

Ни в коем случае нельзя считать, что наука заканчивается, если ее удалось свести к аналитическим формулам.

Луи Пуансо

Лекция 5. Теория пар сил

5.1. Сложение двух сил, направленных в разные стороны, но линии действия которых параллельны

В лекции 3 мы научились складывать параллельные силы, т. е. силы, линии действия которых параллельны, и они направлены в одну сторону. Разберем теперь вопрос о сложении двух не равных по модулю сил, линии действия которых параллельны, но сами силы направлены противоположно. Оказывается, две такие силы также могут быть приведены к равнодействующей.

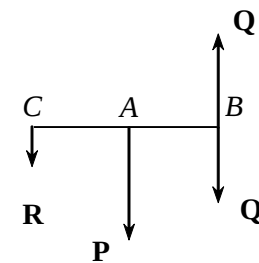


Рис. 5.1

Итак, пусть дана система двух сил $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$, не равных по модулю, приложенных в точках A и B , линии действия которых параллельны, но силы направлены противоположно (рис. 5.1). Для определенности будем считать, что $P > Q$. Разложим большую силу $\mathbf{P}$ на две параллельные силы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{Q}'$, из которых одну, $\mathbf{Q}'$, равную по модулю силе $\mathbf{Q}$, приложим в точке B , так, что силы $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Q}'$ будут действовать по одной прямой в разные стороны. Тогда

модуль другой силы $\mathbf{R}$ и точка ее приложения C определяются из соотношений, полученных в лекции 3 (см. раздел 3.2),

$$R = P - Q, \quad \frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}, \quad \frac{Q}{AC} = \frac{P - Q}{AB}. \quad (5.1)$$

Найденная таким образом сила $\mathbf{R}$ и является равнодействующей системы сил $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$, причем

$$AC = \frac{Q \cdot AB}{P - Q}. \quad (5.2)$$

Действительно, $\langle \mathbf{P}, \mathbf{Q} \rangle \sim \langle \mathbf{R}, \mathbf{Q}, \mathbf{Q}' \rangle \sim \mathbf{R}$, так как система сил $\langle \mathbf{Q}, \mathbf{Q}' \rangle$ является уравновешенной и ее, согласно аксиоме 2, можно отбросить. В результате мы приходим к следующей теореме.

Теорема. Система двух не равных по модулю сил, линии действия которых параллельны, но силы направлены противоположно, имеет равнодействующую, которая равна по модулю разности модулей этих сил, им параллельна и направлена в сторону большей силы. Линия действия равнодействующей проходит через точку, которая лежит на продолжении отрезка AB и делит этот отрезок внешним образом на части, обратно пропорциональные силам.

5.2. Пара сил

Что же будет, если силы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$, линии действия которых параллельны, направлены противоположно и равны по модулю? Теперь мы можем дать на это ответ. В самом деле, хотя формулы (5.1) и (5.2) получены для случая, когда $P \neq Q$, мы можем с их помощью проанализировать, что произойдет с равнодействующей

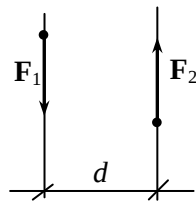


Рис. 5.2

двух рассматриваемых сил, если модуль силы $\mathbf{Q}$ будет приближаться к модулю силы $\mathbf{P}$. Из соотношения (5.1) следует, что при $Q \rightarrow P$ равнодействующая $R \rightarrow 0$. Но тогда в силу соотношения (5.2) точка C приложения равнодействующей R стремится к бесконечности. Этот результат можно истолковать в том смысле, что при $P = Q$ две не равные по модулю силы,

линии действия которых параллельны, но сами силы направлены противоположно, одной какой-нибудь силой заменить нельзя.

Такая система двух сил не имеет равнодействующей и называется парой сил.

Пара сил является в статике таким же самостоятельным понятием, как и сила. Плоскость, проходящая через линии действия сил, называется *плоскостью действия пары*, а расстояние между линиями действия сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ называются *плечом пары* (отрезок d на

рис. 5.2). Действие на твердое тело пары сил сводится к некоторому повороту этого тела, который характеризуется величиной, называемой *моментом пары*. Моментом пары называется вектор $\mathbf{M}$, модуль которого равен произведению модуля одной из сил пары на плечо пары: $M = Fd$. Направлен этот вектор перпендикулярно плоскости действия пары в сторону, откуда вращение пары видно происходящим против часовой стрелки (рис. 5.3).

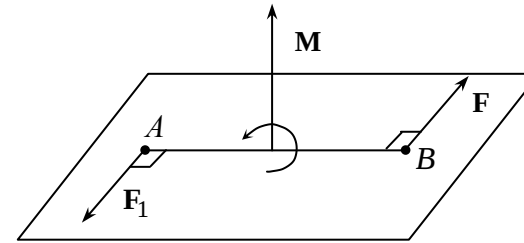


Рис. 5.3

Из этого определения следует, что момент пары можно еще определить как момент одной из сил пары относительно точки приложения другой силы:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_A(\mathbf{F}_2) = \mathbf{M}_B(\mathbf{F}_1), \text{ т. е. (рис. 5.4)}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_A(\mathbf{F}_2) = \mathbf{BA} \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{M}_B(\mathbf{F}_1) = \mathbf{AB} \times \mathbf{F}_1. \quad (5.3)$$

Упражнение. Показать эквивалентность этих двух определений.

Поскольку момент пары сил всегда перпендикулярен плоскости действия пары, то для пар сил, расположенных в одной плоскости, как и для обычных сил, часто используют понятие алгебраического момента пары $\pm M = \pm Fd$. Знак "плюс" берется, если пара стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, "минус" – по ходу.

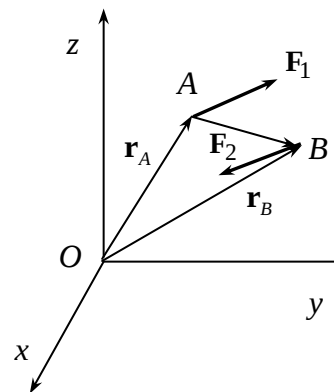


Рис. 5.4

Установим теперь связь между моментом пары и моментами составляющих ее сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$. Пара сил $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$ имеет момент $\mathbf{M} = \mathbf{AB} \times \mathbf{F}_2$ (рис. 5.4). В результате действия пары сил тело будет поворачиваться вокруг некоторой точки, назовем это вращательным эффектом пары. Вместе с тем

вращательный эффект сил (т. е. способность повернуть тело вокруг некоторой точки) $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ по отдельности характеризуется их моментами относительно центра O :

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}_1) = \mathbf{OA} \times \mathbf{F}_1 \text{ и } \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_2) = \mathbf{OB} \times \mathbf{F}_2.$$

Покажем, что вращательный эффект пары складывается из вращательных эффектов составляющих ее сил, т. е.

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_1) + \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_2). \quad (5.4)$$

Действительно (см. рис. 5.4),

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \mathbf{AB} \times \mathbf{F}_2 = (\mathbf{OB} - \mathbf{OA}) \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{OB} \times \mathbf{F}_2 - \mathbf{OA} \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{OB} \times \mathbf{F}_2 + \\ &\quad + \mathbf{OA} \times \mathbf{F}_1 = \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_1) + \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_2).\end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали, что сумма моментов сил пары относительно любой точки O равна моменту пары этих сил. Поскольку момент пары сил перпендикулярен плоскости пары, а его модуль равен $M = AB \cdot F_1 \sin(\mathbf{AB}, \mathbf{F}_1)$, то момент пары не зависит от точек приложения сил пары. Он определяется лишь расстоянием $AB \sin(\mathbf{AB}, \mathbf{F}_1)$, т. е. плечом пары.

5.3. Сложение пар сил

Мы установили, что момент пары не зависит от точек приложения сил пары, поэтому кажется очень вероятным, что разные пары, имеющие одинаковый момент, должны оказывать на твердое тело одно и то же действие. Это действительно так, о чем свидетельствует приведенная ниже *теорема об эквивалентности пар*.

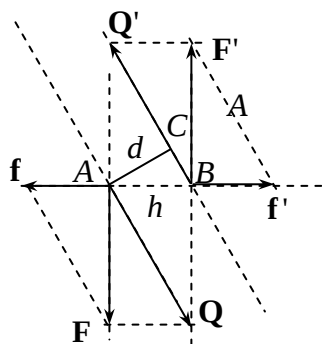


Рис. 5.5

Теорема. Все пары сил, имеющие один и тот же момент, эквивалентны.

Доказательство. Доказательство этой теоремы проведем в два этапа. Пусть дана пара сил $(\mathbf{F}, \mathbf{F}')$ с моментом $m = Fh$. Используя аксиому параллелограмма, разложим исходные силы $\mathbf{F}, \mathbf{F}'$ соответственно на силы $\mathbf{f}, \mathbf{Q}$ и $\mathbf{f}', \mathbf{Q}'$ (рис. 5.5). В результате исходная система сил эквивалентно заменена

системой четырех сил, $(\mathbf{F}, \mathbf{F}') \sim \{\mathbf{f}, \mathbf{Q}, \mathbf{f}', \mathbf{Q}'\}$, но поскольку система сил $(\mathbf{f}, \mathbf{f}')$ является уравновешенной, то ее можно отбросить, и исходная пара сил эквивалентно заменяется парой $(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}')$. Момент этой новой пары равен $m' = Qd$ (см. рис. 5.5). Но из подобия метрического ABC и силового $\mathbf{FQf}$ треугольников следует, что $d = hF / Q$. Поэтому

$$m' = Qd = Qh \frac{F}{O} = Fh = m,$$

т. е. момент новой пары $(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}')$, которой мы эквивалентно заменили исходную, равен моменту последней. Поскольку точки приложения сил можно переносить вдоль линий их действия (пунктирные прямые на рис. 5.5), то ясно, что мы фактически доказали эквивалентность двух произвольных пар, лежащих в одной плоскости и имеющих равные моменты¹³ (убедитесь в этом).

Чтобы доказать теорему и для пар, как угодно расположенных в пространстве, следует вспомнить, что момент пары всегда перпендикулярен ее плоскости действия. Поэтому если моменты двух пар равны, то сами пары лежат в параллельных плоскостях.

Итак, рассмотрим теперь пару сил $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$, имеющую момент $\mathbf{M}$.

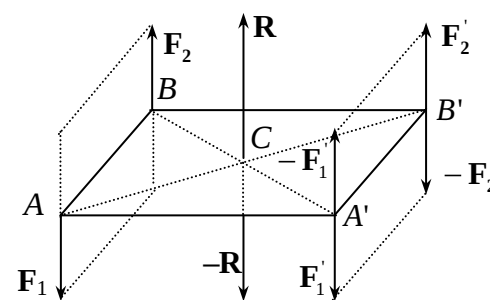


Рис. 5.6

Добавим к этой системе сил уравновешенную систему сил $\{\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2, -\mathbf{F}'_1, -\mathbf{F}'_2\}$ (рис. 5.6), такую, что модули всех входящих в нее сил равны F_1 . Воспользовавшись затем теоремой о сложении двух параллельных сил, находим

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) \sim \{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_1', \mathbf{F}_2', -\mathbf{F}_1', -\mathbf{F}_2'\} \sim \{\mathbf{F}_1', \mathbf{R}, \mathbf{F}_2' - \mathbf{R}\} \sim \{\mathbf{F}_1', \mathbf{F}_2'\} \sim (\mathbf{F}_1', \mathbf{F}_2').$$

¹³ Произвольность пары $(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}')$ следует из произвольности уравновешенной системы сил $(\mathbf{f}, \mathbf{f}')$.

В силу построения очевидно, что момент пары сил $(\mathbf{F}_1', \mathbf{F}_2')$ равен также $\mathbf{M}$. Но так как полученная пара сил эквивалентна любой другой паре, лежащей в той же плоскости и имеющей момент $\mathbf{M}$, то теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что пара сил полностью определяется ее моментом. Располагать пару сил в пространстве можно в любом месте. Момент пары сил называют поэтому *свободным вектором* (его можно изображать в любой точке пространства).

Мы уже знаем, что действие пары полностью определяется ее моментом. Пусть на твердое тело действует система пар с моментами $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_n$. Действие на тело этой системы определяется следующей теоремой о сложении пар.

Теорема. Действие на тело системы пар с моментами $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_n$ эквивалентно действию одной пары с моментом

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i. \quad (5.5)$$

Доказательство. Докажем сначала теорему для двух пар сил $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$ и $(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)$. Из теоремы об эквивалентности пар следует, что для доказательства достаточно рассмотреть две пары, точки приложения сил которых A и B совпадают (рис. 5.7). Действие рассматриваемых двух пар эквивалентно, как видно из чертежа, действию одной пары $(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$, момент которой равен

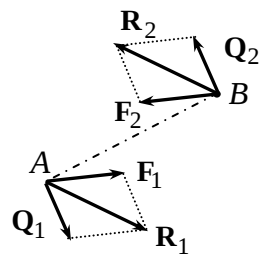


Рис. 5.7

$\mathbf{M} = \mathbf{AB} \times \mathbf{R}_2 = \mathbf{AB} \times (\mathbf{F}_2 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$, что соответствует утверждению (5.5) теоремы. Доказательство для общего случая n пар теперь можно просто получить по индукции.

5.4. Условие равновесия тела под действием системы пар

Доказанная только что теорема о сложении пар сил позволяет сформулировать условие равновесия твердого тела под действием системы пар с моментами $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_n$. Поскольку эту систему

пар можно заменить одной результирующей парой сил с моментом $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots + \mathbf{M}_n$, то для того чтобы тело под действием такой системы пар находилось в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы результирующая пара была эквивалентна нулю:

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^n \mathbf{M}_k = 0. \quad (5.6)$$

Из векторного уравнения (5.6) можно, как обычно, получить три скалярных уравнения равновесия для проекций момента $\mathbf{M}$ данной системы пар сил:

$$M_x = \sum_{k=1}^n M_{kx} = 0, \quad M_y = \sum_{k=1}^n M_{ky} = 0, \quad M_z = \sum_{k=1}^n M_{kz} = 0. \quad (5.7)$$

Графически это означает, что многоугольник, построенный из векторов моментов пар, должен быть замкнутым.

Напомним, что, если все пары лежат в одной плоскости, то их моменты перпендикулярны этой плоскости и можно использовать понятие алгебраического момента пар $\pm m_k$ (знак "плюс" берется, если пара стремится повернуть плоскость против хода часовой стрелки). В этом случае два из трех уравнений (5.7) удовлетворяются тождественно и уравнение равновесия пар сил имеет вид

$$\sum_{i=1}^n \pm m_k = 0. \quad (5.8)$$

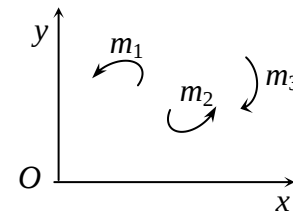


Рис. 5.8

Пары в плоскости обычно изображают стрелками с указанием модулей их моментов (рис. 5.8).

