



В.А. ЮДИН

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

НОВОСИБИРСК 2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(СИБСТРИН)

В.А. Юдин

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Учебное пособие

НОВОСИБИРСК 2017

УДК 531
ББК 22.21
Ю 163

Юдин, В. А.

Дополнительные лекции по теоретической механике : учеб. пособие / В. А. Юдин ; Новосиб. гос. архитектур.-строит. ун-т (Сибстрин). – Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2017. – 80 с.

ISBN 978-5-7795-0824-7

Учебное пособие включает три дополнительные лекции к курсу теоретической механики, посвященные рассмотрению теории удара, устойчивости движения и равновесия и теории подобия и размерностей.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство» и специальности 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений» всех форм обучения.

Рецензенты:

- С.М. Аульченко, д-р физ.-мат. наук,
вед. науч. сотрудник ИТПМ СО РАН;
- В.В. Леманов, канд. техн. наук, доцент
НГАСУ (Сибстрин)

ISBN 978-5-7795-0824-7 © Юдин В.А., 2017
© Новосибирский государственный
архитектурно-строительный
университет (Сибстрин), 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
----------------	---

Лекция 1. ТЕОРИЯ УДАРА

1.1. Явление удара	8
1.2. Основное уравнение удара	9
1.3. Основное допущение теории удара и его следствия.....	10
1.4. Общие теоремы динамики при ударе	11
1.5. Коэффициент восстановления при ударе	14
1.6. Удар поступательно движущегося тела о гладкую неподвижную преграду.....	16
1.7. Прямой центральный удар двух поступательно движущихся тел	18
1.8. Удар по вращающемуся телу.....	23
1.9. Несколько слов о взрыве.....	27
Вопросы для самоконтроля.....	32
Упражнения	33

Лекция 2. УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ И РАВНОВЕСИЯ

Перед лекцией	34
2.1. Введение в теорию устойчивости	36
2.2. Основные определения и понятия	37
2.3. Уравнения возмущенного движения	41
2.4. Исследование устойчивости по первому приближению.....	43
2.5. Устойчивость равновесия консервативных систем.....	46
Вопросы для самоконтроля.....	53
Упражнения	54

Лекция 3. ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ И РАЗМЕРНОСТЕЙ

Введение	56
3.1. Размерные и безразмерные величины	62
3.2. Первичные и вторичные величины.....	63
3.3. Размерность, формула размерности.....	64
3.4. Безразмерные комплексы.....	66
3.5. Метод нулевых размерностей. <i>П</i> -теорема.....	68
3.6. Подобие систем.....	74
3.7. Основы физического моделирования	76
Вопросы для самоконтроля.....	79
Упражнения	80

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие имеет цель познакомить студентов с дополнительными главами курса теоретической механики и включает в себя теорию удара, теорию устойчивости движения и равновесия и теорию подобия и размерностей.

Материал изложен в виде ознакомительных лекций по указанным темам. Автор намеренно написал их максимально приближенными к аудитории в надежде вызвать отклик и живую реакцию. Учебное пособие написано на основе лекций, читаемых автором уже много лет в Новосибирском государственном архитектурно-строительном университете (Сибстрин).

Автор выражает благодарность всем сотрудникам кафедры теоретической механики, которые принимали активное участие в работе над данным пособием.

Курс теоретической механики, читаемый в технических вузах, традиционно делится на три раздела: статику, кинематику и динамику. Как нам уже хорошо известно, в статике изучаются частные случаи движения тел – покой или равномерное прямолинейное движение. В динамике рассматривается произвольное движение тел, происходящее под воздействием сил при их взаимодействии. Кинематика же является в основном вспомогательным разделом и изучает движение тел с чисто геометрической точки зрения. Основным разделом, конечно же, является динамика, изучение которой требует знания и статики (принципа освобожденности от связей, учения о сложении и разложении сил и т.д.), и кинематики (понятие траектории, скорости, ускорения и кинематических связей между скоростями и ускорениями отдельных точек тел).

До сих пор при изучении движения тел мы предполагали непрерывное изменение скоростей его точек от времени. Однако при изучении ударных явлений, при которых за очень маленький промежуток времени (время удара) его скорости изменяются на конечную величину, целесообразно перейти к разрывным функциям скоростей точек тела, считая при-

ближенно время удара равным нулю. На этом предположении и строится приближенная теория удара. Ну а так как время удара полагается равным нулю, то производные по времени (за время удара) теряют смысл, и все законы динамики (второй закон Ньютона для точек и общие теоремы динамики для механических систем) нужно преобразовать к интегральной форме. В этом и состоит содержание первой лекции предлагаемого пособия.

Что касается второй лекции – устойчивости движения и равновесия, – то она связана напрямую со следующим принципиальным вопросом. Достаточно ли выполнения уравнений равновесия (для статики) или движения (для динамики), чтобы на практике такое равновесие или движение действительно реализовалось? Ответ, как Вы, читатель, можете догадаться, отрицательный! Достаточно привести несколько контрпримеров:

1. Можно поставить карандаш в вертикальное положение на горизонтальной площадке, но долго он так стоять не будет – любое малое колебание воздуха и он упадет на площадку.

2. Если колебания груза на пружинке происходят в вакууме (пренебрегаем сопротивлением среды), то амплитуда колебаний будет оставаться постоянной. Но в случае учета сопротивления среды, пусть даже очень маленького, амплитуда со временем будем убывать, и за большой промежуток времени груз практически остановится.

То есть на практике, помимо выполнения уравнений равновесия или движения, необходимо еще обеспечить *устойчивость* этого равновесия или движения. Ну а так как инженер имеет дело преимущественно с практикой, то есть с равновесием или движением реальных объектов при реальных условиях их эксплуатации, то тема устойчивости равновесия или движения тел является для него весьма актуальной.

Тема третьей лекции – теория подобия и размерности – также важна для инженера. И связана она, в основном, со следующими тремя вопросами:

1. Изучение различных технических устройств часто проводят на моделях, то есть строят модель устройства (самолета, моста и т.д.), изучают ее поведение, а затем полученные результаты переносят на само устройство. Здесь возникают следующие вопросы: как правильно построить модель, что именно изучать на модели, как переносить результаты на само устройство?

2. Поведение сложных технических устройств зависит от большого количества физических величин. На самом же деле влияние отдельных величин проявляется не порознь, а совместно. И по сути дела, рассматривать нужно некоторые совокупности отдельных физических величин, определенные для каждого изучаемого процесса.

3. Пусть мы уже изучили поведение данного конкретного объекта. Можем ли мы теперь результаты такого изучения перенести на другие объекты?

На все эти три вопроса и отвечает теория подобия и размерности, основы которой приводятся в третьей лекции.

Лекция 1. ТЕОРИЯ УДАРА

1.1. Явление удара

До сих пор мы рассматривали силы, под действием которых скорости точек тел изменялись непрерывно, то есть за малый промежуток времени τ скорости получали малое приращение. Это непосредственно следует из теоремы об изменении количества движения точки:

$$m_k(\mathbf{v}_k(t + \tau) - \mathbf{v}_k(t)) = \mathbf{S}_k = \int_t^{t+\tau} \mathbf{F}_k(t_1) dt_1 = \mathbf{F}_k^{cp} \tau, \\ k=1, \dots, N, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{F}_k^{cp}$ – среднее значение силы $\mathbf{F}_k$ за промежуток времени τ . Для обычных сил (ограниченных по модулю со временем) равенство (1.1) обеспечивает непрерывное изменение скорости со временем, $\mathbf{v}_k(t + \tau) \rightarrow \mathbf{v}_k(t)$ при $\tau \rightarrow 0$.

Однако если среди сил, действующих на механическую систему, будут силы, которые действуют малый промежуток времени τ , но являются очень большими по модулю, такими, что $\mathbf{F}_k^{cp} \approx 1/\tau$, то приращение скорости за малый промежуток времени окажется конечным. Такие силы называют *ударными*, а явление, при котором за ничтожно малый промежуток времени скорости изменяются на конечную величину, – *ударом*.

Например, если мяч падает на горизонтальный пол, имея в начале соприкосновения с полом скорость $\mathbf{v}_1$, и отскакивает от пола со скоростью $\mathbf{v}_2$, то изменение скорости $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ представляет конечную величину. При этом весь процесс удара происходит за ничтожно малое время τ . Примерами ударных явлений являются также удар кия о бильярдный шар, удар бабы копра о сваю, удар молотка по гвоздю и ряд других случаев.

1.2. Основное уравнение удара

Итак, особенности явления, называемого ударом, заключаются в том, что в течение очень короткого времени действуют громадные (ударные) силы. Хотя по существу эти силы не отличаются от всех других (обычных) сил, рассматриваемых нами ранее, малость времени действия заставляет применять в случае удара особые приемы исследования. В частности, вместо уравнения Ньютона движения точки $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ при рассмотрении удара удобнее пользоваться законом изменения количества движения точки (1.1), которое мы для краткости перепишем в виде

$$m(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{S}, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{v}_k(t)$ – скорость точки в начале удара; $\mathbf{u} = \mathbf{v}_k(t + \tau)$ – скорость точки в конце удара; $\mathbf{S} = \mathbf{S}_k$ – импульс сил, действующих на точку за время удара.

Уравнение (1.2) называют *основным уравнением удара*. Заметим, что в основное уравнение удара входит лишь импульс сил $\mathbf{S}$, действующих на точку (суммарный толчок сил) за время удара. То есть конечное изменение скорости за время удара полностью определяется значением интеграла

$$\int_t^{t+\tau} \mathbf{F}_k(t_1) dt_1 \text{ и не зависит от закона изменения силы}$$

$\mathbf{F}_k(t_1), t_1 \in (t, t + \tau)$ во время удара (который мы, как правило, и не знаем!). Графически это означает, что, например, изменение проекции скорости на ось x за время удара полностью определяется площадью S_x заштрихованной фигуры на рис. 1.1 и не зависит от вида кривой $F_x = F_x(t_1), t_1 \in (t, t + \tau)$.

