неизвестных величин не превышает числа уравнений равновесия, то система называется статически определимой, в противном случае – статически неопределимой.*

Рассмотрим теперь несколько примеров решения задачи определения реакций связей в случае, когда тело или система тел находится в равновесии под действием системы сходящихся сил.

Задача 1. Груз весом P (материальная точка) лежит на гладкой наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Определить величину силы $\mathbf{F}$, которую нужно приложить к грузу параллельно плоскости, чтобы удержать его в равновесии (рис. 2.4,*а*). Найти также силу давления $\mathbf{Q}$ груза на плоскость.

Решение. Рассмотрим равновесие груза. Все силы, под действием которых груз находится в равновесии, показаны на рис. 2.4,*б*. Здесь $\mathbf{N}$ – сила реакции гладкой наклонной плоскости. Согласно аксиоме 4 (третьему закону Ньютона) $\mathbf{Q} = -\mathbf{N}.$ Поскольку груз моделируется материальной точкой, то все силы, действующие на него, сходятся в одной точке. Таким образом, это система сходящихся сил. Расчетная схема представлена на рис. 2.4,*б*, здесь система координат выбрана с началом в точке схода сил и осью x, параллельной наклонной плоскости.

Уравнения равновесия груза в векторной форме (2.3) принимают вид

$$\mathbf{F} + \mathbf{N} + \mathbf{P} = 0.$$

Геометрическое решение этого уравнения представлено на рис. 2.4,*в*. Замкнутый треугольник сил начинаем строить с известной

[7] Правда, это возможно лишь в так называемых статически определимых задачах (см. ниже).

силы $\mathbf{P}$. Далее из конца вектора $\mathbf{P}$ проводим прямую, параллельную $\mathbf{N}$, а из начала вектора $\mathbf{P}$ – прямую, параллельную $\mathbf{F}$. Точка пересечения этих прямых будет концом вектора $\mathbf{N}$ (и началом вектора $\mathbf{F}$). Длины отрезков bc и ca определяют модули векторов $\mathbf{N}$ и $\mathbf{F}$ в выбранном масштабе.

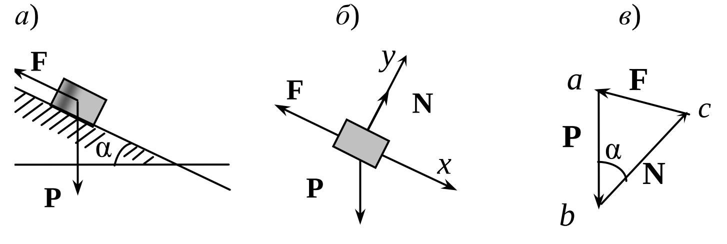

Рис. 2.4

Аналитическое решение получим, составляя уравнения равновесия (2.5):

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \; -F + P\sin\alpha = 0 \;\Rightarrow\; F = P\sin\alpha,$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \; N - P\cos\alpha = 0, \;\Rightarrow\; N = P\cos\alpha.$$

Задача 2. Невесомая балка AB длиной $2a$ в точке A закреплена шарнирно, а в точке B – с помощью подвижной шарнирной опоры, располагающейся на наклонной плоскости с заданным углом α (рис. 2.5). В середине балки приложена внешняя сила P. Определить реакции опор $\mathbf{N}_A$ и $\mathbf{N}_B$.

Решение. Сила реакции подвижной шарнирной опоры направлена перпендикулярно плоскости опирания. Сила же реакции шарнира A в общем случае может быть направлена произвольным образом в плоскости чертежа. Но поскольку балка находится в равновесии под действием системы трех сил и две из них не параллельны ($\mathbf{P}$ и $\mathbf{N}_B$, см. рис. 2.5,*а*), то это система сходящихся сил (см. теорему). Линии действия приложенных к балке сил пересекаются поэтому в одной точке C. Строим теперь силовой треугольник. Нетрудно видеть, что он равнобедренный (так как равнобедренным является треугольник ACB), поэтому $\mathbf{N}_A = \mathbf{N}_B$, и $N_A = N_B = (P/2)\cos\alpha$.

а) *б*)

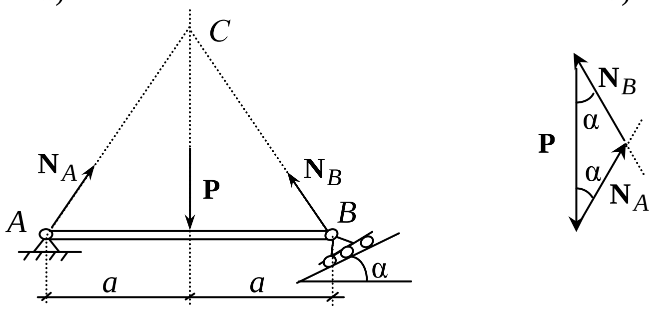

Рис. 2.5

До сих пор мы рассматривали задачи, в которых тела находились в равновесии под действием плоской системы сходящихся сил. Приведем пример решения задачи для пространственной системы сил.

Задача 3. Груз $Q = 100$ кН удерживается в равновесии двумя горизонтальными цепями BO и CO одинаковой длины и невесомым брусом AO, шарнирно закрепленным в точке A на вертикальной стенке. Стержневая опора составляет с вертикалью угол 45°. Плоскость BOC перпендикулярна плоскости ABC, а $\angle CBO =$ $= \angle BCO = 45^o$ (рис. 2.6,*а*). делить усилие S в брусе и натяжение T_1, T_2 цепей.

а) *б*)

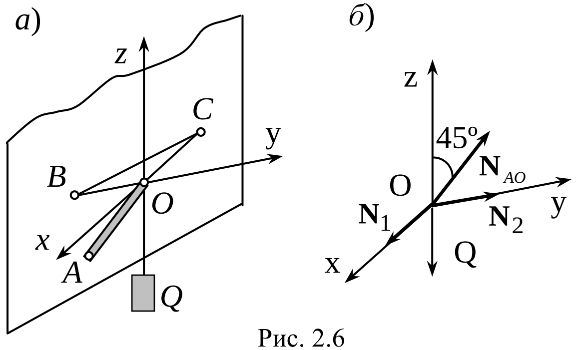

Рис. 2.6

Решение. В данной задаче опять достаточно определить реакции связей, скольку силы на-

тяжения цепей равны силам реакции $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ и направлены положно им. Аналогично сила реакции бруса $\mathbf{N}_{AO}$ направлена тивоположно усилию $\mathbf{S}$, возникающему в брусе. Для нахождения неизвестных реакций следует изучить равновесие узла O. На этот узел действует пространственная система четырех сходящихся сил, показанная на рис. 2.6,*б*. Система будет находиться в равновесии, если удовлетворяются уравнения равновесия (2.4), которые в данном случае имеют вид

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = -N_1 + N_{AO}\cos 45^{\mathrm{o}} \cos 45^{\mathrm{o}} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = -N_2 + N_{AO}\cos 45^{\mathrm{o}} \sin 45^{\mathrm{o}} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = -Q + N_{AO}\cos 45^{\mathrm{o}} = 0.$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$N_{AO} = Q/\cos 45^{\mathrm{o}} \cong 141 \text{ (кН)}, \ N_1 = N_2 = Q\cos 45^{\mathrm{o}} \cong 70{,}5 \text{ (кН)}.$$

Таким образом, $S \cong 141$(кН), $T_1 = T_2 = 70{,}5$ (кН).

Все задачи, решенные в этой лекции, были статически определимыми, число неизвестных реакций равнялось числу линейно независимых уравнений равновесия. Строго говоря, только в этом случае удается решить задачу методами статики. Однако возможны ситуации, когда формально статически неопределимая задача может быть решена! Приведем только один подобный пример в качестве иллюстрации того, что никогда не следует отступать перед формальными признаками.

Задача 4. Груз A весом P удерживается в равновесии с помощью четырех попарно симметричных нитей (рис. 2.7). Определить, каким будет соотношение сил натяжения нитей в равновесии.

Решение. Рассмотрим равновесие груза A. На него действует плоская система пяти сил, четыре из которых неизвестны (натяжения или реакции нитей). Задача, следовательно, оказывается статически неопределимой, поскольку для плоской системы сходящихся сил можно составить только два линейно независимых уравнения равновесия. На помощь, однако, приходит симметрия задачи. Из условий симметрии силы реакции нитей N_E, N_B и N_D, N_C (см. рис. 2.7) должны быть по модулю попарно равны: $N_E = N_B = N_1$, $N_D = N_C = N_2$. В результате задачу удается решить. Опять же из симметрии задачи следует, что первое уравнение равновесия (сумма проекций всех сил на ось Ax) удовлетворяется тождественно, а второе принимает вид

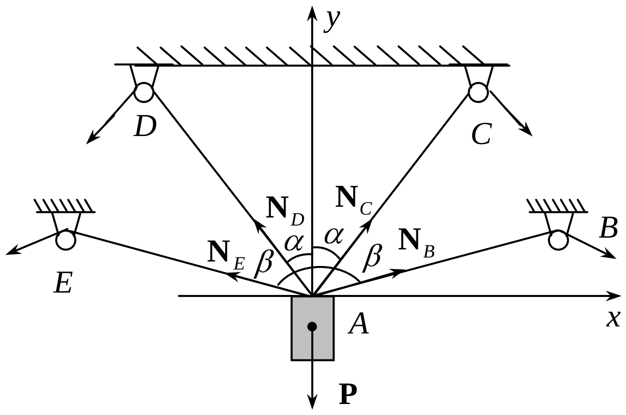

Рис. 2.7

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \implies 2N_2\cos\alpha + 2N_1\cos\beta - P = 0.$$

Из этого уравнения и получаем искомый ответ:

$$N_2 = \frac{P}{2\cos\alpha} - \frac{N_1\cos\beta}{\cos\alpha}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какая система сил называется сходящейся?
2. Какие аксиомы статики используются для нахождения равнодействующей системы сходящихся сил? Какие аксиомы статики используются при доказательстве теоремы о трех силах?