Задача 13. В плоскости Oxy расположены три пары сил (см. рис. 5.8). Определить момент пары m_3 , при котором эта система пар находится в равновесии, если $m_1 = 510 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $m_2 = 120 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

Решение. Моменты пар m_1 и m_2 положительны. Следовательно, уравнение равновесия пар (5.8) имеет вид

$$510 + 120 - m_3 = 0, \text{ и } m_3 = 630 \text{ (Н}\cdot\text{м)}.$$

Задача 14. Куб, изображенный на рис. 5.9, подвешен к двум вертикальным стержням AA_1 и BB_1 так, что его диагональ AB горизонтальна. К кубу приложены пары сил (P_1P_2) и (Q_1Q_2) . Пренебрегая весом куба и стержней, определить, при каком соотношении между силами P_1 и Q_1 он будет находиться в равновесии и чему равны при этом реакции стержней.

Решение. Рассмотрим равновесие куба. На куб действуют две пары сил (P_1P_2) и (Q_1Q_2) и силы реакций стержней N_1, N_2 . Так как стержни невесомые, то их реакции направлены вдоль стержней.

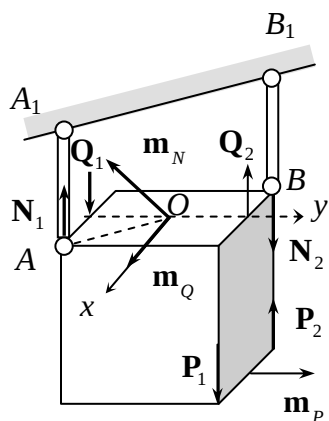


Рис. 5.9

Система пар (Q_1Q_2) и (P_1P_2) эквивалентна одной паре и может быть уравновешена только парой. Следовательно, искомые реакции N_1 и N_2 должны составлять пару, поэтому $N_1 = -N_2$. Момент этой пары m_N перпендикулярен AB (рис. 5.9). Направление моментов m_P и m_Q пар (P_1P_2) и (Q_1Q_2) также изображены на чертеже.

Выбрав обычным образом оси координат, составим уравнения равновесия:

$$\sum m_{kx} \equiv m_P - m_N \cdot \cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum m_{ky} \equiv m_Q - m_N \cdot \sin 45^\circ = 0.$$

Отсюда следует, что $m_P = m_Q$,

или $P_1 a = Q_1 a$, где a – ребро куба. Следовательно, $P_1 = Q_1$. Далее из уравнений равновесия находим

$$m_N = m_P / \cos 45^\circ = P_1 a \sqrt{2}.$$

Но $m_N = N_1 a \sqrt{2}$, поэтому $N_1 = N_2 = P_1$.

5.5. Жесткая заделка

В заключение познакомимся еще с одним типом связи, которая называется жесткой заделкой. Так называется связь, которая возникает, например, если один конец балки жестко зацементировать не-

подвижно в стенку так, как показано на рис. 5.10,а. Примером тела, закрепленного посредством жесткой заделки, является и гвоздь, вбитый в стену. Этот тип связи не позволяет вообще как-либо двигаться закрепленному телу. Реакции заделки представляют собой силы, распределенные по поверхности данного тела (рис. 5.10,б). Поскольку связь запрещает и поступательное движение тела, и его вращение относительно точки крепления, то на тело действует система реакций связи – сила и пара сил. Таким образом, для плоской системы полная реакция жесткой заделки складывается из силы N с составляющими N_x, N_y и момента жесткой заделки относительно места защемления (точки A) m_A (рис. 5.10,в). В общем случае направления и сил реакции, и момента жесткой заделки могут быть любыми и обычно должны определяться в процессе решения задачи.

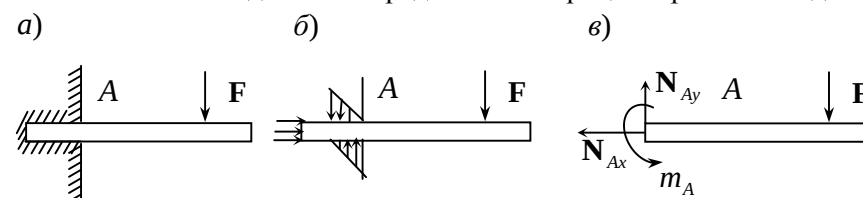


Рис. 5.10

Вопросы для самоконтроля

1. В каком случае можно найти равнодействующую двух сил, направленных в противоположные стороны, линии действия которых параллельны?
2. Чему равна эта равнодействующая?
3. Можно ли силу разложить на две ей параллельные, но направленные противоположно?
4. Что такое пара сил?
5. Как найти плечо пары?
6. Чему равен момент пары?
7. Какие пары являются эквивалентными?
8. Почему момент пары сил называют свободным вектором?
9. Как сложить пары?
10. Могут ли две эквивалентные пары иметь разные плечи?
11. Можно ли пару сил уравновесить одной силой?
12. Сформулируйте условия равновесия тела под действием системы пар.

13. Запишите уравнения равновесия тела под действием системы пар.
14. Что такое жесткая заделка?
15. Приведите примеры жесткой заделки.
16. Как описать систему реакций жесткой заделки?

Задачи и упражнения

У. 16. На твердое тело действуют три пары сил, расположенные в одной плоскости, с моментами $m_1 = 2 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $m_2 = 4 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $m_3 = -3 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Какой эквивалентной парой можно заменить эту систему пар?

У. 17. На стержень, жестко заделанный в стену, действует две пары сил с моментами $m_1 = 2 \text{ Н}\cdot\text{м}$ и $m_2 = -1 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Чему равен реактивный момент жесткой заделки?

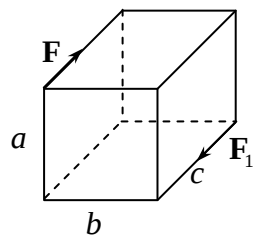


Рис. 5.11

У. 18. На невесомую балку, лежащую на двух угловых опорах, действует пара сил с моментом m . Будет ли балка находиться в равновесии?

У. 19. К параллелепипеду, изображенному на рис. 5.11, приложена пара сил (F, F_1) . Определить момент этой пары.

После лекции

Теория пар сил была разработана выдающимся французским механиком и математиком Луи Пуансо (1777–1859). Л. Пуансо был выпускником знаменитой парижской Политехнической школы, по окончании которой получил диплом инженера путей сообщения. Затем он работал в лицее Бонапарта, а позднее – в Политехнической школе. Начиная с 1809 года Л. Пуансо – профессор механики и анализа этой школы. В 1813 году он был избран членом Французской академии наук (так случилось, что на вакансию, которая освободилась после смерти другого выдающегося француза – Лагранжа), позднее Л. Пуансо становится пэром Франции, а затем сенатором.

Наиболее известным трудом Л. Пуансо явилась монография "Traité élémentaire de Statique", посвященная преимущественно из-

ложению статики. Эта монография появилась в 1803 году и много раз переиздавалась. Следует отметить, что структура изложения статики в этой книге в значительной мере соответствует принятой сегодня (в частности, в этих лекциях). Так, первая глава начинается с формулировки основных аксиом. Во второй части этой главы впервые вводится понятие пары сил и формулируются теоремы об эквивалентности и сложении пар. Конечно, это было сделано несколько иначе, нежели в наших лекциях. Л. Пуансо был прекрасным геометром и во всех теоремах использовал для доказательства геометрические методы. Собственно, его "De Statique" является геометрической статикой. Вместе с тем Л. Пуансо столь ясно понимал суть направленных отрезков-векторов, что найденные им закономерности обращения с ними легли в основу одного из важнейших направлений математики XIX и XX столетий – векторного анализа.

Важнейшим вкладом Л. Пуансо в статику стал вывод условий равновесия тела под действием произвольной системы сил, являющийся следствием доказанной им теоремы, которую мы называем основной теоремой статики (см. следующую лекцию). Большое внимание Л. Пуансо уделял рассмотрению несвободных тел и впервые ввел понятие связи, которую он рассматривал как препятствия, ограничивающие свободу перемещений данного тела, и силы реакции связи. Наконец, следует отметить, что статику твердого тела он обобщил на системы связанных между собой тел, используя аксиому отвердевания.

Другим важным вкладом в механику явилась монография "Theorie nouvelle de la rotation des corps", вышедшая в 1834 году и посвященная описанию вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной точки.

Закончить этот небольшой экскурс в историю хочется словами Луи Пуансо, с которых мы начали эту лекцию: "Ни в коем случае нельзя считать, что наука заканчивается, если ее удалось свести к аналитическим формулам. Ничто не освобождает нас от изучения сущности явлений и от необходимости дать себе отчет в тех идеях, которые являются объектом наших спекуляций".

Лекция 6. Приведение произвольной системы сил к центру

6.1. Теорема о параллельном переносе силы

Мы уже знаем, что точку приложения силы можно переносить вдоль линии ее действия. Ответ на вопрос, что будет, если силу $\mathbf{F}$, приложенную в точке A , перенести параллельно самой себе в точку B , не лежащую на ее линии действия, дает следующая теорема¹⁴ о параллельном переносе силы.

Теорема¹⁵. Действие на твердое тело силы $\mathbf{F}$, приложенной в точке A , эквивалентно действию силы $\mathbf{F}'$, равной исходной по величине, ей параллельной и приложенной в некоторой точке B , и паре сил, момент которой равен моменту данной силы относительно новой точки приложения (точки B).

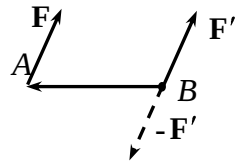


Рис. 6.1

Доказательство. Пусть сила $\mathbf{F}$ приложена в точке A (рис. 6.1). Добавим к ней уравновешенную систему сил, приложенную в точке B : $\{\mathbf{F}', -\mathbf{F}'\} \sim 0$, $|\mathbf{F}| = |\mathbf{F}'|$. Тогда

$$\mathbf{F} \sim \{\mathbf{F}, \mathbf{F}', -\mathbf{F}'\} = \{(\mathbf{F}', -\mathbf{F}'), \mathbf{F}\},$$

поскольку силы $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}'$ образуют пару сил с моментом $\mathbf{m}(\mathbf{F}, -\mathbf{F}') = \mathbf{BA} \times \mathbf{F} = \mathbf{m}_B(\mathbf{F})$. Теорема доказана.

Данную теорему можно проиллюстрировать следующим простым примером. Если удерживать рукой однородный брусок AB

весом P за его середину (рис. 6.2, а), то нужно просто тянуть вверх с силой $Q = P$. Если же попытаться силой, равной Q , удержать брусок за конец A , то легко убедиться, что сделать этого не удастся. Силы $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}$ образуют пару сил (см. рис. 6.2, б). Поэтому, чтобы удержать брусок в равновесии теперь, необходимо не только тянуть вверх с силой $Q = P$, но и создавать момент $m = P \cdot AB/2$.

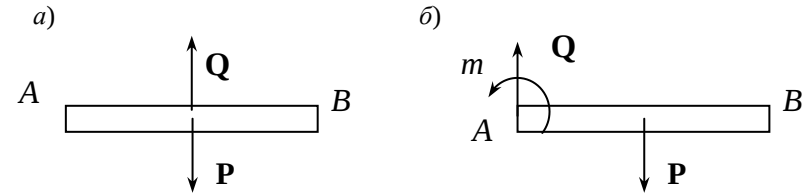


Рис. 6.2

6.2. Главный вектор и главный момент

Пусть к твёрдому телу приложена система сил $\{\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n\}$.

Главным вектором данной системы сил называется вектор $\mathbf{R}^*$, равный сумме всех сил:

$$\mathbf{R}^* = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i. \quad (6.1)$$

Конечно, главный вектор $\mathbf{R}^*$ не следует путать с равнодействующей $\mathbf{R}$. Главный вектор определен для любой системы сил, а равнодействующая системы сил в ряде случаев просто не существует. Так, например, для пары сил $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$, $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$ главный вектор равен нулю, а равнодействующей не существует. Вместе с тем для системы сходящихся сил равнодействующая существует, равна их сумме и в данном случае совпадает с главным вектором системы сил. Так что связь между этими двумя понятиями очень тесная, ниже мы установим общее условие, когда главный вектор системы является и равнодействующей.

Для каждой из сил $\mathbf{F}_i$ данной системы можно определить ее момент относительно произвольной точки A : $\mathbf{M}_A(\mathbf{F}_i) \equiv \mathbf{M}_{Ai}$. Сумма

¹⁴ И эта теорема, и основная теорема статики (см. следующий раздел) были сформулированы Л. Пуансо, и их часто называют теоремами Пуансо.

¹⁵ Эта теорема носит вспомогательный характер, она необходима для доказательства основной теоремы статики, поэтому ее часто называют леммой.

моментов всех сил данной системы относительно точки A , называется *главным моментом* этой системы сил относительно точки A :

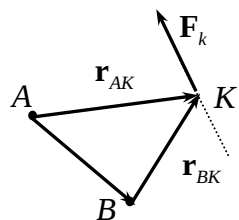


Рис. 6.3

$$\mathbf{M}_A^* = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{Ai} \equiv \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_A(\mathbf{F}_i). \quad (6.2)$$

Главный вектор системы сил $\mathbf{R}^*$ от выбора центра приведения A не зависит, в то же время ясно, что главный момент $\mathbf{M}_A^*$ будет изменяться при смене центра приведения. Действительно (рис. 6.3),

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_A &= \sum_k \mathbf{r}_{AK} \times \mathbf{F}_k = \sum_k (\mathbf{AB} + \mathbf{r}_{BK}) \times \mathbf{F}_k = \\ &= \mathbf{AB} \times \sum_k \mathbf{F}_k + \sum_k \mathbf{r}_{BK} \times \mathbf{F}_k = \mathbf{AB} \times \mathbf{R}^* + \mathbf{M}_B^*, \end{aligned}$$

и, следовательно, главные моменты относительно точек A и B связаны соотношением

$$\mathbf{M}_A^* = \mathbf{M}_B^* + \mathbf{AB} \times \mathbf{R}^*. \quad (6.3)$$

6.3. Основная теорема статики

Теперь мы уже готовы к тому, чтобы решить первую задачу статики (об эквивалентной замене данной системы сил более простой) для произвольной системы сил. Эту задачу геометрически изящно решил Л. Пуансо, показав, что произвольная система сил $\{\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n\}$ может быть эквивалентно заменена одной силой и одной парой сил. Значимость этого результата хорошо понятна и именно поэтому теорему, где он формулируется, называют основной теоремой статики.