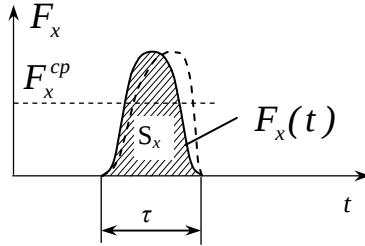


Рис. 1.1

1.3. Основное допущение теории удара и его следствия

Так как удар длится очень малое время τ , то в теории удара *пренебрегают величинами, имеющими порядок τ* . В этом состоит основное допущение теории удара – *удар происходит мгновенно*. Следствиями этого допущения являются следующие:

1. *За время удара перемещения точек можно пренебречь*. Действительно, для любого $t_1 \in (t, t + \tau)$, согласно теореме об изменении количества движения точки,

$$\mathbf{v}_k(t_1) = \mathbf{v}_k(t) + \left(\int_t^{t_1} \mathbf{F}_k(t) dt \right) / m_k. \quad (1.3)$$

Интегрируя теперь равенство (1.3) в пределах от t до $t + \tau$, получим:

$$\mathbf{r}_k(t + \tau) - \mathbf{r}_k(t) = (\mathbf{v}(t) + \mathbf{S}_k^{cp} / m_k) \tau, \quad (1.4)$$

где $\mathbf{r}_k(t + \tau)$, $\mathbf{r}_k(t)$ – радиус-векторы точки в начале и в конце удара; $\mathbf{S}_k^{cp}$ – среднее значение импульса $\mathbf{S}_k$ в промежутке $(t, t + \tau)$. Так как правая часть равенства (1.4) имеет порядок τ , то, согласно основному допущению теории удара, ею можно пренебречь и положить $\mathbf{r}_k(t + \tau) = \mathbf{r}_k(t)$.

2. *Обычные (не ударные) силы можно не учитывать*. Действительно, если на точку действует наряду с ударной силой $\mathbf{F}$, имеющей импульс $\mathbf{S}$, еще обычная сила $\mathbf{Q}$, то их

общий импульс S_1 за время удара будет равен

$$S_1 = \int_t^{t+\tau} (F + Q) dt = S + Q^{cp} \tau. \text{ Так как второе слагаемое име-}$$

ет порядок τ , то им можно пренебречь и положить $S_1 = S$.

Итак, при рассмотрении удара перемещением точек и неударными силами пренебрегают. Что же касается ударных сил, то при решении практических задач требуется знание их ударных импульсов (в случае решения обратной задачи динамики) или, наоборот, определение этих импульсов (при решении прямой задачи динамики).

1.4. Общие теоремы динамики при ударе

Разберем теперь вопрос о том, какой вид приобретут общие теоремы динамики в случае удара. Заметим, что есть смысл говорить только об интегральных формах этих теорем. В дифференциальной форме теоремы не применимы, так как в них входят производные по времени, а в силу основного допущения теории удара мы временем удара пренебрегаем.

1.4.1. Теоремы об изменении количества движения и о движении центра масс. Воспользуемся интегральной формой теоремы об изменении количества движения механической системы для моментов времени t_1 и t_2 , соответствующих началу и концу удара:

$$Q_2 - Q_1 = \sum_k S_k^e. \quad (1.5)$$

В уравнении (1.4) в правой части стоит сумма импульсов ударных сил, действующих на систему. В проекциях на оси координат уравнение (1.4) запишется в виде:

$$\begin{aligned} Q_{2x} - Q_{1x} &= \sum_k S_{kx}, Q_{2y} - Q_{1y} = \sum_k S_{ky}; \\ Q_{2z} - Q_{1z} &= \sum_k S_{kz}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Так же как и при рассмотрении непрерывных движений, при ударе остаются справедливыми законы сохранения:

1. Если главный вектор импульсов всех внешних ударных сил равен нулю: $\mathbf{S}^e = \sum_k \mathbf{S}_k^e = 0$, – то количество движения системы за время удара не изменится: $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_1$. В частности, это означает, что внутренние ударные силы изменить количество движения системы за время удара не могут.

2. Если проекция главного вектора импульсов внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю (например, $S_x^e = \sum_k S_{kx}^e = 0$), то за время удара сохраняется проекция количества движения системы на эту ось ($Q_{2x} = Q_{1x}$).

Для определения движения центра масс учтем соотношение $\mathbf{Q} = M\mathbf{v}_c$, в котором M – масса системы; $\mathbf{v}_c$ – скорость ее центра масс. Тогда из (1.5) будет следовать равенство

$$M(\mathbf{u}_c - \mathbf{v}_c) = \sum_k \mathbf{S}_k, \quad (1.7)$$

в котором $\mathbf{v}_c$ и $\mathbf{u}_c$ – скорости центра масс до и после удара соответственно. Заметим, что это равенство мы могли бы получить и непосредственно из теоремы о движении центра масс интегрированием за время удара.

Таким образом, центр масс системы за время удара остается неподвижным, а его скорость меняется согласно равенству (1.7).

1.4.2. Теорема об изменении момента количества движения. Эту теорему применительно к удару мы получим из соотношения

$$\frac{d\mathbf{K}_0}{dt} = \sum_k \mathbf{M}_0(\mathbf{F}_k^e) = \sum_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^e,$$

проинтегрировав его по времени от t до $t + \tau$. Тогда

$$\mathbf{K}_{20} - \mathbf{K}_{10} = \sum_k \int_t^{t+\tau} \mathbf{r}_k(t) \times \mathbf{F}_k^e(t) dt.$$

Пренебрегая в этом равенстве перемещениями точек за время удара, получим:

$$\mathbf{K}_{20} - \mathbf{K}_{10} = \sum_k \mathbf{r}_k(t) \times \int_t^{t+\tau} \mathbf{F}_k^e(t) dt.$$

Откуда, окончательно,

$$\mathbf{K}_{20} - \mathbf{K}_{10} = \sum_k \mathbf{M}_0(\mathbf{S}_k^e). \quad (1.8)$$

Изменение за время удара главного момента количества движения системы равно главному моменту импульсов всех ударных сил.

В проекциях на оси координат равенство (1.8) дает соотношения

$$\begin{aligned} K_{2x} - K_{1x} &= \sum_k M_x(\mathbf{S}_k^e); \quad K_{2y} - K_{1y} = \sum_k M_y(\mathbf{S}_k^e); \\ K_{2z} - K_{1z} &= \sum_k M_z(\mathbf{S}_k^e). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Так же как и при рассмотрении непрерывных движений, теорема моментов остается справедливой и относительно центра масс C механической системы (в системе координат с началом в точке C , движущейся поступательно относительно исходной системы $Oxyz$)

$$\mathbf{K}_{2C} - \mathbf{K}_{1C} = \sum_k \mathbf{M}_C(\mathbf{S}_k^e). \quad (1.10)$$

1.4.3. Теорема об изменении кинетической энергии. Теорема Кельвина. Прямое применение теоремы об изменении кинетической энергии затруднено, так как перемещением точек за время удара мы пренебрегаем, и тогда непонятно, как считать работу внешних и внутренних сил. Так как ударные силы представляются их импульсами, то, очевидно, нужно выразить работу сил через их импульсы. Для этого умножим основное уравнение удара (1.2) скалярно на $\mathbf{u}$ и на $\mathbf{v}$:

$$m_k u_k^2 - m_k \mathbf{v}_k \mathbf{u}_k = \mathbf{S}_k \cdot \mathbf{u}_k;$$

$$m_k \mathbf{v}_k \mathbf{u}_k - m_k v_k^2 = \mathbf{S}_k \cdot \mathbf{v}_k.$$

Сложим полученные равенства, разделив их на два:

$$m_k u_k^2 / 2 - m_k v_k^2 / 2 = \mathbf{S}_k \cdot (\mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k) / 2.$$

Складывая теперь эти равенства по всем точкам механической системы, получим:

$$T_2 - T_1 = \sum_k \mathbf{S}_k \cdot (\mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k) / 2. \quad (1.11)$$

Равенство (1.11) выражает теорему об изменении кинетической энергии за время удара. Работа ударных сил, действующих на систему за время удара, определится при этом как

$$A = \sum_k \mathbf{S}_k \cdot (\mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k) / 2. \quad (1.12)$$

Мы получили *теорему Кельвина: работа сил, приложенных к механической системе за время удара, равна сумме скалярных произведений импульсов ударных сил на полусумму начальных и конечных скоростей точек их приложения.*

Отметим, что в равенствах (1.11) и (1.12) участвуют ударные импульсы как внешних, так и внутренних ударных сил.

1.5. Коэффициент восстановления при ударе

Как показывает опыт, гипотеза об абсолютной твердости тел является недостаточной для объяснения процесса удара и необходимо учитывать еще физические свойства тел. Сам процесс удара можно разбить на две фазы. В течение первой фазы происходит сближение тел по линии их общей нормали (рис. 1.2). Тела при этом деформируются до тех пор, пока нормальная составляющая относительной скорости тел в точке контакта не станет равной нулю. Во время этой фазы начальная кинетическая энергия тел переходит в потенциальную энергию сил упругости деформированных тел. Затем происходит вторая фаза удара – под действием сил упругости тела, восстанавливая свою форму, начинают удаляться друг от друга. Однако из-за остаточных деформаций и нагревания тел их кинетическая энергия полностью не восстанавливается. Поэтому нормальная составляющая относительной скорости тел в точке контакта, сменив знак и возрастая по абсолютной величине, не достигает, как правило, к концу удара своего первоначального значения в его начале.

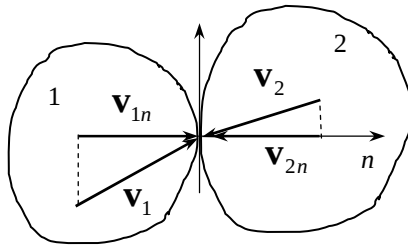


Рис. 1.2

Полное исследование процесса удара требует подробного рассмотрения физических свойств тел, что выходит за рамки теоретической механики. Однако, как показывает опыт, в первом приближении можно принять *гипотезу Ньютона*: *модуль отношения нормальной составляющей относительной скорости тел в точке контакта после удара к ее величине до удара есть некоторая физическая постоянная*

$$k = |(u_{2n} - u_{1n}) / (v_{2n} - v_{1n})|, \quad (1.13)$$

где u_{1n} , u_{2n} и v_{1n} , v_{2n} — нормальные составляющие скоростей точки контакта тел 1 и 2 после удара и до удара соответственно.

Постоянную k называют *коэффициентом восстановления*. Он полностью определяется свойствами соударяющихся тел и не зависит от их массы и относительной скорости. Такое допущение оказывается достаточно хорошим, если при ударе происходит лишь местная деформация тел вблизи точки контакта (соударение бильярдных шаров, удар мяча о твердую преграду, удар бабы копра о сваю).