3. Сформулируйте условие равновесия тела под действием системы сходящихся сил.
4. Сколько линейно независимых уравнений равновесия можно составить для произвольной системы сходящихся сил? Запишите их.
5. Сколько линейно независимых уравнений равновесия можно составить для плоской системы сходящихся сил? Запишите их.
6. Какие задачи называются статически неопределимыми?
7. Сформулируйте геометрическое (графическое) условие равновесия тела под действием системы сходящихся сил.
8. Как разложить данную силу на две, у одной из которых задан модуль, а у другой – линия действия?
9. Придумайте (и решите!) по крайней мере две задачи о разложении данной силы на три других, не лежащие в данной плоскости.
10. Вы запомнили алгоритм решения задач статики? Повторите его.

Задачи и упражнения

У. 6. К точке A приложены четыре силы: $\mathbf{F}_1 = \{1,3,2\}$ (кН), $\mathbf{F}_2 = \{2, 2, 2\}$ (кН), $\mathbf{F}_3 = \{1,1,1\}$ (кН), $\mathbf{F}_4 = \{3,3,2\}$ (кН). Найти равнодействующую этих сил.

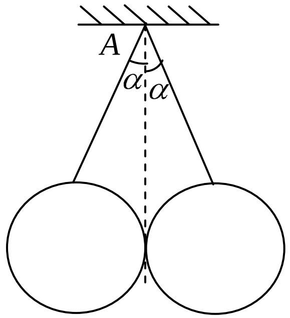

Рис. 2.8

У. 7. На точку действует система трех сходящихся сил: $\mathbf{F}_1 = \{2,3,1\}$ (кН), $\mathbf{F}_2 = \{-2,2,-2\}$ (кН), $\mathbf{F}_3 = \{1,-1,1\}$ (кН). Какую силу нужно приложить к точке, чтобы оно находилось в равновесии?

У. 8. Два диска веса P_1, P_2 и одинакового радиуса R подвешены на нерастяжимых нитях к точке A (рис. 2.8). Определить натяжение нитей.

Умные речи подобны строкам,
напечатанным курсивом.
Козьма Прутков

После лекции

Приведение (эквивалентная замена) системы сходящихся сил к одной силе – равнодействующей – основано на использовании аксиомы параллелограмма, аксиомы о сложении двух сил. Вокруг доказательства этой аксиомы (теперь уже нужно было бы сказать – теоремы) на протяжении веков было сломано немало копий. В своем окончательном виде она была сформулирована в XVII веке усилиями С. Стевина (1548–1633), И. Ньютона и П. Вариньона. Доказательства предлагались самые разные. И. Ньютон, например, доказывал эту теорему, исходя из принципов динамики, а П. Вариньон – экспериментально, на специально построенном для этой цели приборе.

Сегодня эти попытки выглядят, может быть, странно. Как только мы договорились о том, что сила – это вектор, ясно, что любые две силы должны складываться как векторы, по правилу параллелограмма (приложение А). Но, во-первых, во времена, когда рождалось правило параллелограмма, еще не существовало ни современного понятия вектора, ни тем более алгебры векторов и векторного анализа. А во-вторых, и векторный анализ, и векторная алгебра являются продуктом размышлений и экспериментов многих поколений. Всегда сначала рождается вопрос о природе явления, потом оно исследуется и лишь затем делается попытка его описать, создать теорию.

Аксиома параллелограмма сил, равно как и другие аксиомы статики, безусловно, являются конечным пунктом долгой дороги познания законов природы и отражают наши экспериментально полученные в течение многих веков знания. Здание любой теории в механике, в физике, в биологии, в экономике строится по одним и тем

же законам. В основу теории закладываются некоторые базовые утверждения, которые мы и называем аксиомами. Исходя из аксиом доказываются те или иные теоремы, на основе которых уже формулируются методы решения конкретных задач. Правильность любой теории будет определяться поэтому точностью формулировки аксиом. Сомнение в точности, а может быть, и в правильности аксиом в этой связи является естественным желанием понять, насколько Ваша теория правильно описывает данное явление.

Появление новой теории всегда сопровождается (и начинается!) ниспровержением старых аксиом и появлением новых. При этом между правильными теориями (и старые теории могут быть правильными, речь идет об их точности) должна существовать определенная преемственность – старая теория вкладывается в новую как частный случай. Один из создателей квантовой механики Нильс Бор назвал это *принципом дополнительности*. Главное при изучении любой теории – разобраться в адекватности, правильности аксиом. Ничего нельзя принимать на веру. Только сомнение рождает Истину!

Прямые $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ параллельны, если $k_1 = k_2$.

Г. Корн и Т. Корн

Теория – это некоторым образом квинтэссенция практики.

Л. Больцман

Лекция 3. Система параллельных сил

3.1. Равнодействующая двух параллельных сил

В предыдущей лекции мы с Вами вывели условия равновесия системы сходящихся сил. А что же делать, если линии действия сил параллельны и не пересекаются в одной точке? Рассмотрим сначала действие на тело двух параллельных сил $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$. Параллельность сил, в частности, предполагает, что линии действия сил параллельны и они направлены в одну сторону[8]. Имеет ли такая система сил равнодействующую? Оказывается, имеет, и найти эту равнодействующую совсем нетрудно, если использовать сведения, почерпнутые в предыдущих двух лекциях.

Так как сила, действующая на тело, есть вектор скользящий, то достаточно знать только линии действия каждой силы и ее модуль, а за точку приложения можно брать любую точку на линии действия соответствующей силы, например точку *A* для силы $\mathbf{P}$ и точку *B* для силы $\mathbf{Q}$ (рис. 3.1). Соединим эти точки прямой *AB* и приложим в них две численно равные силы $\mathbf{S}$ и $\mathbf{S}'$, направленные по прямой *AB* в противоположные стороны (см. рис. 3.1). Эта система сил является уравновешенной, $(\mathbf{S},\mathbf{S}')\sim 0$.

[8] Часто параллельными называют и силы, линии действия которых параллельны, но направлены они в противоположные стороны. Через одну лекцию мы увидим, что такие силы в некотором отношении существенно отличаются от собственно параллельных. Поэтому силы, направленные в одну и в разные стороны, целесообразно разделять, хотя, конечно, такое разделение достаточно условно и диктуется только соображениями удобства.

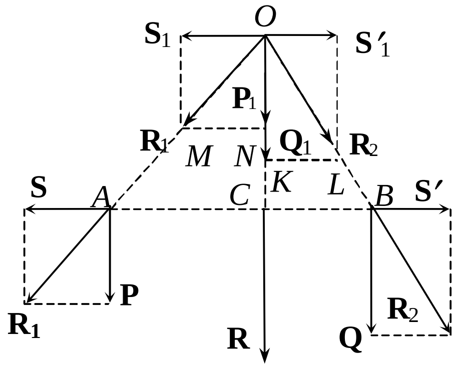

Рис. 3.1

Сложив силы $\mathbf{P}, \mathbf{S}$ и $\mathbf{Q}, \mathbf{S}'$, найдем их равнодействующие $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$. Таким образом, исходная система параллельных сил эквивалентно заменена системой двух сходящихся сил: $(\mathbf{P},\mathbf{Q})\sim(\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{S},\mathbf{S}')\sim$ $\sim(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2)$. Продолжим линии действия сил $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ до пересечения и перенесем их точки приложения в эту точку (O).

Теперь каждую из сил $\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2$ разложим по двум взаимно перпендикулярным направлениям с помощью аксиомы параллелограмма на составляющие $\mathbf{P}_1,\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{Q}_1,\mathbf{S}_1'$, причем так, чтобы выполнялись соотношения $\mathbf{P}_1=\mathbf{P},\ \mathbf{Q}_1=\mathbf{Q},\ \mathbf{S}_1=\mathbf{S}_1'=\mathbf{S}=\mathbf{S}'$. В результате наша система сил свелась к системе четырех сил $(\mathbf{P}_1,\mathbf{Q}_1,\mathbf{S}_1,\mathbf{S}_1')$, приложенных в одной точке O:

$$(\mathbf{P},\mathbf{Q})\sim(\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{S},\mathbf{S})\sim(\mathbf{P}_1,\mathbf{Q}_1,\mathbf{S}_1,\mathbf{S}_1')\sim(\mathbf{P}_1,\mathbf{Q}_1)\sim\mathbf{R}=\mathbf{P}_1+\mathbf{Q}_1.$$

В конце мы учли, что система сил $(\mathbf{S}_1,\mathbf{S}')$ является уравновешенной, и заменили систему сил $(\mathbf{P}_1,\mathbf{Q}_1)$, направленных вдоль одной прямой, их равнодействующей $\mathbf{R}$. Последняя равна сумме сил $\mathbf{P}_1,\mathbf{Q}_1$, причем модуль ее определяется суммой исходных сил: $R=P+Q$, и направлена она параллельно линиям их действия и в ту же сторону.