Теорема. Произвольную систему сил, действующую на твердое тело, можно заменить одной силой, приложенной в произвольно выбранной точке (центре приведения) и равной главному вектору системы сил, и одной парой сил с моментом, равным главному моменту системы сил относительно этой точки.

Доказательство. Итак, рассмотрим систему сил $\{\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n\}$ (рис. 6.4). Выберем некоторую произвольную точку A – центр при-

ведения. Пользуясь теоремой о параллельном переносе силы, перенесем все силы $\mathbf{F}_k$ параллельно в точку A . В результате получим систему сходящихся сил $(\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2, \dots, \mathbf{F}'_n)$ и систему пар сил $(\mathbf{M}_{A1}, \mathbf{M}_{A2}, \dots, \mathbf{M}_{An})$ (рис. 6.4). Заменяем теперь систему сходящихся сил их равнодействующей

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}'_k = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_k = \mathbf{R}^*,$$

а получившуюся систему пар сил – одной парой, момент которой равен

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_A(\mathbf{F}_k) = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{Ak} = \mathbf{M}_A^*.$$

Сравнивая теперь установленные выражения для силы и момента пары с определениями главного вектора (6.1) и главного момента (6.2), видим, что полученные соотношения доказывают теорему.

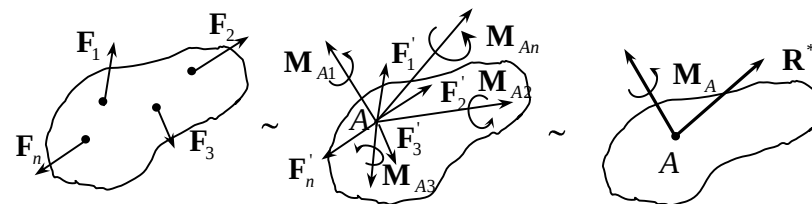


Рис. 6.4

Основная теорема статики дает *критерий эквивалентности* действия на абсолютно твердое тело различных систем сил.

Критерий эквивалентности. Для того чтобы две системы сил, приложенные к твердому телу, были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы они имели одинаковые главные векторы и главные моменты относительно некоторой точки.

Важно понимать, что основная теорема статики является конструктивной, она дает простой способ нахождения главного вектора и главного момента. Действительно, главный вектор и главный момент относительно точки A определяются соотношениями

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^* &= \sum_k \mathbf{F}_k = (\mathbf{R}_x^* + \mathbf{j}R_y^* + \mathbf{k}R_z^*) = \sum_k (\mathbf{F}_{kx} + \mathbf{j}F_{ky} + \mathbf{k}F_{kz}), \\ \mathbf{M}_A^* &= (\mathbf{M}_{Ax}^* + \mathbf{j}M_{Ay}^* + \mathbf{k}M_{Az}^*) = \sum_k \mathbf{M}_A(\mathbf{F}_k) = \\ &= \sum_k [\mathbf{M}_{Ax}(\mathbf{F}_k) + \mathbf{j}M_{Ay}(\mathbf{F}_k) + \mathbf{k}M_{Az}(\mathbf{F}_k)] = \\ &= \sum_k [\mathbf{M}_x(\mathbf{F}_k) + \mathbf{j}M_y(\mathbf{F}_k) + \mathbf{k}M_z(\mathbf{F}_k)],\end{aligned}$$

так что их вычисление сводится к умению находить проекции сил на оси координат и вычислять моменты этих сил относительно осей координат.

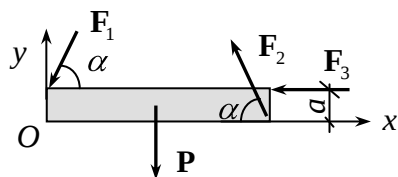


Рис. 6.5

Задача 15. Привести к центру O систему сил $\mathbf{P}, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$ (рис. 6.5), если $P = 30$ Н, $F_1 = F_2 = F_3 = 20$ Н, $a = 0,3$ м, $b = 0,5$ м, $\alpha = 60^\circ$.

Решение. Найдем главный вектор и главный момент сил,

действующих на пластину. Поскольку данная система сил плоская, то

$$R_x^* = -F_1 \cos \alpha - F_2 \cos \alpha - F_3 = -40 \text{ (Н)},$$

$$R_y^* = -F_1 \sin \alpha - F_2 \sin \alpha - P = -30 \text{ (Н)},$$

$$M_O^* = aF_1 \cos \alpha + 2bF_2 \sin \alpha + aF_3 - bP = 11,3 \text{ (Н·м)}.$$

Таким образом, заданная система сил $\{\mathbf{P}, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3\}$ заменяется силой $\mathbf{R}^* = \{-40, -30\}$ Н, приложенной в точке O , и парой сил с моментом $M_O^* = 11,3$ Н·м.

Задача 16. По ребрам прямоугольного клина действуют силы

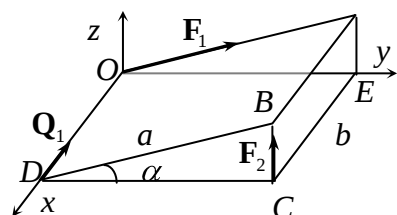


Рис. 6.6

$\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ (рис. 6.6). Требуется заменить их эквивалентными силами, $\mathbf{Q}_1$ (см. чертеж) и некоторой силой $\mathbf{Q}_2$, если $BD = a = 1$ м, $CE = b = 2$ м, $\alpha = 30^\circ$, $F_1 = 10$ Н, $F_2 = 5$ Н, $Q_1 = 20$ Н.

Решение. Так как сила $\mathbf{Q}_1$ задана, то требуется найти силу $\mathbf{Q}_2$.

Системы сил $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2\}$ и $\{\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2\}$ эквивалентны, значит, их главные векторы и главные моменты относительно, например, точки O равны, т. е.

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2, \quad \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_1) + \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_2) = \mathbf{M}_O(\mathbf{Q}_1) + \mathbf{M}_O(\mathbf{Q}_2). \quad (6.4)$$

Из первого векторного уравнения (6.4) следует:

$$Q_{2x} = Q_{1x} = 20 \text{ Н}, \quad Q_{2y} = F_1 \cos 30^\circ = 5\sqrt{3} \text{ Н},$$

$$Q_{2z} = F_1 \sin 30^\circ + F_2 = 10 \text{ Н}.$$

Зная проекции, теперь можно определить модуль силы $\mathbf{Q}_2$:

$$Q_2 = \sqrt{Q_{2x}^2 + Q_{2y}^2 + Q_{2z}^2} = 5\sqrt{23} \text{ Н}$$

и ее направляющие косинусы:

$$\cos(\mathbf{Q}_2, \mathbf{i}) = Q_{2x} / Q_2 = 4 / \sqrt{23} \text{ Н},$$

$$\cos(\mathbf{Q}_2, \mathbf{j}) = Q_{2y} / Q_2 = \sqrt{3} / \sqrt{23} \text{ Н}, \quad \cos(\mathbf{Q}_2, \mathbf{k}) = Q_{2z} / Q_2 = 2 / \sqrt{23} \text{ Н}.$$

Обозначая через x_2, y_2, z_2 координаты точки приложения силы $\mathbf{Q}_2$, из второго векторного уравнения (6.4) получаем уравнения для их определения. Для этого спроектируем это уравнение на оси координат x, y, z и используем формулы (4.3):

$$x: a \cdot \cos 30^\circ \cdot F_2 = 10y_2 - 5\sqrt{3} \cdot z_2,$$

$$y: -b \cdot F_2 = 20z_2 - 10x_2,$$

$$z: 0 = 5\sqrt{3} \cdot x_2 - 20y_2.$$

Подставляя в полученные уравнения числовые значения, получим:

$$x: 10y_2 - 5\sqrt{3}z_2 = \frac{5\sqrt{3}}{2},$$

$$y: 20z_2 - 10x_2 = -10,$$

$$z: 5\sqrt{3}x_2 - 20y_2 = 0.$$

Полученные уравнения определяют линию действия силы $\mathbf{Q}_2$. Эта линия проходит через вершину B клина и точку пересечения диагоналей его нижней грани.

6.4. Условия равновесия произвольной системы сил

Основная теорема статики позволяет сформулировать условия равновесия тела под действием произвольной системы сил $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n\}$. Действительно, поскольку $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n\} \sim \{\mathbf{R}^*, \mathbf{M}_O^*\}$, то эта система будет эквивалентна нулю, если ее главный вектор и главный момент будут равны нулю (убедитесь в этом, используя аксиомы статики)

$$\mathbf{R}^* = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_k = 0, \quad \mathbf{M}_O^* = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{O_i} = 0, \quad (6.5)$$

где O – некоторая произвольная точка, выбор ее диктуется только соображениями простоты (например, если точку O взять на пересечении двух или более сил, то моменты этих сил будут равны нулю и уравнение получится более простое). В координатной форме уравнения (6.5) имеют вид

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0, \\ \sum_{k=1}^n M_x(\mathbf{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_y(\mathbf{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_z(\mathbf{F}_k) = 0. \quad (6.6)$$

Для системы параллельных сил (пусть линии действия параллельны оси Oz) из шести уравнений остаются только три:

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_x(\mathbf{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_y(\mathbf{F}_k) = 0. \quad (6.7)$$

Три других уравнения равновесия системы (6.5) в этом случае удовлетворяются тождественно.

Для системы сходящихся сил, как мы уже знаем, из шести уравнений (6.5) остаются только первые три уравнения (см. лекцию 2):

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0.$$

Оставшиеся три уравнения выполняются тождественно, поскольку за точку O всегда можно взять точку пересечения линий действия всех сил.

6.5. Уравнения равновесия плоской системы сил

Рассмотрим теперь плоскую систему сил, и пусть все силы лежат в плоскости xOy . Условия равновесия снова имеют вид (6.5), но они сводятся к трем уравнениям равновесия:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_A(\mathbf{F}_k) = 0, \quad (6.8)$$

причем в последнем уравнении этой системы под $M_A(\mathbf{F}_k)$ мы имеем в виду алгебраические моменты сил $\mathbf{F}_k$ относительно произвольной точки A . Иногда для решения задач на равновесие плоской системы сил вместо уравнений (6.8) удобно использовать две другие формы уравнений равновесия:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_A(\mathbf{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_B(\mathbf{F}_k) = 0, \quad (6.9)$$

причем линия AB не должна быть перпендикулярна оси Ox , или

$$\sum_{k=1}^n M_A(\mathbf{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_B(\mathbf{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_C(\mathbf{F}_k) = 0, \quad (6.10)$$

где точки A, B, C не должны лежать на одной прямой.

Уравнения (6.9) и (6.10) следуют из уравнений (6.8). Показать это можно, используя соотношение (6.3). Действительно,

$$\mathbf{M}_A^* = \mathbf{M}_O^* + \mathbf{AO} \times \mathbf{R}^*, \quad \mathbf{M}_B^* = \mathbf{M}_O^* + \mathbf{BO} \times \mathbf{R}^*, \quad \mathbf{M}_C^* = \mathbf{M}_O^* + \mathbf{CO} \times \mathbf{R}^*,$$

но согласно условиям (6.5) $\mathbf{M}_O^* = 0$ и $\mathbf{R}^* = 0$, поэтому $\mathbf{M}_A^* = \mathbf{M}_B^* = \mathbf{M}_C^* = 0$.

Пусть выполнены уравнения (6.9). Главный момент системы относительно точки B связан с главным моментом относительно точки A соотношением (6.3). Но поскольку, согласно (6.9), $\mathbf{M}_A^* = \mathbf{M}_B^* = 0$, то $\mathbf{BA} \times \mathbf{R}^* = 0$. С другой стороны, выполнение первого уравнения (6.9) означает, что если главный вектор отличен от нуля, то он перпендикулярен оси Ox . Следовательно, векторы $\mathbf{BA}$ и $\mathbf{R}^*$ не параллельны, и из условия $\mathbf{BA} \times \mathbf{R}^* = 0$ следует, что $\mathbf{R}^* = 0$, т. е. условия равновесия (6.5) выполнены.

Пусть теперь выполнены условия (6.10). Снова из соотношения (6.3) получаем условия $\mathbf{M}_B^* = \mathbf{M}_A^* + \mathbf{BA} \times \mathbf{R}^*$ и $\mathbf{M}_C^* = \mathbf{CA} \times \mathbf{R}^*$, откуда следует, что $\mathbf{BA} \times \mathbf{R}^* = 0$ и $\mathbf{CA} \times \mathbf{R}^* = 0$. Это означает, что вектор $\mathbf{R}^*$ одновременно параллелен векторам $\mathbf{BA}$ и $\mathbf{CA}$, что невозможно, так как по условию точки A, B и C не лежат на одной прямой. Следовательно, $\mathbf{R}^* = 0$ и условия равновесия (6.5) снова выполнены.

Упражнение. Привести примеры систем сил, действующих на твердое тело, для которых несоблюдение дополнительных ограничений на выбор точек во второй и третьей формах условий равновесия приводит к тому, что сами уравнения (6.9) и (6.10) выполняются, но тело при этом в равновесии не находится.

Задача 17. Дверь $ABDE$ (рис. 6.7) весом $P = 240$ Н удерживается открытой на угол 120° благодаря двум веревкам BFK и LE , последняя расположена вдоль пола перпендикулярно двери. $Q = 60$ Н, $AB = 2$ м, $AE = 0,8$ м. Определить реакции подпятника A , подшипника B и натяжение веревки EL .

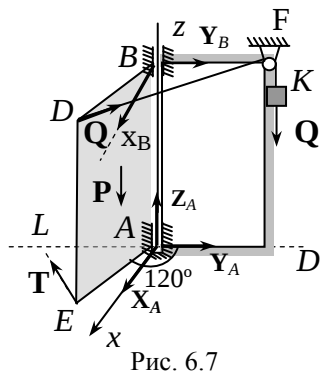


Рис. 6.7

Решение. Рассмотрим равновесие двери $ABDE$. Система сил $\{\mathbf{P}, \mathbf{T}, \mathbf{Q}, \mathbf{X}_A, \mathbf{Y}_A, \mathbf{Z}_A, \mathbf{X}_B, \mathbf{Y}_B\}$, действующая на дверь, показана на рис. 6.7.