Значение коэффициента восстановления k можно определить с помощью простого опыта (рис. 1.3). Шарик (тело 2) из испытываемого материала бросают с высоты h_1 без начальной скорости на массивную плиту (тело 1) из другого испытываемого материала и измеряют высоту h_2 , на кото-

рую он поднимется после удара. Применяя к движениям шарика на участках падения M_0M_1 и подъема M_1M_2 теорему об изменении кинетической энергии, можно определить его скорости v и u в начале и в конце удара: $v = \sqrt{2gh_1}$; $u = \sqrt{2gh_2}$. Учитывая далее, что $v_{1n} = u_{1n} = 0$, $v_{2n} = v$, $u_{2n} = u$, получим из (1.13), что $k = u/v = \sqrt{h_2/h_1}$. Например, при соударении стекла со стеклом $k = 15/16$, стали со сталью $k = 5/9$. В общем случае k меняется в интервале $0 \leq k \leq 1$. В предельном случае $k = 0$ удар называется *неупругим* (шарик не отпрыгивает от преграды после удара, $h_2 = 0$, $u = 0$, и удар заканчивается первой фазой). В другом предельном случае $k = 1$ удар называется *абсолютно упругим* (шарик подпрыгивает на ту же высоту, $h_2 = h_1$, $u = v$, и во второй фазе удара происходит полное восстановление его формы).

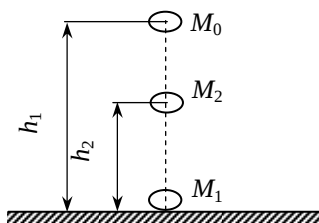


Рис. 1.3

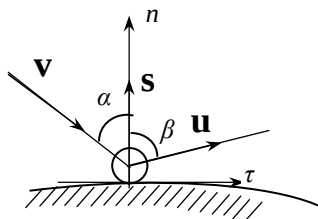


Рис. 1.4

1.6. Удар поступательно движущегося тела о гладкую неподвижную преграду

Рассмотрим тело массой m , движущееся поступательно и ударяющееся о неподвижную гладкую поверхность (рис. 1.4). Если скорость $\mathbf{v}$ тела в начале удара направлена по нормали к поверхности ($\alpha = 0$), то удар называется *прямым*, в противном случае ($\alpha \neq 0$) – *косым*. Определим скорость $\mathbf{u}$,

с которой тело отскакивает от поверхности, и угол отражения β , составленный скоростью $\mathbf{u}$ и нормалью к поверхности, считая еще известным коэффициент восстановления k .

Действующей на тело ударной силой будет реакция поверхности. Импульс ее назовем $\mathbf{S}$. Для гладкой поверхности $\mathbf{S}$ будет направлена по нормали к ней. Уравнение (1.7) в проекциях на оси n и τ запишутся в нашем случае в виде

$$mu_n - mv_n = S; \quad mu_\tau - mv_\tau = 0.$$

Коэффициент восстановления, согласно формуле (1.13), будет равен $k = |u_n / v_n|$, или, с учетом знака, $k = -u_n / v_n$.

В полученных соотношениях мы воспользовались тем, что для поступательного движения скорости всех точек тела равны, поэтому скорость центра масс (соотношение (1.7)) и скорость точки касания тела (соотношение (1.13)) равны между собой. Из этих соотношений следует, что $u_\tau = v_\tau$, $u_n = -kv_n$, $S = m|v_n|(1+k)$. Замечая теперь, что $v_\tau = |v_n|\operatorname{tg}\alpha$, $u_\tau = |u_n|\operatorname{tg}\beta$, без труда находим искомые величины:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\beta &= \operatorname{tg}\alpha / k; \quad u = v\sqrt{\sin^2\alpha + k^2 \cos^2\alpha}; \\ S &= m(1+k)v\cos\alpha. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Следовательно, при косом не вполне упругом ($k < 1$) ударе угол отражения всегда больше угла падения. Модуль скорости отражения при этом меньше модуля скорости падения. Для абсолютно упругого ($k = 1$) удара угол отражения равен углу падения, а модуль скорости отражения равен модулю скорости падения. Для неупругого удара ($k = 0$) угол отражения $\beta = 90^\circ$, то есть тело будет скользить по гладкой наклонной поверхности для косо́го удара или оставаться в покое для прямого.

Заметим еще, что ударный импульс $\mathbf{S}$, возникающий при ударе, определяется не только модулем и направлением скорости падающего тела, но зависит также и от коэффициента восстановления k между телом и преградой. Для абсо-

лотно упругого удара ($k = 1$) импульс S в два раза больше, чем для неупругого ($k = 0$).

1.7. Прямой центральный удар двух поступательно движущихся тел

Для двух тел удар называется прямым и центральным, если общая нормаль к поверхностям тел в точке касания проходит через их центры масс, а скорости центров масс в начале и в конце удара направлены по этой общей нормали. В частном случае двух однородных шаров (рис. 1.5) удар будет прямым и центральным, если их центры до удара двигались вдоль одной и той же прямой (лобовой удар двух шаров).

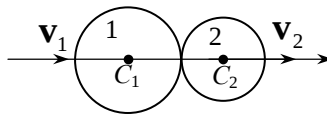


Рис. 1.5

Пусть m_1, m_2 – массы тел; $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ – их скорости до удара, а $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ – после удара. Проведем ось x через их центры масс C_1 и C_2 и направим ее в сторону второго тела. Тогда, чтобы удар произошел, должно быть $v_{1x} > v_{2x}$ (иначе первое тело не догонит второе). Кроме того, должно выполняться неравенство $u_{1x} \leq u_{2x}$ (так как ударившее тело не может опередить ударяемое). С учетом этих соотношений коэффициент восстановления k запишется в виде:

$$k = |(u_{1x} - u_{2x}) / (v_{1x} - v_{2x})| = -(u_{1x} - u_{2x}) / (v_{1x} - v_{2x}). \quad (1.15)$$

Второе соотношение, связывающее скорости тел до и после удара, получим из теоремы об изменении количества движения для системы двух тел в проекции на ось (1.5). Так

как внешних ударных сил нет, то это уравнение запишется в виде:

$$m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x} = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}. \quad (1.16)$$

Из соотношений (1.15) и (1.16) получим:

$$\begin{aligned} u_{1x} &= v_{1x} - (1+k)m_2(v_{1x} - v_{2x})/(m_1 + m_2); \\ u_{2x} &= v_{2x} + (1+k)m_1(v_{1x} - v_{2x})/(m_1 + m_2). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Равенства (1.17) определяют скорости тел после удара при известных скоростях тел до удара и заданном коэффициенте восстановления k .

Величину ударного импульса, возникающего при соударении тел, найдем из теоремы об изменении количества движения применительно к одному из тел, например, к первому:

$$S_{1x} = m_1(u_{1x} - v_{1x}); \quad S_{2x} = -S_{1x}. \quad (1.18)$$

При составлении уравнений (1.15)–(1.18) мы, так же как и в п. 1.6, воспользовались тем, что при поступательном движении тел скорости всех его точек одинаковы.

Рассмотрим оба предельных случая.

1. Неупругий удар ($k=0$). В этом случае соотношения (1.17), (1.18) дают

$$\begin{aligned} u_{1x} &= u_{2x} = (m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x})/(m_1 + m_2); \\ S_{1x} &= m_1 m_2 (v_{1x} - v_{2x})/(m_1 + m_2). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Видим, что оба тела после удара движутся с одинаковой скоростью (слипшиеся тела).

2. Абсолютно упругий удар ($k=1$). Для этого случая получаем:

$$\begin{aligned} u_{1x} &= v_{1x} - 2m_2(v_{1x} - v_{2x})/(m_1 + m_2); \\ u_{2x} &= v_{2x} + 2m_1(v_{1x} - v_{2x})/(m_1 + m_2); \\ S_{1x} &= 2m_1 m_2 (v_{1x} - v_{2x})/(m_1 + m_2). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Как видим, при абсолютно упругом ударе ударный импульс вдвое больше, чем при абсолютно неупругом. В частном случае тел равной массы $m_1 = m_2$ соотношения (1.20) дают $u_{1x} = v_{2x}$, $u_{2x} = v_{1x}$, то есть два тела просто обмениваются своими скоростями. Это мы наблюдаем при игре в биль-

ярд – при лобовом ударе неподвижный шар приобретает скорость набегающего на него шара, а последний при этом останавливается на месте первого.

1.7.1. Потеря кинетической энергии при ударе. Теорема Карно. Посчитаем теперь изменение кинетической энергии тел за время удара. Так как тела движутся поступательно, то сумма их кинетических энергий до удара и после равны соответственно

$$T_1 = (m_1 v_{1x}^2 + m_2 v_{2x}^2) / 2; \quad T_2 = (m_1 u_{1x}^2 + m_2 u_{2x}^2) / 2.$$

С помощью соотношений (1.17) нетрудно получить¹ следующую формулу для изменения кинетической энергии:

$$T_2 - T_1 = -(1 - k^2) m_1 m_2 (v_{1x} - v_{2x})^2 / (2(m_1 + m_2)). \quad (1.21)$$

Формула (1.21) показывает, что при ударе двух тел происходит потеря кинетической энергии (если $k < 1$, $T_2 < T_1$). Связана эта потеря с остаточными деформациями и нагреванием тел при ударе. В предельном случае абсолютно упругого удара ($k=1$) остаточных деформаций и нагревания не происходит и, согласно (1.21), кинетическая энергия системы

¹ Вывод формулы (1.21):

$$\begin{aligned} T_2 - T_1 &= (m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2) / 2 - (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) / 2 = \\ &= m_1 (u_{1x}^2 - v_{1x}^2) / 2 + m_2 (u_{2x}^2 - v_{2x}^2) / 2 = \\ &= m_1 (u_{1x} - v_{1x})(u_{1x} + v_{1x}) / 2 + m_2 (u_{2x} - v_{2x})(u_{2x} + v_{2x}) / 2. \end{aligned}$$

Используя соотношения (1.17), получаем:

$$\begin{aligned} T_2 - T_1 &= (m_1 (u_{1x} + v_{1x})(1 + k) m_2 (v_{2x} - v_{1x}) / (m_1 + m_2)) / 2 - \\ &- (m_2 (u_{2x} + v_{2x})(1 + k) m_1 (v_{2x} - v_{1x}) / (m_1 + m_2)) / 2 = \\ &= m_1 m_2 (1 + k) (v_{2x} - v_{1x})(u_{1x} + v_{1x} - u_{2x} - v_{2x}) / (2(m_1 + m_2)). \end{aligned}$$

Так как, согласно равенству (1.15), $u_{1x} - u_{2x} = -k(v_{1x} - v_{2x})$, то получаем:

$$\begin{aligned} T_2 - T_1 &= -m_1 m_2 (1 + k) (v_{2x} - v_{1x})(1 - k)(v_{2x} - v_{1x}) / (2(m_1 + m_2)) = \\ &= -m_1 m_2 (1 - k^2) (v_{2x} - v_{1x})^2 / (2(m_1 + m_2)). \end{aligned}$$

тел сохраняется за время удара ($T_2 = T_1$). Наибольшая потеря кинетической энергии происходит при неупругом ударе ($k = 0$). Вместо формулы (1.21) для неупругого удара обычно используют формулу²

$$T_1 - T_2 = m_1(v_{1x} - u_{1x})/2 + m_2(v_{2x} - u_{2x})/2. \quad (1.22)$$

Разности $v_{1x} - u_{1x}$ и $v_{2x} - u_{2x}$ показывают, насколько уменьшилась скорость каждого из тел за время удара. Их поэтому можно назвать *потерянными скоростями*. Разность $T_1 - T_2$ определяет тогда потерянную кинетическую энергию за время удара. Поэтому формула (1.22) выражает следующую *теорему Карно: кинетическая энергия, потерянная системой тел при неупругом ударе, равна той кинетической энергии, которую имела бы система, если бы ее тела двигались с потерянными скоростями*.