Так как точку приложения вдоль линии действия силы можно переносить, то будем считать, что сила $\mathbf{R}$ приложена в точке *C* на линии AB. Чтобы определить положение этой точки, рассмотрим две пары треугольников: силовых ΔOLK, ΔONM и метрических ΔOBC, ΔOCA. Ясно, что эти треугольники попарно подобны. Поэтому

$$\frac{Q_1}{S_1'} = \frac{OC}{CB}, \; \frac{P_1}{S_1} = \frac{OC}{CA},$$

откуда

$$S_1 \cdot OC = Q_1 \cdot CB = P_1 \cdot CA,$$

или

$$P \cdot AC = Q \cdot CB. \qquad (3.1)$$

Соотношению (3.1) можно придать несколько иной вид:

$$\frac{P}{Q} = \frac{CB}{AC}, \text{ или } \frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC}. \qquad (3.1,а)$$

Если в формуле (3.1) прибавить слева и справа произведение $P \cdot CB$, то можно получить более полную пропорцию, содержащую равнодействующую двух параллельных сил:

$$P \cdot (AC + CB) = (Q + P) \cdot CB,$$

т. е.

$$P \cdot AB = R \cdot CB, \qquad (3.2)$$

откуда

$$\frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}. \qquad (3.2,а)$$

Таким образом, точка C находится на отрезке AB и делит его *внутренним образом* на части, обратно пропорциональные силам. Точка приложения равнодействующей двух или нескольких параллельных сил называется *центром параллельных сил*. В результате можно сформулировать теорему о сложении двух параллельных сил, направленных в одну сторону.

Теорема. *Система двух параллельных сил, направленных в одну сторону, имеет равнодействующую, которая по модулю равна сумме модулей данных сил, параллельна им и направлена в ту же сторону. Линия действия равнодействующей проходит через точку, которая делит отрезок AB внутренним образом на части, обратно пропорциональные данным силам.*

Поэтому если на тело действует система двух не равных нулю параллельных сил, направленных в одну сторону, то тело не может находиться в равновесии.

3.2. Разложение силы на две ей параллельные, направленные в одну сторону

Теорема, которой мы завершили предыдущий раздел, позволяет решить и обратную задачу о разложении заданной силы $\mathbf{R}$ на две $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, ей параллельные и направленные в ту же сторону (рис. 3.2).

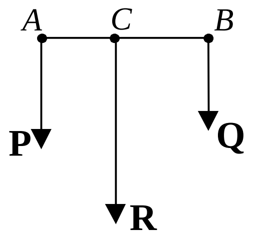

Рис. 3.2

Такое разложение в общем случае может быть проведено бесконечным множеством способов. Задача станет вполне определенной лишь в двух ситуациях, которые и рассматриваются ниже.

Итак, пусть силу $\mathbf{R}$, приложенную в точке C (рис. 3.2), требуется разложить на две параллельные ей силы так, чтобы одна сила была приложена в точке A и модуль ее был бы равен P. Таким образом, отрезок AC и P заданы. Согласно только что доказанной теореме модуль второй слагаемой силы Q и точка ее приложения B определяются тогда из соотношения (3.1):

$$Q = R - P, \quad CB = \frac{P \cdot AC}{Q}.$$

Пусть теперь силу $\mathbf{R}$ надо разложить на две ей параллельные силы и приложенные в точках A и B (AC и CB заданы). В этом случае модули сил P и Q определяются из соотношений

$$P = R - Q, \; \frac{P}{Q} = \frac{CB}{AC} \implies \frac{R - Q}{Q} = \frac{CB}{AC}$$

и

$$Q = R\frac{AC}{AB}, \; P = R\frac{CB}{AB}.$$

3.3. Центр системы параллельных сил, направленных в одну сторону

Рассмотрим теперь систему n параллельных сил $\mathbf{P}_1,...,\mathbf{P}_n$, приложенных соответственно в точках $A_1, \ldots, A_n$ и направленных в одну сторону (рис. 3.3). Чтобы построить их равнодействующую, следует попарно сложить все силы, пользуясь доказанной в первом разделе этой лекции теоремой.

Начнем анализ с сил $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$, приложенных соответственно в точках A_1 и A_2. Положение этих точек относительно начала некоторой системы координат определяется заданием радиус-векторов $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, показанных на рис. 3.3. Равнодействующая этих двух сил $\mathbf{R}_1 = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ приложена в точке

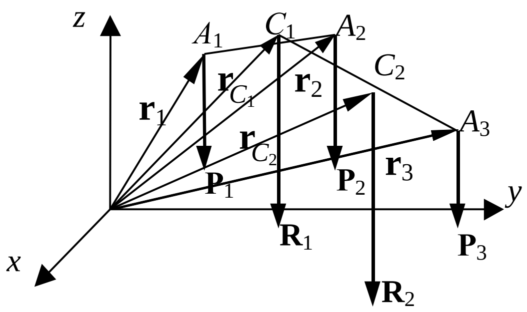

Рис. 3.3

C_1, определяемой радиус-вектором $\mathbf{r}_{C_1}$. Из анализа рис. 3.3 очевидно, что

$$\mathbf{A}_1\mathbf{C}_1 = \mathbf{r}_{C_1} - \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{C}_1\mathbf{A}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{C_1}. \tag{3.3}$$

С другой стороны, $A_1C_1 / P_2 = C_1A_2 / P_1$. Так как векторы $\mathbf{A}_1\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_1\mathbf{A}_2$ коллинеарны, то последнее равенство справедливо как для векторов, так и для их модулей. Поэтому $\mathbf{A}_1\mathbf{C}_1 / P_2 = \mathbf{C}_1\mathbf{A}_2 / P_1$.

Используя теперь соотношения (3.3), находим

$$\frac{(\mathbf{r}_{C_1} - \mathbf{r}_1)}{P_2} = \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{C_1})}{P_1},$$

откуда

$$\mathbf{r}_{C_1} = \frac{P_1\mathbf{r}_1 + P_2\mathbf{r}_2}{P_1 + P_2}. \tag{3.4}$$

Далее, равнодействующая $\mathbf{R}_2$ сил $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{P}_3$ равна

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1 + \mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3$$

и приложена в точке C_2, определяемой радиус-вектором

$$\mathbf{r}_{C_2} = \frac{P_1\mathbf{r}_1 + P_2\mathbf{r}_2 + P_3\mathbf{r}_3}{P_1 + P_2 + P_3}. \tag{3.4а}$$

Соотношение (3.4а) аналогично формуле (3.4) и получается повторением выкладок, проделанных для определения вектора $\mathbf{r}_{C_1}$. Подобными же рассуждениями находим равнодействующую n сил $\mathbf{P}_1,...,\mathbf{P}_n$ и центр этой системы параллельных сил:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i, \quad \mathbf{r}_C = R^{-1}\sum_{i=1}^{n}P_i\mathbf{r}_i. \tag{3.5}$$

Доказать (3.5) можно, например, по индукции.

Если повернуть данные силы на один и тот же угол, сохраняя их точки приложения, то и равнодействующая этих сил повернется на тот же угол, причем положение центра параллельных сил не изменится. Это связано с тем, что, как следует из формул (3.5), положение центра системы параллельных сил от направления сил не зависит, а определяется только модулями складываемых сил и радиус-векторами их точек приложения.

3.4. Центр тяжести

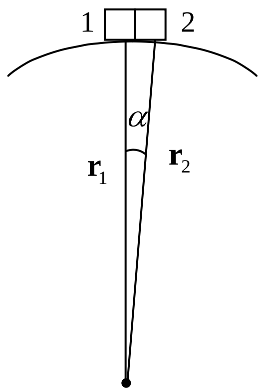

Рис. 3.4

Полученные соотношения имеют широкие приложения на практике. Рассмотрим в качестве первого примера задачу об определении центра тяжести тела. На любую частицу тела, находящуюся вблизи земной поверхности, действует сила тяжести, направленная вдоль радиуса, соединяющего центр частицы с центром Земли (рис. 3.4). Поскольку радиус Земли много больше размера любого тела, находящегося на его поверхности, то можно считать, что на частицы тела действует со стороны Земли система параллельных сил[9]. Равнодействующая сил тяжести, действующая на каждую час-

[9] Оцените, какая максимальная ошибка совершается при определении центра тяжести плотины длиной 1 км и высотой 100 м из-за замены сил тяжести, действующих на каждый ее элемент, системой параллельных сил.

тицу тела, приложена в центре данной системы параллельных сил и равна сумме сил тяжести (весу тела). *Точка приложения равнодействующей сил тяжести, действующих на тело, и называется центром тяжести тела*.

