



В.А. ЮДИН
Е.В. ЛЕЖНЕВ

**ЗАДАЧИ
ДЛЯ УГЛУБЛЕННОГО ИЗУЧЕНИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ
СТАТИКА**

НОВОСИБИРСК 2018

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(СИБСТРИН)

В.А. Юдин, Е.В. Лежнев

**ЗАДАЧИ
ДЛЯ УГЛУБЛЕННОГО ИЗУЧЕНИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ**

СТАТИКА

Учебное пособие

НОВОСИБИРСК 2018

УДК 531.3
ББК В21
Ю 163

Юдин, В. А.

Задачи для углубленного изучения теоретической механики. Статика [Электронный ресурс] : учеб. пособие / В. А. Юдин, Е. В. Лежнев ; Новосиб. гос. архитектур.-строит. ун-т (Сибстрин). – Электрон. текстовые данные (2,81 Мб). – Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2018. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования : PC не ниже Pentium ; Windows XP и выше ; дисковод CD-ROM 52x ; мышь. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-5-7795-0859-9

Учебное пособие представляет собой сборник задач по статике для углубленного изучения теоретической механики. Даются рекомендации по решению задач вместе с примерами их выполнения.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 08.03.01 “Строительство” и специальности 08.05.01 “Строительство уникальных зданий и сооружений” всех форм обучения.

Рецензенты:

- С.М. Аульченко, д-р физ.-мат. наук,
вед. науч. сотрудник ИТПМ СО РАН;
- В.В. Леманов, канд. техн. наук, доцент
НГАСУ (Сибстрин)

ISBN 978-5-7795-0859-9 © Юдин В.А., Лежнев Е.В., 2018
© Новосибирский государственный
архитектурно-строительный
университет (Сибстрин), 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ СТАТИКИ	5
ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ С РЕШЕНИЯМИ	10
КОРОТКИЕ ЗАДАЧИ	22
ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ	41

ВВЕДЕНИЕ

Качественное обучение студентов основано на глубоком понимании базовых дисциплин. В технических вузах одной из таких дисциплин является теоретическая механика. Самостоятельное решение задач повышенной сложности по теоретической механике – своего рода гарант ее глубокого понимания.

Предлагаемые в сборнике задачи подобраны по принципу “не в ширь, а вглубь”. Для их решения вполне достаточно знаний основных разделов курса теоретической механики, изучаемого студентами технического вуза. Уровень задач разный, начиная от школьных задач по физике повышенной сложности и заканчивая задачами всероссийских и международных олимпиад по теоретической механике.

Пособие предназначено прежде всего для самостоятельной работы студентов и может быть использовано преподавателями для работы кружков с углубленным изучением теоретической механики и подготовки студентов к олимпиадам.

Издание такого сборника во многом связано также с переходом кафедр теоретической механики на рейтинговую систему оценки знаний студентов. Предполагается, что самостоятельное решение задач из сборника позволит студенту повысить свой рейтинг. Чтобы избежать “подсказки” решения или “подгонки под ответ”, в пособии умышленно не дается ни указаний по решению задач, ни ответов к ним. Причем сначала сформулированы короткие задачи, “для разминки”. Каждая из таких задач допускает изящное, короткое решение, но до него нужно догадаться. Затем уже даются основные задачи, требующие более вдумчивого отношения к их условиям и выбору оптимального способа решения.

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ СТАТИКИ

Теоретическая механика изучает движение тел при их взаимодействии. Статика изучает частный случай движения – равновесие тел. Под равновесием мы понимаем либо покой, либо равномерное прямолинейное движение. В качестве тел мы рассматриваем либо точки, либо твердые тела, либо конструкции, состоящие из точек и абсолютно твердых тел. Под взаимодействием понимаем чисто силовое взаимодействие, т.е. единственной мерой взаимодействия выступают силы. Поэтому задача о равновесии тела сводится к задаче о равновесии сил, действующих на это тело (точку, абсолютно твердое тело или на конструкцию). Если нас интересует равновесие тела $k = 0$ и оно взаимодействует с телами $k = 1, 2, \dots, n$ (рис. 1а), то задача сводится к рассмотрению равновесия тела $k = 0$ под действием системы сил $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n)$, где $\mathbf{F}_k$ – результат взаимодействия тела “ k ” на тело “0” (см. рис. 1б).

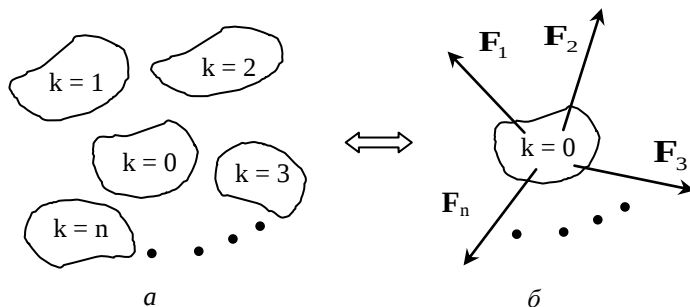


Рис. 1

При решении конкретной задачи часть сил из набора $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n)$ может быть задана, и их принято называть активными силами. Остальные же силы являются силами реакции связей. Если, скажем, тело $k = p$ является связью для тела $k = 0$, то сила $\mathbf{F}_p$ называется силой реакции связи (т.е. тела “ p ”). Определяется она с помощью аксиомы связей, а именно: реакция связи направлена в сторону, противоположную той, куда связь (т.е. тело “ p ”) не дает перемещаться телу (т.е. телу “0”).

При этом, если связь не дает телу *двигаться* в каком-то направлении, то сила реакции связи $\mathbf{F}_p$ направлена в сторону, противоположную этому направлению. Если же связь не дает *вращаться* телу вдоль какой-то оси, то возникает вдоль этой оси в противоположном направлении реактивный момент $\mathbf{m}_p$ (точнее пара сил с этим моментом). Соответственно и наоборот: если связь не мешает телу двигаться в каком-то направлении, то и силы реакции связи вдоль этого направления не возникает (если связь не мешает вращаться телу вдоль какой-то оси, то и реактивного момента вдоль этой оси не появляется).

Что же касается уравнений равновесия тела ($k = 0$), то они имеют для всех задач стандартный вид:

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n \mathbf{M}_{Ok} = 0, \quad (1)$$

где O – некоторая произвольная точка, выбор которой диктуется только соображениями простоты (например, если точку O взять на пересечении двух или более сил, то моменты этих сил будут равны нулю, и уравнение получится более простое).

В координатной форме уравнения (1) имеют вид

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0, \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(F_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_y(F_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_z(F_k) = 0.$$

Для системы параллельных сил (пусть линии действия параллельны оси Oz) из шести уравнений остаются только три:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_z(F_k) = 0.$$

Для системы сходящихся сил из шести уравнений (2) остаются только первые три уравнения:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0.$$

Из вышесказанного уже понятно, что при решении любой задачи статики вы должны выбрать тело, равновесие которого будете рассматривать, изобразить все действующие на него силы (активные и реакции связей) и составить уравнения равновесия полученной системы сил. Чтобы легче запомнить, запишем это “правило” в краткой форме:

1. ТЕЛО
2. СИЛЫ
3. УРАВНЕНИЯ

Дадим теперь рекомендации по выполнению каждого из указанных пунктов.

1. Тело вы выбираете сами. При этом вы можете в качестве тела рассмотреть всю конструкцию, либо часть этой конструкции, либо выбрать отдельную точку. Принцип отвердевания позволяет вам это сделать. Соответственно, выбрать тело нужно удачно. Неудачный выбор тела приведет к более громоздкому решению, либо вы вообще не решите поставленной задачи.

2. Заданные активные силы, действующие по условию задачи, вы изображаете на чертеже, остальные же силы будут являться силами реакции связей и должны быть вами изображены с помощью принципа освобождаемости от связей. Если среди сил окажутся распределенные нагрузки, то их нужно заменить сосредоточенными силами. Часть из них могут представлять пары сил и их вы изображаете в виде моментов этих пар.

3. Векторные уравнения равновесия (1) вы при решении задачи проецируете на оси. Выбор направления осей, а также выбор точек, относительно которых вы берете моменты сил остается за вами. Этим и определяется оптимальность решения задачи. При этом вам вовсе не обязательно составлять все уравнения. Составляйте лишь те уравнения, которые максимально быстро приведут вас к решению поставленной задачи.

В случае равновесия конструкции, состоящей из нескольких тел, рассмотрения одного “блока” (тело + силы + уравнения) вам может не хватить для решения задачи даже при удачном выборе тела. В этом случае вы организуете следующий “блок”: выбираете другое тело и работаете с ним. Если и составленных

двух блоков не хватает для решения задачи, то составляете третий блок, и так далее. В итоге вы должны получить замкнутую систему уравнений для определения неизвестных задачи (т.е. общее число составленных с помощью блоков независимых уравнений равновесия должно совпасть с общим числом неизвестных).

Для получения самого простого решения вы и должны использовать описанные выше рекомендации, удачно выбирая тела (для составления “блоков”) и составляя уравнения равновесия (с помощью удачного выбора осей и точек, относительно которых будете составлять уравнения моментов сил).

Если же в задаче имеются шероховатые поверхности, то следует иметь в виду, что в статике $F_{\text{тр}} \leq fN$ в случае трения скольжения, и $M_{\text{тр}} \leq kN$ в случае трения качения (f – коэффициент трения скольжения, k – коэффициент трения качения). При этом знак равенства достигается в случае предельного равновесия. Поэтому при решении задач с учетом трения нужно либо их сводить к рассмотрению предельного равновесия, и тогда задача сводится к решению системы уравнений. Либо рассматривать случай не предельного равновесия, и тогда вам придется решать систему уравнений и неравенств.

В заключение этого параграфа отметим, что вышеперечисленные рекомендации по решению задач статики касались классического (ньютоновского) способа решения. Существует еще и способ решения задач статики с помощью применения принципа возможных перемещений (принципа Лагранжа). Он изучается в последней части курса теоретической механики и требует знания не только статики, но и кинематики, и динамики. Мы здесь не будем подробно останавливаться на этом способе, а приведем лишь по пунктам рекомендации по решению задач для случая конструкции, имеющей одну степень свободы:

1. Изобразить все действующие на систему активные силы F_k (и неидеальные реакции связей, если таковые имеются).

2. Сообщить системе возможное перемещение. При этом следует изобразить на чертеже возможные перемещения δs_k то-

чек и возможные повороты $\delta\varphi_k$ тел, к которым приложены активные силы $\mathbf{F}_k$.

3. Составить уравнения работ

$$\sum_k \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{s}_k = \sum_k F_k ds_k \cos \alpha_k = 0,$$

где α_k – угол между векторами $\mathbf{F}_k$ и $\delta\mathbf{s}_k$.

Для упрощения уравнения работ следует иметь в виду, что силу можно переносить вдоль линии ее действия и что работу силы $\mathbf{F}$ на перемещении $\delta\mathbf{s}$ при повороте тела вокруг оси ℓ можно вычислять как работу момента этой силы на угле поворота $\delta\varphi$ вокруг этой же оси: $\mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{s} = M_\ell \delta\varphi$.

4. Выразить все $\delta\mathbf{s}_k$ и $\delta\varphi_k$, входящие в уравнение работ, через какое-нибудь одно и найти искомую величину. При нахождении зависимостей между величинами $\delta\mathbf{s}_k$ и $\delta\varphi_k$ можно использовать как геометрические соотношения, так и кинематические, считая, что эти зависимости такие же, как и между скоростями $\mathbf{v}_k$ и угловыми скоростями ω_k для соответствующих точек и тел.

В следующем разделе даны решения десяти задач статики с использованием приведенных рекомендаций (последняя задача решена с помощью принципа возможных перемещений).

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ С РЕШЕНИЯМИ

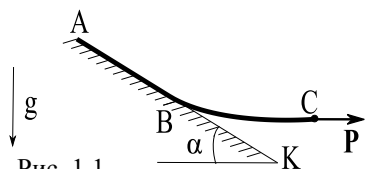


Рис. 1.1

К его свободному концу приложена сила $P = 300$ Н. Определить расстояние $x = AB$ до точки В, где канат перестает касаться наклонной плоскости. Вес каната $G = 200$ Н.

Решение. Рассмотрим в качестве тела часть каната BC. Система сил, действующая на него, показана на рис. 1.2, где T – натяжение каната в точке В, а G_1 – вес каната BC. Проецируя уравнение равновесия $\mathbf{P} + \mathbf{G}_1 + \mathbf{T} = \mathbf{0}$ на горизонтальную и вертикальную оси, получим

$$P - T \cos \alpha = 0, \quad T \sin \alpha - G_1 = 0.$$

Следовательно, $G_1 = P \operatorname{tg} \alpha = 100\sqrt{3}$ Н.

Участок АВ имеет вес $G_2 = G - G_1 = 200 - 100\sqrt{3} \approx 27$ Н.

Значит, $x = AB = \frac{G_2}{3} = \frac{27}{3} = 9$ м.

Замечание. Хотя канат и его части не являются абсолютно твердыми телами, уравнения статики применять можно по принципу отвердевания. Простота приведенного выше решения достигается за счет удачно выбранного тела, а именно – части каната BC.

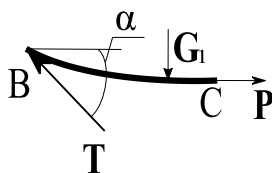


Рис. 1.2

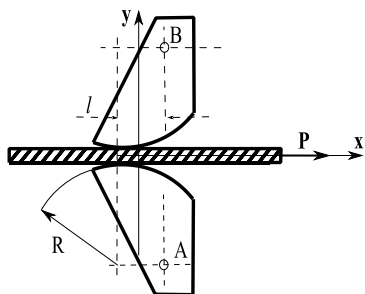


Рис. 2.1

$R = 72$ мм, $\ell = 15$ мм, а канат тянут с силой $P = 600$ Н.

Задача 2. На рис. 2.1 изображено приспособление для зажима каната под действием сил трения. Пренебрегая весом кулачков и каната, определить реакции в опорах А и В кулачков, если

Решение. Рассмотрим в качестве тела канат (рис. 2.2). На него действуют сила тяги P и силы реакций кулачков N_C и $F_{тр}$. Проецируя уравнение равновесия на ось, получаем $F_{тр} = P/2 = 300$ Н.

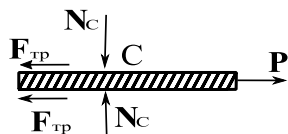


Рис. 2.2

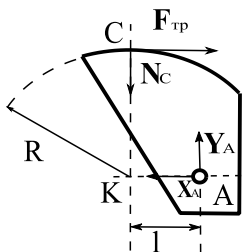


Рис. 2.3

Рассмотрим далее равновесие кулачка (например, нижнего). Система действующих на него сил изображена на рис. 2.3. Для определения реакций X_A , Y_A опоры A достаточно составить два уравнения равновесия:

$$\sum X: X_A - F_{тр} = 0;$$

$$\sum M_K: -F_{тр}R + Y_A \ell = 0.$$

Решая их, находим $X_A = 300$ Н, $Y_A = 1440$ Н. В силу симметрии задачи $X_B = X_A$, $Y_B = Y_A$.

Замечание. В условии задачи коэффициент трения f между кулачком и канатом не задан. И возникает вопрос: при любом ли f кулачки зажмут канат? Чтобы ответить на этот вопрос, мы сначала найдем связь между N и $F_{тр}$ из уравнения моментов относительно опоры A:

$\sum M_A = N\ell - F_{тр}R = 0$, отсюда $F_{тр} = (\ell/R)N$ и воспользуемся неравенством $F_{тр} \leq fN$. Следовательно, $f \geq \ell/R \approx 0,21$.

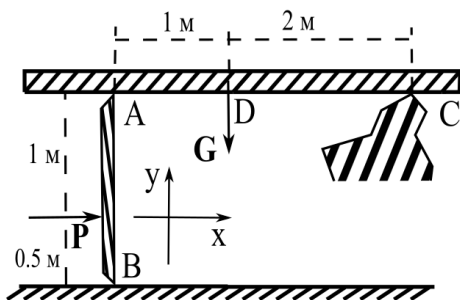


Рис. 3.1

Задача 3. Плита весом G с центром тяжести в точке D поддерживается в равновесии в горизонтальном положении опорой C и вертикальной невесомой стойкой A (рис. 3.1).