Теорема Карно имеет многочисленные применения – например, в гидравлике для расчета ударов струй о лопатки, ковши, колеса и т.д. Потеря кинетической энергии здесь происходит, в основном, за счет нагревания тел. Рассмотрим теперь частный случай абсолютно неупругого удара по первоначально неподвижному телу. В этом случае

$$\begin{aligned} v_{2x} &= 0; \quad T_1 = m_1 v_{1x}^2 / 2; \\ T_2 &= (m_1 + m_2) u_x^2 / 2 = m_1^2 v_{1x}^2 / (2(m_1 + m_2)) = \\ &= (m_1 / (m_1 + m_2)) m_1 v_{1x}^2 / 2, \end{aligned}$$

² Вывод формулы (1.22). Заметим, что $T_1 - T_2 = T_1 - 2T_2 + T_1$. При неупругом ударе, согласно (1.19), $u_{1x} = u_{2x} = u_x = (m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}) / (m_1 + m_2)$, следовательно, $2T_2 = m_1 u_{1x}^2 + m_2 u_{2x}^2 = (m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}) u_x$. Поэтому

$$\begin{aligned} T_1 - T_2 &= (m_1 v_{1x}^2 + m_2 v_{2x}^2 - 2m_1 v_{1x} u_x - 2m_2 v_{2x} u_x + m_1 u_x^2 + m_2 u_x^2) / 2 = \\ &= m_1 (v_{1x}^2 - 2v_{1x} u_x + u_x^2) / 2 + m_2 (v_{2x}^2 - 2v_{2x} u_x + u_x^2) / 2 = \\ &= m_1 (v_{1x} - u_{1x})^2 / 2 + m_2 (v_{2x} - u_{2x})^2 / 2. \end{aligned}$$

или

$$T_2 = (m_1 / (m_1 + m_2)) T_1. \quad (1.23)$$

Формула (1.23) показывает, какая часть энергии остается у системы после удара.

Рассмотрим два интересных предельных случая.

1. Масса ударяющего тела много больше массы ударяемого ($m_1 \gg m_2$). В этом случае $m_1 / (m_1 + m_2) \approx 1$, и (1.23) дает $T_2 \approx T_1$. То есть, хотя удар и неупругий, но потери кинетической энергии на деформацию и нагревание тел практически не происходит. На практике к такому результату нужно, очевидно, стремиться при забивании гвоздей, свай и т.п. Желательно, чтобы масса молотка или бабы копра была намного больше массы гвоздя или сваи (рис. 1.6а).

2. Масса ударяемого тела много больше массы ударяющего ($m_2 \gg m_1$). В этом случае $m_1 / (m_1 + m_2) \approx 0$, и формула (1.23) дает $T_2 \approx 0$. При таком ударе почти вся кинетическая энергия расходуется на деформацию и нагревание соударяющихся тел, а тела после удара можно считать неподвижными. К такому результату нужно стремиться, очевидно, при ковке, клепке и т.п. В этих случаях желательно, чтобы масса поковки вместе с наковальней (или масса заклепки вместе с поддержкой) была как можно больше массы молотка (рис. 1.6б).

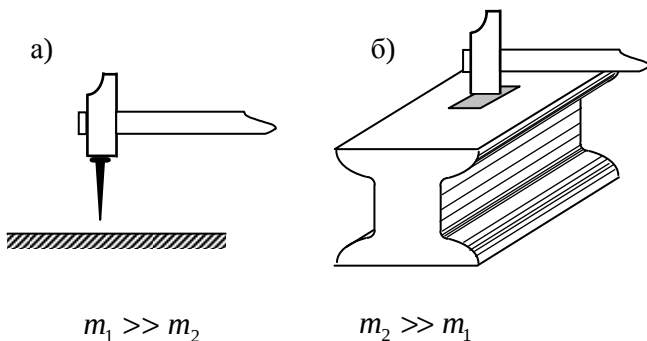


Рис. 1.6

В заключение этого пункта отметим, что предположение о поступательном характере движения тел существенно облегчило рассмотрение наших примеров. В случае произвольного удара двух тел в пространстве приходится рассматривать систему из 13 уравнений (!). Эти уравнения получаются применением к каждому из тел теорем об изменении количества движения и об изменении момента количества движения в проекциях на оси x , y , z (это 12 уравнений) и гипотезы Ньютона о коэффициенте восстановления. Эта же задача для произвольного плоского соударения двух тел потребует, как легко видеть, решения системы из 7 уравнений.

1.8. Удар по вращающемуся телу

Рассмотрим тело, имеющее ось вращения z (рис. 1.7). Пусть к нему приложен ударный импульс $\mathbf{S}$. Тогда, применяя к этому телу теорему об изменении момента количества движения в проекции на эту ось (1.9), получим:

$$J_z \omega_2 - J_z \omega_1 = M_z(\mathbf{S}) + M_z(\mathbf{S}_A) + M_z(\mathbf{S}_B). \quad (1.24)$$

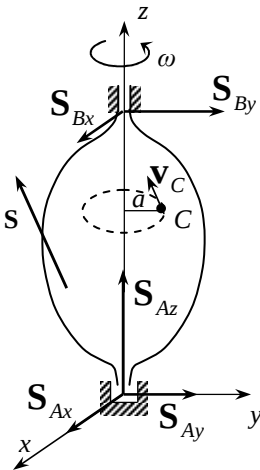


Рис. 1.7

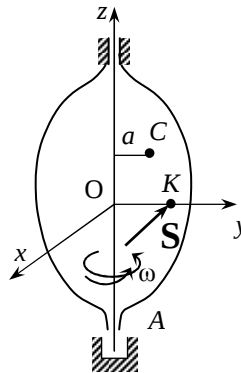


Рис. 1.8

Учитывая, что импульсы ударных реакций подпятника A и подшипника B момента относительно оси z не создают, получим из (1.24), что

$$\omega_2 = \omega_1 + M_z(\mathbf{S}) / J_z. \quad (1.25)$$

Угловая скорость тела за время удара изменяется на величину, равную отношению момента ударного импульса к моменту инерции относительно оси вращения.

Найдем теперь величины импульсов ударных реакций опор A : $\mathbf{S}_A = (S_{Ax}, S_{Ay}, S_{Az})$ – и B : $\mathbf{S}_B = (S_{Bx}, S_{By}, S_{Bz})$. Оси системы $Axyz$ проведем так, чтобы центр масс C тела лежал в плоскости yz . Пусть еще $AB = b$, а расстояние от центра масс до оси z равно a . Пять уравнений для определения пяти неизвестных $S_{Ax}, S_{Ay}, S_{Az}, S_{Bx}, S_{By}$ получим исходя из теоремы (1.7) о движении центра масс в проекциях на оси x, y, z и теоремы об изменении момента количества движения тела (1.8) в проекциях на оси x и y (на ось z мы уже использовали при получении (1.25)). Поскольку за время удара тело не перемещается, то векторы $\mathbf{v}_C$ и $\mathbf{u}_C$, входящие в уравнения (1.7), будут параллельны оси x , и следовательно, $u_{Cx} = v_{Cx} = u_{Cy} = v_{Cy} = u_{Cz} = v_{Cz} = 0$. При составлении же уравнений (1.8) воспользуемся формулами для моментов количества движения относительно осей x, y . В итоге получим:

$$\begin{aligned} -ma(\omega_2 - \omega_1) &= S_{Ax} + S_{Bx} + S_x; \\ 0 &= S_{Ay} + S_{By} + S_y; \\ 0 &= S_{Az} + S_z; \\ -J_{xz}(\omega_2 - \omega_1) &= S_{By}b + m_x(\mathbf{S}); \\ -J_{yz}(\omega_2 - \omega_1) &= S_{Bx}b + m_z(\mathbf{S}). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Здесь J_{xz}, J_{yz} – центробежные моменты инерции тела.

Система уравнений (1.25) и (1.26) позволяет, таким образом, при заданной угловой скорости тела до удара и заданном импульсе ударных сил определить как угловую скорость тела

после удара, так и величины импульсов ударных реакций его опор.

Появление ударных реакций, то есть очень больших по величине сил во время удара, является, как правило, нежелательным, так как приводит к износу и даже поломке частей конструкции (подшипников, вала и т.д.). Соответственно, актуальным является вопрос о том, можно ли избежать появления ударных реакций в опорах конструкций. Применительно к рассматриваемой нами задаче вопрос сводится к тому, можно ли произвести удар по телу, закрепленному на оси, так, чтобы все составляющие импульсов ударных реакций равнялись нулю: $S_{Ax} = S_{Ay} = S_{Az} = S_{Bx} = S_{By} = 0$.

Система уравнений (1.23) принимает в этом случае вид:

$$S_x = -ma(\omega_2 - \omega_1); \quad S_y = S_z = 0;$$

$$m_x(\mathbf{S}) = -J_{xz}(\omega_2 - \omega_1); \quad m_z(\mathbf{S}) = -J_{yz}(\omega_2 - \omega_1). \quad (1.27)$$

Во-первых, заметим, что из уравнений (1.27) следует, что (*) *$\mathbf{S}$ должен быть перпендикулярным плоскости, проходящей через ось вращения z и центр масс C .*

Так как система (1.27) не зависит от выбора на оси z начала координат, то для упрощения дальнейшего исследования перейдем в систему координат $Oxyz$ такую, чтобы импульс $\mathbf{S}$ лежал уже в плоскости Oxy (рис. 1.8). Тогда $m_x(\mathbf{S}) = m_y(\mathbf{S}) = 0$ и последние два уравнения (1.24) дадут $J_{xz} = J_{yz} = 0$. Это означает, что (**) *плоскость Oxy , в которой лежит импульс $\mathbf{S}$, должна проходить через такую точку O , для которой ось z является главной осью инерции тела.* Это условие выполнится, например, если плоскость Oxy будет являться для тела плоскостью симметрии.