Составим уравнения (6.6) равновесия пространственной системы сил:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0, \quad X_A + X_B - Q \cos 60^\circ - T \cos 60^\circ = 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0, \quad Y_A + Y_B - Q \cos 30^\circ - T \cos 30^\circ = 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{kz} &= 0, \quad Z_A - P = 0, \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\mathbf{F}_k) = 0, \quad -Y_B \cdot AB - Q \cos 30^\circ \cdot AB + P \cos 60^\circ \frac{AE}{2} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\mathbf{F}_k) = 0,$$

$$-X_B \cdot AB - Q \cos 60^\circ \cdot AB + P \cos 30^\circ \frac{AE}{2} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(\mathbf{F}_k) = 0, \quad Q \sin 30^\circ \cdot AE - T \cdot AE = 0.$$

Решая эти уравнения, находим

$$X_A = 56,6 \text{ Н}, \quad Y_A = 2 \text{ Н}, \quad Z_A = 240 \text{ Н}, \quad X_B = 11,6 \text{ Н}, \quad T = 30 \text{ Н}.$$

6.6. Условия равновесия тела с одной неподвижной точкой

Во многих случаях приходится изучать условия равновесия твердого тела, когда наложенные на него связи допускают в принципе те или иные движения. Типичным примером такого рода является твердое тело, закрепленное шарнирно (рис. 6.8). Такое тело называют еще телом с неподвижной точкой. В самом деле, точка A тела действительно неподвижна. Пусть на такое тело действует произвольная система сил $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n\}$. Какому условию должна удовлетворять эта система сил, чтобы тело находилось в равновесии?

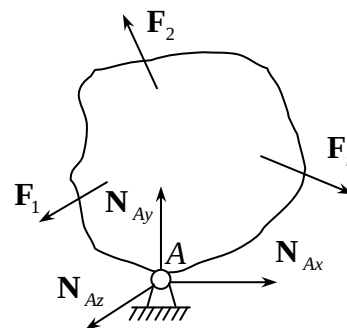


Рис. 6.8

Ответ, конечно, можно получить с помощью уравнений равновесия (6.6). Освободимся от связей и заменим их реакциями. Тогда уравнения равновесия (6.6) принимают вид

Освободимся от связей и заменим их реакциями. Тогда уравнения равновесия (6.6) принимают вид

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} + N_{Ax} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} + N_{Ay} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} + N_{Az} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_{Ax}(\mathbf{F}_k) = 0, \sum_{k=1}^n M_{Ay}(\mathbf{F}_k) = 0, \sum_{k=1}^n M_{Az}(\mathbf{F}_k) = 0. \quad (6.11)$$

Первые три уравнения определяют реакции шарнирного соединения (шарнир сферический), последние три дают условия, которым должны удовлетворять приложенные активные силы, чтобы тело находилось в равновесии. Итак, тело с одной неподвижной точкой будет находиться под действием произвольной системы сил в равновесии, если выполняются условия

$$\sum_{k=1}^n M_{Ax}(\mathbf{F}_k) = 0, \sum_{k=1}^n M_{Ay}(\mathbf{F}_k) = 0, \sum_{k=1}^n M_{Az}(\mathbf{F}_k) = 0. \quad (6.12)$$

Если система сил является плоской, скажем, все силы лежат в плоскости xOy , то условия (6.12) существенно упрощаются и сводятся к единственному уравнению

$$\sum_{k=1}^n m_A(\mathbf{F}_k) = 0.$$

6.7. Приведение произвольной системы сил к простейшему виду

6.7.1. Статические инварианты. Согласно основной теореме статики мы всегда можем привести произвольную систему сил $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n\}$ к главному вектору (6.1) и главному моменту (6.2), приняв произвольную точку A за центр приведения $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n\} \sim \{\mathbf{R}^*, \mathbf{M}_A^*\}$. Главный вектор системы не зависит от выбора центра приведения. Величины, не зависящие от выбора центра приведения, называют *инвариантами*. Таким образом, главный вектор системы сил $\mathbf{R}^*$ (6.1) является инвариантом и его называют *первым статическим инвариантом*.

Главный момент системы сил $\mathbf{M}_A^*$ зависит, как мы видели, от центра приведения и связь относительно старого A и нового B центров приведения определяется соотношением (6.3). Умножив скалярно обе части этого соотношения на главный вектор $\mathbf{R}^*$, получим

$$\mathbf{M}_A^* \cdot \mathbf{R}^* = \mathbf{M}_B^* \cdot \mathbf{R}^* + (\mathbf{AB} \times \mathbf{R}^*) \cdot \mathbf{R}^*,$$

но $(\mathbf{AB} \times \mathbf{R}^*) \cdot \mathbf{R}^* = 0$, так как $\mathbf{AB} \times \mathbf{R}^* \perp \mathbf{R}^*$. Поэтому

$$\mathbf{M}_A^* \cdot \mathbf{R}^* = \mathbf{M}_B^* \cdot \mathbf{R}^*, \quad (6.13)$$

т. е. скалярное произведение главного вектора и главного момента системы сил не зависит от выбора центра приведения. Его называют *вторым статическим инвариантом*. Соотношение (6.13) можно записать еще и так:

$$M_A^* R^* \cos(\mathbf{M}_A^* \mathbf{R}^*) = M_B^* R^* \cos(\mathbf{M}_B^* \mathbf{R}^*),$$

откуда при $R^* \neq 0$ следует, что $M_A^* \cos(\mathbf{M}_A^* \mathbf{R}^*) = M_B^* \cos(\mathbf{M}_B^* \mathbf{R}^*)$. Но $M_A^* \cos(\mathbf{M}_A^* \mathbf{R}^*)$ – это проекция главного момента на направление главного вектора (рис. 6.9). Таким образом, проекция главного момента на направление главного вектора также является инвариантом.

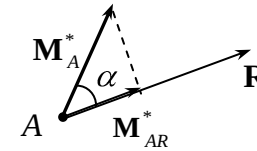


Рис. 6.9

6.7.2. Частные случаи приведения. Рассмотрим теперь, какие частные случаи приведения данной системы сил могут реализоваться.

1. Главный вектор и главный момент относительно некоторого центра O равны нулю, $\mathbf{R}^* = 0, \mathbf{M}_O^* = 0$, в этом случае мы имеем уравновешенную систему сил, тело, на которое она действует, находится в равновесии.

2. Главный момент относительно некоторого центра O равен нулю, а главный вектор отличен от нуля, $\mathbf{R}^* \neq 0, \mathbf{M}_O^* = 0$. Система сил приводится к равнодействующей, проходящей через точку O .

3. Пусть напротив главный вектор равен нулю, а главный момент относительно центра O отличен от нуля, $\mathbf{R}^* = 0, \mathbf{M}_O^* \neq 0$. В этом случае система сил приводится к паре с моментом $\mathbf{M}_O^*$ и главные моменты сил относительно любых точек равны. Действительно, $\mathbf{M}_A^* = \mathbf{M}_O^* + \mathbf{AO} \times \mathbf{R}^* = \mathbf{M}_O^*$.

4. Пусть теперь $\mathbf{R}^* \neq 0, \mathbf{M}_O^* \neq 0$, но $\mathbf{R}^* \perp \mathbf{M}_O^*$. В этом случае равен нулю второй статический инвариант, $\mathbf{R}^* \cdot \mathbf{M}_O^* = 0$, и данная

система сил также приводится к равнодействующей. Действительно, условие $\mathbf{R}^* \perp \mathbf{M}_O^*$ означает, что пара сил $(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$, соответствующая моменту $\mathbf{M}_O^*$, и главный вектор лежат в одной плоскости. Выбирая эту пару $(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$ так, что $\mathbf{R}_1 = -\mathbf{R}^*$, находим ее плечо $h = M_O^* / R^*$. Но силы $(\mathbf{R}^*, \mathbf{R}_1)$ уравновешены, отсюда и следует, что исходная система сил приводится к равнодействующей $\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}^*$.

Уравнение ее линии действия можно получить из формулы (6.3), взяв в качестве точки A точку приложения полученной равнодействующей

$$\mathbf{M}_O^* = \mathbf{M}_A^* + \mathbf{r} \times \mathbf{R}^*.$$

Так как $\mathbf{M}_A^* = 0$, то получаем уравнение $\mathbf{r} \times \mathbf{R}^* = \mathbf{M}_O^*$, которое и определяет линию действия равнодействующей в векторной форме. Это же уравнение в координатной форме имеет вид

$$yR_z^* - zR_y^* = M_{Ox}^*, \quad zR_x^* - xR_z^* = M_{Oy}^*, \quad xR_y^* - yR_x^* = M_{Oz}^*.$$

Стоит заметить, что для плоской системы сил векторы $\mathbf{R}^*$ и $\mathbf{M}_O^*$ всегда перпендикулярны друг другу (если только $\mathbf{R}^* \neq 0$ и $\mathbf{M}_O^* \neq 0$). Поэтому, если плоская система сил не уравновешена, она сводится либо к паре сил (если $\mathbf{R}^* = 0$), либо к равнодействующей (если $\mathbf{R}^* \neq 0$).

5. Рассмотрим теперь случай, когда $\mathbf{R}^* \neq 0, \mathbf{M}_O^* \neq 0$, но $\mathbf{R}^* \parallel \mathbf{M}_O^*$, т. е. система сил приводится к силе $\mathbf{R}^*$ и паре сил $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$, лежащей в плоскости, перпендикулярной к $\mathbf{R}^*$. Такая совокупность силы и пары сил называется *динамой*, а прямую, вдоль которой направлен главный вектор, — *осью динамы*.

Выше мы показали, что проекция главного момента на направление главного вектора является инвариантом. В данном случае модуль главного момента совпадает с проекцией (рис. 6.10). Но поскольку сам вектор всегда больше или равен его проекции, то *главный момент сил принимает наименьшее значение на оси динамы*.

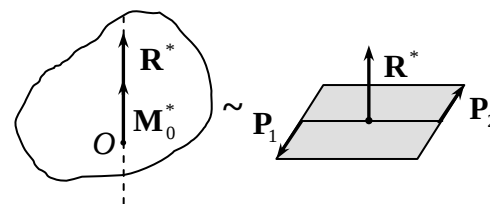


Рис. 6.10

Упростить динаму, т. е. свести ее к равнодействующей или к паре сил, нельзя. Действительно, при переходе к любой другой точке A приведения сил главный момент $\mathbf{M}_A^*$ может разве лишь увеличиться $|\mathbf{M}_A^*| \geq |\mathbf{M}_O^*| \neq 0$, это означает, что к равнодействующей динама не сводится. К паре сил она тоже не сводится, поскольку главный вектор является инвариантом и по условию $\mathbf{R}^* \neq 0$.

6. В общем случае, когда $\mathbf{R}^* \neq 0, \mathbf{M}_O^* \neq 0$, но векторы $\mathbf{M}_O^*$ и $\mathbf{R}^*$ не перпендикулярны и не параллельны, система сил также приводится к силовой динаме, ось которой, однако, уже не проходит через точку O . Доказательство этого факта легко получить, раскладывая главный момент на две взаимно перпендикулярные составляющие, $\mathbf{M}_O^* = \mathbf{M}_{OR}^* + \mathbf{M}_{O\perp}^*$ (рис. 6.11), и учитывая,

что пара сил $(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$, соответствующая моменту $\mathbf{M}_{O\perp}^*$, и главный вектор лежат в одной плоскости. Дальнейшее доказательство мы предоставляем читателю в качестве упражнения.

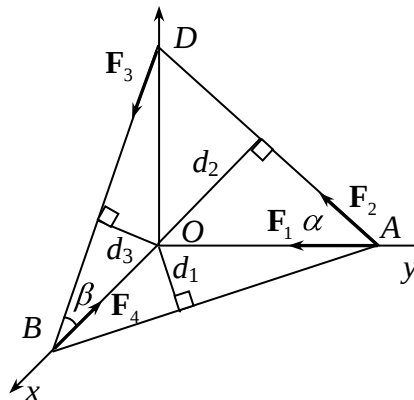


Рис. 6.12

Подводя итог, суммируем полученное. Если произвольная система сил не уравновешена, то она сводится либо к паре сил, либо к равнодействующей, либо к динаме.

Задача 18. Привести систему сил $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4)$, показанную на рис. 6.12, к простейшему виду, если $OA = 0,63$ м, $OB = 0,45$ м,

$OD = 0,6 \text{ м}$, $F_1 = 21 \text{ Н}$, $F_2 = 29 \text{ Н}$, $F_3 = 25 \text{ Н}$, $F_4 = 15 \text{ Н}$.

Решение. Предварительно установим соотношения, определяющие углы α и β :

$$\cos \alpha = \frac{OA}{AD} = \frac{21}{29}, \quad \sin \alpha = \frac{20}{29}, \quad \cos \beta = \frac{OB}{DB} = \frac{3}{5}, \quad \sin \beta = \frac{4}{5}.$$

Теперь найдем главный вектор:

$$R_x^* = F_3 \cos \beta - F_4 = 0, \quad R_y^* = -F_1 - F_2 \cos \alpha = -42 \text{ (Н)},$$

$$R_z^* = F_2 \sin \alpha - F_3 \sin \beta = 0.$$

Проекции главного момента определяются соотношениями

$$M_x^* = F_2 d_2 = P_2 OA \sin \alpha = 12,6 \text{ (Н·м)},$$

$$M_y^* = F_3 d_3 = P_3 OB \sin \beta = 9 \text{ (Н·м)}, \quad M_z^* = 0.$$

Таким образом, $\mathbf{R}^* \neq 0$, $\mathbf{M}_O^* \neq 0$ и эти векторы не перпендикулярны и не параллельны друг другу. Следовательно, данная система сил сводится к динаме.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте теорему о параллельном переносе силы.
2. Что такое главный вектор?
3. Что такое главный момент?
4. Когда главный вектор является и равнодействующей?
5. Сформулируйте основную теорему статики.
6. Сформулируйте условия равновесия для произвольной системы сил.
7. Отличаются ли условия равновесия плоской и пространственной системы сил?
8. Сколько уравнений равновесия можно записать для произвольной системы сил?
9. Сколько уравнений равновесия можно записать для плоской системы сил?
10. Какие формы уравнений равновесия для плоской системы сил существуют?
11. Как связаны между собой различные формы уравнений равновесия?

12. Сколько линейно независимых уравнений равновесия можно составить для пространственной (плоской) системы параллельных сил?
13. Сформулируйте условия равновесия тела с одной неподвижной точкой.
14. Сформулируйте условия равновесия тела с двумя неподвижными точками.
15. Когда система сил приводится к равнодействующей?
16. Когда система сил приводится к паре?
17. Что такое статические инварианты?
18. Какие статические инварианты существуют?
19. Что называется динамой?

Задачи и упражнения

У. 20. Приводится ли к равнодействующей система сил, главный вектор которой равен $\mathbf{R}^* = 10\mathbf{i} + 7\mathbf{k}$, а главный момент — $\mathbf{M}^* = 5\mathbf{j}$.