Коэффициенты трения в точках A, B, C: $f_A = 0,2$; $f_B = f_C = 0,3$. Найти наименьшее горизонтальное усилие P , при котором нач-

нется проскальзывание в точках А, В или С. Где скольжение начнется раньше?

Решение. В качестве тел рассмотрим отдельно стойку и плиту. С учетом третьего закона Ньютона система сил, действующих на эти тела, показана на рис. 3.2 и 3.3.

Запишем уравнения равновесия для стойки:

$$\sum M_B = F_{\text{тр}}^A \cdot 1,5 - P \cdot 0,5 = 0;$$

$$\sum X = P - F_{\text{тр}}^A - F_{\text{тр}}^B = 0; \quad \sum Y = N_A - N_B = 0.$$

Получаем

$$F_{\text{тр}}^A = P/3, \quad F_{\text{тр}}^B = 2P/3, \quad N_A = N_B.$$

Запишем уравнения равновесия для плиты:

$$\sum X = F_{\text{тр}}^A - F_{\text{тр}}^C = 0; \quad \sum Y = N_A - N_C = 0; \quad \sum M_A = N_C \cdot 3 - G \cdot 1 = 0.$$

Получаем

$$F_{\text{тр}}^C = P/3, \quad N_C = G/3, \quad N_B = 2G/3.$$

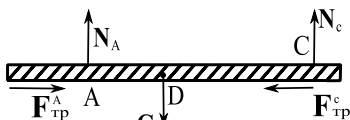


Рис. 3.3

Учитывая неравенства
 $F_{\text{тр}}^A \leq f_A N_A, F_{\text{тр}}^B \leq f_B N_B, F_{\text{тр}}^C \leq f_C N_C,$
 получим

$$F_{\text{тр}}^A = P/3 \leq 0,133G,$$

$$F_{\text{тр}}^B = 2P/3 \leq 0,2G, \quad F_{\text{тр}}^C = P/3 \leq 0,1G.$$

Из последних соотношений следует, что проскальзывание начнется одновременно в точках В и С под действием минимальной силы $P = 0,3G$.

Задача 4. Тяжелые однородные стержни длиной $AB = DE = \ell_1$ и $BC = CD = \ell_2$ соединены шарнирно (рис. 4.1) и расположены в вертикальной плоскости (точки А и Е лежат на одной горизонтали). При каком соотношении между длинами ℓ_1 и ℓ_2 система стержней будет находиться в равновесии? Считать шарниры идеаль-

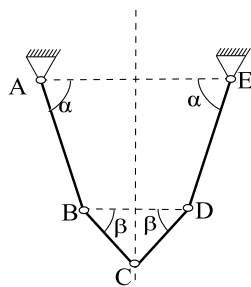


Рис. 4.1

ными, углы α и β заданными, а линейную плотность стержней одинаковыми.

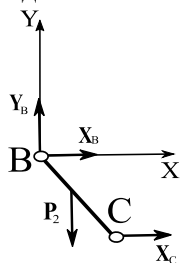


Рис. 4.2

Решение. Рассмотрим сначала равновесие стержня BC. Система сил, действующая на него, изображена на рис. 4.2. Заметим, что на рис. 4.2 не изображена реакция Y_C . В силу симметрии задачи $Y_C = 0$. Убедиться в этом можно, изобразив систему сил, действующую на стержень CD, используя симметрию и учитывая третий закон Ньютона в точке C, общей для обоих стержней BC и CD. Уравнения

равновесия стержня BC имеют вид:

$$\sum M_B = X_C \ell_2 \sin \beta - 0,5 P_2 \ell_2 \cos \beta = 0;$$

$$\sum X = X_C + X_B = 0;$$

$$\sum Y = Y_B - P_2 = 0.$$

Получаем: $X_B = -X_C = -0,5 P_2 \cos \beta$; $Y_B = P_2$.

Рассмотрим теперь стержень AB. Система действующих на него сил изображена на рис. 4.3. Составим для него уравнение моментов:

$$\begin{aligned} \sum M_A = Y_B \ell_1 \cos \alpha + X_B \ell_1 \sin \alpha + \\ + 0,5 P_1 \ell_1 \cos \alpha = 0. \end{aligned}$$

Подставив в это уравнение значения X_B , Y_B и учитывая одинаковую плотность стержней (т.е. $P_1/\ell_1 = P_2/\ell_2$), получим

$$\frac{\ell_1}{\ell_2} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 2.$$

Замечание. В нашей задаче стержни весомые, поэтому реакции стержней в шарнирах A и B вовсе не обязаны быть направлены вдоль стержней!

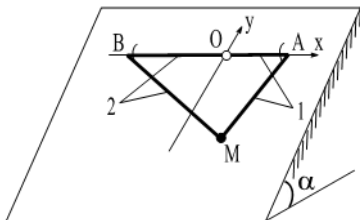


Рис. 5.1

Задача 5. На плоскости с углом наклона α неподвижно закреплены маленькие ушки A, B и узел O (рис. 5.1). Отрезок AB горизонтален и содержит

точку O . $OA = a$, $OB = 2a$. Концы нитей 1 и 2 прикрепили к узлу O , а нити пропустили через ушки A и B и прикрепили их к точке M массой m . Нити 1 и 2 упругие, с коэффициентами жесткости соответственно $c_1 = c$ и $c_2 = c/2$. Длины нитей 1 и 2 в ненапрянутом состоянии равны соответственно OA и OB . Нити тонкие, гладкие и невесомые. Коэффициент трения между точкой M и плоскостью равен f . В указанной на рис. 5.1 системе координат Oxy определить геометрическое место положений равновесия точки M .

Решение. На точку M действует система сходящихся сил (рис. 5.2), и уравнение ее равновесия запишется в векторном виде:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{G} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{\text{тр}} = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ – силы упругости нитей 1 и 2, $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$ – сила тяжести, $\mathbf{N}$ – нормальная составляющая силы реакции плоскости, $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ – ее касательная составляющая, т.е. сила трения скольжения.

Направим ось Oz перпендикулярно вверх и спроецируем векторное уравнение равновесия на оси x, y, z :

$$\sum X = F_1 \cos \gamma - F_2 \cos \beta + F_{\text{тр},x} = 0;$$

$$\sum Y = F_1 \sin \gamma + F_2 \sin \beta - G \sin \alpha + F_{\text{тр},y} = 0;$$

$$\sum Z = N - G \cos \alpha = 0.$$

Пусть x_M, y_M – координаты точки M в системе Oxy . Тогда из треугольника AME (рис. 5.3):

$$\cos \gamma = (a - x_M)/MA, \sin \gamma = -y_M/MA.$$

Аналогично из треугольника BMD :

$$\cos \beta = (2a + x_M)/MB, \sin \beta = -y_M/MB.$$

Величины сил упругости: $F_1 = c \cdot MA$; $F_2 = 0,5 c \cdot MB$.

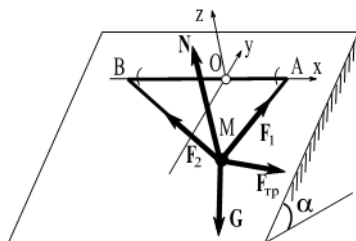


Рис. 5.2

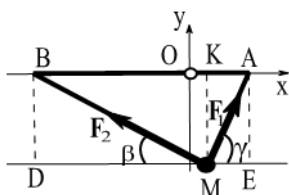


Рис. 5.3

Подставляя полученные выражения в уравнения равновесия, получим:

$$(a - x_M)c - 0,5(2a + x_M)c + F_{\text{тр},x} = 0;$$

$$-y_M c - 0,5y_M c - G \sin \alpha + F_{\text{тр},y} = 0.$$

Следовательно, $F_{\text{тр},x} = 1,5cx_M$; $F_{\text{тр},y} = 1,5cy_M + mg \sin \alpha$.

Равновесие точки М возможно лишь при выполнении условия $|F_{\text{тр}}| \leq fN$ или, что то же самое, $F_{\text{тр},x}^2 + F_{\text{тр},y}^2 \leq f^2 N^2$. Учитывая, что из уравнения равновесия в проекции на ось z , $N = mg \cos \alpha$, получим:

$$x_M^2 + (y_M + 2fmg \cos \alpha / 3c)^2 \leq (2fmg \cos \alpha / 3c)^2.$$

Таким образом, точка М при равновесии должна находиться в круге с центром $(0, -2fmg \sin \alpha / 3c)$ и радиусом $2fmg \cos \alpha / 3c$.

Замечание. На рис. 5.2 направление силы $F_{\text{тр}}$ мы заранее (до решения задачи) не знаем. Мы его могли бы определить в процессе решения по проекциям силы $F_{\text{тр}}$ на оси x , y , но в этом не было необходимости. Для любой точки найденного нами круга направление силы трения определяется уравнениями равновесия.

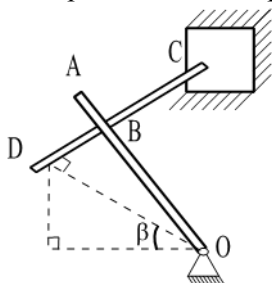


Рис. 6.1

ОА и полом равен β . Определить, при каких углах α наклона балки ОА к горизонту возможно равновесие.

Решение. В качестве тела рассмотрим балку ОА. Система сил, действующая на балку, изображена на рис. 6.2. Здесь X_o, Y_o, Z_o – реакции сферического шарнира, P – вес балки,

Задача 6. Однородная балка ОА прикреплена к полу сферическим шарниром, а в точке В опирается на шероховатую балку CD, жестко заделанную в стену (рис. 6.1). Коэффициент трения между балками равен f . В положении, когда балки перпендикулярны, угол между балкой

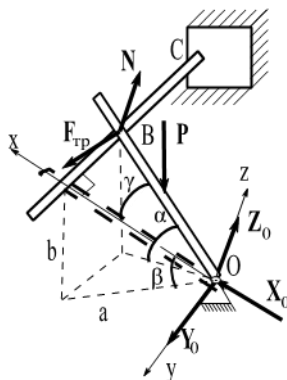


Рис. 6.2

$\mathbf{N}$ – нормальная составляющая реакции балки CD, $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ – ее касательная составляющая.

Разберемся с направлением сил $\mathbf{N}$ и $\mathbf{F}_{\text{тр}}$. Сила $\mathbf{N}$ должна быть перпендикулярна балке CD, так как это нормальная составляющая. Если же мы рассмотрим равновесие балки AO, то нормальная составляющая реакции балки CD должна быть перпендикулярна балке CD и вместе с тем она, по третьему закону Ньютона, должна быть равна $\mathbf{N}_1 = -\mathbf{N}$. Тем самым $\mathbf{N}$ перпендикулярна обеим балкам или плоскости, проходящей через эти балки. Вектор $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ должен быть перпендикулярен $\mathbf{N}$, т.е. лежать в плоскости, проходящей через обе балки, и вместе с тем он должен быть направлен против направления возможной скорости точки B балки AO. Так как балка AO шарнирно закреплена в точке O, то вектор $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ перпендикулярен балке AO.

Заметим, что балка AO находится в равновесии под действием произвольной пространственной системы сил, и мы можем составить шесть скалярных уравнений равновесия, из которых затем и определим возможные углы α . Однако такое решение “в лоб” будет очень долгим и громоздким.

Ниже приводится самое простое решение, которое достигается за счет удачного выбора осей и выбора уравнений равновесия относительно этих осей.

Направим ось Oх вдоль балки AO, когда она перпендикулярна балке CD (см. рис. 6.2). Ось Oy возьмем в плоскости обеих балок, перпендикулярно оси Oх. Ось Oz направим перпендикулярно плоскости балок, как показано на рис. 6.2. Тогда для решения задачи нам достаточно составить лишь два уравнения:

$$\sum M_{kx} = P \cos \beta \ell \sin \gamma - N O B \sin \gamma = 0,$$

$$\sum M_{kz} = F_{\text{тр}} O B - P \ell \sin \beta \sin \gamma = 0.$$

$$\text{Откуда } N = P \ell \cos \beta / O B, F_{\text{тр}} = P \ell \sin \beta \sin \gamma / O B.$$

Подставляя полученные выражения в условие равновесия $F_{\text{тр}} \leq f N$, получаем: $\sin \gamma \tan \beta \leq f$.

Заметим теперь (см. рис. 6.2), что

$$\cos \gamma = O K / O B = b \sin \alpha / b \sin \beta = \sin \alpha / \sin \beta,$$

$$\sin \gamma = \sqrt{1 - (\cos \gamma)^2}.$$

Получаем окончательно: $\sin \alpha \geq \sqrt{\sin^2 \beta - f^2 \cos^2 \beta}$.

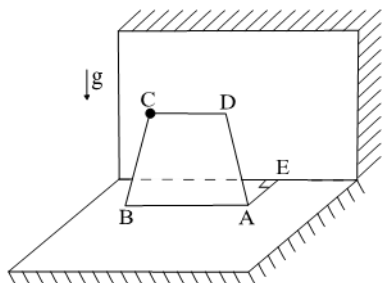


Рис. 7.1

Задача 7. Пластина ABCD (рис. 7.1) имеет форму равнобедренной трапеции, $AD = BC$, $CD = b$, $a > b$. Пластина опирается стороной AB на шероховатую горизонтальную плоскость с коэффициентом трения f , а стороной CD — на гладкую вертикальную плоскость. Нерастяжимая нить AE прикреп-

лена одним концом к точке A пластины, а другим концом закреплена в точке E на линии пересечения опорных плоскостей. Сторона AB параллельна этой линии, а нить AE перпендикулярна ей. К вершине C пластины прикрепili материальную точку. Весом пластины пренебрегаем. Определить минимальное значение угла α наклона пластины к горизонтальной плоскости при равновесии.

Решение. В качестве тела рассмотрим пластину вместе с материальной точкой. На него действуют пять сил (рис. 7.2): сила тяжести $\mathbf{G}$, равнодействующие сил нормальных реакций $\mathbf{N}_{AB}$ и $\mathbf{N}_{CD}$, перпендикулярных опорным плоскостям, натяжение нити $\mathbf{T}$ вдоль нити, и равнодействующая сил трения $\mathbf{F}_{тр}$ на горизонтальной плоскости. Заметим также, что мы ищем минимальный угол α , поэтому нас интересует предельное равновесие, при котором $F_{тр} = fN_{AB}$.

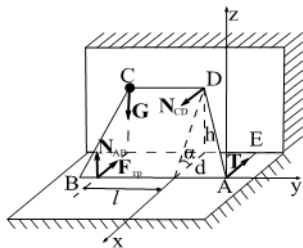


Рис. 7.2

Покажем, что в момент выхода пластины из положения равновесия нить AE остается на месте. Действительно, если точка A начнет поворачиваться вокруг E, например, в сторону положительного направления оси y , то из теоремы о проекциях скоростей для AB будет следовать, что проекции малых перемещений всех точек AB на ось y положительны. Значит, все элементарные силы трения имеют отрицательные проекции на ось y . Тогда и проекция равнодействующей силы трения

$F_{\text{тр}} < 0$. А это противоречит условию равновесия пластины $\sum Y = 0$, так как все остальные силы проекции на ось y не дают.

Отсюда следует два вывода: при условии $a > b$ выход пластины из равновесия возможен лишь за счет поворота вокруг оси Az (см. рис. 7.2) и сила $F_{\text{тр}}$ перпендикулярна оси y . Из первого вывода следует, что при предельном равновесии сила N_{CD} приложена в точке D . Далее, из уравнения равновесия $\sum Z = -G + N_{\text{AB}} = 0$ получаем $N_{\text{AB}} = G$.

Обозначим через x ось, перпендикулярную y и находящуюся на горизонтальной плоскости ровно под точкой D . Обозначим за ℓ расстояние от точки приложения силы N_{AB} до оси x . Тогда из уравнения моментов относительно оси x : $\sum M_x = Gb - N_{\text{AB}}\ell = 0$ сразу следует, что $\ell = b$.

В силу $dF_{\text{тр}} = fdN_{\text{AB}}$ при предельном равновесии, равнодействующая $F_{\text{тр}}$ приложена к той же точке, что и N_{AB} .