И наконец, из первого и последнего уравнений (1.27), с учетом того, что $m_z(\mathbf{S}) = -S_x h$, $h = OK$ (рис. 1.8), следует равенство

$$h = J_z / ma. \quad (1.28)$$

То есть (***) ударный импульс должен быть приложен на расстоянии $h = J_z / ma$ от оси вращения (по ту же сторону, где находится центр масс).

Точку K , через которую проходит ударный импульс, не вызывающий ударных реакций опор, называют *центром удара*.

Мы установили, что условия (*), (**), (***) являются необходимыми условиями существования центра удара. Легко видеть, что они являются также и достаточными. То есть их выполнение влечет за собой равенство нулю импульсов ударных реакций: $S_{Ax} = S_{Ay} = S_{Az} = S_{Bx} = S_{By} = 0$. Действительно, все уравнения (1.27) в этом случае выполняются, а из их выполнения непосредственно следует равенство нулю всех импульсов ударных реакций в точках A и B .

Заметим, что центра удара у вращающегося тела может и не быть (как его может не быть в случае произвольного движения тела!). Например, если ось вращения тела проходит через его центр масс, то в силу (1.28) $h = \infty$, и любой удар по телу будет передаваться на ось.

Приведем несколько поучительных примеров, связанных с центром удара.

При работе с ручным молотом его нужно брать за рукоятку в таком месте, чтобы точка, которой производится удар, была относительно руки центром удара, иначе руку будет «обжигать».

При ударе палкой, опять же, чтобы не «обжечь» руку (рис. 1.9), нужно ударять тем местом, которое по отношению к руке будет центром удара. Если палку считать однородным стержнем AB длиной l , а ось вращения (место приложения руки) совпадающей с его концом A , то $a = l/2$, $J_z = ml^2/3$, $h = J_z / ma = 2l/3$. То есть удар нужно производить тем местом палки, которое отстоит от руки на расстояние в $2/3$ от длины палки.

Для предотвращения порчи оси O курка ружья пистон патрона A должен быть в центре удара курка (рис. 1.10).

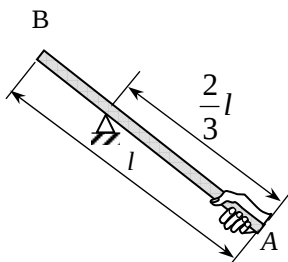


Рис. 1.9



Рис. 1.10

1.9. Несколько слов о взрыве

Вопрос «на засыпку», читатель: является ли взрыв ударом? С точки зрения основного определения (удар – это явление, при котором за ничтожно малый промежуток времени скорости изменяются на конечную величину) ответ должен быть, очевидно, положительным. Но тогда как быть с теоремой Карно о потере кинетической энергии? При взрыве она ведь, наоборот, возрастает! Для того гранату и взрывают, чтобы сумма кинетических энергий ее осколков была больше кинетической энергии самой гранаты!

Чтобы разобраться с этим вопросом, требуется уточнить понятия «удар» и «взрыв». Неупругий удар обычно связан с введением в систему новой связи. Так, например, при неупругом ударе тела о неподвижную преграду до удара оно было свободным, а после удара становится связанным – преграда теперь для него связь. И наоборот, в случае быстрого освобождения от связи вместо «удара» применяют термин «взрыв». При взрыве, действительно, кинетическая энергия системы будет возрастать. Теорема, аналогичная теореме Карно, для случая взрыва звучит так: *при взрыве кинетическая энергия возрастает на величину, равную кинетической энергии системы от приобретенных скоростей*

$$T_2 - T_1 = \sum_k m_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{v}_k)^2 / 2,$$

где величины $(\mathbf{u}_k - \mathbf{v}_k)$ и называют *приобретенными скоростями*.

Закончим эту лекцию решением нескольких задач.

Задача 1.1. Два шара массами m_1 и m_2 подвешены так, как показано на рис. 1.11. Первый шар отклоняют на угол α и одновременно толкают со скоростью v_0 . Найти угол отклонения β второго шара, если коэффициент восстановления шаров при ударе равен k .

Решение. Определим сначала скорость первого шара к началу удара. Для этого применим теорему об изменении его кинетической энергии на участке AA_1 :

$$m_1 v_0^2 / 2 + m_1 gl(1 - \cos \alpha) = m_1 v_1^2 / 2.$$

Следовательно, $v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gl(1 - \cos \alpha)}$.

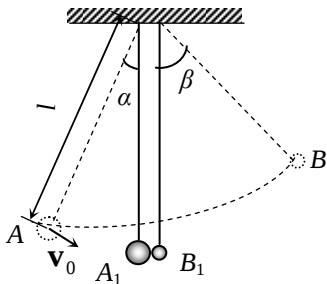


Рис. 1.11

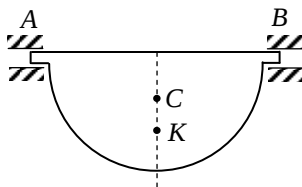


Рис. 1.12

Для определения скорости второго шара в конце удара применим теорему об изменении количества движения для системы двух шаров за время удара. Так как внешних ударных импульсов нет, то количество движения системы должно

сохраняться: $m_1 v_1 + 0 = m_1 u_1 + m_2 u_2$. Используя соотношение для коэффициента восстановления $u_2 - u_1 = k v_1$, найдем $u_2 = m_1 v_1 (1 + k) / (m_1 + m_2)$.

Применим теперь теорему об изменении кинетической энергии для второго шара на участке $B_1 B$: $m_2 u_2^2 = 0 + m_2 g(1 - \cos \beta)$ (мы учли, что в верхнем положении второй шар имеет нулевую скорость). Следовательно,

$$\begin{aligned} \cos \beta &= 1 - u_2^2 / 2g = \\ &= 1 - m_1^2 (1 + k)^2 (v_0^2 + 2gl(1 - \cos \alpha)) / (m_1 + m_2)^2, \end{aligned}$$

или

$$\beta = \arccos(1 - m_1^2 (1 + k)^2 (v_0^2 + 2gl(1 - \cos \alpha)) / (m_1 + m_2)^2).$$

Задача 1.2. Заслонка (рис. 1.12) имеет форму полукруга радиусом R , может вращаться вокруг диаметра AB и открывается ударом. Как нужно производить удар, чтобы он не передавался на подшипники?

Решение. Для решения этой задачи применим соотношения (*), (**), (***) п. 1.8. Из (*) следует, что удар нужно производить перпендикулярно плоскости заслонки, причем центр удара K должен находиться на оси симметрии полукруга, так как в этом случае плоскость, перпендикулярная к оси вращения заслонки и проходящая через линию действия ударного импульса, пересекает ее в точке O , для которой ось вращения является главной осью инерции (следует из (**)). Расстояние от центра удара K до оси вращения определяется при этом из соотношения $l = OK = J_{AB} / ma$ (следует из (***)), где $a = OC$, C – центр масс заслонки.

Момент инерции J_{AB} определим, зная момент инерции круга (однородного диска) относительно своего диаметра $J_d = MR^2 / 4$, где M – масса всего круга. Так как $M = 2m$, а $J_{AB} = J_d / 2$, то $J_{AB} = mR^2 / 4$. Величина a для полукруга

равна $a = 4R/3\pi$. Следовательно, $l = 3\pi m R^2 / 16mR = 3\pi R/16 \approx 0,59R$.

Задача 1.3. Платформа с грузом, представляющим собой однородный прямоугольный параллелепипед $ABDE$ ($AB = 2l$, $BD = 2h$), катится по горизонтальным рельсам со скоростью u (рис. 1.13). На платформе имеется выступ, в который упирается ребро B груза. Этот выступ препятствует скольжению груза вперед, но не препятствует вращению около ребра B . При какой скорости u произойдет опрокидывание груза, если платформа мгновенно остановится?

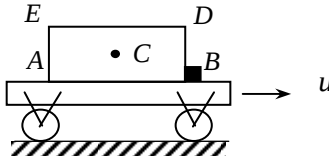


Рис. 1.13

Решение. При торможении платформы на груз начнут действовать силы инерции, равнодействующая которых равна $F^{in} = -\sum_k m_k a_k = -Ma_C = -M \frac{dv}{dt}$ и приложена в центре тяжести груза ($\mathbf{v}$ – скорость платформы во время торможения; M – масса груза). Импульс этой силы за время τ торможения

$$S^{in} = \int_0^\tau F^{in}(t) dt = -M \int_0^\tau \frac{dv}{dt} dt = -M (v(\tau) - v(0)) = -M (0 - u) = Mu$$

и будет тем ударным импульсом $\mathbf{S} = \mathbf{S}^{in}$, действующим на груз во время удара. Кроме него на груз будет действовать импульс ударной реакции выступа $\mathbf{S}_B$ (рис. 1.14).

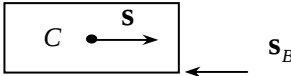


Рис. 1.14

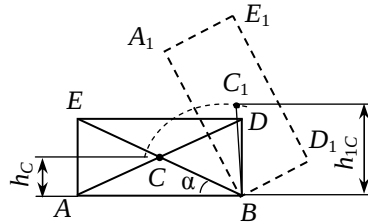


Рис. 1.15

Применяя теорему об изменении момента количества движения груза относительно ребра B , получим, согласно (1.25), выражение для угловой скорости груза к концу удара

$$\omega = M_B(S) / J_B = Sh / J_B = Muh / J_B, \quad (1.29)$$

где J_B – момент инерции груза относительно его ребра B (мы учли, что в начале удара угловая скорость груза равнялась нулю и что импульс S_B момента относительно ребра B не создает).