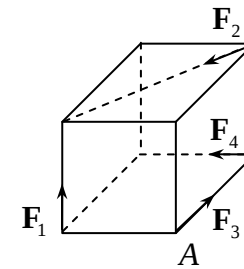


Рис. 6.13

У. 21. В каком случае плоская система сил может быть приведена к равнодействующей?

У. 22. Определить главный вектор и главный момент системы сил, приложенной к кубу, показанному на рис. 6.13. Ребро куба $a = 2 \text{ м}$, $F_1 = 3 \text{ кН}$, $F_2 = 3\sqrt{2} \text{ кН}$, $F_3 = 4 \text{ кН}$, $F_4 = 5 \text{ кН}$. За центр приведения взять вершину куба A .

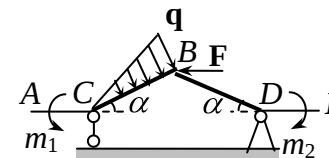


Рис. 6.14

У. 23. Определить опорные реакции строительной конструкции, представленной на рис. 6.14. $AC = DE = 6 \text{ м}$, $CB = BD = 8 \text{ м}$, $\alpha = 30^\circ$, $q = 4 \text{ кН/м}$, $F = 30 \text{ кН}$, $m_2 = 2m_1 = 30 \text{ кН·м}$.

После лекции

1. В лекции 2 мы доказали теорему Вариньона для частного случая системы сходящихся сил, которую затем с успехом использовали при вычислении моментов сил. Вариньон, однако, доказал и более сильную теорему, которую мы и приводим ниже.

Теорема Вариньона. *Если система сил имеет равнодействующую, то ее момент относительно любой точки (или оси) равен сумме моментов всех сил системы относительно той же точки (оси).*

Эта теорема является непосредственным следствием критерия эквивалентности двух систем сил $(\mathbf{F}_1', \mathbf{F}_2', \dots, \mathbf{F}_n')$ и $\mathbf{R}$, где $\mathbf{R}$ – равнодействующая системы сил $(\mathbf{F}_1', \mathbf{F}_2', \dots, \mathbf{F}_n')$:

$$\mathbf{M}_A(\mathbf{R}) = \sum \mathbf{M}_A(\mathbf{F}_k), \quad M_z(\mathbf{R}) = \sum M_z(\mathbf{F}_k),$$

где A и z – любые точка и ось.

2. Пьер Вариньон – французский механик и математик XVII–XVIII столетий, современник И. Ньютона, член французской академии наук. Наибольший вклад в науку внес именно в механике. В 1687 году он представил Парижской академии наук состоящий из двух томов трактат "Проект новой механики", став в возрасте Христа заведующим кафедры математики сначала в Collège Mazarin (колледж Мазарини), а затем и в Collège de France.

Может быть, важнейшим вкладом П. Вариньона в механику является вывод закона параллелограмма сил, который он получил кинематически, рассматривая движение материальной точки под действием двух сил (так же поступал и И. Ньютон, истина может являться в различных одеждах, но всегда имеет одно лицо).

Затем П. Вариньон для трех сходящихся сил формулирует условие равновесия в виде замкнутого силового треугольника. Он фактически сформулировал и условия равновесия тела, имеющего неподвижную точку, которые мы рассматривали в разделе 6 этой лекции. Ну и, конечно, П. Вариньон много внимания уделяет определению момента сил, в частности момента равнодействующей силы.

И мудрое сферическое здание
Народы и века переживает.
Осип Мандельштам

Лекция 7. Равновесие системы тел

До сих пор мы изучали равновесие твердого тела, на которое наложены определенные связи и действует система активных сил. На практике, однако, обычно приходится иметь дело с системами тел, соединенных друг с другом теми или иными связями. Эти последние будем называть *внутренними связями*, все другие связи являются, таким образом, *внешними*. Подобные системы в общем случае являются деформируемыми, но аксиома отвердевания дает нам необходимое условие равновесия. Такую систему мы можем рассматривать как абсолютно твердое тело. Тем не менее применимость подобного подхода весьма ограничена, поскольку обычно вся конструкция в целом оказывается статически неопределимой. В данной лекции мы познакомимся с методом, который позволяет исследовать равновесие конструкций. Мы ограничимся задачами плоской статики, хотя предлагаемый подход очевидным образом можно распространить и на любую пространственную конструкцию.

7.1. Равновесие двухсоставной конструкции

Идея решения задачи о равновесии конструкции, состоящей из нескольких элементов, очень проста. Очевидно, система тел будет находиться в равновесии тогда и только тогда, когда в равновесии находится каждое из составляющих ее тел. Поэтому можно, освободившись от связей, рассмотреть равновесие каждого из тел и составить для них уравнения равновесия. В эти уравнения наряду с активными силами войдут также и силы реакций внешних и внутренних связей. Если общее число независимых уравнений больше или равно общему числу неизвестных задачи, то такая конструкция будет статически определимой. Так, например, для плоской конструкции, состоящей из двух тел, мы можем составить шесть независимых уравнений равновесия и определить из них шесть неизвестных. Такой способ расчета конструкции называют *методом расчленения*. Здесь имеется важный нюанс. Рассматривая равновесие каждого из

элементов конструкции, следует иметь в виду, что силы реакций внутренней связи, соединяющей два элемента конструкции, действующие на каждый из элементов, согласно аксиоме 4 равны по величине и противоположно направлены. Именно это обстоятельство позволяет статически неопределимую задачу, получающуюся при использовании аксиомы отвердевания, сделать статически лимой. Поясним эту идею на нескольких примерах.

Задача 19. Однородная балка CD закреплена шарнирно в точке

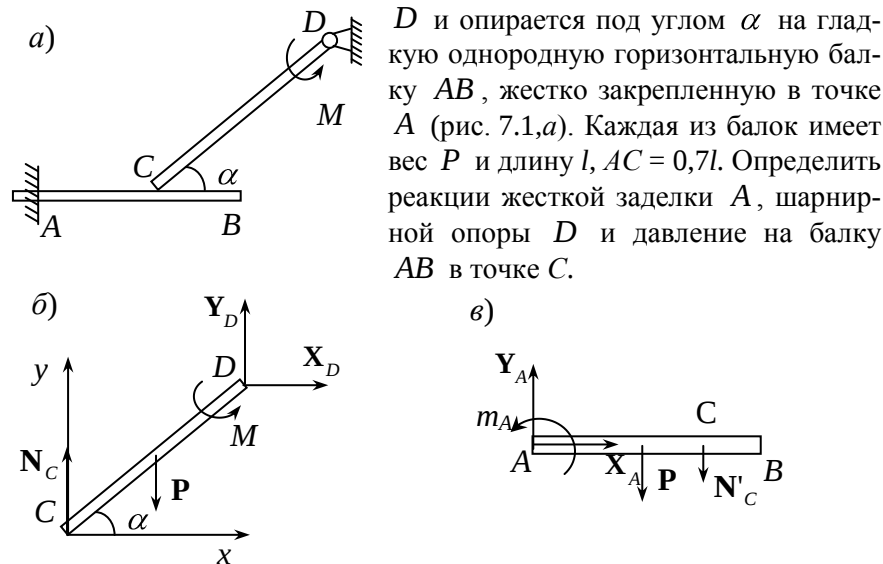


Рис. 7.1

Решение. Будем решать задачу методом расчленения. Освободимся от связей и рассмотрим по очереди равновесие каждой из балок данной конструкции. Система сил, действующих на балку CD , изображена на рис. 7.1,б. Эта система сил плоская и соответствующие уравнения равновесия имеют вид

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad X_D = 0,$$

$$\sum_i F_{iy} = 0, \quad Y_D + N_C - P = 0,$$

$$\sum_i m_D = 0, \quad M + P \cdot 0,5l \cos \alpha - N_C l \cos \alpha = 0. \quad (7.1a)$$

С другой стороны, система сил, действующих на балку AB , показана на рис. 7.1,в и удовлетворяет системе уравнений

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad X_A = 0,$$

$$\sum_i F_{iy} = 0, \quad Y_A - N'_C R_C - P = 0, \quad (7.1б)$$

$$\sum_i m_A = 0, \quad m_A - P \cdot 0,5l - N'_C R_C \cdot 0,7l = 0.$$

Входящие в эти две системы уравнений сила реакции внутренней связи N_C и сила давления на связь (на балку AB) N'_C равны по величине и противоположно направлены (четвертая аксиома),

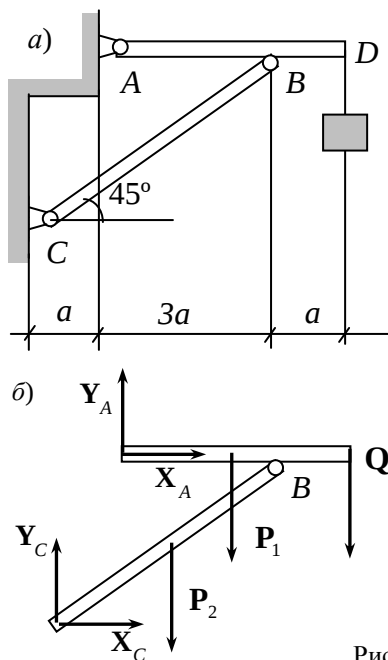
$$N_C = N'_C, \quad (7.1в)$$

что и делает задачу статически определимой.

Решая далее систему полученных семи уравнений, находим неизвестные реакции связей $X_A, Y_A, M_A, X_B, Y_B, N_C$.

Упражнение. Решить систему уравнений (7.1) задачи 19 и определить неизвестные реакции связей. Проверку полученного решения сделайте, воспользовавшись аксиомой отвердевания и составив уравнения равновесия для всей системы в целом, с учетом полученных опорных реакций.

Построенное выше решение показывает, что задачу можно сделать статически определимой, используя и комбинацию метода отвердевания, когда мы рассматриваем равновесие всего тела в целом, и метода расчленения. В этом случае мы сначала составляем уравнения равновесия для всей системы, считая ее твердым телом, а затем – для любого ее элемента. В результате мы снова имеем шесть уравнений равновесия. Поэтому если в задаче не более шести неизвестных, то задача оказывается статически определимой. Покажем, как использовать этот метод на конкретном примере.



Задача 20. Кронштейн (рис. 7.2,а) состоит из горизонтального бруса AD весом $P_1 = 15$ кН и подкоса CB весом $P_2 = 12$ кН. Соединение в точках A, B, C – шарнирное. К концу D бруса AD подвешен груз $Q = 30$ кН. Определить реакции шарниров A, B, C .

Рис. 7.2

Решение. Рассмотрим равновесие всего кронштейна, воспользовавшись принципом отвердевания. Система действующих на него сил изображена на рис. 7.2,б, и уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{aligned} \sum_i F_{ix} &= 0, \quad X_A + X_C = 0, \\ \sum_i F_{iy} &= 0, \\ Y_A + Y_C - P_1 - P_2 - Q &= 0, \\ \sum_i m_A &= 0, \\ -X_C 4a - Y_C a - P_2 a - P_1 2a - Q 4a &= 0. \end{aligned} \quad (7.2a)$$

В этих уравнениях четыре неизвестных, т. е. пока система (7.2a) не замкнута. Рассмотрим теперь равновесие бруса AB . Система действующих на него сил изображена на рис. 7.2,в, а уравнения равновесия представлены ниже:

$$\begin{aligned} \sum_i F_{ix} &= 0, \quad X_A + X_B = 0, \\ \sum_i F_{iy} &= 0, \quad Y_A + Y_B - P_1 - Q = 0, \\ \sum_i m_B &= 0, \quad -Y_A 3a + P_1 a - Q a = 0. \end{aligned} \quad (7.2б)$$

Решая систему шести уравнений (7.2), получим ответ. В случае если реакция получилась со знаком "минус", ее истинное направление противоположно.

При рассмотрении всей конструкции (рис. 7.2,б) мы не изображали внутренние усилия в точке B , так как, согласно аксиоме 4, их главный вектор равен нулю. С другой стороны, в схеме усилий, действующих на балку AD , силы реакций шарнира B (X_B, Y_B) для этой балки являются уже внешними и, конечно, учтены в уравнениях (7.2б).

Отметим одно важное обстоятельство. При рассмотрении равновесия одного твердого тела мы могли точку приложения силы переносить вдоль линии ее действия в любую другую точку этого тела, а пару сил переносить в любое место этого тела. При рассмотрении равновесия конструкции такой перенос возможен лишь в пределах одного твердого тела этой конструкции. Нельзя, например, в задаче 19 перенести пару M с балки CD на балку AB , так же как нельзя в задаче 20 приложить вес груза P_1 к балке CD (в точке пересечения линии действия силы P_1 с балкой CD).

Мы рассмотрели равновесие двухсоставных конструкций, но, очевидно, таким образом можно рассчитать конструкцию с любым количеством элементов. Важно только, чтобы задача была бы статически определимой.

Универсально лишь то, что достаточно для этого грубо.

Поль Валери

7.2. Расчет фермы

Мосты, подъемные краны, опоры высоковольтных линий электропередач и другие технические сооружения часто строят в виде *ферм* – жестких конструкций, составленных из прямолинейных

стержней. Фермы широко применяются в строительной практике (металлический каркас здания – это фактически ферма), в авиа-, корабле- и машиностроении. Этот перечень легко продолжить. Даже если Вы взглянете на свой персональный компьютер, то и там найдете элементы подобных конструкций. Их достоинством является малый вес и соответственно малый расход материала, необходимого для изготовления. В общем случае каждый стержень в ферме испытывает как продольные нагрузки (на сжатие или на растяжение), так и поперечные (изгибающие стержень). Последние нагрузки самые опасные, поэтому основная задача при конструировании ферм состоит в таком перераспределении усилий, чтобы основные нагрузки, действующие на стержни, оказались продольными. Оказывается, что для этого стержни следует соединить шарнирно.

В дальнейшем *фермой* мы будем называть *жесткую, геометрически неизменяемую конструкцию, состоящую из невесомых прямолинейных стержней, соединенных идеальными (без трения) шарнирами*. Фермы могут быть *пространственными* и *плоскими*, у последних все стержни лежат в одной плоскости. Шарнирные соединения стержней называются *узлами фермы*.

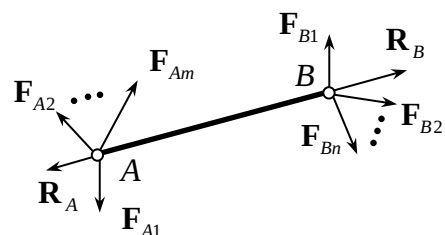


Рис. 7.3

Мы будем предполагать, что все усилия приложены к узлам фермы. В такой идеализированной ферме все стержни будут испытывать только продольные нагрузки¹⁶. Действительно, если рассмотреть равновесие отдельного стержня АВ (рис. 7.3), то все действующие на него силы будут

¹⁶ Если на реальную ферму действуют внешние нагрузки, которые не сосредоточены в узлах (например распределенная нагрузка, возникающая при порыве ветра), то для проведения расчета необходимо найти равнодействующую этой нагрузки и затем разложить ее на две параллельные силы, приложенные уже к узлам.