Обозначим через d расстояние от AB до линии пересечения опорных плоскостей, а через h – расстояние от CD до этой линии. Запишем уравнение моментов относительно оси y :

$$\sum M_y = -Gd + N_{\text{CD}}h = 0.$$

Из него следует, что

$$N_{\text{CD}} = Gd/h = Gctg\alpha, \text{ где } \alpha - \text{искомый угол.}$$

Запишем, наконец, еще уравнение моментов относительно оси z :

$$\sum M_z = -F_{\text{тр}}\left(b + \frac{a-b}{2}\right) + N_{\text{CD}}\left(\frac{a-b}{2}\right) = 0.$$

Учитывая, что при предельном равновесии $F_{\text{тр}} = fN_{\text{AB}} = fG$, получим:

$$-fG(a+b)/2 = Gctg\alpha(a-b)/2, \text{ или } tg\alpha = \frac{a-b}{f(a+b)}.$$

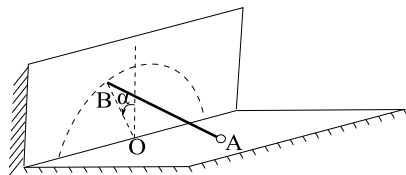


Рис. 8.1

Задача 8. Однородный тонкий стержень AB (рис. 8.1) длиной ℓ и весом Q шарнирно укреплен в точке A и опирается другим концом B на шероховатую вертикальную плоскость.

кость с коэффициентом трения f . Расстояние от вертикальной плоскости до шарнира равно a . Определить максимальный угол α при равновесии стержня. Трением в шарнире пренебречь.

Решение. В качестве тела рассмотрим стержень. Система действующих на него сил показана на рис. 8.2. Заметим, что так как стержень шарнирно закреплен в точке A , то другой его конец B может находиться на стене на полуокружности радиусом $OB = \sqrt{\ell^2 - a^2}$.

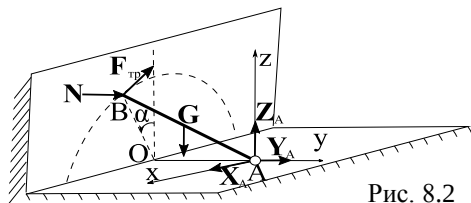


Рис. 8.2

Сила трения $F_{\text{тр}}$ направлена по касательной к этой полуокружности и для искомого угла α связана с нормальной реакцией N предельным соотношением $F_{\text{тр}} = fN$.

Из сказанного выше можно сделать вывод о том, что нам для решения задачи потребуется еще только одно соотношение, связывающие величины $F_{\text{тр}}$ и N . Таковым является уравнение моментов относительно оси Az :

$$\sum M_{Az} = -F_{\text{тр}} \cdot a \cdot \cos \alpha \cdot a + N \cdot OB \cdot \sin \alpha = 0.$$

Отсюда, с учетом приведенных выше соотношений, получаем: $\tan \alpha = af / \sqrt{\ell^2 - a^2}$, или $\alpha = \arctg(af / \sqrt{\ell^2 - a^2})$.

Задача 9. Семь однородных стержней одинаковой длины связаны шарнирами (рис. 9.1). Стержни O_1A и O_3C горизонтальны, стержни O_2B и O_4D вертикальны. Углы наклона к горизонту стержней AB , BC , CD равны $\alpha = 30^\circ$. Вес стержня AB равен P . Вес остальных шести стержней одинаковы и равны $Q = P/6$. Определить величину силы F , которую нужно приложить к шарниру A в направлении точки D для равновесия системы.

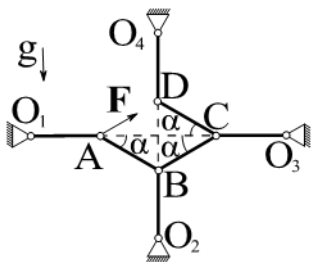


Рис. 9.1

тали стержней AB , BC , CD равны $\alpha = 30^\circ$. Вес стержня AB равен P . Вес остальных шести стержней одинаковы и равны $Q = P/6$. Определить величину силы F , которую нужно приложить к шарниру A в направлении точки D для равновесия системы.

Решение. Эту задачу проще решать с помощью принципа возможных перемещений. Отметим в начале, что связи удовлетворяют всем требованиям применимости принципа – стационарные, голономные, двусторонние и идеальные.

На рис. 9.2 возможные перемещения указаны тонкими векторами без подписей (чтобы не загромождать рисунок). Обозначим через δr_i возможные перемещения центров тяжести стержней с концами O_i , $i = 1, 2,$

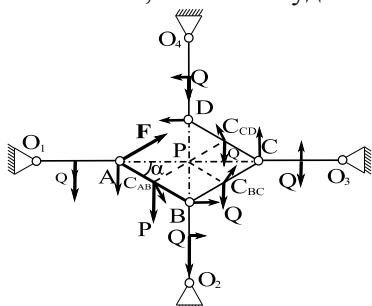


Рис. 9.2

3, 4, а через δr_{AB} , δr_{BC} , δr_{CD} возможные перемещения центров тяжести C_{AB} , C_{BC} , C_{CD} соответствующих стержней. Мгновенным центром скоростей для стержней AB, BC и CD является точка P – центр ромба. Рассматривая возможное перемещение стержня AB, получим:

$$\frac{\delta s_B}{\delta s_A} = \frac{BP}{AP} = 1/\sqrt{3}, \quad \frac{\delta s_A}{\delta s_{AB}} = \frac{AP}{C_{AB}P} = \sqrt{3}.$$

Аналогично, рассматривая возможные перемещения стержней BC, CD, получим:

$$\delta s_B = \delta s_C / \sqrt{3}, \quad \delta s_C = \sqrt{3} \delta s_{BC}, \quad \delta s_D = \delta s_C / \sqrt{3}, \quad \delta s_C = \sqrt{3} \delta s_{CD}.$$

Кроме того, для возможных перемещений центров тяжести стержней O_1A и O_3C получим: $\delta s_{O_1A} = \frac{\delta s_A}{2} = \frac{\delta s_C}{2} = \delta s_{O_3C}$.

Составим уравнение работ:

$$Q \delta s_{O_1A} + F \delta s_A \cos 120^\circ + P \delta s_{AB} \cos 30^\circ + Q \delta s_{O_2B} \cos 90^\circ + Q \delta s_{BC} \cos 150^\circ - Q \delta s_{O_3C} + Q \delta s_{CD} \cos 150^\circ + Q \delta s_{O_4D} \cos 90^\circ = 0.$$

После упрощений и сокращений получим окончательно $F = 2P/3$.

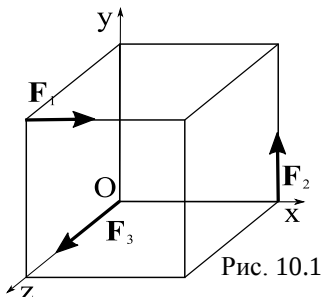


Рис. 10.1

Задача 10. Какую наименьшую по модулю силу P , параллельную оси Ox , нужно приложить к кубу со стороны a , чтобы система четырех сил

$\mathbf{P}$, $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, у которой $F_1 = F_2 = F_3 = F$, имела равнодействующую?

Решение. У изображенной на рис. 10.2 системы сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$, дополненной силой $\mathbf{P} = P\mathbf{i}$ с точкой приложения $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, главный вектор $\mathbf{R}^*$ и главный момент $\mathbf{M}_O$ должны быть перпендикулярны: $\mathbf{R}^* \cdot \mathbf{M}_O = 0$.

Переходя к покомпонентной форме записи скалярного произведения векторов в системе координат $Oxyz$, получим уравнение для определения модуля силы $\mathbf{P}$ и координат точки ее приложения.

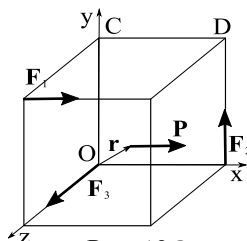


Рис. 10.2

Пусть $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ – радиус-векторы сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ соответственно. Тогда:

$$\mathbf{r}_1 = (0, a, a); \mathbf{r}_2 = (a, 0, 0); \mathbf{r}_3 = (0, 0, 0); \mathbf{r} = (x, y, z);$$

$$\mathbf{F}_1 = (F, 0, 0); \mathbf{F}_2 = (0, F, 0); \mathbf{F}_3 = (0, 0, F); \mathbf{P} = (P, 0, 0);$$

$$\mathbf{M}_{O1} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 = (0, Fa, -Fa); \mathbf{M}_{O2} = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = (0, 0, Fa);$$

$$\mathbf{M}_{O3} = \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_3 = (0, 0, 0);$$

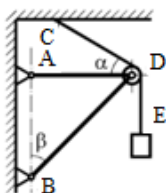
$$\mathbf{M}_{Or} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} = (0, Fa + Pz, -Py).$$

Следовательно: $\mathbf{R}^* = (F + P, F, F)$; $\mathbf{M}_O = (0, Fa + Pz, -Py)$;
 $\mathbf{R}^* \cdot \mathbf{M}_O = F(Fa + Pz) - FPy = 0$.

Отсюда: $P = aF/(y - z)$.

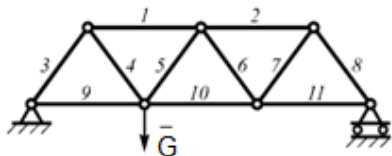
Очевидно, минимальное значение $P_{\min} = F$, и достигается оно при $y = a$, $z = 0$, т.е. на ребре CD куба (см. рис. 10.2).

КОРОТКИЕ ЗАДАЧИ

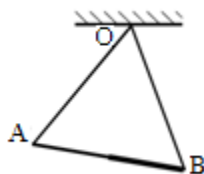


С3.1. На кронштейне ADB укреплен блок, через который перекинут трос CDE, прикрепленный к потолку и несущий груз весом $G = 20 \text{ кН}$. $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$. Определить реакцию стержня AD.

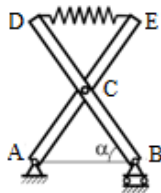
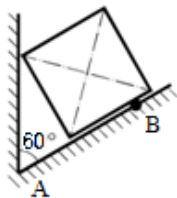
С3.2. Укажите номера стержней, которые можно заменить тросами, если на ферму действует только сила G .



С3.3. Стержень AB, имеющий длину R , составлен из двух однородных кусков одинаковой длины, один из которых весит вдвое больше другого. Стержень подвешен за концы на двух нитях OA и OB, имеющих одинаковые длины, равные R . Какой угол стержень образует с горизонталью в положении равновесия?

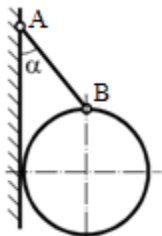
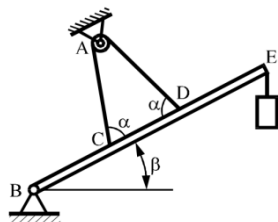


С3.4. Куб весом 50 Н удерживается в равновесии при помощи гладких вертикальной и наклонной плоскостей. Определить расстояние AB от вершины угла до точки приложения реакции наклонной плоскости, если длина ребра куба 20 см .



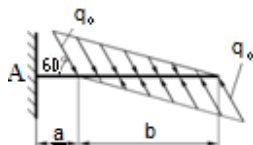
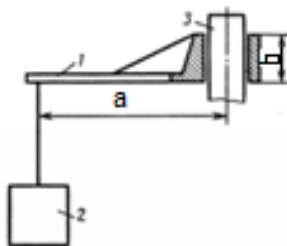
С3.5. X-образная конструкция закреплена в вертикальной плоскости. Стержни AE и BD, массы которых одинаковы и равны m , соединены шарниром C. $AC = CE = AB = BC = CD$. Известно значение угла α в положении равновесия. Определить силу сжатия пружины DE.

С3.6. Однородная балка BE весом G , к концу которой в точке E подвешен груз весом Q , удерживается в равновесии под углом β к горизонту при помощи цилиндрического шарнира B и троса, переброшенного через неподвижный блок A и закрепленного в точках C и D . $BC = CD = DE = \ell$. Пренебрегая размерами блока и трением на оси, определить натяжение троса.



С3.7. Определить, при каком минимальном коэффициенте трения между шаром и стеной возможно равновесие в изображенном на рисунке положении, если угол между стержнем AB и стеной равен α .

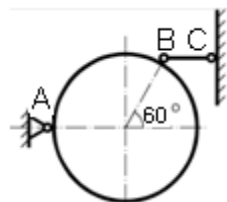
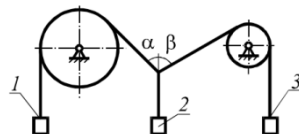
С3.8. Невесомый рычаг 1 , несущий на конце груз 2 , надет на вертикальную стойку 3 . Определить максимальный размер b , при котором возможно равновесие, если известны размер a и коэффициент трения f .



С3.9. Определить момент заделки, возникающий вследствие действия распределенных нагрузок, изменяющихся по линейному закону, если известны значения q_0 , a , b .

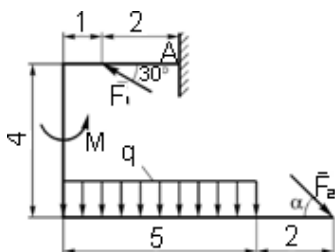
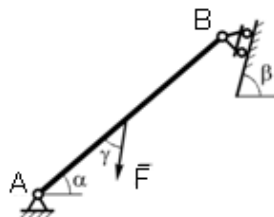
С3.10. Определить, на сколько изменится положение центра тяжести картонной коробки, имеющей форму куба со стороной a , если из нее вырезать одну из граней.

С3.11. Грузы 1, 2 и 3 находятся в равновесии. Известны вес груза $G_1 = 50 \text{ Н}$ и углы $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$. Определить вес груза 2.



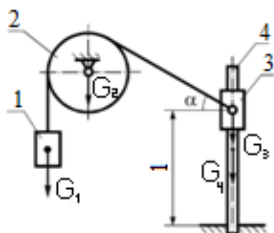
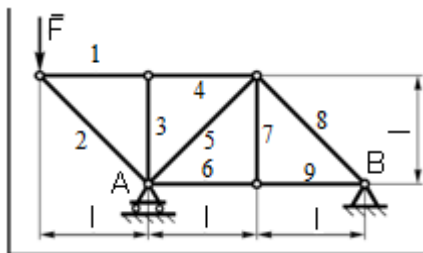
С3.12. Диск весом 100 Н удерживается в равновесии шарниром A и невесомым стержнем BC , как это показано на рисунке. Определить реакцию стержня BC .

С3.13. К середине невесомой балки AB длиной ℓ приложена активная сила $\vec{F}$. Углы α , β , γ известны. Найти реакцию опоры B .



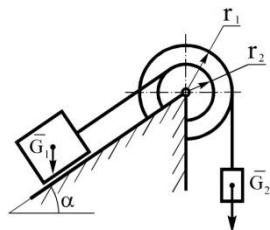
С3.14. Дано: $F_1 = 20 \text{ кН}$, $F_2 = 20 \text{ кН}$, $q = 4 \text{ кН/м}$, $M = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}$. При каком значении угла α момент в заделке будет отсутствовать?

С3.15. Найти внутреннюю силу в стержне 5 изображенной на рисунке плоской фермы, нагруженной силой $F = 30 \text{ Н}$.

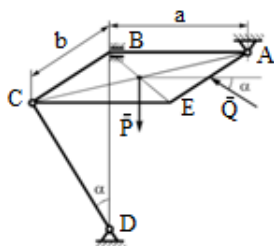


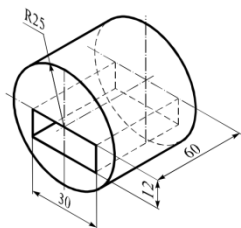
С3.16. Система находится в равновесии под действием сил тяжести G_1 , G_2 , G_3 и G_4 . Известны угол α и размер ℓ . Пренебрегая трением, определить значение равнодействующей силы реакции заделки.

С3.17. Найти максимальный вес груза 2, при котором изображенная на рисунке система будет находиться в равновесии, если коэффициент трения между грузом и наклонной плоскостью равен f . Заданы также G_1 , r_1 , r_2 , α .