Минимальная угловая скорость ω , необходимая для опрокидывания груза, определится, очевидно, из условия, что груз повернется на угол $\pi/2 - \alpha$ вокруг ребра B (так, чтобы его центр тяжести был на одной вертикали с выступом B , рис. 1.15). Применяя к грузу теорему об изменении кинетической энергии за время такого поворота и учитывая, что в крайнем верхнем положении центра тяжести груза его кинетическая энергия равна нулю (для минимальной ω), получим

$$0 - J_B \omega^2 = Mg(h_{1C} - h_C) = -Mgh(1 - \sin \alpha) / \sin \alpha; \quad \sin \alpha = h / \sqrt{h^2 + l^2}. \quad (1.30)$$

Подставляя теперь значение ω из равенства (1.29) в (1.30), получим для минимальной скорости платформы выражение $u = \sqrt{2J_B g(1 - \sin \alpha) / (Mh \sin \alpha)}$. Значение J_B найдем по формуле Гюйгенса $J_B = J_C + M(CB)^2$ с учетом того, что $J_C = M(l^2 + h^2)/3$. Следовательно, $u = \sqrt{8(l^2 + h^2)^{3/2} g(\sqrt{l^2 + h^2} - h) / 3h}$.

Например, при $h=1,5$ м, $l=2$ м груз будет опрокидываться при скорости платформы $u=30,7$ км/ч.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое явление называют ударом? Приведите примеры ударных явлений.
2. Какой эффект имеет действие ударной силы? Чем характеризуется ударная сила?
3. Как записывается основное уравнение удара?
4. Могут ли внутренние ударные импульсы изменить количество движения механической системы? А какой-нибудь ее части? Приведите примеры.
5. В чем состоит основное допущение теории удара и какие его основные следствия?
6. К какому виду преобразуются общие теоремы динамики при ударе? В чем состоит теорема Карно?
7. Чем характеризуются первая и вторая фазы удара?
8. Какие удары называют абсолютно упругими и абсолютно неупругими? В чем состоят их особенности? Приведите примеры ударов, которые приближенно можно считать таковыми.
9. Что называют коэффициентом восстановления при ударе? В каких пределах он меняется? Как его определить опытным путем?
10. Как связаны модули и направления скоростей до и после удара поступательно движущегося тела о гладкую неподвижную преграду?
11. Как определяются скорости двух шаров после их соударения, если удар центральный (лобовой)? Какой при этом возникает ударный импульс?
12. Какова потеря кинетической энергии при прямом центральном ударе двух тел? При каком коэффициенте восстановления эта потеря будет максимальной? А когда минимальной? Чему равен этот минимум?
13. Какие величины называют «потерянными скоростями» и как формулируется теорема Карно?

14. Как меняется угловая скорость за время по телу при его вращательном движении?
15. При каких условиях опоры вращающегося тела не испытывают действия удара по этому телу?
16. Что называют центром удара при вращении твердого тела? Всегда ли он существует?
17. Является ли взрыв ударом? Как изменяется кинетическая энергия системы при взрыве?

Упражнения

- У1. Два тела в результате столкновения обменялись скоростями, продолжая двигаться по одной и той же прямой. Каково отношение масс этих тел? Является ли их столкновение абсолютно упругим?
- У2. На покоящийся шар налетает шар такой же массы. Найдите угол разлета шаров после нецентрального упругого удара.
- У3. Два тела массами m_1 и m_2 прикреплены к нитям одинаковой длины с общей точкой подвеса и отклонены – одно влево, другое вправо – на один и тот же угол. Тела одновременно отпускают. При ударе друг о друга они слипаются. Чему равно отношение высоты, на которую они поднимутся после слипания, к высоте, с которой они начали свое движение?

Лекция 2. УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ И РАВНОВЕСИЯ

Перед лекцией

Вы построили дом и сдаете его заказчику. «Не упадет ли он?» – спрашивают Вас. Вновь смонтированная телевизионная антенна, казалось бы, прочно стоит на земле, но ее вершина, уходящая в трехсотметровую даль, дрожит и раскачивается, чувствительно реагирует на каждый порыв ветра. Долго ли она выстоит? Машина несется по крутому виражу. Не опрокинется ли она, если на дороге окажется камешек, выбоина или гололед? Земля сотни миллионов лет вращается вокруг Солнца. А что произойдет, если в Солнечную систему попадет большая комета? Она ведь изменит сложившийся здесь баланс сил, возмутит движение планет. Не убежит ли наш общий дом со своей траектории?

Перечень подобных вопросов легко продолжить, и все они связаны постановкой. Нас интересует, не изменится ли состояние объекта, насколько устойчиво оно при воздействии на систему тех или иных возмущений.

Оказывается, в природе существуют системы, устойчивые относительно внешних воздействий, и системы, состояние которых радикально изменяется под воздействием внешних факторов. Не стоит пытаться оценивать сразу, хорошо это или плохо. Это просто объективно существует и нуждается в изучении. Важно, однако, подчеркнуть уже сейчас, что влияние внешних воздействий на систему может качественно изменить ее свойства, даже если эти воздействия малы. В некоторых случаях механическая система под действием внешних возмущений начинает вести себя непредсказуемо, как говорят, стохастически. В других внешние возмущения приводят к появлению в системе новых связей и структурированию системы. При этом новые состояния снова могут быть устойчивыми или неустойчивыми по отношению к внешним возмущениям. И это последнее чрезвычайно важно, поскольку практически все задачи, с которыми сталкивается челове-

чество, – это задачи динамического описания различных систем и их реагирования на внешние возмущения. Совершенно понятно, что такие задачи являются основными в механике и физике, в инженерной практике. Но ведь точно с такой же задачей мы сталкиваемся в экономике. Как будет реагировать наша экономика на остановку в г. N конвейера по производству автомобильных моторов, что произойдет, если урожай пшеницы будет малым, но зато будет много яблок? Печатать или не печатать новые деньги? А Вы задумывались над тем, почему из хаоса «большого взрыва» вообще родилась жизнь? Наличие жизни и эволюционная теория Дарвина противоречит второму закону термодинамики, согласно которому все системы должны были бы развиваться так, чтобы порядок, структурирование сменялись бы беспорядком, но никак не наоборот. Появление же человека – процесс совершенно противоположный.

В этой лекции мы не сумеем ответить на все поставленные вопросы, мы хотим лишь подчеркнуть, что источник ответов один – исследование реагирования системы на воздействие внешних возмущений. Поиском ответов занимается теория устойчивости. Это может быть теория устойчивости движения снаряда и ракеты, теория устойчивости движения транспорта, теория гидродинамической устойчивости, теория устойчивости рынка ценных бумаг, теория устойчивости сооружений и т.д. Все они имеют общие черты. Любая теория исходит из некоторой математической модели, которая с заданной точностью описывает поведение данной системы. Основой математической модели, в свою очередь, являются некоторые уравнения, как правило, дифференциальные (вообще наука начинается с формулирования модели, нет модели – нет и науки). Таким образом, задача изучения реагирования системы на внешнее воздействие или, другими словами, задача устойчивости относительно влияния некоторых возмущений сводится к задаче исследования изменения решения уравнений данной модели под действием возмущений. В этой лекции Вы увидите, как ставится такая задача и как в простейших случаях она решается. А теперь в путь.

2.1. Введение в теорию устойчивости

Всякая система, в том числе и механическая, описывается некоторым набором параметров. Скажем, движение любой механической системы определяется зависимостями ее обобщенных координат $q_1, \dots, q_s$ от времени. Задача динамики, которую мы до сих пор рассматривали, состояла в нахождении этих зависимостей. Для этого, как мы знаем, необходимо составить уравнения Лагранжа второго рода при известных силах, действующих на систему, и решить эти уравнения при заданных начальных условиях – обобщенных координатах $q_{10}, \dots, q_{s0}$ и обобщенных скоростях $\dot{q}_{10}, \dots, \dot{q}_{s0}$ в начальный момент времени. В частности, при движении одной материальной точки необходимо задать действующие на нее силы и решить уравнение Ньютона при заданном ее начальном положении и начальной скорости. Возможна, однако, и еще одна задача. Суть ее сводится к ответу на вопрос: как изменится решение, если изменить те или иные параметры системы? Если изменения (вариации) этих параметров малы, мы приходим к задаче теории устойчивости движения (или равновесия). Именно малые вариации параметров являются наиболее важными с практической точки зрения. Например, если мы знаем расчетную начальную скорость, обеспечивающую попадание ракеты в цель, то и запускать мы ее будем с этой скоростью. Однако реально мы это условие выполнить в точности не можем, и ракета вылетит с некоторой другой скоростью, но близкой к расчетной.

Ясно, что можно сформулировать очень много различных задач устойчивости. Все зависит от того, какие параметры системы мы будем варьировать. Например, можно изменить силы, действующие между частицами, или их массы, или начальные скорости, или начальные координаты и т.д. При этом система может быть устойчива к изменению одних параметров, но неустойчива по отношению к изменению дру-

гих. Поэтому прежде чем поставить задачу устойчивости, надо договориться, относительно вариации каких параметров будет идти речь. В этой лекции мы будем рассматривать только одну, но зато наиболее распространенную задачу устойчивости – задачу об изучении устойчивости системы относительно малых изменений начальных условий. Несмотря на то, что задача эта частная, полученный результат оказывается достаточно универсальным. Методы, развитые при решении этой конкретной задачи, применимы и при решении задач устойчивости относительно вариации других параметров системы. Теперь, прежде чем переходить к методам решения задачи теории устойчивости движения (или равновесия), следует ввести основные определения и понятия этой теории. Сделаем это.

2.2. Основные определения и понятия

Рассмотрим систему, состояние которой полностью описывается набором n вещественных переменных $x_1, \dots, x_n$, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.1)$$

и начальным условиям

$$x_i(0) = x_{i0}. \quad (2.2)$$

Заметим, что дифференциальные уравнения движения материальной точки принимают форму уравнений (2.1), если их переписать в виде

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \frac{d\dot{x}}{dt} = F_x; \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad \frac{d\dot{y}}{dt} = F_y; \quad \frac{dz}{dt} = \dot{z}, \quad \frac{d\dot{z}}{dt} = F_z$$

и ввести обозначения $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = \dot{x}$, $x_5 = \dot{y}$, $x_6 = \dot{z}$. Начальные условия (2.2) тогда примут вид:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_0; \quad x_2(0) = y_0; \quad x_3(0) = z_0; \quad x_4(0) = \dot{x}_0; \\ x_5(0) &= \dot{y}_0; \quad x_6(0) = \dot{z}_0. \end{aligned}$$

Уравнения Лагранжа второго рода, описывающие движение механической системы с s степенями свободы, также можно записать в форме уравнений (2.1), если учесть, что обобщенные силы Q_i ($i=1, \dots, s$) и кинетическая энергия системы T являются функциями времени, обобщенных координат и обобщенных скоростей: $Q_i = Q_i(t, q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s)$; $T = T(t, q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s)$. В этом случае $n = 2s$, $x_i = q_i$, $x_{s+i} = \dot{q}_i$, $i = 1, \dots, s$, а начальные условия (2.2) имеют вид:

$$x_i(0) = q_i(0); \quad x_{s+i}(0) = \dot{q}_i(0).$$

Системе уравнений (2.1) с начальными условиями (2.2) отвечает некоторое вполне определенное решение

$$x_i = x_i(t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

Движение системы, описываемое функциями (2.3) с начальными условиями (2.2), называется *невозмущенным движением*.