что эти равнодействующие действительно направлены вдоль стержня. При этом направления действия равнодействующих могут быть различны, что показано на рис. 7.4. В первом случае (рис. 7.4,а) стержень растянут, а во втором (рис. 7.4,б) – сжат.

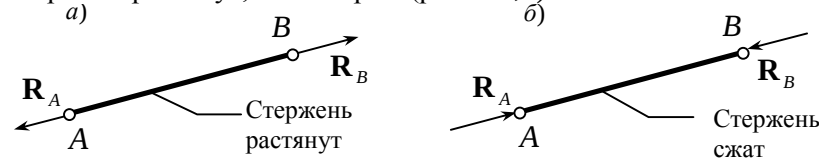


Рис. 7.4

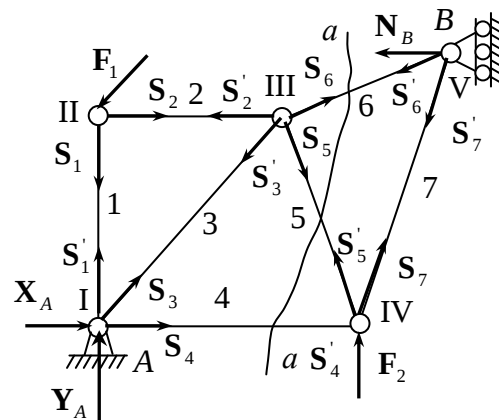


Рис. 7.5

В качестве примера рассмотрим плоскую ферму, составленную из треугольников (рис. 7.5). Для такой фермы число узлов n и число стержней k связаны, как легко убедиться, соотношением

$$k = 2n - 3, \quad (7.3)$$

для $k = 3$ равенство очевидно, а далее на каждый добавленный узел приходится два дополнительных стержня. Расчет фермы состоит из определения (i) реакций опор и (ii) усилий в стержнях фермы.

Если q – число неизвестных реакций опор (на рис. 7.5 это реакции X_A, Y_A, N_B и $q = 3$), то общее число неизвестных задачи будет равно $k + q$. Так как равновесие фермы означает равновесие всех ее узлов, то общее число независимых уравнений равновесия, которые можно составить, равно $2n$ ($2n$ уравнений для n узлов, так как на каждый узел действует плоская система сходящихся сил). Отсюда ясно, что *ферма является статически определимой, если, во-первых, число неизвестных опорных реакций не превышает 3 (так как для произвольной плоской системы сил можно составить только 3 уравнения равновесия), а во-вторых, число стержней должно удов-*

летворять условию $k \leq 2n$. Таким образом, ферма, для которой выполняется условие (7.3), статически определима при $q = 3$. Именно такие фермы мы и будем рассматривать в дальнейшем.

Расчет ферм следует начинать с определения реакций опор. Для этого, пользуясь аксиомой отвердевания, составляют три уравнения равновесия. Из решения этой системы уравнений и находятся неизвестные опорные реакции.

Затем можно приступать ко второму этапу расчета фермы – определению усилий в стержнях фермы. Это можно сделать двумя методами: *методом вырезания узлов* и *методом сечений (Риттера)*. Рассмотрим их подробно.

7.2.1. Метод "вырезания узлов". Пронумеруем все стержни фермы арабскими, а узлы римскими цифрами. Рассмотрим равновесие каждого из узлов. Считая условно все стержни растянутыми, направим реакции соединительных шарниров S_i и S'_i от узлов (см. рис. 7.5) и рассмотрим последовательно равновесие каждого узла. Реакции S_i и S'_i равны по модулю и противоположно направлены, поскольку каждый из стержней находится в равновесии. Начинать расчет всегда следует с узла, в котором сходится не более двух стержней. Последовательность рассмотрения узлов должна быть такой, чтобы на момент рассмотрения очередного узла в нем сходились не более двух стержней с неизвестными усилиями. Если при решении уравнений равновесия какая-то из реакций S_k окажется отрицательной, то это означает, что соответствующий ей стержень сжат.

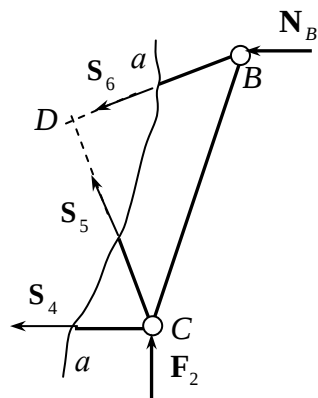


Рис. 7.6

7.2.2. Метод сечений (Риттера). Этим способом удобно пользоваться, когда требуется определить усилия в каких-то отдельных стержнях фермы. Определим, например, усилия в стержнях 4, 5, 6 фермы, представленной на рис. 7.5. Проведем сквозное сечение $a-a$ фермы через эти три стержня и, пользуясь принципом отвердевания, рассмотрим равновесие одной из частей фермы, скажем,

левой части. Система сил $\{N_B, F_2, S_4, S_5, S_6\}$, действующая на левую часть фермы, показана на рис. 7.6. Для этой системы сил мы можем составить три уравнения равновесия и определить неизвестные усилия в стержнях S_4, S_5, S_6 . Обычно уравнения равновесия удобно составлять в моментной форме (6.10), причем надо стараться, чтобы в каждое уравнение входило не более одной неизвестной реакции. Например, если Вы составите уравнение моментов относительно точки C , то сразу определите реакцию S_6 , а относительно точки D – реакцию S_4 .

Задача 21. Дана ферма, состоящая из одинаковых равнобедренных прямоугольных треугольников (рис. 7.7). На нее действует система трех сил, причем $F_1 = F_2 = F_3 = 2$ кН. Определить реакции опор фермы и усилия в ее стержнях. Использовать метод вырезания узлов, усилие в стержне 7 определить методом Риттера.

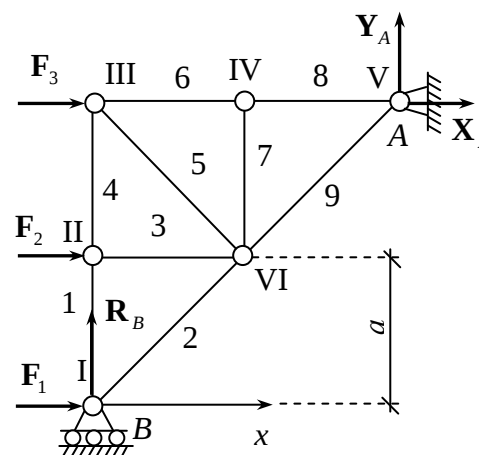


Рис. 7.7

Решение. Определим сначала опорные реакции. Ферма находится в равновесии под действием трех активных сил F_1, F_2, F_3 и трех сил реакций опор N_B, X_A, Y_A . Составим уравнения равновесия:

$$\sum_i F_{ix} = 0, F_1 + F_2 + F_3 + X_A = 0,$$

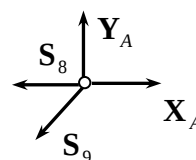
$$\sum_i F_{iy} = 0, R_B + Y_A = 0,$$

$$\sum_i m_B = 0, -F_2 a - F_3 2a - X_A 2a = 0.$$

Решая эти уравнения, находим: $X_A = -6$ кН, $Y_A = -3$ кН, $R_B = 3$ кН.

Будем далее определять усилия в стержнях методом вырезания узлов, начиная с узла V (это следует делать тогда в такой последовательности: V–IV–III–II–I). Рассмотрим последовательно равновесие каждого из узлов, составим уравнения равновесия и решим их (напоминаем, все стержни считаем растянутыми). Полученные результаты приведены ниже.

Узел V:

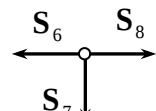


$$\sum_i F_{ix} = 0, X_A - S_8 - S_9 \cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum_i F_{iy} = 0, Y_A - S_9 \sin 45^\circ = 0,$$

откуда $S_8 = -3$ кН, $S_9 = 4,23$ кН.

Узел IV:

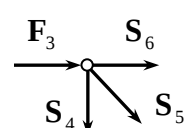


$$\sum_i F_{ix} = 0, S_8 - S_6 = 0,$$

$$\sum_i F_{iy} = 0, S_7 = 0$$

и, следовательно, $S_7 = 0$, $S_6 = -3$ кН.

Теперь рассмотрим узел III. Уравнения равновесия имеют вид

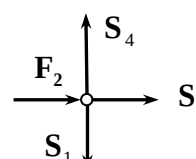


$$\sum_i F_{ix} = 0, S_6 + F_3 + S_5 \cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum_i F_{iy} = 0, S_4 - S_5 \sin 45^\circ = 0,$$

решая которые, находим $S_5 = 1,41$ кН, $S_4 = -1$ кН.

Узел II находится в равновесии под действием четырех сил:

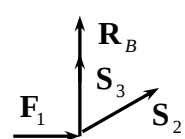


$$\sum_i F_{ix} = 0, F_2 + S_3 = 0,$$

$$\sum_i F_{iy} = 0, S_4 - S_1 = 0$$

и $S_3 = -2$ кН, $S_1 = -1$ кН.

Наконец, рассматриваем узел I:



$$\sum_i F_{ix} = 0, F_1 + S_2 \cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum_i F_{iy} = 0, R_B + S_1 + S_2 \sin 45^\circ = 0.$$

Находим последнюю неизвестную реакцию $S_2 = -2,82$ кН.

Чтобы выполнить проверку полученных результатов, усилия в стержнях 6, 7 и 9 определим методом Риттера. С этой целью проведем сечение и рассмотрим правую часть фермы (рис. 7.8). Для определения усилий в стержнях фермы составим три уравнения моментов

Рис. 7.8

$$\sum_i m_A = 0, S_7 = 0,$$

$$\sum_i m_{IV} = 0, aY_A - aS_9 \cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum_i m_{VI} = 0, aY_A + aS_6 = 0,$$

т. е. $S_7 = 0$, $S_9 = -4,23$ кН, $S_6 = -3$ кН. Сравнивая полученное с результатами расчетов методом вырезания узлов, видим, что ферма рассчитана правильно. Знаки "минус" в ответах означают, что составляющие сил X_A и Y_A имеют противоположные направления по сравнению с указанными на рисунке, а стержни с номерами 1, 2, 3, 4, 6, 9 в действительности не растянуты, а сжаты. Стержень 7 для данной системы активных сил не нагружен.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем состоит метод расчленения?
2. В каком случае задачу легче решать методом расчленения, а когда лучше воспользоваться методом отвердевания?
3. Какие связи называются внутренними, внешними?
4. Что такое ферма?
5. Какая ферма называется плоской?
6. Что называется узлом фермы?
7. Какие фермы являются статически определимыми?

8. Из каких элементов состоит расчет фермы?
9. В чем состоит метод вырезания узлов для определения усилий в стержнях фермы?
10. Метод Риттера и метод сечений – это разные методы?
11. Всегда ли в методе сечений можно составить уравнение, в которое войдет только одно неизвестное усилие?

Задачи и упражнения

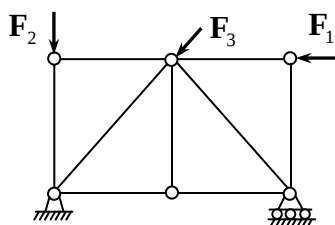


Рис. 7.10

У. 24. Какой из стержней фермы, показанной на рис. 7.10, не нагружен?

У. 25. Как будут изменяться усилия в стержнях фермы башенного крана при изменении угла ее наклона α (см. рис. 7.11). Вес P поднимаемого груза считать заданным, а расстояние $AB = 2l$ между точками крепления стрелы и тяги BC – неизменным.

У. 26. Определить реакции внешних и внутренних связей конструкции, представленной на рис. 7.12, если $R = 2$ м, $\angle \alpha = 30^\circ$, $F_1 = 20$ кН, $m_1 = m_2 = 10$ кН·м.

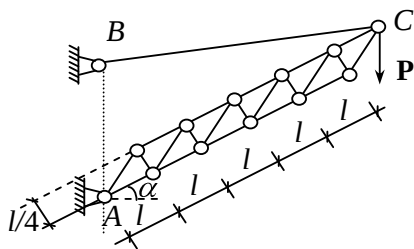


Рис. 7.11

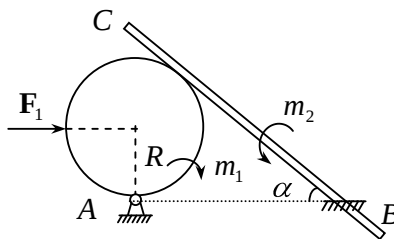


Рис. 7.12

Архитектура никогда не переживала такого огромного изменения в столь короткий промежуток времени.

Лусиу Коста

Архитектура в высшем ее понимании – это не сооружение, которое украшают, а украшение, которое строят.

Шарль Блан

После лекции

1. Первые фермы, появившиеся в строительстве, были деревянными. И сегодня деревянными остаются, например, стропильные фермы. Но по-настоящему широкое распространение фермы получили с внедрением в строительную практику железа. Впрочем, важное значение имело и создание методов статического расчета конструкций, которыми мы обязаны английскому профессору Кларку Максвеллу, итальянскому профессору Луиджи Кремоне и другим механикам. Методы эти были созданы к началу 60-х годов XVIII столетия. Была и еще одна причина. С появлением бессемеровского конвертора и мартеновской технологии сталь стала дешевым и доступным строительным материалом. Использование шарнирных соединений и подвижных опор позволило создать первые большепролетные металлические конструкции. Металлические конструкции сначала начинают использоваться при строительстве мостов.

Широкое вторжение металла в строительную практику ознаменовалось появлением на Всемирной выставке в 1851 году в Лондоне грандиозного "Хрустального дворца" (автор проекта Джозеф Пэкстон). Здание имело длину 564 м и было построено всего за четыре месяца. Площадь сооружения примерно в 12 раз превышала размеры собора святого Павла в Риме. Однако подлинный триумф металла связан с другой Всемирной выставкой в Париже в 1889 году, главной достопримечательностью которой явилась башня, созданная Гюставом Эйфелем. Ажурность ее металлического кружева и совершенное изящество формы при высоте в 320 м было решающим доводом для многих инженеров, строителей и архитекторов того времени. С использованием металлических конструкций различного

типа стали возводиться вокзалы и станции метро, универмаги и рынки¹⁷, фабричные корпуса и иные производственные помещения. Родилась новая архитектура¹⁸. Это направление получило свое логическое завершение созданием куполов Фулера, мудрого сферического здания, предсказанного Осипом Мандельштамом.. Поверхность этого сферического купола собирается из прямолинейных металлических стержней. На Всемирной выставке 1967 года в Монреале в виде такого прозрачного купола (заполнение было выполнено из стекла) был создан павильон США.