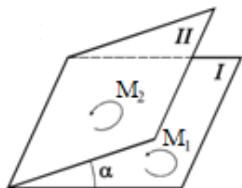
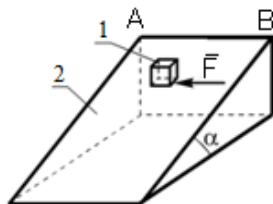
С3.18. Пластина ABCE находится в равновесии под действием сил P и Q . Вектор силы Q лежит в вертикальной плоскости и составляет угол α с горизонталью. Определить реакцию стержня CD.





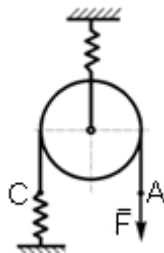
C3.19. Найти, на сколько сместился центр тяжести тела после того, как в нем сделали отверстие.

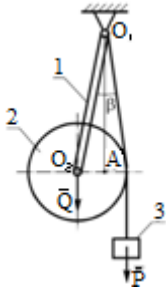
C3.20. Тело 1, вес которого равен G , находится на грани призмы 2, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтальной плоскостью. Коэффициент трения между телами $f = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Найти минимальную силу F , параллельную ребру AB призмы, необходимую для выведения тела 1 из состояния равновесия.



C3.21. К твердому телу приложены пары сил с моментами $M_1 = 5 \text{ Н}\cdot\text{м}$ и $M_2 = 7 \text{ Н}\cdot\text{м}$, расположенные в пересекающихся плоскостях I и II. Момент результирующей пары равен $8 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Определите угол α между плоскостями.

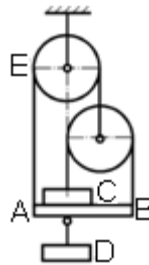
C3.22. На сколько переместится конец перекинутой через подвижный блок нити (точка A), если к нему приложить силу F ? Коэффициент жесткости пружины s .



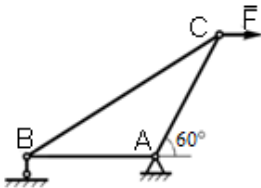
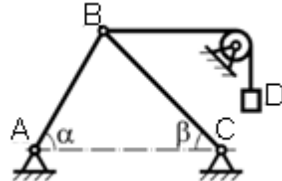


С3.23. Цилиндр 2 весом Q и радиусом r соединен шарнирным невесомым стержнем O_1O_2 длиной $2r$ с опорой O_1 ; к оси O_1 прикреплен на нити груз 3. Механическая система находится в равновесии; при этом вертикальная прямая O_1A делит угол β пополам. Определить вес P груза.

С3.24. Два груза C и D , весом P каждый, с помощью невесомых блоков одинакового радиуса, веревок и балки AB приведены в состояние равновесия, причем балка AB занимает горизонтальное положение. Определить усилие в ветви AE веревки, если все ветви вертикальны, а ось блока с неподвижным центром и точка подвеса груза D лежат на одной вертикали.



С3.25. К невесомым стержням AB и BC прикреплена нить с грузом на свободном конце. Его вес $G = 20$ Н. Углы $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$. Определить силы, которыми стержни AB и BC действуют на узел B .

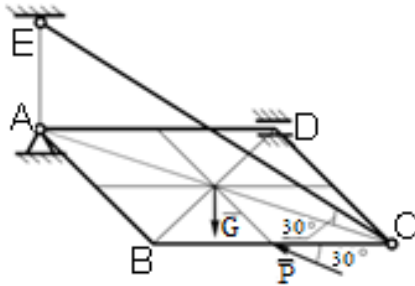
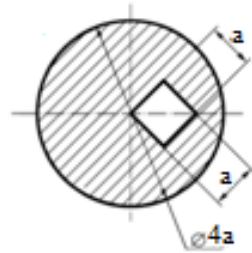


С3.26. К невесомой пластине ABC , имеющей вид равнобедренного треугольника и закрепленной в точках A и B , приложена сила $F = 30$ кН. Определить реакцию шарнира A .

С3.27. В вертикальный цилиндрический сосуд с жидким маслом опустили шарик массой m , который стал погружаться с постоянной скоростью. Насколько увеличилась сила давления на дно сосуда в ходе погружения шарика, если его плотность в n раз больше плотности масла?

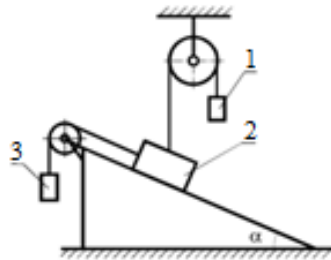
С3.28. Шар радиусом R плавает в жидкости, практически полностью погрузившись в нее. Найдите силу давления жидкости на нижнюю половину поверхности шара. Плотность жидкости ρ .

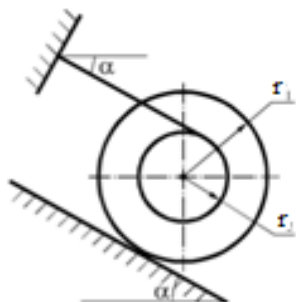
С3.29. Найти, на сколько сместился центр тяжести фигуры после того, как из нее вырезали отверстие в форме квадрата.



С3.30. К расположенной в горизонтальной плоскости однородной пластине весом G в вертикальной плоскости приложена сила P . Найти реакцию невесомого стержня CE , если $BC = 4$ м и $AB = 3$ м.

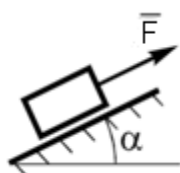
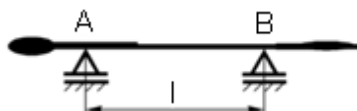
С3.31. Массы тел 2 и 3 равны m_2 и m_3 соответственно (см. рисунок). Угол наклона плоскости к горизонту α . Пренебрегая трением, найти массу тела 1, при которой система будет находиться в равновесии.





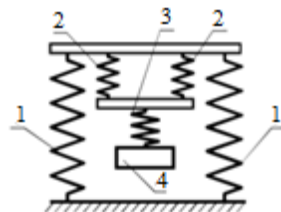
C3.32. Определить минимальное значение коэффициента трения, при котором каток (радиусы r_1 и r_2) будет находиться в равновесии. Угол α известен.

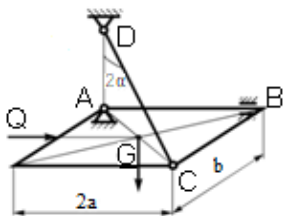
C3.33. Неоднородный стержень лежит на двух гладких опорах А и В. Реакция опоры А в 2 раза больше реакции опоры В. Расстояние между опорами ℓ . На какое максимальное расстояние можно сместить влево правую опору, чтобы стержень при этом остался в равновесии?



C3.34. На плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонталью, находится груз весом 4 Н. К грузу приложена сила $F = 1,5$ Н, параллельная наклонной плоскости. Коэффициент трения $f = 0,5$. Найти значение силы трения груза о плоскость.

C3.35. Груз 4 подвешен к системе пружин, коэффициенты жесткости которых $c_1 = 1$ кН/м, $c_2 = 0,5$ кН/м, $c_3 = 1$ кН/м. Определить коэффициент жесткости эквивалентной пружины, которой можно заменить изображенную на рисунке систему.

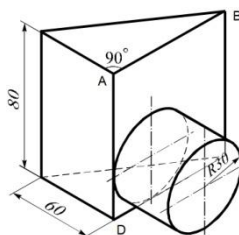




C3.36. Однородная прямоугольная пластина с размерами $2a$, b и весом G удерживается в равновесии сферическим шарниром A , цилиндрическим шарниром B и стержнем CD , составляющим угол 2α с вертикалью. Найти реакцию цилиндрического шарнира B .

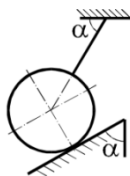
C3.37. Из трех однородных стержней длиной ℓ каждый составлен треугольник. Одну сторону удалили. На сколько при этом изменится положение центра тяжести фигуры?

C3.38. Однородное тело, размеры которого указаны на рисунке, подвешивают за ребро AB так, что оно занимает горизонтальное положение. Какой должна быть высота цилиндра h , чтобы плоскость $ABCD$ была при этом вертикальной? $AB = 90$ мм.



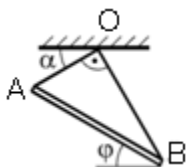
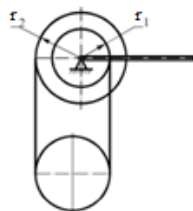
C3.39. При равновесии над поверхностью жидкости находится $1/6$ длины стержня. Каково отношение $\rho_{\text{ж}}/\rho_{\text{ст}}$ плотности жидкости к плотности погруженного в нее стержня?

C3.40. К концу висящей вертикально пружины, массой которой можно пренебречь, подвешивают груз массой m . Затем к середине уже растянутой пружины подвешивают еще один груз такой же массой. Определить длину растянутой пружины. Коэффициент жесткости пружины равен s , а ее длина в нерастянутом состоянии ℓ_0 .



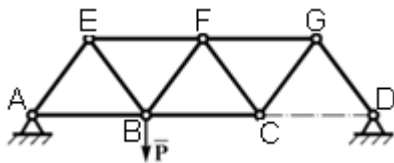
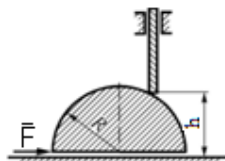
C3.41. Цилиндр весом $G = 10$ Н удерживается в равновесии наклонной плоскостью и нитью. Углы $\alpha = 60^\circ$. Определить натяжение нити.

С3.42. Какую силу можно приложить к концу рукоятки дифференциального ворота, чтобы удержать груз массой $m = 50$ кг, если длина рукоятки $\ell = 98$ см, $r_1 = 20$ см, $r_2 = 10$ см?



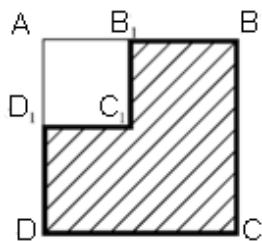
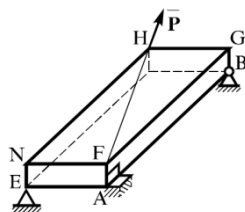
С3.43. Однородный стержень АВ, подвешенный на нитях ОА и ОВ, находится в равновесии. Нити составляют между собой прямой угол. Нить ОА наклонена к горизонту под углом α . Определите угол ϕ наклона стержня к горизонту.

С3.44. Полуцилиндр массой m_1 стоит на горизонтальной плоскости. На него опирается стержень АВ массой m_2 , расположенный в вертикальных направляющих. Пренебрегая трением, определить силу F , удерживающую систему в равновесии. Размеры указаны на чертеже.



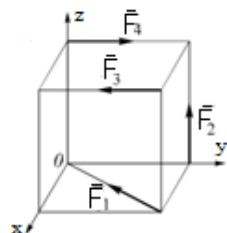
С3.45. К ферме приложена внешняя сила P . Определить реакцию связи в точке D , если длины всех горизонтальных стержней, а также расстояние CD равны 6 м (стержня CD нет), длина каждого наклонного стержня составляет 5 м.

С3.46. Прямоугольная однородная плита весом Q соединена с неподвижным основанием цилиндрическим шарниром A и сферическим шарниром B . Плита удерживается в горизонтальном положении острием E , упирающимся в гладкую поверхность нижней грани плиты. К верхней грани плиты $FGHN$ приложена сила P , направленная вдоль прямой FH . Определить реакцию острия E , если $AF = \frac{AB}{12} = \frac{AE}{5}$.

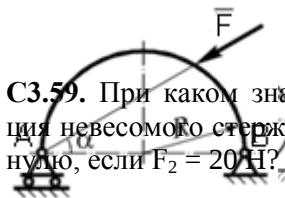


С3.47. Из однородной пластины в виде квадрата $ABCD$ со стороной a вырезан квадрат $AB_1C_1D_1$ так, что стороны обоих квадратов параллельны. Какова должна быть сторона x меньшего квадрата для того, чтобы центр тяжести оставшейся после выреза части совпал с точкой C_1 ?

С3.48. Определить главный момент относительно центра O системы сил, приложенной к кубу с ребром $a = 2$ м. Дано: $F_1 = 4\sqrt{2}$ Н, $F_2 = 4$ Н, $F_3 = 4$ Н, $F_4 = 8$ Н.

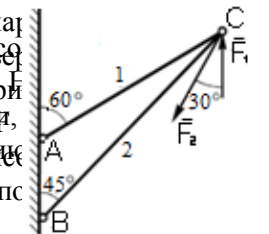


С3.49. Силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ приложены к телу в начале координат. Точки $A_1(-4, 3, 12)$; $A_2(2, -2, -1)$; $A_3(0, 4, -3)$ лежат на линиях действия сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ соответственно. Определить равнодействующую этих сил, если $\vec{F}_1 = 13$ Н, $\vec{F}_2 = 6$ Н, $\vec{F}_3 = 5$ Н.

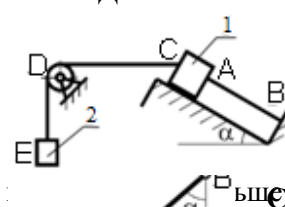


C3.59. При каком значении угла α сила F не вызовет вращения невесомого стержня?

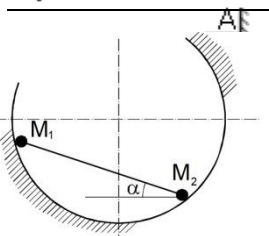
C3.50. Гладкий шар радиуса R касается вертикальной стены в точке A и опирается на пол в точке B. На шар действует сила F , направленная от центра к точке A. Найти реакцию пола, если $\alpha = 30^\circ$.



C3.51. Две тяжелые точки M_1 и M_2 соединены нитью, перекинутой через блок. Точка M_1 находится на наклонной плоскости, а точка M_2 — на горизонтальной поверхности. Найти натяжение нити, если масса точки M_1 равна m_1 , а масса точки M_2 равна m_2 .

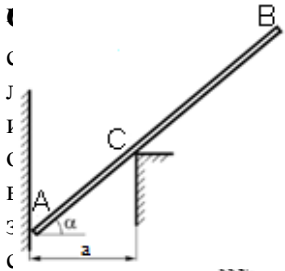


C3.52. Кривошипно-кулисный механизм. Кривошип длиной l вращается вокруг горизонтальной оси O. Кулиса длиной $2l$ опирается на кривошип в точке A и на горизонтальной поверхности в точке B. Найти момент силы F , действующей на кулису в точке B, если кривошип находится в горизонтальном положении.



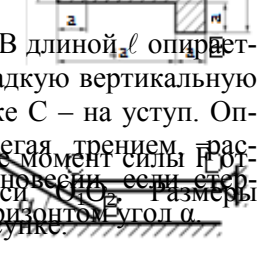
C3.61. Диск весом P опирается на две шарнирные опоры O_1 и O_2 . Найти момент силы F , действующей на диск в точке A, если диск находится в горизонтальном положении.

C3.53. Кривошипно-кулисный механизм. Кривошип длиной l вращается вокруг горизонтальной оси O. Кулиса длиной $2l$ опирается на кривошип в точке A и на горизонтальной поверхности в точке B. Найти момент силы F , действующей на кулису в точке B, если кривошип находится в горизонтальном положении.



C3.62. Стержень AB длиной l опирается на шарнирную опору A и на упорную опору B. Найти момент силы F , действующей на стержень в точке C, если стержень находится в горизонтальном положении.

C3.54. Арка радиуса R опирается на две шарнирные опоры. Найти реакцию опор, если на арку действует сила F , направленная от центра к точке A.

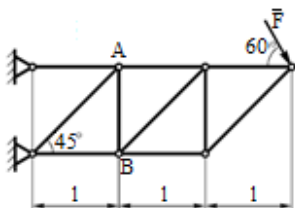
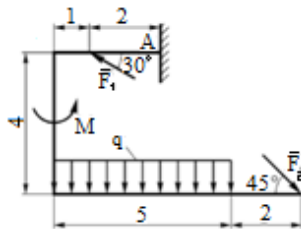


Нужно найти момент силы F , действующей на стержень в точке C, если стержень находится в горизонтальном положении.

C3.55. Кривошипно-кулисный механизм. Кривошип длиной l вращается вокруг горизонтальной оси O. Кулиса длиной $2l$ опирается на кривошип в точке A и на горизонтальной поверхности в точке B. Найти момент силы F , действующей на кулису в точке B, если кривошип находится в горизонтальном положении.