Пусть далее $\tilde{x}_i = \tilde{x}_i(t)$ – решение уравнения (2.1), удовлетворяющее измененным (возмущенным) начальным условиям $\tilde{x}_i(0) = \tilde{x}_{i_0}$, $i = 1, \dots, n$. Движение системы, отвечающее этим измененным начальным условиям, называется *возмущенным движением*.

Введенные понятия невозмущенного и возмущенного движения проиллюстрированы на рис. 2.1. Здесь показаны невозмущенное движение $x(t)$, соответствующее начальным условиям $x(0) = x_0$, и два возмущенных движения $x^*(t)$ и $\tilde{x}(t)$ с иными начальными данными.

Какое же движение системы (2.1) будет устойчивым, а какое неустойчивым? Мы будем следовать определению, данному А.М. Ляпуновым³.

³ Выдающийся русский математик и механик А.М. Ляпунов (1857–1918), по сути, явился создателем нового научного направления. Ему же принадлежат первые основополагающие результаты теории устойчивости.

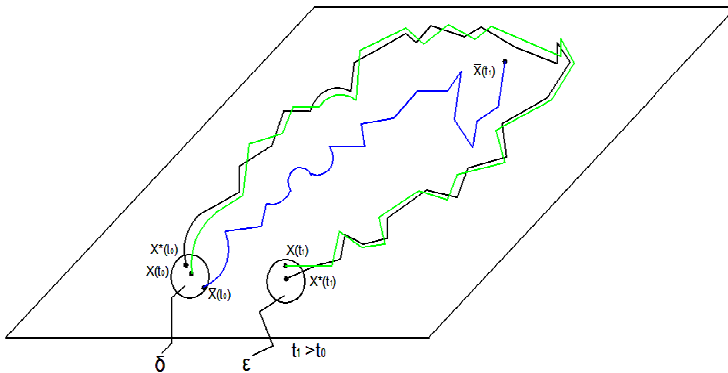


Рис. 2.1

Определение. Решение $x_i(t), i=1, \dots, n$, удовлетворяющее уравнениям (2.1) и начальным условиям (2.2), называется *устойчивым* по Ляпунову, если для каждого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что при всех значениях $t > 0$ будет выполняться неравенство $|\tilde{x}_i(t) - x_i(t)| < \varepsilon$, $i=1, \dots, n$, если начальные данные удовлетворяют условию

$$|\tilde{x}_{i0} - x_{i0}| < \delta, \quad i=1, \dots, n.$$

Если решение $x_i = x_i(t), i=1, \dots, n$, устойчиво и при этом любое другое решение $\tilde{x}_i(t), i=1, \dots, n$, при достаточно малых начальных возмущениях стремится к решению $x_i = x_i(t), i=1, \dots, n$, то есть если $\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{x}(t) - x(t)| = 0$ при $t \rightarrow \infty$, то решение $x_i(t), i=1, \dots, n$, называется *асимптотически устойчивым*.

Если на рис. 2.1 траектории всех возмущенных движений будут иметь характер траектории $x^*(t)$, то невозмущенное движение будет устойчивым. Если же среди траекторий возмущенного движения возможны траектории типа $\tilde{x}(t)$, то невозмущенное движение будет неустойчивым.

В качестве примера исследуем на устойчивость движение грузика массы m , совершающего свободные незатухающие колебания на пружинке жесткости c . Как мы знаем, его движение описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + k^2 x = 0; \quad k^2 = c/m, \quad (2.4)$$

решение которого имеет вид: $x(t) = x_0 \cos kt + (\dot{x}_0/k) \sin kt$, где x_0 – начальное отклонение грузика от положения равновесия, а $\dot{x}_0$ – его начальная скорость. Возмущенное движение грузика $\tilde{x}(t)$, соответствующее возмущенным начальным условиям $\tilde{x}_0$ и $\tilde{\dot{x}}_0$, будет иметь вид: $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 \cos kt + (\tilde{\dot{x}}_0/k) \sin kt$. Тогда, очевидно,

$$\begin{aligned} |\tilde{x}(t) - x(t)| &= |(\tilde{x}_0 - x_0) \cos kt + ((\tilde{\dot{x}}_0 - \dot{x}_0)/k) \sin kt| < \\ &< |\tilde{x}_0 - x_0| + |(\tilde{\dot{x}}_0 - \dot{x}_0)/k|. \end{aligned}$$

Поэтому, если $|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta$ и $|\tilde{\dot{x}}_0 - \dot{x}_0| < \delta$, то $|\tilde{x}(t) - x(t)| < (\delta + \delta/k)$.

Задавись теперь произвольным $\varepsilon > 0$, мы в качестве δ можем взять решение уравнения $\delta + \delta/k = \varepsilon$, то есть $\delta = (k/(k+1))\varepsilon$. Таким образом, движение грузика является устойчивым по отношению к возмущениям начального положения и начальной скорости. При этом $|\tilde{x}(t) - x(t)| = |(\tilde{x}_0 - x_0) \cos kt + ((\tilde{\dot{x}}_0 - \dot{x}_0)/k) \sin kt|$ не стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, то есть движение не является асимптотически устойчивым.

Давайте теперь изменим знак перед множителем $k^2 x$ в уравнении (2.4), то есть рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} - k^2 x = 0. \quad (2.5)$$

Его решение, удовлетворяющее начальным условиям x_0 и $\dot{x}_0$, запишется в виде:

$$x(t) = 0,5(x_0 + \dot{x}_0 / k) \exp(kt) + 0,5(x_0 - \dot{x}_0 / k) \exp(-kt).$$

$$\text{Тогда } |\tilde{x}(t) - x(t)| = \left| \begin{aligned} &0,5(\tilde{x}_0 - x_0 + (\tilde{\dot{x}}_0 - \dot{x}_0) / k) \exp(kt) + \\ &+ 0,5(\tilde{x}_0 - x_0 - (\tilde{\dot{x}}_0 - \dot{x}_0) / k) \exp(-kt) \end{aligned} \right|.$$

Так как функция $\exp(kt) \rightarrow \infty$, а $\exp(-kt) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то $|\tilde{x}(t) - x(t)| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. То есть разность между возмущенным и невозмущенным решениями неограниченно возрастает со временем и будет больше любого наперед заданного значения $\varepsilon > 0$. Следовательно, решение уравнения (2.5) является неустойчивым.

2.3. Уравнения возмущенного движения

Казалось бы, решить задачу устойчивости движения, задаваемого уравнениями (2.1), несложно. Достаточно было бы решить эти уравнения для возмущенного и невозмущенного движения, а затем проанализировать динамику возмущений, как мы это сделали в рассмотренных выше примерах. Сложность, однако, в том, что в большинстве практически важных и интересных задач получающиеся дифференциальные уравнения не удастся разрешить аналитически, да и численное их решение является большой проблемой. Поэтому для исследования устойчивости движения и равновесия были разработаны специальные методы, основанные на качественном анализе дифференциальных уравнений возмущенного движения. С некоторыми из них мы и познакомимся в нашей лекции.

Введем в рассмотрение разности между значениями возмущенного и невозмущенного движений:

$$y_i(t) = \tilde{x}_i(t) - x_i(t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.6)$$

Функции $y_i(t)$ называются *возмущениями*, или *вариациями*. Запишем систему уравнений (2.1) для возмущенного движения:

$$\frac{d\tilde{x}_i}{dt} = f_i(t, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n), \quad i = 1, \dots, n$$

и заменим в ней параметры возмущенного движения через параметры невозмущенного движения и возмущения (2.6). В результате приходим к системе уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} + \frac{dy_i}{dt} = f_i(t, x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.7)$$

Разложим правые части этих уравнений в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} f_i(t, x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) &= f_i(t, x_1, \dots, x_n) + a_{i1}y_1(t) + \dots \\ &\dots + a_{in}y_n(t) + f_i^*, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

где f_i^* – совокупность членов, зависящих от отклонений $y_i(t)$ в степени выше первой, а

$$a_{ij} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right)_{y_j=0}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n.$$

Подставляя эти разложения в систему уравнений (2.7) и учитывая уравнение (2.1), приходим к *системе дифференциальных уравнений возмущенного движения*:

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = a_{i1}y_1(t) + \dots + a_{in}y_n(t) + f_i^*, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.8)$$

Эту систему уравнений иногда называют системой уравнений для возмущений. Если в уравнениях (2.8) отбросить члены f_i^* , то получаются *уравнения первого приближения возмущенного движения*:

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = a_{i1}y_1(t) + \dots + a_{in}y_n(t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.9)$$

В общем случае правые части системы уравнений (2.8) могут явно зависеть и от отклонений y_i , и от времени t . Если это так, то система называется *неавтономной*, а ее движение – *неустановившимся*. Если же все правые части уравнений (2.8) от времени явно не зависят, то система называется *автономной*, а соответствующее движение – *установившимся*.

У автономной системы коэффициенты a_{ij} постоянны. В дальнейшем для простоты мы ограничимся рассмотрением именно автономных систем. В этом случае соответствующие системы первого приближения (2.9) представляют собой дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Такие системы легко решаются.

2.4. Исследование устойчивости по первому приближению

Наиболее простой метод решения задачи устойчивости движения – это исследование устойчивости по уравнениям первого приближения. Ясно, однако, что, поскольку метод этот приближенный, будут встречаться ситуации, когда исследование уравнений первого приближения приведет к качественно неправильным результатам. Когда же уравнения первого приближения можно использовать для исследования устойчивости движения?

Ответ на этот вопрос дают две теоремы, доказанные А.М. Ляпуновым. Сформулируем их.