Твердое тело является весьма специфической механической системой. Оно состоит из бесконечного числа материальных точек, на каждую из которых будет действовать со стороны Земли сила тяжести. Как просуммировать такое бесконечное число сил и определить центр тяжести твердого тела?

Итак, рассмотрим твердое тело, находящееся на поверхности Земли (рис. 3.5). Разобьем его вертикальными и горизонтальными сечениями на элементарные объемы ΔV_i. Если эти объемы достаточно малы, то их вполне можно моделировать материальными точками. На каждый из этих объемов (материальных точек) действует сила тяжести (см. рис. 3.5). Как уже говорилось, направления всех этих сил будут практически параллельны. Равнодействующая сил тяжести, действующих на частицы тела, численно равна его весу, а ее линия действия проходит через вполне определенную точку, совпадающую с центром параллельных сил тяжести частиц тела. При изменении ориентации тела в пространстве, что соответствует изменению направлений действия сил тяжести относительно тела, эта точка, согласно свойству параллельных сил, не изменяет своего положения по отношению к телу.

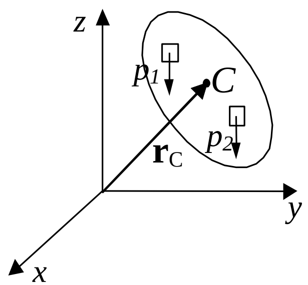

Рис. 3.5

Если мы разбили твердое тело на n элементарных объемов, радиус-вектор центра тяжести определяется, следовательно, соотношением (сравни с формулой (3.5))

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n}\Delta p_i \mathbf{r}_i\ ,\ P = \sum_{i=1}^{n}\Delta p_i\ , \tag{3.6}$$

где $\mathbf{r}_i$ – радиус-векторы точек приложения сил тяжести Δp_i, действсующих на элемент объема ΔV_i; P – вес всего тела.

Очевидно, что формула (3.6) тем точнее будет определять координаты центра тяжести, чем точнее объем ΔV_i моделируется материальной точкой. Поэтому, строго говоря, координата центра тяжести произвольного твердого тела определяется следующим предельным соотношением

$$\mathbf{r}_C = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta p_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{n}\Delta p_i} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}\gamma_i \Delta V_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{n}\gamma_i \Delta V_i}\ . \tag{3.7}$$

В этом соотношении мы ввели удельный вес $\gamma_i = \Delta p_i / \Delta V_i$. Входящие сюда суммы – это интегральные суммы и в пределе дают интегралы, вычисляемые по объему рассматриваемого тела. Поэтому

$$\mathbf{r}_C = P^{-1}\iiint_V \gamma(x,y,z)\mathbf{r}\,dxdydz\ , \tag{3.8}$$

где $P = \iiint_V \gamma(x,y,z)dxdydz$ – вес тела.

Координаты центра тяжести поэтому определяются так:

$$x_C = P^{-1}\iiint_V \gamma(x,y,z)x\,dxdydz,$$
$$y_C = P^{-1}\iiint_V \gamma(x,y,z)y\,xdxdydz, \tag{3.9}$$
$$z_C = P^{-1}\iiint_V \gamma(x,y,z)z\,xdxdydz\ .$$

Центр тяжести тонкой (бесконечно тонкой) поверхности определяется соотношением

$$\mathbf{r}_C = P^{-1}\iint_S \gamma\,\mathbf{r}\,dS\ , \tag{3.10}$$

центр тяжести произвольного криволинейного стержня (бесконечно тонкого "одномерного" тела или линии) – формулой

$$\mathrm{r}_C = P^{-1}\int_l \gamma\mathbf{r}\,dl\ . \tag{3.11}$$

В формулах (3.10), (3.11) γ – функция плотности, заданная соответственно на поверхности S и вдоль кривой l, $P = \iint\limits_S \gamma\, dS$ – вес поверхности, $P = \iint\limits_l \gamma\, dl$ – вес стержня.

У однородного тела удельный вес постоянен: $\gamma = \mathrm{const}$. В этом случае формулы (3.6)–(3.11) существенно упрощаются:

$$\mathbf{r}_C = V^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{r}_i \Delta V_i\ , \tag{3.12}$$

$$\mathbf{r}_C = V^{-1}\iiint\limits_V \mathbf{r}dxdydz\,,\mathbf{r}_C = S^{-1}\iint\limits_S \mathbf{r}dS\,,\mathbf{r}_C = l^{-1}\int\limits_l \mathbf{r}dl\,, \tag{3.13}$$

и определение центра тяжести становится фактически геометрической задачей.

В формулах (3.7)–(3.13) интегралы вычисляются по объему тела, по поверхности или вдоль линии, S и l – соответственно площадь пластины и длина линии.

3.5. Методы определения центра тяжести

Метод, развитый в предыдущем разделе, позволяет, в принципе, определить центр тяжести любых тел. Для неоднородных тел сложной формы вычислить соответствующие интегралы нередко совсем не просто. Однако часто центр тяжести можно определить с помощью довольно простых методов, с которыми мы сейчас и познакомимся. Сами по себе методы эти являются плодом остроумных феноменологических подходов и многовековых экспериментов и сегодня кажутся почти очевидными. Конечно, результаты вычисления центров тяжести всеми методами одинаковы.

3.5.1. Метод симметрии. Одним из самых мощных и одновременно простых методов определения центра тяжести является метод, использующий свойства *симметрии* тела[10]. Если однородное тело имеет плоскость или ось симметрии, то его центр тяжести лежит соответственно или в плоскости симметрии, или на оси симметрии. Если же тело имеет центр симметрии, то его центр тяжести находится именно в этом центре[11]. Теперь ясно, например, что центры тяжести однородных параллелограмма и параллелепипеда лежат на пересечении диагоналей, а круга и сферы – в их центрах.

3.5.2. Метод разбиений. Если тело можно разбить на конечное число таких частей, для каждой из которых положение центра тяжести известно, то центр тяжести всего тела можно определить следующим образом. Пусть, например, мы разбили тело на $i = 1,2,\ldots,n$ частей и определили, что центр тяжести каждой из них лежит в точках $\mathbf{r}_{C_1},\mathbf{r}_{C_2},...,\mathbf{r}_{C_n}$. Центр тяжести всего тела тогда определяется соотношением

$$\mathbf{r}_C = P^{-1}\sum_{i=1}^{n} P_i \mathbf{r}_{C_i}\ ,$$

где $P_1,\ldots,P_n$ – веса соответствующих частей тела, а $P = P_1 + P_2 + \ldots + P_n$. Описанный метод называется *методом разбиения.*

3.5.3. Метод дополнений (отрицательных весов). Этот метод является частным случаем метода разбиений. Он применяется к телам, имеющим вырезы, если центры тяжести тела без выреза и вырезанной части известны. Пусть тело, вес которого P, имеет полость заданного объема V. Если бы тело не имело полости, то его вес был бы равен $P' = P + P_\mathrm{v}$, где P_v – вес объема V. Радиус-вектор центра тяжести такого тела (без полости) определяется так:

$$\mathbf{r}'_C = (\mathbf{r}_C P + \mathbf{r}_{C\mathrm{v}} P_\mathrm{v})\,/\,P'\,.$$

Отсюда сразу следует, что радиус-вектор центра тяжести исходного тела (с полостью) $\mathbf{r}_C$ равен

$$\mathbf{r}_C = (\mathbf{r}'_C\, P' - \mathbf{r}_{C\mathrm{v}} P_\mathrm{v})\,/\,P\,. \tag{3.14}$$

3.5.4. Экспериментальные методы. Конечно, интегралы люди научились вычислять сравнительно недавно, а центры тяжести определялись достаточно давно и успешно. И в первую очередь это

---

[10] Та или иная симметрия вообще является одним из самых фундаментальных свойств мироздания. Оказывается, что именно симметрия системы определяет законы ее движения и развития.

[11] Этим рецептам можно придать вид теорем, которые доказываются достаточно простыми рассуждениями. Попробуйте сделать это, а если не удастся, почитайте лекции по теоретической механике замечательного отечественного механика Н.Е. Жуковского, они есть в любой библиотеке.

связано с применением различных экспериментальных методов. Мы упомянем здесь лишь о двух таких методах.

Для плоских фигур удобно применять *метод подвешивания*. Состоит он в том, что исследуемую фигуру подвешивают на нити за произвольную точку, и проводят на фигуре прямую, являющуюся продолжением нити. Затем эту процедуру повторяют уже для другой точки. Центр тяжести будет находиться на пересечении полученных линий (докажите, что результат не зависит от выбора точек).

Для объемных тел используют *метод взвешивания*. Суть метода поясним на простом примере. Положим, нам нужно найти центр тяжести ручки. Привяжем к ней нить так, чтобы ее можно было передвигать вдоль поверхности, и поднимем ручку за нее. Центр тяжести будет находиться в той точке ручки, когда она займет горизонтальное положение. Так, однако, не удастся определить центр тяжести достаточно больших тел сложной формы. Тогда поступают следующим образом. Тело одним концом ставят на угловую опору, а другим кладут на весы и взвешивают. При этом определяют силу давления тела на весы. Затем взвешенную часть устанавливают на угловую опору, а противоположную снимают с опоры и взвешивают. В результате удается определить силы давления на две опоры, а, пользуясь далее тем, что эти силы параллельны, находят линию приложения их равнодействующей. И центр тяжести будет лежать на этой линии.