2. Гюстав Эйфель (1832–1923) – выдающийся французский инженер механик и архитектор. Он окончил Центральную школу искусств и ремесел (Париж). До создания башни, носящей его имя, создал ряд мостов, в том числе и за рубежом (например, известный мост через реку Дору в Порту, Португалия). Одним из первых в мире начал применять металлические конструкции в строительстве зданий. В частности, большую известность получил один из парижских универмагов.

Гюстав Эйфель на протяжении всей своей долгой жизни был первооткрывателем. Так, он фактически был первым, кто стал изучать аэродинамику строительных конструкций, положив тем самым начало важной отрасли современной строительной физики.

¹⁷ Одно из первых сооружений такого типа в России – знаменитый Крытый рынок в Киеве, с которого и начинается его главная улица – Крещатик.

¹⁸ Нередко к архитектуре относятся как к строительному дизайну. К сожалению, это достаточно типично для российской архитектурной традиции последних десятилетий. Вместе с тем собственно архитектура рождается из сплава художественного замысла и инженерного решения. Если оглянуться на историю архитектуры, то хорошо видна связь появляющихся стилей с новыми материалами и конструктивными решениями. Перефразируя известное высказывание, можно сказать, что архитектура – это искусство возможного. Выдающийся итальянский инженер-архитектор П. Нерви формулирует это так: "Архитектура – это конструктивная реальность, правильно понятая и осуществленная с любовью".

Каждым тяжелым телом побеждается сопротивление трения, равное четвертой части этого веса.

Леонардо да Винчи

Лекция 8. Равновесие при наличии трения

8.1. Трение скольжения и трение покоя

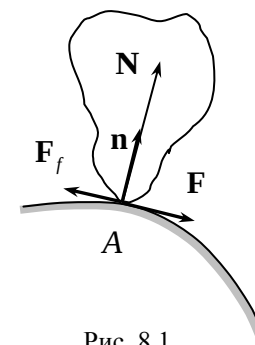


Рис. 8.1

В лекции 1 при обсуждении различных типов связи была введена связь, которую осуществляет гладкая поверхность. Реакция такой поверхности $\mathbf{N}$ всегда направлена по нормали $\mathbf{n}$ к ней в точке касания (рис. 8.1). На самом деле, рассматривая различные твердые поверхности, окружающие нас в повседневной практике, мы видим, что ситуация совсем не так проста. Если к телу приложить некоторую силу $\mathbf{F}$, попытайтесь его сдвинуть, то выясняется, что это удастся сделать, когда данная сила больше некоторой $F > F_{\max}$. Это означает, что на покоящееся тело, которое мы стремимся сдвинуть в сторону, противоположную направлению силы $\mathbf{F}$, действует другая сила, препятствующая движению тела. Эту последнюю и называют *силой трения*¹⁹ $\mathbf{F}_f$ (рис. 8.1). Силу трения, которая возникает при движении одного твердого тела по поверхности другого, называют *силой трения скольжения*. Обычно при объяснении природы силы трения говорят о том, что ее появление связано с наличием микрощероховатостей соприкасающихся поверхностей. Чтобы преодолеть эти взаимные шероховатости, и необходимо приложить некоторую силу – это и есть сила трения. На самом деле все обстоит значительно сложнее. Сила трения имеет

¹⁹ Эту силу мы отмечаем индексом "f" от английского слова friction – трение.

молекулярную природу, и ее подробное изучение выходит за рамки курса теоретической механики²⁰. Отметим здесь только два важных обстоятельства. Первое состоит в том, что сила трения является так называемой *диссипативной силой*, т. е. силой, при действии которой энергия не сохраняется. На преодоление трения надо затратить определенное количество энергии, причем при трении тела нагреваются. Второе заключается в том, что идея о микрошероховатостях в общем не объясняет всех имеющихся экспериментальных фактов. Действительно, если эти шероховатости уменьшать (например, полируя поверхности), то наблюдаемая сила трения будет также снижаться, но только до некоторого предела. Если же поверхности будут достаточно гладкими (абсолютно гладкими они не будут никогда), то сила, противодействующая сдвигу двух твердых тел, начнет, напротив, увеличиваться. В дело вступают иные физические механизмы, в частности диффузия.

Несмотря на то, что природа силы трения чрезвычайно сложна и все еще нуждается в дальнейшем изучении, эмпирически²¹ ее удается описать достаточно простым законом, который носит название *закона трения скольжения* (законов Амонтона–Кулона)²².

Сила трения покоя $\mathbf{F}_f$ может принимать любые значения от нуля до некоторого максимального, называемого предельной силой трения скольжения $\mathbf{F}_f^$. Направлена $\mathbf{F}_f$ в сторону, противоположную той, куда действуют активные силы стремятся сдвинуть тело. Предельная сила трения $\mathbf{F}_f^*$ пропорциональна нормальной составляющей силы реакции $\mathbf{N}$ шероховатой поверхности*

$$\mathbf{F}_f^* = f_s \mathbf{N}. \quad (8.1)$$

²⁰ Теоретическая механика, напомним, вообще не изучает природу сил и взаимодействий. Силы, действующие на тела, она берет как данность.

²¹ Эмпирически, т. е. с помощью экспериментального изучения.

²² Конечно, этот закон имеет ограниченную область применимости. Он применим, если только сила нормального давления и скорость сдвига не слишком велики. По-видимому, впервые с этим столкнулись на лучших в мире железных дорогах сначала во Франции, а потом в Японии. Актуальной эта проблема стала и для авиационного транспорта.

Входящий сюда коэффициент трения покоя f_s (статический коэффициент трения) определяется лишь свойствами материалов соприкасающихся тел и не зависит от площади контакта этих тел.

Отметим еще раз, что пока тело, на которое действует сдвигающая сила $\mathbf{F}$ (рис. 8.2), находится в покое, сила трения равна сдвигающей силе, а не величине, определяемой соотношением (8.1). Сила трения принимает значение, равное $f_s N$, только когда состоя-

ние покоя становится предельным ($F = F_{\max}$).

Измерить коэффициент трения f_s можно с помощью простого эксперимента, схема которого показана на рис. 8.2. Коэффициент трения тела, находящегося на шероховатой горизонтальной поверхности, изображенной на этом рисунке, равен

$$f_s = F_{\max} / mg,$$

где сила $F_{\max}$ соответствует весу груза A , при котором брусок начинает двигаться.

Закон трения (8.1) применим, строго говоря, только для тел покоящихся. При движении по прямолинейным горизонтальным или наклонным шероховатым поверхностям сила трения направлена в сторону, противоположную движению и также определяется законом вида (8.1):

$$\mathbf{F}_f = f_d \mathbf{N}, \quad (8.2)$$

где f_d – динамический коэффициент трения, или коэффициент трения скольжения, также определяется опытным путем, он, как правило, немного меньше статического коэффициента трения.

В случае движения тела по шероховатой поверхности произвольной формы закон трения скольжения будет иметь более сложный вид, и к его формулировке мы вернемся во второй части этого курса лекций при изучении динамики.

8.2. Реакция шероховатой поверхности

Сила реакции шероховатой²³ поверхности складывается из силы нормальной реакции $\mathbf{N}$ и перпендикулярной к ней силы трения $\mathbf{F}_f$ (рис. 8.3):

$$\mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{F}_f. \quad (8.3)$$

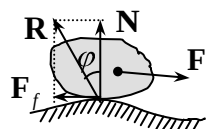


Рис. 8.3

Таким образом, полная реакция $\mathbf{R}$ будет отклонена от нормали к поверхности на некоторый угол φ , тангенс которого равен

$$\operatorname{tg} \varphi = F_f / N. \quad (8.4)$$

Для предельной силы трения соотношение (8.4) принимает вид

$$\operatorname{tg} \varphi^* = F_f^* / N = f_s, \quad (8.4a)$$

соответствующий предельный угол φ^* определяет статический коэффициент трения и называется углом трения.

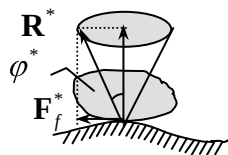


Рис. 8.4

Конус с вершиной в точке касания тел, образующая которого составляет угол трения с нормалью к их поверхностям, называется *конусом трения* (рис. 8.4). При равновесии полная реакция $\mathbf{R}$ в зависимости от сдвигающих усилий может проходить где угодно внутри конуса трения.

Предельная реакция $\mathbf{R}^*$ шероховатой поверхности, соответствующая предельной силе трения $\mathbf{F}_f^*$, будет лежать на поверхности конуса трения.

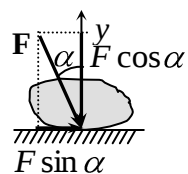


Рис. 8.5

Если равнодействующая $\mathbf{F}$ всех активных сил, действующих на тело, составляет угол α с нормалью (рис. 8.5), то тело сдвинется только в том случае, если сдвигающее усилие $F \sin \alpha$ будет больше предельной силы

трения покоя: $F \sin \alpha > F_f^* = f_s N = f_s F \cos \alpha$, т. е. $\operatorname{tg} \alpha > f_s$. Но поскольку тангенс угла трения определяет коэффициент трения, $\operatorname{tg} \varphi^* = f_s$, то $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \varphi^*$, или $\alpha > \varphi^*$.

Следовательно, никакой силой $\mathbf{F}$, образующей с нормалью угол α , меньший угла трения φ_{np} , тело вдоль данной поверхности сдвинуть нельзя. Этим объясняется явление *заклинивания*. Тело под действием активной силы $\mathbf{F}$, направленной к поверхности, сдвинется только в том случае, когда линия действия этой силы лежит вне конуса трения, независимо от модуля силы $\mathbf{F}$.

Методы решения задач статики при наличии силы трения остаются такими же, как и в случае отсутствия этой силы. Просто при рассмотрении реакции поверхности добавляется еще одна составляющая этой реакции – сила трения. Направлять силу $\mathbf{F}_f$ нужно в сторону, противоположную той, куда действующая активная сила (силы) стремится сдвинуть тело. Величина же этой силы определяется законом (8.1), хотя в общем случае имеет место лишь неравенство $F_f \leq f_s N$. Потому при решении задачи важно определить вначале, какое равновесие рассматривается – *предельное* или *непредельное*. Если равновесие предельное, то из двух неизвестных величин N и F_f в силу связи (8.1) остается только одна. Если же равновесие непредельное, то обе эти величины не известны, а неравенство $F_f \leq f_s N$ является необходимым условием равновесия. Рассмотрим несколько примеров.

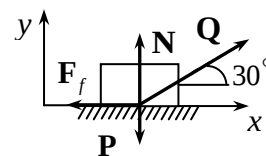


Рис. 8.6

Задача 22. Определить силу Q , направленную под углом 30° к горизонту, которую необходимо приложить к грузу веса $P = 10$ кН, чтобы сдвинуть его с места, если коэффициент трения $f_s = f = 0,6$ (рис. 8.6).

Решение. В данной задаче речь идет о предельном равновесии груза. Кроме того, тело считается материальной точкой, так что оно находится в равновесии под действием плоской системы сходящихся сил. Составим уравнения равновесия:

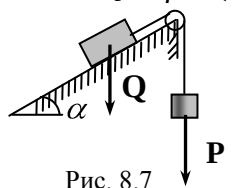
²³ Шероховатой здесь и в дальнейшем мы будем называть поверхности, на которых на тело действует сила трения. Напротив, гладкие поверхности – это поверхности, где такая сила отсутствует.

$$\sum_i F_{ix} = 0, -F_f^* + Q \cos 30^\circ = 0,$$

$$\sum_i F_{iy} = 0, N - P + Q \sin 30^\circ = 0.$$

Но $F_f^* = fN$, поэтому

$$Q = fP / (\cos 30^\circ + f \sin 30^\circ) = 5,2 \text{ (кН)}.$$



Задача 23. Определить величину веса гири P , при котором тело весом Q будет покоиться на наклонной плоскости (рис. 8.7) при заданных углах α и φ^* , причем угол трения φ^* меньше α ($\alpha > \varphi^*$).

Решение. Заметим прежде всего, что направление действия силы трения зависит от величины веса гири P . При $P = P_{\min}$ тело стремится скатиться вниз, и сила F_f направлена вверх по наклонной плоскости. При $P = P_{\max}$ тело будет стремиться переместиться вверх и сила F_f оказывается направленной вниз по наклонной плоскости.

В первом случае уравнения равновесия имеют вид (рис. 8.8,а)

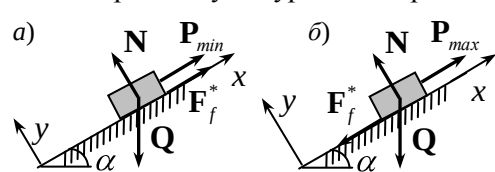


Рис. 8.8

$$\sum_i F_{ix} = 0,$$

$$P_{\min} + fN - Q \sin \alpha = 0,$$

$$\sum_i F_{iy} = 0,$$

$$N - Q \cos \alpha = 0.$$

Так как $f = \operatorname{tg} \varphi^*$, то

$$P_{\min} = Q \sin \alpha - \operatorname{tg} \varphi^* Q \cos \alpha = \frac{Q}{\cos \varphi^*} (\sin \alpha \cos \varphi^* - \sin \varphi^* \cos \alpha) =$$

$$= Q \sin(\alpha - \varphi^*) / \cos \varphi^*.$$

Аналогично ищется вес груза и во втором случае, и он равен

$$P_{\max} = Q \sin(\alpha + \varphi^*) / \cos \varphi^*.$$

Таким образом, решение задачи имеет вид $P_{\min} \leq P \leq P_{\max}$.

Здесь уместно сделать два замечания, которые носят общий характер.

1. Если бы поверхность была гладкой, то существовало бы только одно значение веса гири, при котором тело могло находиться в равновесии: $P = Q \operatorname{tg} \alpha$ (так как в этом случае $\varphi^* = 0$). Поэтому любое малое отклонение (даже случайное) от этой величины вызвало бы движение груза. Иными словами, для гладкой поверхности положение равновесия неустойчиво. Шероховатая же поверхность содержит конечный интервал значений $P \in [P_{\min}, P_{\max}]$, для которых тело находится в равновесии, причем этот интервал тем шире, чем больше шероховатость. Трение, следовательно, придает устойчивость равновесию, а коэффициент трения f характеризует запас устойчивости.