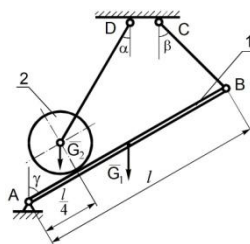


С3.63. Дано: $F_1 = 30 \text{ кН}$, $F_2 = 20 \text{ кН}$,
 $q = 4 \text{ кН/м}$, $M = 50 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Найти мо-
 мент заделки.



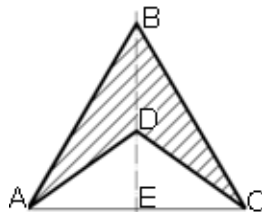
С3.64. Найти внутреннюю силу, воз-
 никающую в стержне АВ изображен-
 ной на рисунке плоской фермы, кото-
 рая находится под действием актив-
 ной силы F .

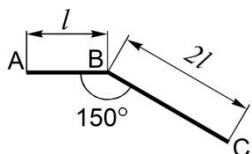
С3.65. В изображенной на рисунке схеме
 однородные тела 1 и 2 связаны с потол-
 ком невесомыми стержнями. Найти реак-
 цию стержня ВС, если известны G_1 , G_2 , α ,
 β , γ .



С3.66. Однородная балка АВ весом
 200 Н удерживается в горизонтальном
 положении невесомым криволинейным
 стержнем ВС. Определить реакцию
 связи в точке А, если $\alpha = 60^\circ$.

С3.67. Из равностороннего треугольника
 ABC со стороной a вырезан равнобедрен-
 ный треугольник ACD, как показано на
 рисунке. Найти, при каком расстоянии ED
 точка D оказывается центром тяжести по-
 лучившейся фигуры.

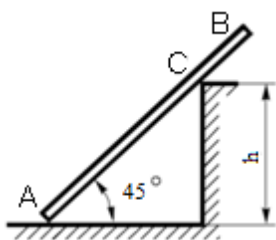
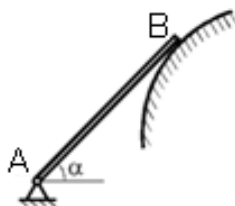




C3.68. Найдите расстояние от точки В до центра тяжести изображенного на рисунке куска проволоки постоянного поперечного сечения. Размер ℓ известен.

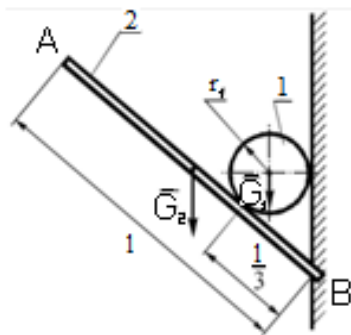
C3.69. Поезд массой $m = 700$ т движется под уклон, испытывая силу сопротивления движению $F = 70$ кН. При каком уклоне скорость поезда будет постоянной?

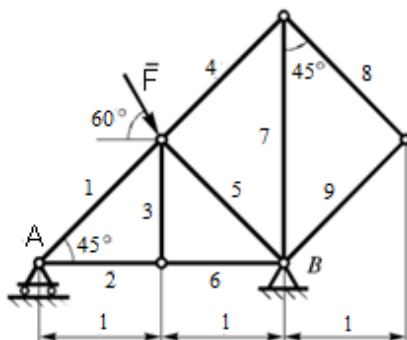
C3.70. Однородный стержень, сила тяжести которого $1,5$ кН, закреплен шарниром А и опирается на гладкую поверхность концом В. Определить реакцию шарнира А, если $\alpha = 60^\circ$.



C3.71. Однородный тяжелый стержень АВ длиной $2h$ расположен в вертикальной плоскости. Концом А он опирается на шероховатый пол, а промежуточной точкой С – на выступ высоты h . В точке А коэффициент трения f равен $0,6$. Будет ли стержень находиться в равновесии? Трением в точке С пренебречь.

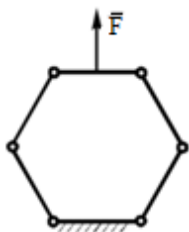
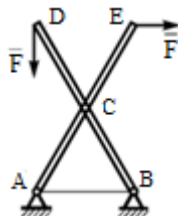
C3.72. Дано: G_1 , G_2 , ℓ , r . Определить момент заделки в точке В.





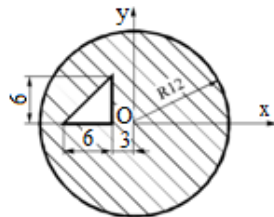
С3.73. Дано: F . Определить силу, возникающую в стержне 5 фермы, состоящей из невесомых стержней.

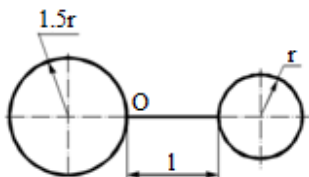
С3.74. Х-образная конструкция, закрепленная и расположенная в одной плоскости, нагружена двумя одинаковыми по модулю силами F . Стержни AE и BD соединены шарниром. $AC = CE = BC = CD = AB$. Пренебрегая весами стержней, определить реакцию шарнира A .



С3.75. Шесть одинаковых однородных стержней весом P каждый, связанных шарнирно своими концами, образуют правильный шестиугольник, расположенный в вертикальной плоскости. Нижний стержень закреплен в горизонтальном положении. Какую направленную вертикально вверх силу нужно приложить к середине верхнего горизонтального стержня, чтобы система находилась в равновесии?

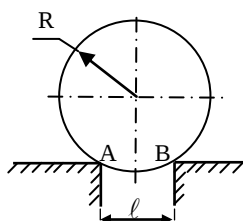
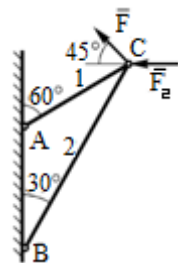
С3.76. Каковы должны быть координаты центра дополнительно вырезанного круга ($r = 4$ см), чтобы центр тяжести полученного сечения находился в точке O ?





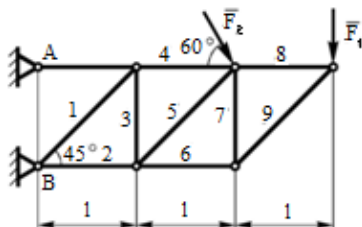
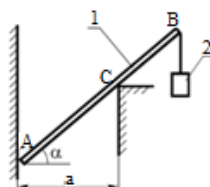
C3.77. Изображенная на рисунке фигура состоит из стержней постоянного поперечного сечения. Найти расстояние от точки O до центра тяжести фигуры.

C3.78. Дано: $F_1 = 5 \text{ Н}$, $F_2 = 30 \text{ Н}$. Стержни невесомы. Определить силу в стержне 2.



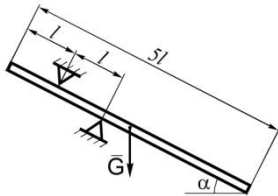
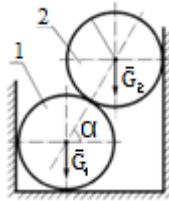
C3.79. Однородный шар весом 30 Н и радиусом $R = 20 \text{ см}$ опирается на поверхность в точках A и B. Найти реакцию в точке A, если $l = 20 \text{ см}$.

C3.80. Невесомый стержень 1 длиной l , к концу которого прикреплен груз 2 весом G , опирается в точке A на вертикальную плоскость, а в точке C – на уступ. Определить, пренебрегая трением, угол α , если известно расстояние a .



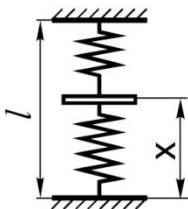
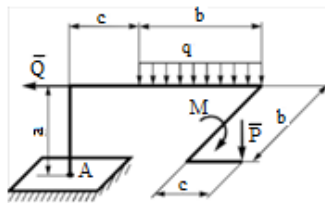
C3.81. Найти силу, действующую в стержне 5 фермы, если $F_1 = 10 \text{ кН}$, $F_2 = 20 \text{ кН}$.

С3.82. Дано: $G_1 = 15 \text{ Н}$, $G_2 = 30 \text{ Н}$, $\alpha = 60^\circ$. Определить силу давления шара 1 на стенку.



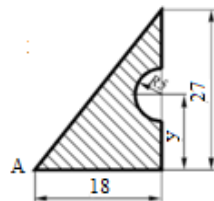
С3.83. Найти минимальное значение коэффициента трения, при котором однородный стержень будет в равновесии в изображенном положении. $\alpha = 30^\circ$

С3.84. Дано: $P = 5 \text{ Н}$, $Q = 30 \text{ Н}$, $q = 2 \text{ Н/м}$, $M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $a = 4 \text{ м}$, $b = 5 \text{ м}$, $c = 3 \text{ м}$. Найти момент заделки в точке А.

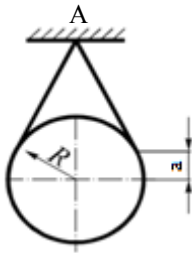


С3.85. Тонкая пластинка массой m зажата между двумя вертикальными пружинами. Длина каждой пружины в свободном состоянии равна ℓ . Под действием силы P верхняя пружина сжимается на $\Delta \ell_1$, нижняя — на $\Delta \ell_2$. Определить размер x при равновесии.

С3.86. Из прямоугольного треугольника вырезали полукруг. Определить y_2 , если центр тяжести полученной фигуры находится на расстоянии a от точки А.

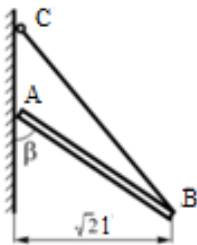
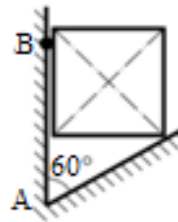


С3.87. Определить модуль равнодействующей системы сил: $\vec{F}_1 = 3\vec{i} - 2\vec{j} \text{ Н}$, $\vec{F}_2 = 6\vec{j} \text{ Н}$, $\vec{F}_3 = 5\vec{i} + 8\vec{k} \text{ Н}$.



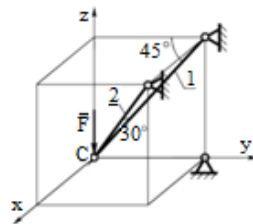
C3.88. Труба весом $G = 90 \text{ кН}$ и радиусом $R = 0,55 \text{ м}$ охвачена веревочной петлей, прикрепленной к неподвижной точке A . Найти размер a , определяющий положение точки схода веревки с цилиндра, если натяжения ветвей петли $T_1 = T_2 = 75 \text{ кН}$.

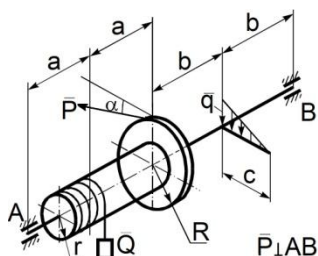
C3.89. Куб весом 200 Н удерживается в равновесии при помощи двух гладких плоскостей. Определить расстояние AB от вершины угла до точки приложения реакции вертикальной плоскости, если длина ребра куба $6\sqrt{3} \text{ см}$.



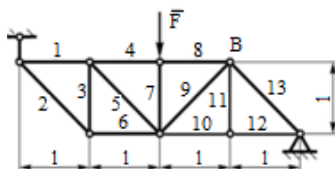
C3.90. Верхний конец однородного стержня AB массой m упирается в шероховатую вертикальную стену, а к нижнему его концу прикреплен трос BC . Определить минимальное значение угла β , при котором стержень будет находиться в равновесии, если в одном из возможных положений системы $AC = 1,5\ell$, $CB = 4\ell$, $f = 0,2$.

C3.91. Определить значение равнодействующей реакций стержней 1 и 2, действующих на узел C , если $F = 40 \text{ Н}$.



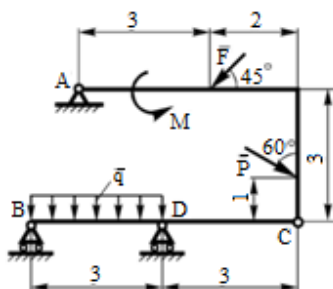
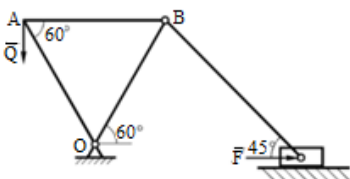


C3.92. Определить значение угла α , при котором конструкция находится в равновесии, если $Q = 0,6P$, $q = \frac{Q}{3R}$, $a = 2R = 6r$, $b = 3R$, $c = 4,5r$.



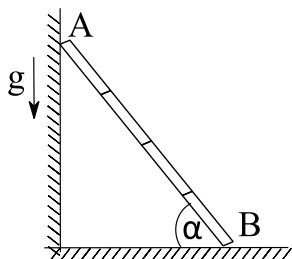
C3.93. Укажите номера стержней, которые можно заменить тросами, если на ферму действует только сила F .

C3.94. В изображенном на рисунке механизме $OA = OB = \ell$, $BC = 2\ell$. К механизму приложены две силы Q и F . Определить отношение $\frac{Q}{F}$, при котором механизм будет находиться в равновесии.



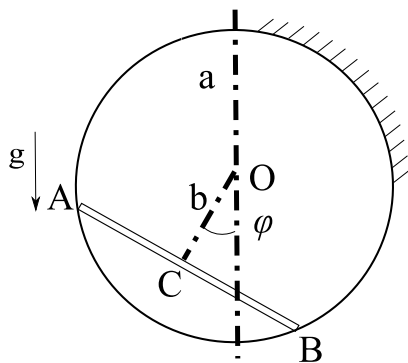
C3.95. Определить реакцию шарнира C , если $F = 10$ кН, $P = 5$ кН, $q = 4$ кН/м, $M = 20$ кН·м.

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ



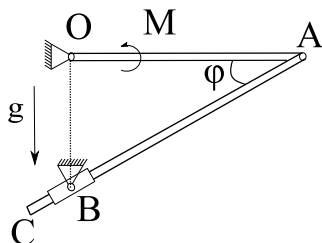
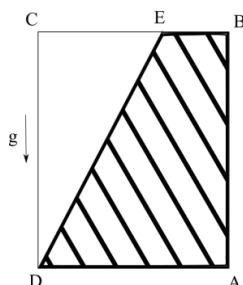
C4.1. Лестница AB весом P опирается на вертикальную гладкую стену и на горизонтальный негладкий пол. Коэффициент трения лестницы о пол равен f . Под каким углом α к полу надо поставить лестницу, чтобы по ней мог подняться доверху человек, вес которого Q ?

C4.2. Четыре человека несут однородную треугольную пластину. Двое взялись за две вершины, остальные – за стороны, примыкающие к третьей вершине. На каком расстоянии от третьей вершины они должны поместиться, чтобы каждый из четырех поддерживал четверть полного веса пластины?



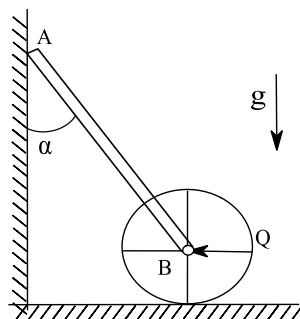
C4.3. Однородный стержень своими концами A и B может скользить по негладкой окружности радиусом a . Расстояние OS стержня до центра O окружности, расположенной в вертикальной плоскости, равно b . Коэффициент трения между стержнем и окружностью равен f . Определить для положений равновесия стержня угол φ , составляемый прямой OS с вертикальным диаметром окружности.

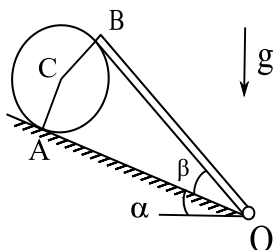
C4.4. Провести через вершину D однородного прямоугольника ABCD прямую DE так, чтобы при подвешивании трапеции ABED за вершину E сторона AD, равная a , была горизонтальна.



C4.5. Два однородных стержня OA (длиной a , весом P) и AC (длиной b , весом Q) соединены шарниром A и находятся в вертикальной плоскости. Стержень OA укреплен шарнирно, а стержень AC проходит через гладкую вращающуюся муфту B. Определить уравнивающий момент M , удерживающий стержень OA в горизонтальном положении под углом φ к стержню AC.