Рассмотрим теперь несколько примеров вычисления центров тяжести различных фигур.

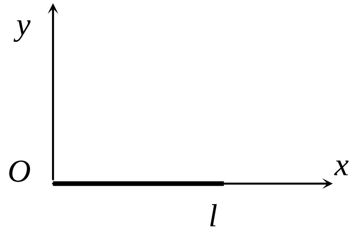

Рис. 3.6

Задача 5. Определить центр тяжести однородного стержня длины l.

Решение. Введем прямоугольную декартову систему координат и направим ось Ox вдоль стержня (рис. 3.6). Так как тело одномерное и прямолинейное, то из соображений симметрии сразу можно написать: $y_C = 0,\quad x_C = l/2$. Вычислим теперь центр тяжести с помощью формулы (3.11). В этом случае криволинейный интеграл (3.11) для определения x_C сводится к определенному ($dl = dx$):

$$x_C = \frac{1}{l}\int\limits_{l} x\,dl = \frac{1}{l}\int\limits_{0}^{l} x\,dx = \frac{l}{2}.$$

Задача 6. Определить центр тяжести дуги окружности радиуса R и углом раствора 2α.

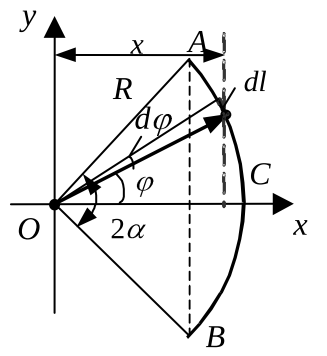

Рис. 3.7

Решение. Систему координат выберем так, чтобы ось Ox была направлена вдоль оси симметрии (рис. 3.7). Тогда $y_C = 0$, а для определения x_C необходимо вычислить криволинейный интеграл (3.11), который снова сводится к определенному интегралу. Нетрудно видеть, что элемент дуги равен $dl = Rd\varphi$, а длина всей дуги AB равна $l = R\cdot 2\alpha$. Координата x выделенного элемента дуги определяется так: $x = R\cos\varphi$. Поэтому

$$x_C = \frac{1}{l}\int\limits_{AB} x\,dl = \frac{R^2}{l}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi\, d\varphi = \frac{2R^2\sin\alpha}{l} = \frac{R\sin\alpha}{\alpha}.$$

Задача 7. Определить центр тяжести треугольной пластины.

Решение. В общем случае эта задача сводится к вычислению довольно сложных интегралов, но ее можно решить и очень простыми рассуждениями. Однако это всегда искусство. Здесь мы познакомимся с двумя примерами. Итак, пусть дана треугольная пластина ABC. Разобьем площадь треугольника прямыми, параллельными стороне *AC,* на n узких полосок (рис. 3.8). Очевидно, что центры тяжести этих полосок будут лежать на медиане

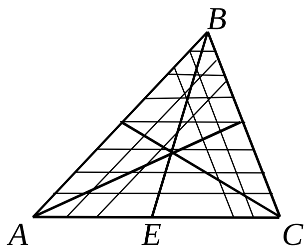

Рис. 3.8

BE треугольника. Следовательно, и центр тяжести всего треугольника лежит на этой медиане. Аналогичный результат получается для двух других медиан. Отсюда заключаем, что центр тяжести треугольной пластины находится в точке пересечения его медиан. В частности, если треугольник прямоугольный, то перпендикуляр, опущенный из точки пересечения медиан на катет, делит его в отношении $1:2$.

Задача 8. Определить центр тяжести однородного кругового сектора.

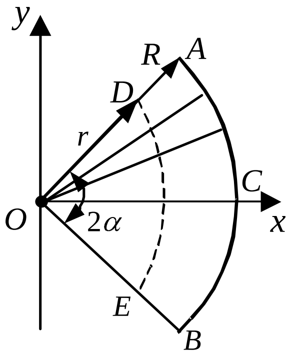

Рис. 3.9

Решение. Рассмотрим круговой сектор AOB радиуса R с центральным углом 2α, приведенный на рис. 3.9. Разобьем мысленно площадь сектора AOB радиусами, проведенными из центра O, на n секторов. В пределе, при неограниченном увеличении числа n, эти секторы можно рассматривать как равнобедренные треугольники с высотой R, которая является также и медианой. Поэтому центры тяжести этих треугольников лежат на дуге DE радиуса $r = 2R/3$. Следовательно, центр тяжести сектора AOB совпадает с центром тяжести дуги DE, положение которого определяется по формуле

$$x_C = \frac{r\sin\alpha}{\alpha} = \frac{2R\sin\alpha}{3\alpha}.$$

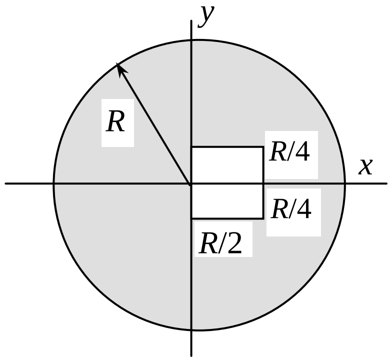

Рис. 3.10

Задача 9. Определить центр тяжести однородной круговой пластины радиуса R с квадратным вырезом, показанной на рис. 3.10. Сторона квадрата равна $R/2$.

Решение. Из симметрии задачи сразу следует, что $y_C = 0$. Вторую же координату определим с помощью метода дополнений. Координаты центра тяжести сплошного однородного круга и квадрата, выполненного из того же материала, соответственно равны $x_{C1} = 0$, $x_{C2} = R/2$. Тогда согласно соотношению (3.14) имеем

$$x_C = \frac{x_{C1}S_1 - x_{C2}S_2}{S_1 - S_2} = -\frac{R}{2(4\pi - 1)},$$

так как $S_1 = \pi R^2$, $S_2 = R^2/4$.

3.6. Распределенные силы

До сих пор, говоря о силах, мы предполагали, что сила имеет точку приложения. Такие силы называют *сосредоточенными*. На практике, однако, часто приходится сталкиваться с так называемыми *распределенными силами*, т. е. силами, распределенными по определенному закону вдоль некоторой поверхности или линии. Иногда их называют *распределенной нагрузкой*. С примером такой силы мы уже встречались, поскольку сила тяжести, действующая на тело, фактически является равнодействующей сил тяжести, действующих на каждый элемент тела. Фундамент дома, оказывая давление на Землю, является примером силы, распределенной вдоль некоторой поверхности. Ветер, обдувающий телевизионную антенну, можно рассматривать как другой пример распределенной силы, которая действует вдоль некоторой поверхности или линии (если толщина антенны пренебрежимо мала по сравнению с ее высотой).

Действие на тело распределенных сил характеризуется *интенсивностью* $\mathbf{q}$. Средняя интенсивность распределенной силы определяется отношением полной силы, действующей на тело, к его объему, поверхности или отрезку длины в зависимости от того, распределена данная сила по объему, поверхности или вдоль линии:

$$\mathbf{q}_V = \mathbf{F}_V / V,\ \mathbf{q}_S = \mathbf{F}_S / S,\ \mathbf{q}_L = \mathbf{F}_L / L.$$

Здесь $\mathbf{F}_V, \mathbf{F}_S$, $\mathbf{F}_L$ – соответственно равнодействующие для сил, распределенных по объему V, поверхности S или вдоль кривой L.

В общем случае величина распределенной силы от точки к точке может изменяться, и тогда интенсивность распределенной силы в точке определяется производными:

$$\mathbf{q}_V = d\mathbf{F}_V / dV,\ \mathbf{q}_S = d\mathbf{F}_S / dS,\ \mathbf{q}_L = d\mathbf{F}_L / dL .$$

Отсюда, в частности, следует, что равнодействующая данной распределенной силы определяется интегралом от интенсивности силы по объему (для силы, распределенной по объему), по поверхности (для силы, распределенной по поверхности) или вдоль линии (если сила распределена вдоль линии)

$$\mathbf{F}_V = \int_V \mathbf{q}_V dV, \mathbf{F}_S = \int_S \mathbf{q}_S dS,\ \mathbf{F}_L = \int_L \mathbf{q}_L dL .$$

Если распределенная нагрузка представляет собой систему параллельных сил, то определение ее равнодействующей проводится так же, как и для сил тяжести. Пусть, например, сила равномерно с интенсивностью q распределена вдоль отрезка прямой $AB = L$ (рис. 3.11,*а*). Поскольку в данном случае интенсивность распределенной силы постоянна, то очевидно, что равнодействующая сила равна $Q = qL$ и приложена в середине отрезка AB.

Рис. 3.11

Если силы распределены по линейному закону (рис. 3.11,*б*) так что основание снова равно $AB = L$, то $Q = qL/2$, а приложена она на расстоянии $L/3$ от конца B (точнее, в точке пересечения медиан треугольника распределенных сил).