2. Если тело на рис. 8.8,а,б не является материальной точкой, то точка приложения нормальной составляющей N реакции шероховатой поверхности заранее не известна. Эта сила является уравновешивающей распределенных сил давления тела на плоскость, действующих по всей площади контакта. Точку приложения силы N можно определить из условия равенства нулю главного момента всех сил (N, Q, F_f, P), действующих на тело, если известны его размеры. Например, для случая а (рис. 8.9)

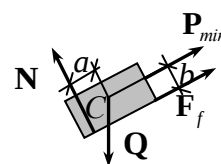


Рис. 8.9

$$\sum_i m_C(F_i) = 0,$$

$$F_f^* b - Na = 0 \Rightarrow a = \frac{F_f^* b}{N} = fb,$$

т. е. в этом случае сила N должна быть приложена слева от центра тяжести тела на расстоянии $a = fb$ (иначе груз перевернется!).

8.3. Трение качения

Качение круглого диска по некоторой твердой поверхности оказывается явлением весьма непростым. Позднее мы поймем, почему

изобретение колеса явилось настоящей революцией в технике. Сегодня сделаем лишь первый шаг на этом пути. Оказывается, что для того чтобы заставить диск катиться по поверхности, необходимо приложить силу, как и для того чтобы просто сдвинуть любое твердое тело. Это означает, что на катящийся диск радиуса R и веса P на шероховатой плоскости также действует сила сопротивления, которую называют *силой трения качения* F_f (рис. 8.10,а).

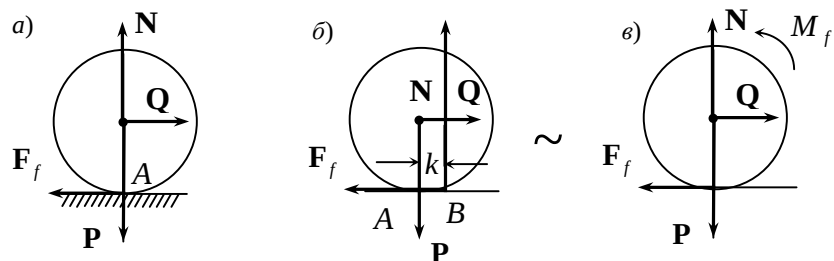


Рис. 8.10

Чтобы разобраться в механизме действия этой силы, рассмотрим качение диска по абсолютно твердой поверхности. Приложим к оси диска силу Q , меньшую F_f^* . Тогда в точке A возникает сила трения F_f , равная по модулю силе Q , которая будет препятствовать скольжению цилиндра по плоскости. Если считать, что нормальная реакция N тоже приложена к точке A (см. рис. 8.10,а), то она уравнивает силу тяжести P , а силы Q и F образуют пару сил, вызывающую качение. При такой схеме качение должно начаться при любой сколь угодно малой силе Q (поскольку появляется ненулевой вращающий момент), что противоречит нашему опыту.

Проявившееся противоречие связано с ограниченностью применимости в данном случае модели абсолютно твердого тела. Фактически соприкасающиеся при качении диска тела, диск и поверхность деформируются. Вследствие взаимной деформации касание их происходит вдоль некоторой площадки AB (рис. 8.10,б). При действии силы Q интенсивность давления у края A убывает, а у края B возрастает. В результате реакция N оказывается смещенной в

сторону действия силы Q . С увеличением силы Q это смещение растет до некоторой предельной величины k . Таким образом, в предельном положении будут действовать две пары сил (Q^*, F) и (P, N). В состоянии равновесия эти две пары должны быть равны, поэтому $Q^* R = Nk$, или $Q^* = kN / R$. Пока $Q < Q^*$, каток находится в покое, а при $Q > Q^*$ начинает катиться.

Линейная величина k называется *коэффициентом трения качения*. Измеряют величину k обычно в сантиметрах. Значение k зависит от материалов тел и определяется опытным путем (например, для качения дерева по дереву $k = 0,05 \div 0,08$ см, мягкой стали по твердой стали $k = 0,005$ см). Чем тверже материалы соприкасающихся тел, тем меньше k и, следовательно, тем меньшее усилие необходимо для того, чтобы тело вышло из состояния покоя и начало катиться.

При решении задач с учетом трения качения систему сил, действующую на диск (см. рис. 8.10,б), удобнее заменить на систему сил, представленную на рис. 8.10,в, где $M_f = kN$ называют *моментом сопротивления качению* (мы перенесли силу N из точки B в точку A и воспользовались леммой о параллельном переносе силы).

Задача 24. Однородный каток 1 весом $P = 10$ кН и радиусом 0,5 м связан с грузом 2 весом $Q = 80$ Н нерастяжимой нитью, перекинутой через блок (рис. 8.11,а). Определить наименьший коэффициент трения качения k , при котором каток остается в покое.

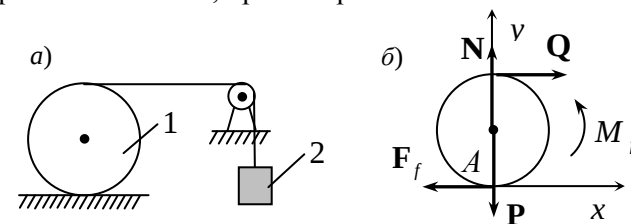


Рис. 8.11

Решение. Рассмотрим равновесие катка. Система действующих на него сил показана на рис. 8.11,б. Составляя уравнение моментов относительно точки A , получим $-Q \cdot 2R + M_f = 0$. Следовательно,

$$M_f = kN = Q \cdot 2R,$$

или $k = 2QR / N$. Так как $N = P$ (см. рис. 8.11,а), то $k = 0,008$ м.

8.4. Связь между трением скольжения и трением качения

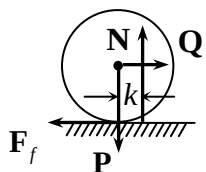


Рис. 8.12

Обратимся снова к примеру круглого цилиндрического диска. Рассматривая трение скольжения и трение качения, мы установили, что $F_f^* = fN$, а $Q^* = kN / R$. Пусть диск находится в покое, и мы будем увеличивать силу Q .

Зададимся вопросом, какой из двух возможных режимов движения катка – качение или скольжение – реализуется? Ответ на этот вопрос, очевидно, следующий: если $fN > kN / R$ (или $k / R < f$), то каток будет катиться, а если наоборот, $fN < kN / R$ (или $k / R > f$), то каток будет скользить.

Обычно для дисков и колес $k / R < f$ и они катятся без проскальзывания. Мы знаем, однако, что колеса автомобиля иногда проскальзывают (буксуют). Это случается на скользкой дороге, зимой при движении по льду, летом – по глинистой дороге после дождя. Во всех подобных случаях коэффициент трения скольжения f резко уменьшается и становится меньше, чем k / R .

Задача 25. К однородному катку (рис. 8.13,а) весом 2 кН приложена горизонтальная сила F . Определить наибольший модуль силы F , при котором каток не скользит и не катится, если $k = 0,006$ м, $f = 0,2$, $R = 0,6$ м, $OA = 0,4$ м.

Решение. Система сил, действующая на каток, изображена на рис. 8.13,б. Из условий равновесия получаем

$$\sum_i F_{ix} = 0, F_f^* = fN = fP = F_{\max} \Rightarrow F_{\max} = 0,4 \text{ (кН)},$$

$$\sum_i M_P(F_i) = 0, M_f^* = kN = kP = F_{\max} \cdot AB \Rightarrow F_{\max} = 0,012 \text{ (кН)}.$$

Поэтому максимальная сила, при которой каток еще будет в покое, $F_{\max} = F_{\max}^* = 12$ Н (при $F > 12$ Н каток начнет катиться).

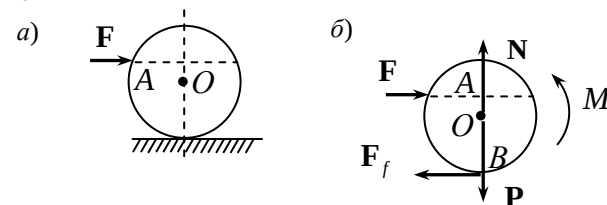


Рис. 8.13

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое сила трения покоя?
2. Что такое сила трения скольжения?
3. Сформулируйте закон трения Кулона.
4. Как измерить коэффициент трения?
5. Что такое угол трения?
6. Что такое конус трения?
7. Какой коэффициент трения больше – покоя или скольжения?
8. Как связан коэффициент трения с углом трения?
9. Что такое трение качения?
10. Сформулируйте закон трения качения.

Задачи и упражнения

У. 27. Тело весом P лежит на горизонтальном столе. На него действовали силой F , направленной под углом α с вертикалью. При каком коэффициенте трения между телом и столом тело сдвигнется?

У. 28. Найдите условие заклинивания в случае, (i) когда тело находится в поле тяжести и активная сила F направлена к поверх-

ности (как на рис. 8.5), (ii) когда тело находится в поле тяжести и активная сила $\mathbf{F}$ направлена от поверхности.

У. 29. К однородному катку, вес которого $P = 10$ кН, приложена пара сил с моментом $m = 25$ Н·м. При каком наименьшем значении коэффициента трения качения каток будет покоиться?

У. 30. Однородная балка AB веса P в точке A закреплена шарнирно, а другим концом свободно опирается о стену, так что составляет угол α с горизонталью. Определить силы реакций связей в случае (i), когда стена абсолютно гладкая, (ii) – когда стена шероховатая и коэффициент трения равен f .

После лекции

1. Законы трения покоя и скольжения впервые были сформулированы Леонардо да Винчи (1452–1519) – итальянским гением²⁴ эпохи Возрождения, которого сегодня мы знаем как выдающегося скульптора и живописца, но который одновременно был блестящим ученым, инженером и литератором. Закон им был сформулирован в том виде, в котором он вынесен в эпиграф к этой лекции. В 1699 году законы трения затем были переформулированы французским академиком Гийомом Амонтоном (1663–1703). В частности, именно он установил пропорциональность силы трения силе нормального давления. Г. Амонтон вводит понятие трения скольжения и исследует трение качения. Он же первым предложил использовать для уменьшения трения смазку²⁵.

Законы трения, сформулированные Г. Амонтоном в значительной степени были переоткрыты, уточнены и развиты спустя почти столетие другим французским академиком Шарлем Огюстом де Ку-

²⁴ Гении имеют национальность, но принадлежат всему человечеству, так что люди очень быстро забывают их национальность. Может быть, самый зримый пример тому дает Христос, рожденный еврейкой и хранимый нынче в сердцах самых разных народов.

²⁵ Это была первая осознанная попытка уменьшить силу трения, хотя смазка бессознательно использовалась задолго до этого.

лоном (1736–1806). Сегодня закон (8.1) мы и называем законом Амонтона–Кулона. Наверное, стоит уточнить, что Ш. Кулон – это тот самый знаменитый Кулон, чье имя носит установленный с помощью изящных экспериментов закон взаимодействия электрических зарядов, чей авторитет во Франции в области науки и образования в конце XVIII и начале XIX столетия был непререкаем. Именно в это время академик Ш. Кулон был генеральным инспектором народного образования.

2. Влияние трения может быть и полезным и вредным для человека и техники, которую он создает. Говоря о полезности, достаточно сказать, что именно трению мы обязаны возможностью ходить по брешневой Земле. Благодаря трению машину, трамвай и велосипед можно остановить, и из-за его наличия они вообще могут двигаться. Трение, как мы видели, увеличивает устойчивость различных систем и позволяет осуществить равновесие в тех случаях, когда без трения оно невозможно.

С другой стороны, наличие трения приводит к необходимости расходования энергии на создание непроизводительной работы, оно приводит к изнашиванию трущихся деталей машин. Поэтому, естественно, в этих случаях его влияние необходимо сводить к минимуму. С этой целью используют различные смазки. Раньше в качестве смазки использовались те или иные масла, сейчас применяются значительно более изощренные способы. Так, например, используются наносuspensions, т. е. жидкости с наночастицами (наночастицами называют твердые или жидкие частицы, размеры которых порядка 10^{-5} – $5 \cdot 10^{-4}$ м).

Трение существует не только при движении одного твердого тела по поверхности другого, но и при движении тел в жидкостях и в газах. В этом случае сила трения, однако, существенно зависит от скорости движения. Грубо говоря, при малых скоростях сила трения в газе пропорциональна скорости, а при больших – ее квадрату. В обычных же жидкостях сила трения практически всегда пропорциональна квадрату скорости движущегося тела.

Таблицы, в которых перечислены коэффициенты трения "стали по стали", "меди по меди" и прочее, – все это сплошное надувательство.

Ричард Фейнман

3. Измерение коэффициента трения является чрезвычайно сложной задачей. Это связано прежде всего с тем, что не очень ясно, какие условия следует взять за стандартные, каков должен быть уровень шероховатости поверхностей и их чистота. Мы уже говорили, что если взять тела из одинакового вещества и сделать их поверхности очень гладкими, то их коэффициент трения не просто станет очень большим, но они просто слипнутся, так что разорвать их будет трудно. Именно с этим связано замечание американца нобелевского лауреата Ричарда Фейнмана, которое Вы прочитали в эпиграфе. Поэтому в современных руководствах обязательно указываются условия, при которых коэффициенты трения измерялись. Ниже, в табл. 1 и 2 приведены данные о коэффициентах трения покоя и скольжения для нескольких типичных веществ²⁶.

Таблица 1

Коэффициент трения покоя

Материал	f_s
Медно-свинцовый сплав по стали (без смазки)	0,2
Медно-свинцовый сплав по стали (со смазкой)	0,1
Тщательно очищенные металлы по металлу	100
Стекло по стеклу, очищенные	1
Стекло по стеклу, смазанные жирными кислотами	0,1
Графит по стали, очищенный и смазанный	0,1
Дерево по металлу, сухое и очищенное	0,2–0,6
Кожа по металлу, очищенная сухая	0,6
Кожа по металлу, очищенная смазанная	0,2

²⁶ Все данные взяты из справочника "Физические величины". – М.: Энергоатомиздат, 1991.

Таблица 2

Коэффициент трения скольжения

Материал	f_d
Сталь по стали (без смазки)	0,15–0,18
Сталь по алюминию (со смазкой)	0,2
Сталь по бронзе	100
Сталь по льду	0,014
Дерево по дереву, вдоль волокон	0,48
Дерево по дереву, поперек волокон	0,34
Дерево по чугуну	0,25–0,5
Кожа по чугуну	0,2–0,4

Наконец, интересны данные о зависимости коэффициента трения скольжения от скорости скольжения.

Таблица 3

Зависимость коэффициента трения от скорости скольжения

Материал	Скорость, м/с				
	50	100	200	400	500
Сталь	0,12	0,10	0,08	0,05	0,04
Медь	0,23	0,17	0,12	0,08	0,07
Оксид алюминия	0,17	0,15	0,13	0,11	0,1