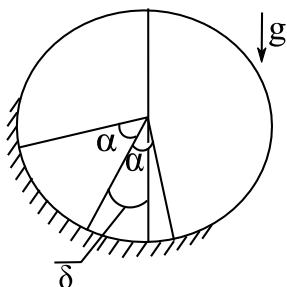
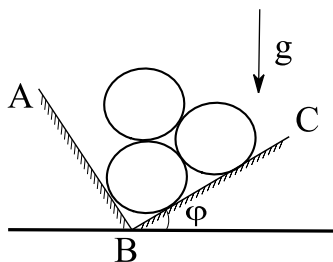
C4.6. Однородная рукоятка катка, шарнирно соединенная с его осью, опирается своим концом A на вертикальную гладкую стенку. Вес рукоятки равен P , ее длина ℓ , вес катка также равен P , его радиус r . В точке B к катку приложена горизонтальная сила $Q = 2P$. При каком угле α возможно равновесие системы, если коэффициент трения скольжения между катком и горизонтальной плоскостью равен f , а коэффициент трения качения равен k ?





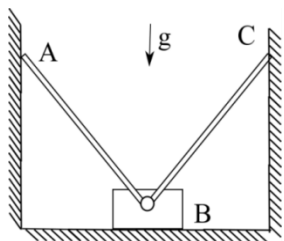
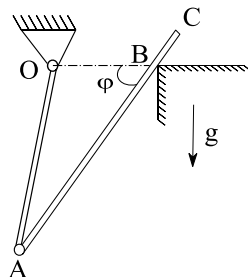
C4.7. На однородный цилиндр радиусом R и весом P опирается однородный стержень OB весом Q , закрепленный в точке O идеальным шарниром. Цилиндр установлен на гладкую плоскость, наклоненную под углом α к горизонту. Коэффициент трения цилиндра о стержень f , угол CBO – прямой, угол AOB равен β . Определить момент пары, который нужно приложить к цилиндру для обеспечения равновесия, а также соотношение между P и Q , при котором это возможно.

C4.8. Три гладких однородных одинаковых цилиндра опираются на две взаимно перпендикулярные плоскости AB и BC . При каких углах φ система сохраняет равновесие?



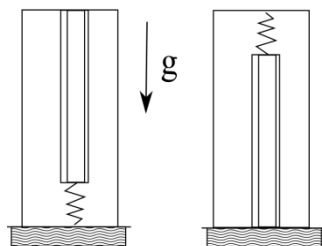
C4.9. Гибкая однородная лента расположена внутри полого шероховатого цилиндра, ось которого горизонтальна. Лента образует дугу окружности с центральным углом 2α . Каково наибольшее значение угла δ с вертикалью, при которой лента не соскальзывает, если коэффициент трения скольжения равен f ?

C4.10. Два однородных стержня OA (длиной ℓ , весом P) и AC (длиной 2ℓ и весом $2P$) соединены шарниром A . Стержень OA укреплен шарнирно, а стержень AC опирается на гладкое острие B . Определить, при каком угле φ система находится в равновесии в вертикальной плоскости, если отрезок OB горизонтальный и $OB = \ell$.

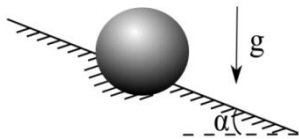


C4.11. Одинаковые однородные стержни AB и BC длиной ℓ соединены цилиндрическим шарниром, на оси которого укреплен невесомый ползун B . Стержни опираются в точках A и C на гладкие вертикальные стенки, расположенные на расстоянии a друг от друга ($a < \ell$). Ползун может скользить по шероховатому горизонтальному полу с коэффициентом трения f . При каком соотношении между a и ℓ эта система будет находиться в равновесии в любом положении ползуна на плоскости?

C4.12. Карандаш массой $0,01$ кг стоит вертикально на пружине в закрытом пенале. Когда пенал перевернули, карандаш стал давить на крышку в $1,2$ раза сильнее. С какой силой он давил на нее первоначально?

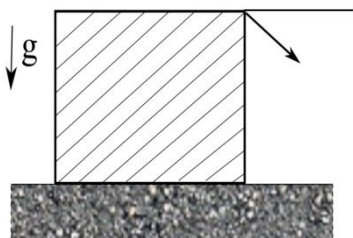
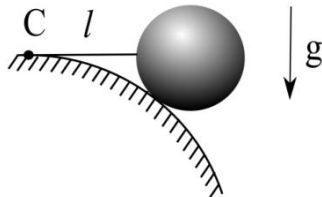


C4.13. Какой формы должно быть здание, чтобы давление вдоль вертикальной оси на любой высоте было одинаковым?



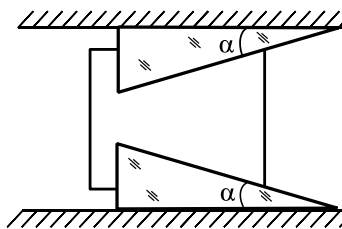
C4.14. При каком угле наклона плоскости к горизонту шарик вылетит из лунки, которая расположена в этой плоскости? Глубина лунки в 2 раза меньше радиуса шарика.

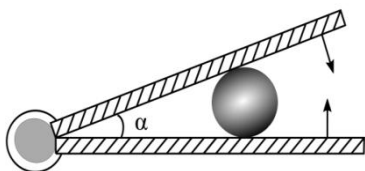
C4.15. Шарик радиусом r и массой m удерживается на неподвижном шаре радиусом R невесомой нитью длиной ℓ , закрепленной в верхней точке шара C . Других точек соприкосновения между нитью и шаром нет. Пренебрегая трением, найдите натяжение нити.



C4.16. На горизонтальной поверхности стоит куб. С какой минимальной силой и под каким углом к горизонту надо тянуть куб за верхнее ребро, чтобы он опрокинулся без проскальзывания? Коэффициент трения куба о поверхность равен f , масса куба m .

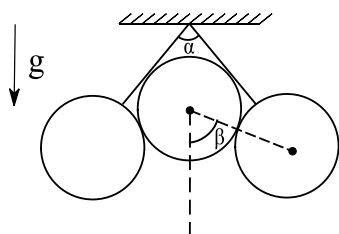
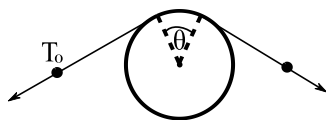
C4.17. Тело с расположенными на его сторонах клиньями установлено между двумя параллельными плоскостями так, как показано на рисунке. Найдите предельный угол α при вершине клиньев, при котором тело может двигаться вправо, но не может двигаться влево. Коэффициенты трения клиньев о плоскости и тело равны f_1 и f_2 соответственно.





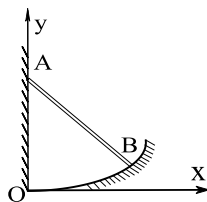
C4.18. Каким должен быть коэффициент трения между шариком и плоскостями, чтобы шарик не “выскочил” из двугранного угла α , составленного двумя плоскостями, при попытках уменьшить этот угол? Силой тяжести пренебречь.

C4.19. Веревка закручена вокруг столба на угол θ , коэффициент трения веревки о столб равен f . Какую минимальную силу нужно приложить к одному из концов веревки, чтобы уравновесить силу T_0 , приложенную к другому концу?



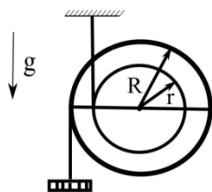
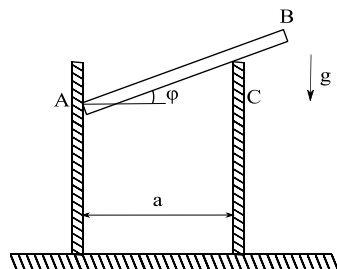
C4.20. Два одинаковых цилиндра подвешены на нерастяжимых нитях одинаковой длины. Между ними положен цилиндр того же радиуса, но вдвое большей массы. Определите угол β , если угол между нитями равен α . Трением пренебречь.

C4.21. Однородный стержень длиной ℓ опирается одним концом А на гладкую вертикальную стенку, другим В — на гладкий профиль, расположенный в вертикальной плоскости. Какова должна быть форма профиля, чтобы стержень мог оставаться в покое в любом положении?

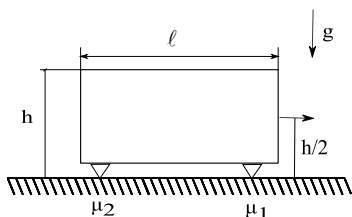


C4.22. В комнате стоит лестница, образующая угол α с полом. Коэффициент трения нижнего конца лестницы о пол f_1 , а верхнего конца о стену f_2 . При каких углах α лестница может стоять?

C4.23. На горизонтальной плоскости стоит гладкий цилиндр диаметром a и весом P . В него спускают однородную палочку AB длиной 2ℓ и весом Q , которая занимает положение равновесия под углом φ к горизонту. Найти угол φ при равновесии и указать соотношение между a и ℓ , при котором равновесие палочки возможно. Найти также наименьший вес палочки Q_0 , при котором она в состоянии опрокинуть цилиндр, и реакции в точках A и C в начальный момент опрокидывания. Толщиной палочки и стенок цилиндра пренебречь.

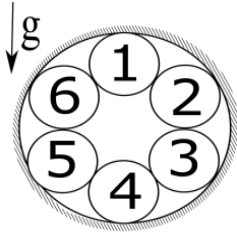
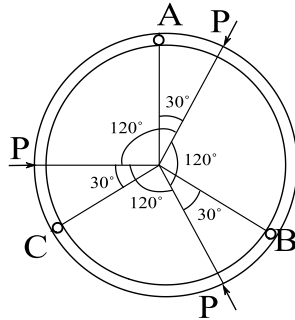


C4.24. Катушка подвешена к потолку с помощью нити, намотанной по малому радиусу r . По большому радиусу R тоже намотана нить, на конце которой подвешен груз. Какой должна быть масса груза, чтобы система находилась в равновесии? Масса катушки M .



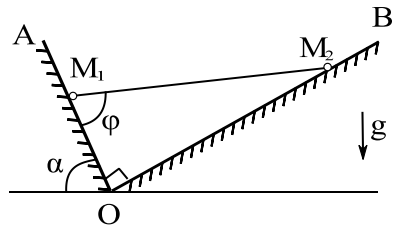
C4.25. К однородному бруску массой m , высотой h и длиной ℓ на краях жестко прикреплены опоры, размерами которых можно пренебречь. Какую горизонтальную силу необходимо приложить к бруску на высоте $h/2$, чтобы он двигался равномерно, если коэффициенты трения между опорами и горизонтальной плоскостью равны μ_1 и μ_2 ?

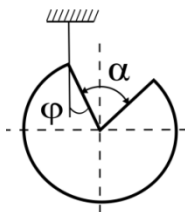
С4.26. Кольцо радиусом R состоит из трех одинаковых дуг AB , BC и CA , соединенных между собой шарнирами. К каждой из них приложены равные силы P , как указано на рисунке. Кольцо расположено в горизонтальной плоскости. Определить реакции шарниров A , B и C .



С4.27. В цилиндрическое отверстие радиусом $R = 6r$ вставлены без натяга шесть цилиндров радиусом r . Вес каждого цилиндра равен Q . Определить давление цилиндра 4 на стенку отверстия.

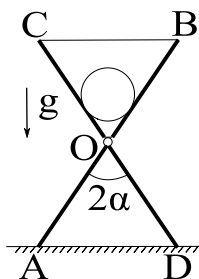
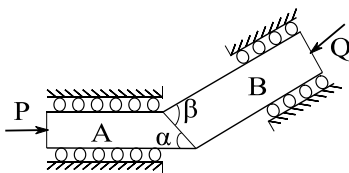
С4.28. Ролики M_1 и M_2 весами P_1 и P_2 соединены невесомым стержнем и могут кататься без трения по сторонам прямого угла AOB , составляющего угол α с горизонтом. Определить угол φ при равновесии, давление роликов на стороны угла и усилие в стержне.





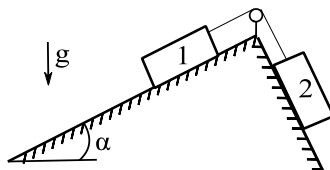
C4.29. Из круга вырезали сектор с центральным углом α и подвесили на нити, как показано на рисунке. Определить угол φ при равновесии.

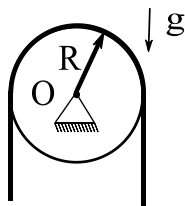
C4.30. Два клина А и В, коэффициент трения между которыми f , могут двигаться без трения в своих направляющих. К клину А приложена сила P . Какую силу Q нужно приложить к клину В, чтобы клин А двигался равномерно в сторону действия силы P ?



C4.31. Однородные стержни АВ и CD весом P и длиной 2ℓ каждый соединены шарнирно в точке О (“ножницы”), $AO = OB = OC = OD$, $\angle AOD = 2\alpha$. Диск имеет радиус R и вес Q . Пол гладкий. Определить натяжение нити BC.

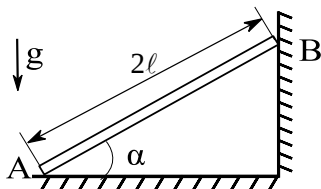
C4.32. Грузы 1 и 2 массами m_1 и m_2 соединены невесомой нитью, перекинутой через невесомый блок. Коэффициенты трения грузов с наклонными плоскостями, образующими между собой прямой угол, соответственно равны f_1 и f_2 . При каких значениях $0 < \alpha < \pi/2$ грузы будут находиться в равновесии?



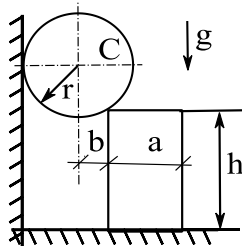


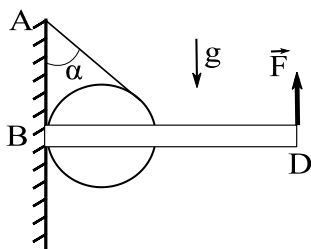
C4.33. Однородная цепь весом P и длиной $2\pi R$ перекинута через гладкий блок. Определить в случае равновесия силу натяжения цепи в ее произвольном сечении.

C4.34. Однородный стержень длиной $AB = 2\ell$ и весом P опирается на стенку и пол, составляет угол α с полом и не находится в равновесии. Коэффициент трения стержня со стенкой и с полом одинаков и равен f . Найти величину и направление минимальной силы, которую нужно приложить к центру тяжести стержня, чтобы он был в равновесии.



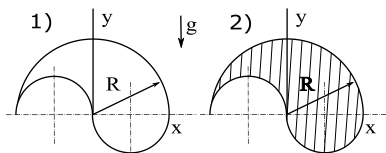
C4.35. Коэффициент трения между параллелепипедом и горизонтальной плоскостью f . Вес цилиндра P , вес параллелепипеда Q . Каким условиям должно удовлетворять расстояние b , для того чтобы система находилась в равновесии? Трением в точках контакта цилиндра со стенкой и параллелепипедом пренебречь.



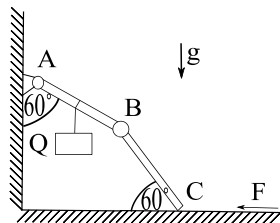


C4.36. Однородный диск радиусом R и весом P находится в вертикальной плоскости. В точке B он касается вертикальной стенки, коэффициент трения между ними $f = \sqrt{3}/15$. Невесомая нить намотана на диск и образует со стенкой угол $\alpha = 60^\circ$. К диску жестко прикреплен однородный стержень BD длиной $8R$, расположенный горизонтально. На конец стержня действует вертикальная сила $F = 2P$. При каком весе стержня обеспечивается равновесие?

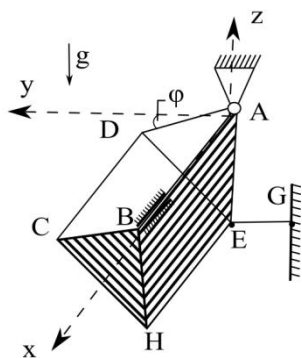
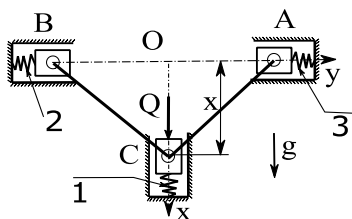
C4.37. Найти координаты центра тяжести однородной кривой линии 1) и однородной плоской фигуры 2), если радиус R задан.