Вопросы для самоконтроля

1. Какие силы называются параллельными?
2. Чему равна и где приложена равнодействующая двух параллельных сил?
3. Как разложить силу на две ей параллельные, направленные в одну сторону?
4. Что такое центр системы параллельных сил?
5. Как определить координаты центра системы параллельных сил?

6. Что называется центром тяжести?
7. Какие методы определения центра тяжести Вы знаете?
8. Что такое симметрия? Можно ли ей дать строгое математическое определение?
9. На Ваш взгляд, красота – это симметрия, или симметричность убивает красоту?
10. Что такое метод дополнений?
11. Определите центр тяжести сектора круга радиуса R, если угол раствора сектора равен 60°.
12. Какие силы называются распределенными? Приведите примеры распределенных сил.
13. Существуют ли в природе сосредоточенные силы?
14. Как определить равнодействующую и ее точку приложения произвольной распределенной силы?

Упражнения и задачи

У. 9. Где находится центр тяжести однородного тела, имеющего ось симметрии, центр симметрии? Привести примеры.

У. 10. Вес квадратной пластины распределен неравномерно. Будет ли ее центр тяжести совпадать с центром симметрии пластины?

У. 11. Определить центр тяжести неоднородной пластины, показанной на рис. 3.12. Удельные плотности пластин соответственно равны: $\gamma_1 = 4$ кН/м², $\gamma_2 = 3$ кН/м², $\gamma_3 = 5$ кН/м².

У. 12. Определить реакции опор однородной балки веса P, на которую действует распределенная нагрузка (рис. 3.13).

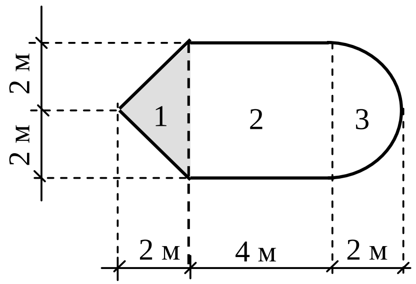

Рис. 3.12

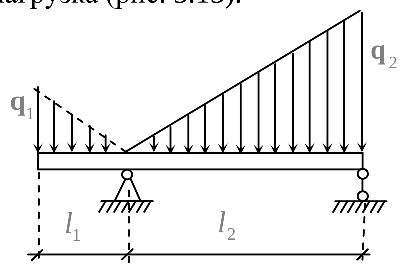

Рис. 3.13

После лекции

1. В теоретической механике предполагается, что пространство, в котором происходит движение рассматриваемых материальных объектов, описывается евклидовой геометрией, которая носит название своего создателя. Евклид жил примерно за 300 лет до Рождества Христова. В первой книге своих "Начал геометрии" он дает такое определение параллельных прямых: "Параллельными называются такие лежащие в одной плоскости прямые, которые будучи продолжены как угодно далеко никогда не пересекутся". Аксиома о параллельных прямых явилась одной из основополагающих всей его геометрии. Сформулирована она, однако, была чрезвычайно сложно, из-за чего многими исследователями делались попытки построить геометрию (евклидову), не пользуясь аксиомой о параллельных. Теперь мы знаем, что попытки эти были обречены на неудачу. Если опустить аксиому о параллельных, то возможно построить три различных геометрии: эллиптическую, евклидову и гиперболическую, которые и были развиты в работах венгра И. Больяи, россиянина Н.И. Лобачевского и немца Б. Римана. Следует, правда оговориться. Евклид не допускал, что прямая может не иметь бесконечную длину и оказаться замкнутой на себя.

Гений – это случай.
Клод-Адриан Гельвеций

2. Николай Егорович Жуковский (1847–1921) – один из крупнейших представителей отечественной школы механиков, вписавший в анналы этой науки многие основополагающие страницы. По сути, он создатель новой науки – теоретической аэродинамики. Именно он первым доказал знаменитую теорему о подъемной силе крыла, после чего полет птицы, оставаясь все-таки чудом, перестал быть мистикой. Перечень полученных им фундаментальных результатов в разных областях механики занял бы не одну страницу. Здесь хочется только сказать, что Н.Е. Жуковский полностью перестроил преподавание теоретической механики в нашей стране и создал один из лучших учебников, который остается современным и сегодня.

Родился Николай Егорович в семье инженера-строителя (точнее – строителя дорог) в 1847 году в деревне Орехово Владимирской гу-

бернии. С февраля 1858 года он учился в четвертой московской гимназии, по окончании которой в 1864 году становится студентом физико-математического факультета Московского университета. Его образование заканчивается сдачей в 1871 году магистерских экзаменов и с этого времени начинается отсчет научно-педагогической деятельности Н.Е. Жуковского. Долгое время он работает доцентом, а затем профессором кафедр механики и аналитической механики Московского высшего технического училища. Позднее он читал лекции и в Московском университете.

Механика, которой с таким успехом занимался Николай Егорович, всегда была тесно связана с практикой, и ему приходилось заниматься решением огромного числа практически важных инженерных задач. Он, например, в течение нескольких лет изучал работу водопроводных сетей в Москве. Результатом явились, с одной стороны, рекомендации по эксплуатации водопроводов и водоводов, а с другой, блестящая теория гидравлического удара в водопроводных трубах. Кстати, решение задачи о гидравлическом ударе не только объясняет причину аварии водопровода, но и дает возможность точно определить место аварии, не выходя из кабинета.

И все-таки главное детище Н.Е. Жуковского – это аэродинамика и авиация. Среди его учеников – выдающиеся ученые и конструкторы: А.А. Архангельский, В.П. Ветчинкин, Л.С. Лейбензон, Г.Н. Мусиньянц, Г.Х. Сабинин, Б.С. Стечкин, А.Н. Туполев и многие, многие другие. Он – создатель экспериментальной аэродинамической базы в нашей стране. Именно Н.Е. Жуковским были построены первые аэродинамические трубы в Московском университете и в Высшем техническом училище, он же стоит у истоков организации Центрального аэрогидродинамического института (знаменитого ЦАГИ). Сегодня выдающиеся достижения в области механики жидкости и газа и авиации отмечаются медалью имени Жуковского и соответствующими премиями.

Дай мне точку опоры, и я сдвину Землю.
Архимед

Лекция 4. Момент силы относительно точки

4.1. Момент силы относительно точки

Важнейшим понятием механики является понятие *момента силы* относительно точки. Понятие это возникли давно, как отражение того опытного факта, что под действием силы твердое тело может не только поступательно перемещаться, но и вращаться относительно некоторой точки. Впервые достаточно четко сформулированным мы находим его в учении Архимеда о рычагах (см. раздел 5 этой лекции, а также раздел "После лекции").

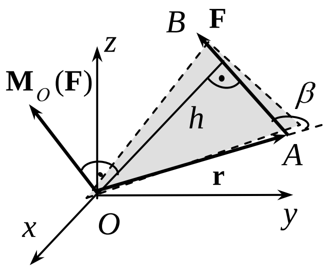

Рис. 4.1

Моментом силы $\mathbf{F}$ *относительно некоторой точки* O *называется вектор* $\mathbf{M}_O(\mathbf{F})$, *равный векторному произведению радиус-вектора точки приложения силы и силы* (рис. 4.1)

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \tag{4.1}$$

По определению векторного произведения вектор момента силы направлен перпендикулярно плоскости векторов $\mathbf{r}$, $\mathbf{F}$ и в ту сторону, откуда вращение тела под действием силы представляется происходящим против часовой стрелки. Другими словами, направление вектора момента силы можно определить с помощью правила правого буравчика: располагаете головку буравчика в плоскости OAB (рис. 4.1) и начинаете его "закручивать". Острие буравчика укажет Вам направление момента силы.

Таким образом, две равные по модулю, приложенные в одной точке, но противоположно направленные силы будут поворачивать тело в противоположные стороны, а их моменты равны по величине и противоположно направлены.

Если координаты точки A равны x, y, z, то для вычисления момента (4.1) его удобно представить в виде определителя:

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_x)\mathbf{i} + (zF_x - xF_z)\mathbf{j} + (xF_y - yF_x)\mathbf{k}, \tag{4.2}$$

т. е. момент силы относительно точки является суммой трех взаимно перпендикулярных векторов, проекции которых на оси координат равны

$$M_{Ox}(\mathbf{F}) = (yF_z - zF_x),$$
$$M_{Oy}(\mathbf{F}) = (zF_x - xF_z), \tag{4.3}$$
$$M_{Oz}(\mathbf{F}) = (xF_y - yF_x).$$

Модуль вектора момента силы (4.1) можно вычислять и иначе. По определению, $|\mathbf{M}_O(\mathbf{F})| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}|\sin\beta$, где β – угол между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}$ (см. рис. 4.1). Но отрезок $r\sin\beta = h$ определяет расстояние от точки O, относительно которой вычисляется момент, до линии действия силы. Поэтому модуль момента силы $\mathbf{F}$ относительно точки O равен просто произведению модуля силы на расстояние h: $|\mathbf{M}_O(\mathbf{F})| = rh$, причем h называется *плечом силы*.

Повторим еще раз, что такое *плечо силы*. *Это кратчайшее расстояние от центра* O *до линии действия силы*. В частности, если точка O лежит на линии действия силы $\mathbf{F}$, то $\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = 0$ (так как плечо силы $h = 0$). Это согласуется с очевидным фактом – тело, закрепленное шарнирно в точке O, не будет вращаться под действием силы $\mathbf{F}$, линия действия которой проходит через шарнир (рис. 4.2).

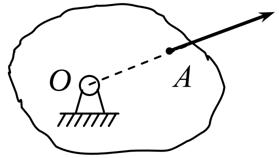

Рис. 4.2

4.2. Момент силы относительно точки на плоскости

Пусть сила $\mathbf{F}$ и центр O, относительно которого необходимо вычислить ее момент, лежат в одной плоскости, скажем, в плоскости xOy (рис. 4.3).

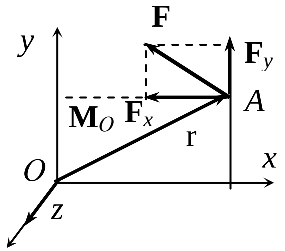

Рис.4.3

Чему равен момент этой силы и как он направлен? Пользуясь определением (4.2), имеем (рис. 4.3)

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k}(xF_y - yF_x) \,. \quad (4.4)$$

Таким образом, искомый вектор момента силы имеет лишь одну составляющую и направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежит линия действия силы и центр O (плоскость xOy в данном случае). Модуль же вектора (4.4), как мы установили, равен произведению силы на плечо[12]:

$$M_O(\mathbf{F}) = F\,h \,. \quad (4.5)$$

Итак, если дана плоская система сил, т. е. система сил, линии действия которых лежат в одной плоскости, то моменты всех этих сил относительно центра, лежащего в той же плоскости, направлены перпендикулярно плоскости, в которой находятся силы. В такой ситуации можно ввести понятие алгебраического момента силы, который мы будем обозначать буквой m. Например, для силы $\mathbf{F}$, приведенной на рис. 4.3,

$$m_O(\mathbf{F}) \equiv \pm M_O(\mathbf{F}) = \pm F\,h \,. \quad (4.6)$$

Поскольку под действием равных по величине, но противоположно направленных сил тело вращается в противоположные стороны, то и соответствующие моменты сил должны иметь противоположные знаки. *Условимся считать, что момент имеет знак "плюс", если под действием силы тело поворачивается против часовой стрелки, и "минус" – в противном случае.* В международной системе единиц момент силы измеряется в ньютонах на метр (Н·м).

Задача 10. Найти момент силы $\mathbf{F}$ = (2, 3, 0), линия действия которой проходит через точку A с координатами (1, 0, 0), относительно начала координат O (рис. 4.4).

[12] Формулу (4.5) легко доказать и непосредственно, используя определения проекций x, y и F_x, F_y. Сделайте это.

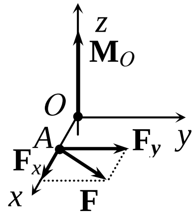

Рис. 4.4

Решение. Воспользуемся для вычисления момента определением (4.2):

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3\mathbf{k} \,.$$

Этот же результат следует и непосредственно из рис. 4.4. Действительно, сила $\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y + \mathbf{F}_z = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y$. Линия действия силы $\mathbf{F}_x$ проходит через точку O, поэтому ее момент относительно этой точки равен нулю, а сила $\mathbf{F}_y$ имеет плечо $AO = 1$, и мы приходим к уже полученному результату[13].

4.3. Теорема Вариньона

Векторное произведение удовлетворяет закону дистрибутивности:

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_n \,. \quad (4.7)$$

Следствием свойства (4.7) является широко используемая на практике *теорема Вариньона*.

Теорема. *Момент равнодействующей системы сходящихся сил относительно произвольной точки O равен векторной сумме моментов слагаемых сил относительно той же точки.*

Доказательство. Доказательство теоремы почти очевидно. Итак, пусть дана система сходящихся сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$. Ее равнодействующая приложена в точке схода A линий действия сил и равна (см. лекцию 2): $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n$. Момент этой равнодействующей относительно точки A можно найти с использованием свойства (4.7):

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{R}) = \mathbf{r}_A \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n) = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_A \times \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{r}_A \times \mathbf{F}_n \,, \quad (4.8)$$

где $\mathbf{r}_A$ – радиус-вектор точки приложения равнодействующей данной системы сил (а значит, и каждой из сил $\mathbf{F}_i$).

[13] Строго говоря, в этих рассуждениях мы неявно использовали теорему Вариньона, которую докажем в следующем разделе.

Использование теоремы Вариньона особенно полезно при определении момента силы. Нередко даже в сравнительно простой ситуации плечо силы найти сложно. Тогда можно попытаться разложить данную силу на составляющие и искать ее момент, используя теорему Вариньона. Только один пример.

Задача 11. К двухсоставной рамной конструкции, показанной на рис. 4.5, в точке B под углом 60° к вертикали приложена сила $\mathbf{F}$. Определить ее момент относительно точки A.

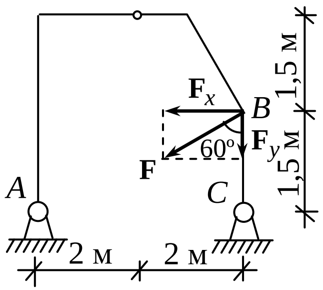

Рис. 4.5

Решение. Воспользуемся теоремой Вариньона. Исходная сила $\mathbf{F}$ может быть эквивалентно заменена плоской системой двух сходящихся сил $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_x$. Поэтому

$$m_A(\mathbf{F}) = m_A(\mathbf{F}_x) + m_A(\mathbf{F}_y) =$$

$$= 1{,}5F_x - 4F_y = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - 2\right)F.$$

4.4. Момент силы относительно оси

Давайте теперь рассмотрим твердое тело, имеющее неподвижную ось Oz, которая, в свою очередь, шарнирно закреплена. Примером такого тела может служить дверь или окно, закрепленные на петлях-шарнирах. Как будет двигаться такое тело, если к нему приложить силу? Конечно, будет поворачиваться вокруг оси.

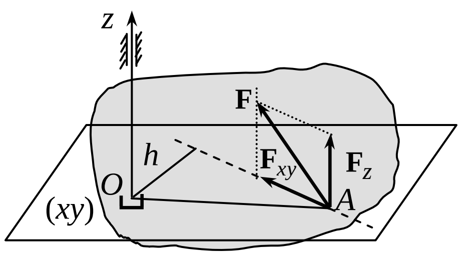

Рис. 4.6

Воздействие силы $\mathbf{F}$ на тело зависит от расположения этого вектора относительно оси. Ясно, что если сила параллельна оси Oz, то тело не будет поворачиваться. Разложим силу $\mathbf{F}$ на две составляющие: одну параллельную оси $\mathbf{F}_z$, а другую – $\mathbf{F}_{xy}$, лежащую в плоскости, перпендикулярной этой оси (в плоскости, параллельной плоскости xOy, рис. 4.6). За вращательное движение тела с неподвижной осью отвечает сила $\mathbf{F}_{xy}$. Чтобы количественно охарактеризовать вращательный эффект, создаваемый силой, вводят понятие *момента силы относительно оси.*

Моментом силы $\mathbf{F}$ *относительно оси* Oz *называется скалярная величина, равная алгебраическому моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси относительно точки пересечения оси с этой плоскостью:*

$$M_z(\mathbf{F}) = \pm M_0(\mathbf{F}_{xy}) = \pm F_{xy}h. \qquad (4.9)$$

Знак "плюс" берется, если с положительной стороны оси Oz вращение, которое сила $\mathbf{F}_{xy}$ стремится совершить, видно происходящим против хода часовой стрелки, а знак минус – в противном случае; h – плечо силы $\mathbf{F}$ относительно точки O (см. рис. 4.7).

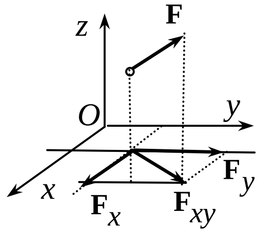

Рис. 4.7

Если воспользоваться теоремой Вариньона и вычислить момент (4.6), разложив теперь на составляющие силу $\mathbf{F}_{xy}$, получим (рис. 4.7)

$$M_z(\mathbf{F}) = xF_y - yF_x. \qquad (4.10)$$

Сравнивая это выражение с последней из формул (4.3), приходим к важному выводу о том, что момент силы относительно оси Oz равен проекции на эту же ось момента относительно центра O. Поскольку ось вращения тела может быть и осью Ox, и осью Oy, то ясно, что такие же соотношения будут иметь место и для моментов относительно двух других осей, т. е. соотношение вида (4.10) носят универсальный характер:

$$\begin{aligned} M_x(\mathbf{F}) &= M_{Ox}(\mathbf{F}) = yF_z - zF_y, \\ M_y(\mathbf{F}) &= M_{Oy}(\mathbf{F}) = zF_x - xF_z, \qquad (4.11) \\ M_z(\mathbf{F}) &= M_{Oz}(\mathbf{F}) = xF_y - yF_x. \end{aligned}$$

Нередко утверждение (4.11) формулируют в виде теоремы.