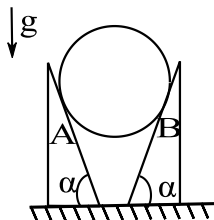
C4.38. Система состоит из двух одинаковых однородных шарнирно скрепленных стержней AB и BC весом P каждый. Стержень AB шарнирно закреплен в точке A и к его середине подвешен груз весом Q . Стержень BC опирается на горизонтальный пол. Какую горизонтальную силу F нужно приложить в точке C для равновесия системы, если $\angle OAB = \angle OCB = 60^\circ$?



С4.39. На рисунке показана упругая система, состоящая из двух жестких стержней BC и AC одинаковой длиной ℓ , которые шарнирами A, B, C соединены с ползунами. Через ползуны передаются усилия трех предварительно сжатых пружин 1, 2 и 3. Исходные данные: $c_1, c_2 = c_3$ — жесткости пружин, $F_1, F_2 = F_3$ — начальные усилия в пружинах. Определить зависимость уравнивающей силы Q от перемещения x . При каких исходных данных функция $Q(x)$ будет: а) линейной; б) постоянной? Силами тяжести и силами трения пренебречь.

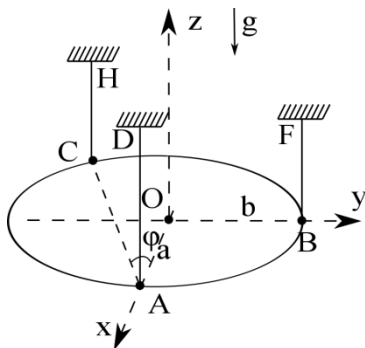


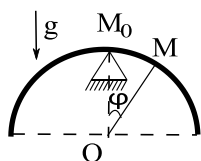
С4.40. Невесомый симметричный трехугольный короб $ABCDEH$ длиной $AB = CD = 4\ell$ со сторонами $AE = CD = \ell$ и углом $\angle AED = \pi/2$ удерживается в равновесии сферическим и цилиндрическим шарнирами в точках A и B соответственно и невесомым стержнем EG . Ребро AB горизонтально, стержень EG тоже горизонтален, $EG \perp AB$. В короб наливается максимально возможное количество жидкости плотностью ρ . Определить реакцию шарнира A , если край короба AD составляет угол $\varphi = 15^\circ$ с горизонтом.



C4.41. Две однородные треугольные призмы одинаковых размеров, сделанные из разных материалов, находятся на неподвижном основании. Призмы удерживают в равновесии невесомый полый цилиндр, в который медленно наливается вода. Веса призм A и B соответственно равны $P_1 = 1 \text{ кН}$, $P_2 = 2 \text{ кН}$. Коэффициент трения между призмой A и цилиндром, а также основанием $f_1 = 0,2$. Для призмы B соответственно $f_2 = 0,15$. Угол при основании у призм $\alpha = 60^\circ$. Определить, какая из призм начнет скольжение первой, а также силу трения между другой призмой и основанием в этот момент, если положение цилиндра таково, что призмы не опрокидываются.

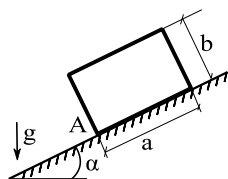
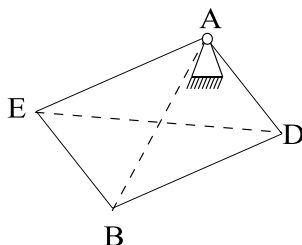
C4.42. Однородная пластина весом P в виде эллипса с полуосями a и b удерживается в горизонтальном положении тремя вертикальными нитями AD, BF, CH. Точки A, B, C лежат на пересечении эллипса соответственно с осями x , y и линией, проходящей через точку A под углом φ к оси x . Определить силы натяжения нитей, если $\operatorname{tg} \varphi = b/2a$.



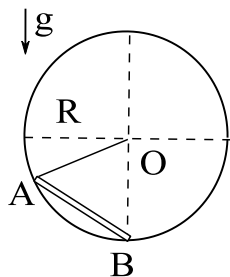


C4.43. Тонкая проволока, изогнутая в виде полуокружности, свободно висит на уголке, опираясь на него в точке M_0 . Определить: 1) при каких значениях коэффициента трения f возможно равновесие полуокружности, если точку контакта перенести в положение M , определяемом углом φ ; 2) при каком угле φ минимальное значение коэффициента трения, обеспечивающее равновесие, является наибольшим. Найти этот максимум.

C4.44. Однородный горизонтально расположенный квадрат $ADBE$ весом P с диагоналями $AB = DE = 2\ell$ прикреплен в точке A к неподвижной опоре сферическим шарниром. Квадрат находится в равновесии под действием некоторой дополнительной системы активных сил, о которой известно: 1) линия действия равнодействующей этой системы сил проходит через точку B ; 2) если к этой системе сил добавить вес квадрата, то при приведении новой системы сил к точке D ее главный момент равен $P\ell\sqrt{5}/2$. Определить реакцию шарнира A , пренебрегая толщиной квадрата.

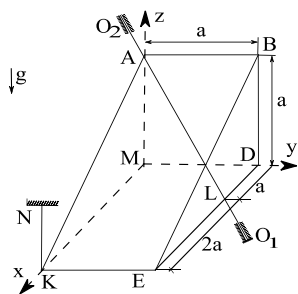


C4.45. Однородный прямоугольный параллелепипед весом P опирается на шероховатую плоскость, угол наклона α которой постепенно возрастает. При каком α равновесие нарушится?

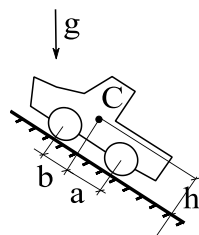


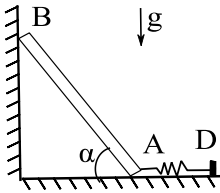
C4.46. В поперечном сечении неподвижной горизонтальной трубы радиусом R находится стержень AB длиной R . Конек стержня B опирается на поверхность трубы в нижней точке сечения, а конек A удерживается от контакта с поверхностью трубы нитью OA , длина которой немного меньше R . Определить значение минимального коэффициента трения $f_{\min}$ между трубой и стержнем, при котором возможно равновесие. Сохранится ли равновесие при $f = f_{\min}$, если точка A будет опираться на трубу, а B – удерживаться нитью от контакта с ней?

C4.47. Однородная прямая треугольная призма весом P , имеющая возможность вращаться вокруг оси O_1O_2 , удерживается в равновесии вертикальной нитью NK . Ось O_1O_2 проходит через вершину A и точку L ребра ED . Размеры указаны на рисунке. Определить силу натяжения нити NK .



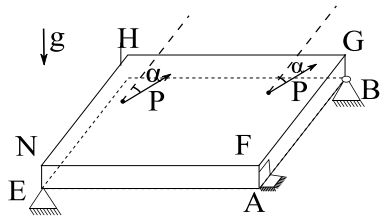
C4.48. Коэффициент трения между дорогой и колесами автомобиля равен f . Определить максимальный угол наклона дороги, при котором возможно равномерное движение автомобиля вверх по ней. Размеры указаны на рисунке, C – центр тяжести автомобиля. Рассмотреть все три случая: 1) все четыре колеса – ведущие; 2) ведущие – передние колеса; 3) ведущие – задние колеса.

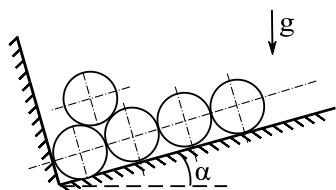




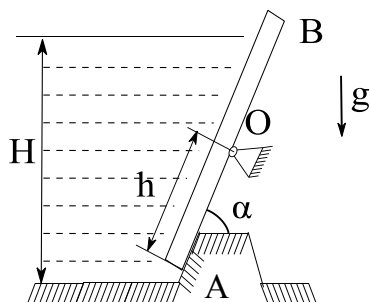
C4.49. Однородный тонкий стержень длиной $AB = \ell$ и весом P опирается в точке B на шероховатую поверхность с коэффициентом трения f , $f < 1$, а в точке A – на гладкую горизонтальную поверхность. В точке A к стержню прикреплена пружина жесткостью c , второй конец которой закреплен в точке D . Пружина не деформирована, когда стержень вертикален. Определить, при каких углах α стержень будет находиться в равновесии, если $P = 2c\ell$.

C4.50. Прямоугольная однородная плита весом Q соединена с неподвижной опорой цилиндрическим шарниром A и сферическим шарниром B . Плита удерживается в горизонтальном положении острием E , упирающимся в гладкую поверхность нижней грани плиты. К верхней грани плиты $FGHN$ приложены две параллельные силы, равные P и лежащие в плоскости этой грани. Линии действия сил образуют острый угол α со стороной NH , а центр тяжести плиты находится от них на равных расстояниях. Определить реакции опор, если $AF = AB/5 = AE/10$.



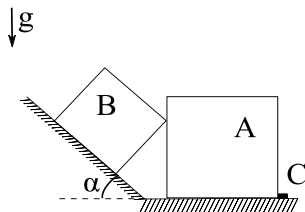


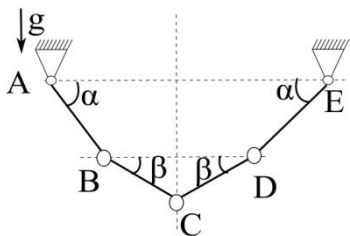
C4.51. При каком минимальном количестве одинаковых труб нижнего ряда система не раскатится? Угол α задан, трением пренебречь.



C4.52. Прямоугольный щит АВ ирригационного канала может вращаться относительно оси О. Если уровень воды не высок, щит закрыт, но когда уровень воды достигает величины H , щит поворачивается вокруг оси и открывает канал. Пренебрегая трением и весом щита, определить высоту H , считая h и α заданными.

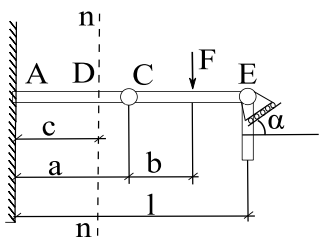
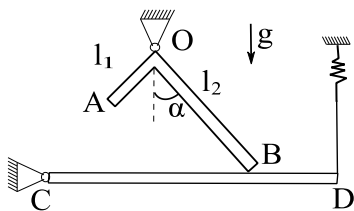
C4.53. Однородный куб А весом P_a с ребром a установлен на горизонтальной плоскости, имеющей упор в точке С. Куб В весом P_b с ребром b положен на гладкую наклонную плоскость, образующую угол α с горизонтом. Ребро куба В упирается в грань куба А. Плоскость рисунка является плоскостью симметрии кубов. Определить, при каком весе куба В произойдет опрокидывание куба А. Размерами упора пренебречь.





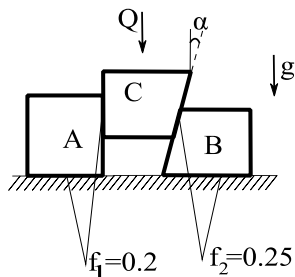
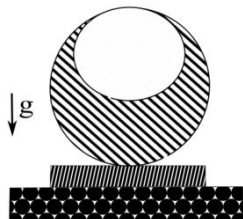
C4.54. Однородные стержни длинами $AB = DE = \ell_1$, $BC = CD = \ell_2$ соединены шарнирно и расположены в вертикальной плоскости. Точки A и E лежат на одной горизонтали. При каком соотношении между длинами ℓ_1 и ℓ_2 система стержней будет находиться в равновесии в указанном положении? Считать углы α и β заданными, а линейную плотность стержней одинаковой.

C4.55. Однородный стержень AOB весом P изогнут под прямым углом так, что $OA = \ell_1$, $OB = \ell_2$. Стержень закреплен в точке сгиба O шарнирно и опирается концом B на горизонтальный однородный стержень CD веса Q . Стержень CD шарнирно закреплен в точке C и удерживается пружиной в точке D. Найти силу натяжения пружины, если $CB = CD/3$, $\alpha = 45^\circ$. Трением пренебречь.



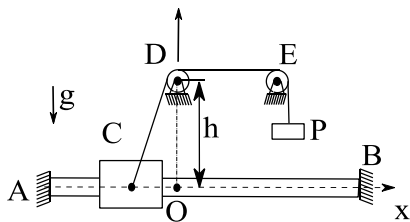
C4.56. Найти внутренние усилия в поперечном сечении $n-n$ составной балки ACE, отстоящем от конца A на расстоянии $AD = c = 1$ м, если $A = 2$ кН, $a = 2$ м, $b = 1$ м, $\alpha = 45^\circ$. Весом балки пренебречь.

C4.57. Параллельно оси цилиндра на расстоянии $R/2$ от нее просверлено отверстие радиусом $R/2$. Цилиндр лежит на дощечке, которую медленно поднимают за один конец. Найдите предельный угол наклона дощечки, при котором цилиндр еще может находиться в равновесии. Коэффициент трения между цилиндром и дощечкой равен f .

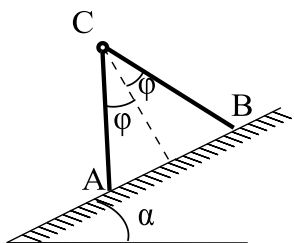
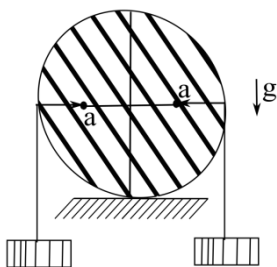


C4.58. Клин C вставлен между двумя телами A и B , которые лежат на шероховатой горизонтальной плоскости. Одна сторона клина вертикальна, другая образует с вертикалью угол $\alpha = \arctg(1/3)$. Вес тела A равен 400 Н , а вес тела B – 300 Н . Коэффициенты трения между поверхностями указаны на рисунке. Найти величину силы Q , под действием которой одно из тел сдвинется, а также значение силы трения F , действующей при этом со стороны горизонтальной плоскости на оставшееся неподвижным тело.

C4.59. Груз C весом $Q = 100\text{ Н}$ может скользить по шероховатому горизонтальным направляющим AB . К грузу прикреплен трос, несущий груз $P = 45\text{ Н}$. Определить границы участков, где равновесие невозможно, если коэффициент трения скольжения $f = 0,5$. Расстояние от центра блока D до оси направляющих $h = 15\text{ см}$. Размерами блока D и груза Q пренебречь.

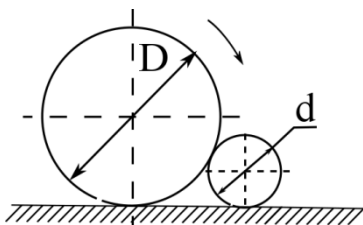


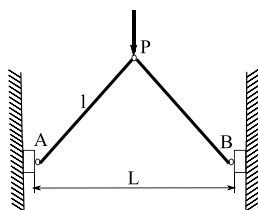
С4.60. Цилиндр радиусом R , лежащий на подставке, разрезан пополам по вертикальной плоскости, проходящей через его ось. Масса каждой половины цилиндра m , их центры масс находятся на расстоянии a от оси цилиндра. Чтобы цилиндр не распался, через него перекинута нить с одинаковыми грузами на концах. Найдите минимальную массу грузов, при которой возможно равновесие. Трением пренебречь.



С4.61. Лестница состоит из двух одинаковых однородных частей AC и BC , соединенных шарниром. Вес каждой части равен P . Лестница стоит на шероховатой наклонной плоскости с коэффициентом трения f и углом наклона α . Определить наибольший угол φ при равновесии лестницы.

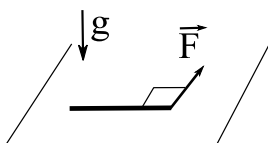
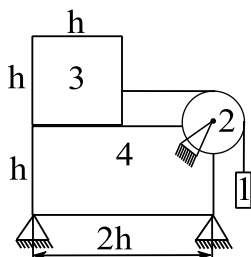
С4.62. Принцип действия измельчительного устройства, называемого бегуном, основан на том, что кусок материала, попадая под цилиндрический каток (бегун), захватывается силами трения и дробится. Определить наибольший диаметр d захватываемого куска, пренебрегая его весом, если известны диаметр бегуна D и коэффициент трения f .