Теорема. *Моменты сил относительно осей в системе координат Oxyz равны проекциям момента силы относительно начала координат O.*

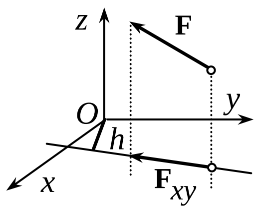

Рис. 4.8

Вместе с тем часто соотношения (4.11) берут за определение момента силы относительно оси. Это вполне справедливо, хотя все-таки дело вкуса.

Подводя итог, повторим, как вычислить момент силы относительно оси, скажем, оси *Oz*. Итак, необходимо (рис. 4.8):

1. Ввести систему координат *Oxyz*.
2. Спроектировать силу **F** на плоскость *Oxyz* и вычислить величину $\mathbf{F}_{xy}$.
3. Опустить из точки O перпендикуляр на линию действия силы $\mathbf{F}_{xy}$ и найти плечо h.
4. Вычислить произведение $F_{xy}h$.
5. Определить знак момента.

При вычислении моментов на практике полезно иметь в виду, что

– если сила параллельна оси ($F_{xy} = 0$), то ее момент относительно этой оси равен нулю;
– если линия действия силы пересекает ось, то ее момент относительно оси равен нулю ($h = 0$).

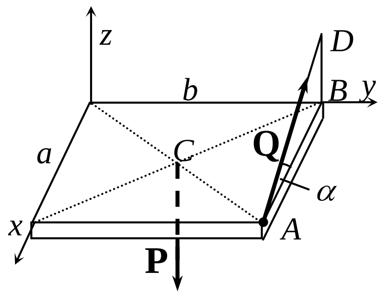

Рис. 4.9

Задача 12. Определить моменты сил **P** и **Q**, действующих на горизонтальную плиту, изображенную на рис. 4.9, относительно осей $x,\ y,\ z$.

Решение. Сначала найдем проекции сил:

$$P_x = P_y = 0, P_z = -P = 0,$$

$$Q_x = -Q\cos\alpha, \mathrm{Q}_y = 0, \mathrm{Q}_z = Q\sin\alpha.$$

Теперь – координаты точек приложения этих сил:

$$C = (a/2, b/2, 0)\,,\ A = (a, b, 0)\,.$$

Тогда, воспользовавшись формулами (4.11), находим

$$M_x(\mathbf{P}) = -0{,}5bP,\ M_{y`}(\mathbf{P}) = 0{,}5bP,\ M_z(\mathbf{P}) = 0\,,$$

$$M_x(\mathbf{Q}) = bQ\sin\alpha,\ M_{y`}(\mathbf{Q}) = -aQ\sin\alpha,\ M_z(\mathbf{Q}) = bQ\cos\alpha\,.$$

4.5. Равновесие рычага

Рычагом называют твердое тело, которое может вращаться относительно некоторой неподвижной оси под действием сил, расположенных в плоскости, перпендикулярной к этой оси. Частный случай рычага (и типичный) показан на рис. 4.10,*а*. Здесь в качестве рычага выступает прямолинейный стержень, опирающийся в точке B на угловую опору. Применяется рычаг для того, чтобы удерживать в равновесии (или поднимать) некоторый груз (груз a на рис. 4.10,*а*). Запишем условия равновесия рычага, предполагая, что вес груза **P** и удерживающая сила **F** параллельны (соответствующая расчетная схема приведена на рис. 4.10,*б*):

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0\,,\ N - P - F = 0\,, \qquad (4.12)$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_B = 0\,,\ P \cdot AB = F \cdot BC\,. \qquad (4.13)$$

При написании последнего уравнения мы сократили на $\cos\beta$.

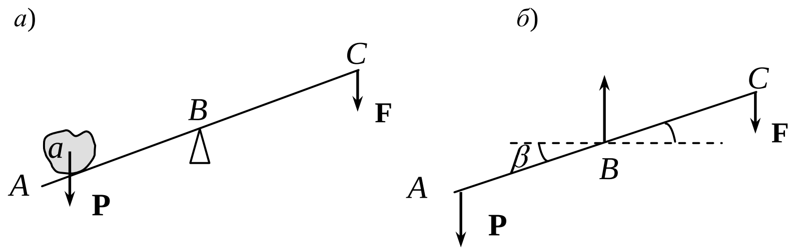

Рис. 4.10

Таким образом, условие равновесия рычага – это условие равенства моментов сил **P** и **F** относительно оси вращения, которая проходит через точку опоры (4.13). И оказывается, что, взяв достаточно длинный рычаг, точнее, сделав достаточно длинным плечо $h = BC\cos\beta$ силы $\mathbf{F}$, можно удержать в равновесии сколь угодно тяжелый груз. Неприятность, однако, состоит в том, что сила реакции опоры (а значит, и давление на опору!) оказывается равной сумме сил $\mathbf{P}$ и $\mathbf{F}$ (см. уравнение (4.12)). И высказывание Архимеда, с которого началась данная лекция, становится понятным.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое момент силы относительно точки?
2. Момент силы относительно точки – это векторная величина или скалярная?
3. Как определить направление момента силы относительно точки?
4. Если на тело действует момент, как оно будет двигаться?
5. Как вычислить момент силы относительно точки с помощью определителя?
6. Чему равен модуль момента силы относительно точки?
7. Как направлен момент силы относительно точки, которая лежит с данной силой в одной плоскости?
8. Что такое плечо силы?
9. Как вычислить плечо силы?
10. Сформулируйте теорему Вариньона.
11. Следствием чего является теорема Вариньона?
12. Когда следует использовать теорему Вариньона для вычисления момента силы?
13. Что такое момент силы относительно оси?
14. Как связаны моменты силы относительно точки и относительно оси?
15. Как вычислить момент силы относительно оси?
16. Что называется рычагом?
17. Сформулируйте условия равновесия рычага.

Упражнения и задачи

У. 13. Определить момент силы **F** = {40, 40, 20} (кН) относительно начала координат O, если сила приложена в точке с координатами x = 0,5 м, y = 2 м, z = 0 м.

У. 14. В условиях предыдущего упражнения определить моменты силы относительно осей Ox, Oy, Oz.

У. 15. Однородный стержень AB веса P и длины l в центре свободно опирается на угловую опору K (рис. 4.11). В точках C, D, E к нему подвешены гири, имеющие соответственно вес P_C, P_D, P_E. Определить, гирю какого веса и где надо подвесить, чтобы система находилась в равновесии, если $P_C = P/4$, $P_D = P/2$, $P_E = P$, а $DK = l/6$, $CK = 3l/4$, $KE = l/4$. Является ли полученное Вами решение единственным?

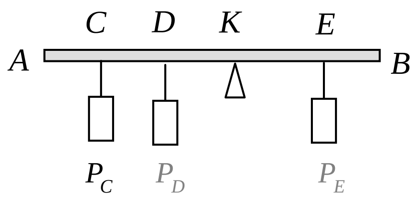

Рис. 4.11

После лекции

О дереве судят по его плодам.
Луи де Бройль

Архимед – великий греческий мыслитель, математик и механик (287–212 гг. до н. э.). Он родился в Сиракузах на Сицилии и жил в этом городе в эпоху 1-й и 2-й Пунических войн. Считается, что он был сыном астронома Фидия. Наука всегда была интернациональна и, по-видимому, первый толчок и вкус к занятиям наукой Архимед приобрел во время своей поездки в Александрию (Египет). В начале XX столетия ученые стремились в Гейдельберг (Германия). Именно там рождались многие направления современной физики (и математики), которые совершенно перевернули наши представления о мироздании.

Научное наследие Архимеда столь многообразно, а полученные результаты настолько значительны, что даже малая толика их сделала бы честь современному ученому. Если проводить параллели, то Архимеда, наверное, можно сравнить с И. Ньютоном. Оба гиганта изучали природу и оба для этой цели совершенствовали язык моделирования – математику, но Архимед начал это делать за 18 веков до И. Ньютона.

Одним из главных мотивов его творчества было вычисление площадей и объемов различных геометрических фигур, а именно из этих расчетов родилось интегральное исчисление. Так что Архимеда с полным правом можно считать предшественником создателей дифференциального и интегрального исчисления И. Ньютона и Г. Лейбница. Столь же заметен его вклад в аналитическую геометрию, теорию рядов, математическую физику.

Но, наверное, в центре внимания Архимеда всегда находилась механика. Даже простое перечисление полученного им заняло бы не одну страницу. Скажем только, что именно он ввел понятия центра тяжести и разработал методы их определения, определил понятие момента силы на плоскости и разработал законы рычага. Особую роль он отвел механике жидкости и газа, заложив основы гидростатики (наверное, не все могут сегодня сформулировать знаменитый закон Архимеда, но вряд ли найдется человек, который бы его не слышал).

Огромен вклад Архимеда и в технику. Он, например, изобрел водоподъемный механизм, на основе которого позднее были созданы корабельные винты.

Архимед намного опередил свое время. Он был еще и патриотом. Во время 2-й Пунической войны Архимед организовал инженерную оборону Сиракуз. Тем не менее после длительной осады город римлянами был взят, и один из них убил Архимеда.