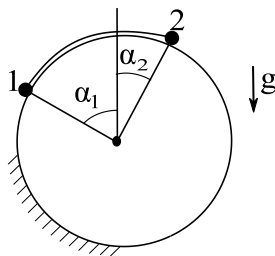
C4.63. Каким должно быть соотношение ℓ/L у механизма, показанного на рисунке, чтобы при коэффициенте трения $f = 0,5$ между ползунами А, В и стенками механизма был самотормозящимся? Весом стержней и ползунков пренебречь.

C4.64. Дано: система четырех тел; блок 2 радиусом $r = h/2$ может вращаться без трения вокруг оси, закрепленной в углу тела 4; квадрат 3 может скользить по прямоугольнику 4 с коэффициентом трения $f = 0,2\ell$; веса тел 1, 2, 3, 4 равны соответственно 100, 0, 500, 1000 Н. Найти реакции гладких опор, расположенных в нижних углах тела 4, если система покоится.

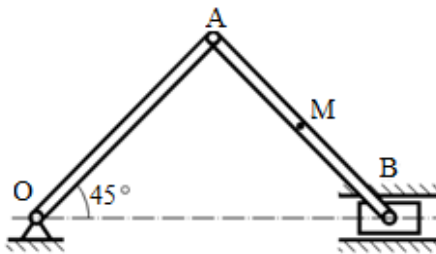
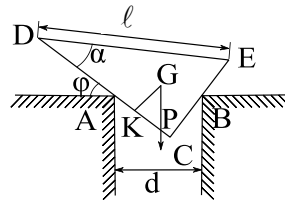


C4.65. Однородный тонкий брусок массой m лежит на горизонтальной плоскости. Какой горизонтальной силой, приложенной к концу бруска по перпендикуляру к нему, его можно стронуть с места, если коэффициент трения между бруском и плоскостью равен f ?

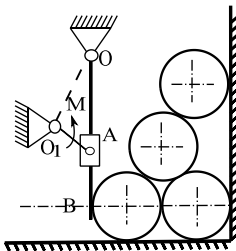
C4.66. Два шарика, соединенные нерастяжимой нитью, располагаются на гладкой поверхности цилиндра, в плоскости, перпендикулярной его оси. Ось цилиндра горизонтальна, система находится в покое. Радиус цилиндра 10 см, длина нити 20 см, вес шарика 2 вдвое больше веса шарика 1. Определить углы α_1 и α_2 .



C4.67. Прямоугольный клин данных размеров и весом P вложен прямым углом между краями A и B двух гладких столов одинаковой высоты, находящимися друг от друга на расстоянии d , равном $1/3$ гипотенузы ℓ клина. Один из острых углов клина равен α . Найти значение угла φ в положении равновесия и давления клина N_a и N_b на точки опоры.

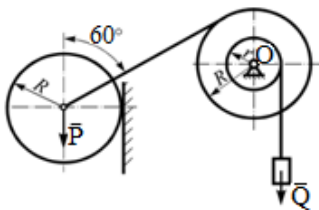
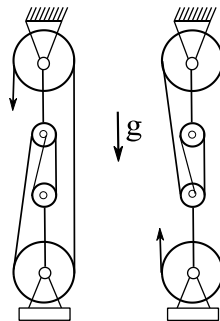


C4.68. Кривошипно-шатунный механизм, в котором длины кривошипа OA и шатуна AB одинаковы, расположен в вертикальной плоскости. Точка M делит отрезок AB пополам. Силы тяжести кривошипа, шатуна и ползуна одинаковы и равны G . Пренебрегая трением, определить, какую минимальную силу надо приложить к точке M , чтобы механизм оставался в равновесии в изображенном на рисунке положении.



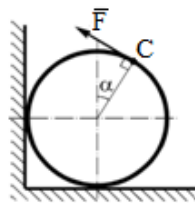
C4.69. Найти минимальный момент M , который нужно приложить к рычагу O_1A длиной r , чтобы система труб, изображенных на рисунке, была в равновесии. Трубы одинаковые, их радиус r ; трением пренебречь; $\angle AO_1O = \pi/2$, $\angle AOO_1 = \pi/6$, $OB = 2r\sqrt{3}$.

С4.70. Какой полиспаст – левый или правый – и во сколько раз требует меньших усилий для равномерного подъема одного и того же груза? Трением, массой блоков и троса пренебречь. Считать все части тросов вертикальными.

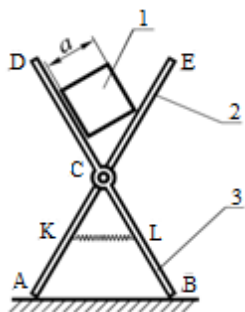


С4.71. На блок, радиусы ступеней которого R и r , намотаны две нити. Одна из них прикреплена к цилиндру, сила тяжести которого P , другая – к грузу весом Q . Определить, при каких значениях силы Q система будет находиться в равновесии, если коэффициент трения сцепления цилиндра со стеной равен f , а коэффициент трения качения δ .

С4.72. Цилиндр весом G и радиусом R лежит на шероховатой горизонтальной плоскости и соприкасается с шероховатой вертикальной стенкой. При каких значениях силы F , приложенной к точке C цилиндра, он будет находиться в равновесии, если коэффициенты трения сцепления цилиндра с плоскостью и стенкой одинаковы и равны f ?

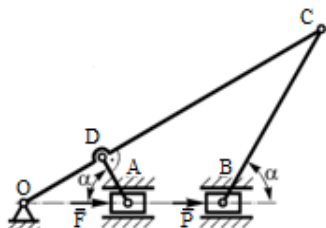


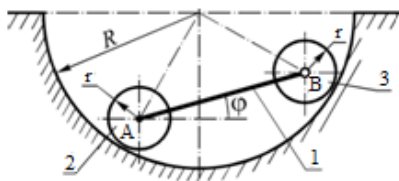
С4.73. На крыше дома с углом наклона φ лежит свинцовый лист. Температура воздуха в течение суток повышается, достигая наивысшего значения t_2 , а потом понижается до минимальной температуры t_1 , при которой длина листа равна ℓ . Найдите точки листа, неподвижные при нагревании; при остывании. На какое расстояние сползет лист за N суток устойчивой погоды? Коэффициент трения листа о крышу $f > \tan \varphi$. Температурный коэффициент линейного расширения свинца α .



C4.74. Куб 1 весом G_1 , имеющий длину ребра a , положен на соединенные шарниром C однородные стержни 2 и 3, как это показано на рисунке. Стержни, вес каждого из которых G_2 , установлены на гладкий горизонтальный пол. $AC = CE = BC = CD = AB = 1$. Система удерживается в равновесии с помощью пружины KL , соединяющей середины отрезков AC и BC . Определить силу натяжения пружины.

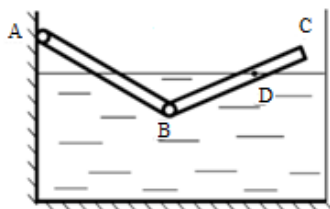
C4.75. Механизм инверсора расположен в горизонтальной плоскости. Ползуны A и B могут перемещаться вдоль оси, проходящей через точку O . Доказать, что в изображенном на рисунке положении ($AD \perp OC$; углы, которые стержни AD и BC составляют с осью OB , одинаковы) механизм будет находиться в равновесии при соблюдении условия $\frac{P}{F} = \frac{OA}{OB}$.

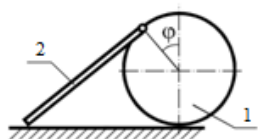




C4.76. Однородный стержень 1 жестко соединен с диском 2 и скреплен шарниром В с диском 3. Радиусы дисков одинаковы и равны r , а их массы пренебрежимо малы. Диски опираются на шероховатую поверхность, имеющую форму полукруга радиусом $R = 5r$. Коэффициент трения сцепления между дисками и опорной поверхностью f . Коэффициент трения качения между диском 3 и той же поверхностью δ . Длина стержня $AB = 4r\sqrt{2}$. Найти наибольшее значение угла φ между стержнем 1 и горизонталью, при котором стержень будет находиться в равновесии.

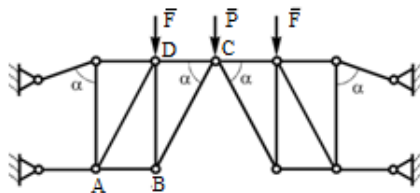
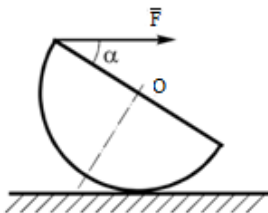
C4.77. Два соединенных между собой с помощью шарнира одинаковых однородных стержня длиной ℓ шарнирно прикрепили к точке А стенки сосуда, заполненного жидкостью. При этом в положении равновесия стержень АВ оказался погруженным в жидкость ровно до середины. Определить длину участка CD стержня СВ, находящуюся над поверхностью жидкости при равновесии системы.





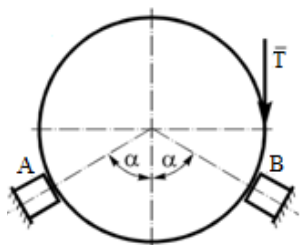
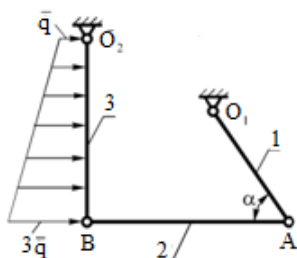
C4.78. Однородный диск массой m_1 и радиусом R шарнирно соединен с однородным стержнем массой m_2 и длиной ℓ . Определить минимальное значение коэффициента трения сцепления между телами и поверхностью, при котором система будет находиться в равновесии в положении, определяемом углом φ .

C4.79. Изображенный на схеме полуцилиндр опирается на шероховатую поверхность и нагружен некоторой горизонтальной силой F . Коэффициент трения между полуцилиндром и плоскостью равен f . Плотность цилиндра изменяется по линейному закону в зависимости от расстояния от рассматриваемой точки полуцилиндра до центра O . Плотность материала у криволинейной поверхности в 2 раза больше плотности в точке O . Определить максимальное значение угла α при равновесии системы.



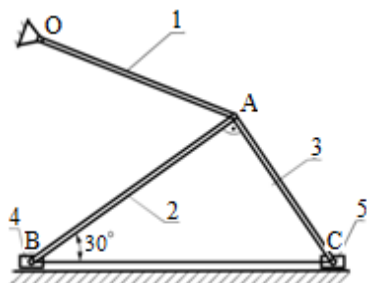
C4.80. В изображенной на рисунке стержневой конструкции все стержни невесомые. Найти, при каком соотношении между силами F и P внутренние силы в стержнях AB и CD будут отличаться в 5 раз. $\alpha = 60^\circ$.

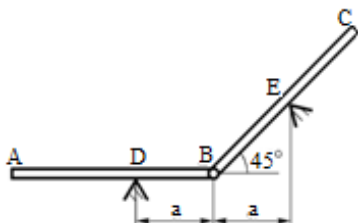
С4.81. В стержневой системе, расположенной в вертикальной плоскости, однородные стержни 1, 2 и 3 имеют длины ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 и силы тяжести G_1, G_2, G_3 соответственно. В положении равновесия стержень АВ горизонтален, O_2B вертикален и угол между стержнями O_1A и АВ равен α . Определить значение q интенсивности распределенной нагрузки, изменяющейся по линейному закону, при котором обеспечивается заданное положение равновесия системы.



С4.82. Однородный цилиндр весом G лежит на двух симметрично расположенных относительно вертикали опорах А и В, положение которых определяется углами α . Коэффициент трения между цилиндром и опорами равен f . Найти минимальное значение силы T , которую необходимо приложить, чтобы вывести цилиндр из равновесия.

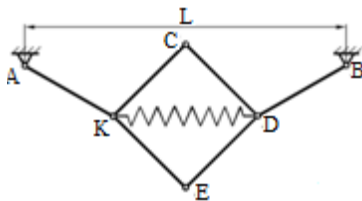
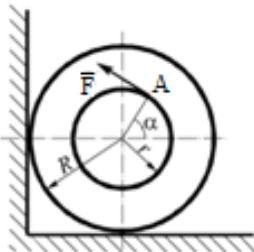
С4.83. Конструкция, расположенная в вертикальной плоскости, состоит из трех однородных стержней 1, 2 и 3 одинаковой массы, соединенных шарнирно в точке А, и невесомых ползунов 4 и 5, связанных нерастяжимой нитью. Определить отношение наибольшей из трех сил, действующих со стороны стержней на шарнир А, к наименьшей аналогичной силе.





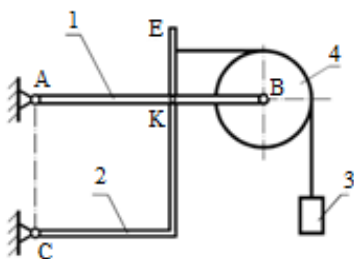
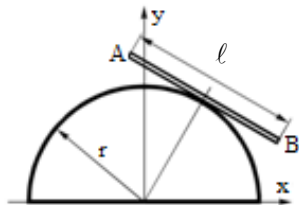
C4.84. Два однородных стержня АВ и ВС, имеющих одинаковые массы, соединены шарниром в точке В и положены на два шероховатых острия D и E. Определить, при каких значениях длин стержней возможно равновесие в изображенном на рисунке положении, если коэффициент трения между стержнями и опорами равен f , а также известен размер a .

C4.85. Ступенчатый блок весом G и радиусами R и r лежит на гладкой горизонтальной плоскости и соприкасается с шероховатой вертикальной стенкой. Коэффициент трения сцепления блока со стенкой равен f . При каких значениях силы F , приложенной по касательной к окружности в точке А, положение которой определяется углом α , блок будет находиться в равновесии?



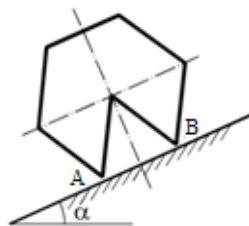
C4.86. Система связанных шарнирами одинаковых однородных стержней длиной ℓ и массой m расположена в вертикальной плоскости. В положении равновесия стержни KC, CD, DE и EK образуют квадрат. Определить силу упругости пружины KD, если $L = \ell(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

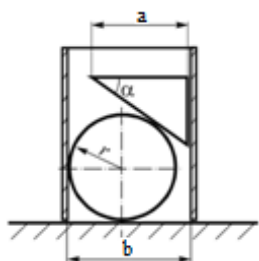
С4.87. Однородный тонкий стержень АВ длиной ℓ опирается на полуцилиндр радиусом r . Коэффициент трения сцепления между стержнем и полуцилиндром равен f , коэффициент трения качения δ . Найти максимально возможное значение координаты x крайней точки В стержня при его равновесии.



С4.88. Изображенная на рисунке конструкция состоит из невесомых стержней 1 и 2, соединенных в точке К с помощью шарнира. Груз 3 связан со стержнем 2 с помощью невесомой нити, переброшенной через блок 4. Силы тяжести груза 3 и блока 4 одинаковы. Радиус блока 4 равен r , $KB = 2r$, $AK = 3r$. Определить, при каком расстоянии АС реакции в точках А и С будут отличаться в 2 раза.

С4.89. На наклонной плоскости расположена призма, в основании которой находится правильный шестиугольник с вырезом в форме равностороннего треугольника. Коэффициент трения в точке А равен f , а в точке В — $3f$. Определить, при каких значениях угла α наклона плоскости изображенное тело будет находиться в равновесии.





С4.90. На горизонтальной поверхности стоит однородный короб весом P и шириной b , симметричный относительно вертикальной плоскости. В нем размещены однородные тела: цилиндр радиусом r и призма, для которой известны длина ребра a ($a < b$) и угол α . Определить, при каких значениях силы тяжести призмы система будет оставаться в равновесии. Силами трения пренебречь.

Учебное издание

Юдин Владимир Алексеевич
Лежнев Евгений Васильевич

**ЗАДАЧИ ДЛЯ УГЛУБЛЕННОГО ИЗУЧЕНИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ**

СТАТИКА

Учебное пособие

Темплан 2018 г.

Редактор Г.К. Найденова

Новосибирский государственный
архитектурно-строительный университет (Сибстрин)
630008, Новосибирск, ул. Ленинградская, 113