Теорема Ляпунова об устойчивости движения по первому приближению. *Если вещественные части всех корней характеристического уравнения первого приближения отрицательны, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво независимо от членов выше первого порядка малости.*

Теорема Ляпунова о неустойчивости движения по первому приближению. *Если среди корней характеристического уравнения найдется хотя бы один с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение неустойчиво независимо от членов выше первого порядка малости.*

Напомним, что характеристическое уравнение системы (2.9) – это уравнение относительно λ , выражающее равенство нулю определителя матрицы

$$\begin{array}{cccc}
a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda
\end{array} \quad (2.10)$$

Таким образом, в случаях, перечисленных в этих двух теоремах, уравнения первого приближения полностью решают задачу об устойчивости движения. В подобных ситуациях нет нужды исследовать уравнения, содержащие нелинейные члены.

Проиллюстрируем теперь применение метода исследования устойчивости движения по уравнениям первого приближения на примере. Рассмотрим опять движение груза массой m , подвешенного на пружинке жесткости c . Только теперь учтем еще сопротивление среды. А именно, пусть сила сопротивления среды зависит от скорости нелинейным образом: $\mathbf{R} = -\alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{v}^2$, где α и β – некоторые заданные постоянные, причем $\alpha > 0$. Тогда уравнение движения груза будет иметь вид:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + d\dot{x}^2 + k^2x = 0, \quad (2.11)$$

где $2b = \alpha/m$; $d = \beta/m$; $k^2 = c/m$. Будем еще считать, что $k > b$, то есть рассматривать случай достаточно малого сопротивления среды.

Запишем уравнение (2.11) в виде системы двух уравнений относительно неизвестных $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = -k^2x_1 - 2bx_2 - cx_2^2. \quad (2.12)$$

Уравнения первого приближения (2.9) для системы (2.12) будут иметь вид:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2; \quad \frac{dy_2}{dt} = -k^2y_1 - 2by_2. \quad (2.13)$$

Характеристическое уравнение системы (2.13), $\lambda(\lambda + 2b) + k^2 = 0$, имеет корни $\lambda_1 = -b + ik_1$, $\lambda_2 = -b - ik_1$, где $k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}$. Видим, что $\operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 = -b < 0$. Оба корня имеют отрицательные вещественные части, поэтому движение грузика будет асимптотически устойчивым по отношению к возмущению начального положения и начальной скорости независимо от величины β .

В случаях, когда среди корней характеристического уравнения системы (2.9) имеются корни с нулевой вещественной частью (и при этом вещественные части всех остальных корней отрицательны), по первому приближению судить об устойчивости решения полной нелинейной системы (2.8) нельзя. В таких (критических) случаях используются более сложные методы (например, прямой метод Ляпунова⁴) либо устойчивость решения удастся показать непосредственно из определения устойчивости. Рассмотрим в качестве примера систему (2.8), имеющую вид:

$$\frac{dy_1}{dt} = -\alpha y_2 + \alpha y_1 \sqrt{y_1^2 + y_2^2}; \quad \frac{dy_2}{dt} = \alpha y_1 + \alpha y_2 \sqrt{y_1^2 + y_2^2}. \quad (2.14)$$

Выпишем для нее уравнения первого приближения:

$$\frac{dy_1}{dt} = -\alpha y_2; \quad \frac{dy_2}{dt} = \alpha y_1. \quad (2.15)$$

Характеристическое уравнение (2.15), $\lambda^2 + \alpha^2 = 0$, имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm i\alpha$, поэтому $\operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 = 0$, и судить по уравнениям (2.15) об устойчивости решения системы (2.14) нельзя.

Обратимся снова к (2.14). Умножим первое уравнение на y_1 , второе – на y_2 и сложим их. Тогда получим:

⁴ См., например, книгу Д.Р. Маркеева «Введение в теорию устойчивости» (М.: Наука, 1987).

$$y_1 \frac{dy_1}{dt} + y_2 \frac{dy_2}{dt} = \alpha(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}, \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt}(r^2) = 2\alpha r^3,$$

где $r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ – расстояние до начала координат. Следовательно, $\frac{dr}{dt} = \alpha r^2$, откуда $r = r_0 / (1 - \alpha r_0 t)$, $r_0 = r(0)$. Видим, что при $\alpha > 0$ $r \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 1/\alpha r_0$, то есть решение неустойчиво. При $\alpha < 0$ решение будет асимптотически устойчивым, так как $r(t)$ монотонно стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

2.5. Устойчивость равновесия консервативных систем

Рассмотрим механическую систему с голономными и стационарными связями, движение которой определяется s обобщенными координатами $q_1, \dots, q_s$. Как мы знаем, в положении равновесия все обобщенные силы равны нулю, $Q_i = 0$, $i = 1, \dots, s$. Для консервативных сил $Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$, где Π – потенциальная энергия системы. Следовательно, для консервативных систем в положении равновесия должны выполняться уравнения

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, s. \quad (2.16)$$

Решая эти уравнения относительно $q_1, \dots, q_s$, найдем те значения обобщенных координат, при которых система может находиться в равновесии. Таких положений может оказаться несколько, причем в некоторых из них равновесие будет устойчивым, а в некоторых – неустойчивым. Так, например, маятник, подвешенный на стержне (рис. 2.2), имеет два положения равновесия. Из них нижнее положение ($\varphi = 0$) – устойчивое, а верхнее ($\varphi = \pi$) – неустойчивое.

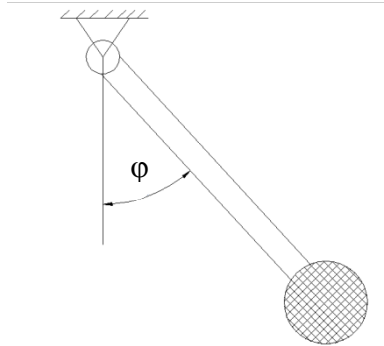


Рис. 2.2

Достаточное условие устойчивости равновесия консервативной системы содержит **теорема Лагранжа – Дирихле**: *если в положении изолированного равновесия консервативной системы с голономными и стационарными связями потенциальная энергия Π имеет минимум, то в этом положении равновесие устойчиво.*

Можно ли утверждать, что при отсутствии минимума потенциальной энергии положение равновесия будет неустойчивым? На этот вопрос ответ дает **теорема Н.Г. Четаева**: *если в положении изолированного равновесия потенциальная энергия Π , предполагаемая аналитической функцией обобщенных координат $q_1, \dots, q_s$, не имеет минимума, то положение равновесия неустойчиво.*

Итак, для выяснения вопроса об устойчивости данного положения равновесия консервативной системы достаточно исследовать поведение ее потенциальной энергии $\Pi(q_1, \dots, q_s)$ вблизи этого положения. Получим приближенное выражение для функции $\Pi(q_1, \dots, q_s)$, считая без ограничения общности, что в данном положении равновесия $q_1 = q_2 = \dots = q_s = 0$ и $\Pi(0, \dots, 0) = 0$. Тогда, разлагая функцию $\Pi(q_1, \dots, q_s)$ в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} \Pi(q_1, \dots, q_s) = & \sum_{i=1}^s \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}(0, \dots, 0) \cdot q_i + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j}(0, \dots, 0) \cdot q_i q_j + \dots \end{aligned}$$

и учитывая, что в положении равновесия $\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0$, получим,

с точностью до членов более высокого порядка малости, выражение

$$\Pi(q_1, \dots, q_s) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s c_{ij} q_i q_j. \quad (2.17)$$

Коэффициенты $c_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j}(0, \dots, 0)$ называются *обобщенными коэффициентами жесткости*. Они вычисляются в положении равновесия и, следовательно, являются постоянными числами, причем $c_{ij} = c_{ji}$.

Так как в положении равновесия $\Pi(0, \dots, 0) = 0$, то строгий минимум потенциальной энергии означает, что $\Pi > 0$ вблизи этого положения, то есть квадратичная форма (2.17) определено положительна. Согласно критерию Сильвестра (он доказывается в курсах линейной алгебры), положительность квадратичной формы эквивалентна равенству нулю всех главных миноров матрицы $\{c_{ij}\}$.

В частности, для механической системы с одной степенью свободы

$$\Pi = \frac{1}{2} c_{11} q_1^2 \quad (2.18)$$

и строгому минимуму потенциальной энергии отвечает условие

$$c_{11} > 0. \quad (2.19)$$

Согласно теореме Лагранжа–Дирихле, положение равновесия при выполнении условия (2.19) будет устойчивым.

Для системы с двумя степенями свободы

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2) \quad (2.20)$$

и, согласно критерию Сильвестра, строгому минимуму потенциальной энергии отвечают два условия:

$$c_{11} > 0 \text{ и } c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0. \quad (2.21)$$

При их выполнении положение равновесия будет устойчивым.

Перейдем теперь к примерам. В качестве первого рассмотрим обращенный математический маятник (рис. 2.3), состоящий из невесомого стержня OA длиной l с точечным грузом массой m на его конце A . На другом конце стержня O , закрепленном шарнирно, имеется спиральная пружина с коэффициентом жесткости c . В вертикальном положении стержня пружина не деформирована. Исследуем на устойчивость вертикальное положение равновесия обращенного маятника.

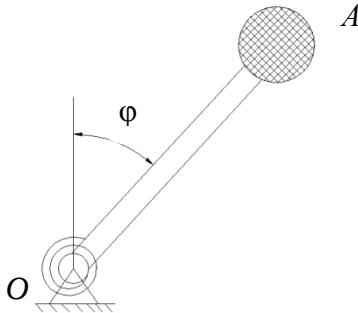


Рис. 2.3

Маятник имеет одну степень свободы, $s = 1$. В качестве обобщенной координаты возьмем угол φ отклонения маятника от вертикали. Пружина создает момент $M = c\varphi$, воз-

вращающий маятник в вертикальное положение. Будем считать, что в вертикальном положении потенциальная энергия системы равна нулю. Найдём потенциальную энергию в произвольном положении маятника как работу сил, приложенных к системе, при перемещении ее из этого произвольного положения в вертикальное:

$$\Pi = -mgl(1 - \cos \varphi) + \int_{\varphi}^0 M d\varphi = -mgl(1 - \cos \varphi) + c\varphi^2 / 2. \quad (2.22)$$

Тогда $c_{11} = \frac{d^2 \Pi}{d\varphi^2}(0) = -mgl + c$, и условие устойчивости (2.19)

имеет вид: $-mgl + c > 0$. Значит, вертикальное положение маятника будет устойчивым, если $c > mgl$ (жесткости пружины достаточно для возвращения маятника в вертикальное положение при его малом отклонении). Так как для нашего примера, согласно (2.22), потенциальная энергия $\Pi(\varphi)$ является аналитической функцией, то, по теореме Четаева, верно и обратное – если $c < mgl$, то вертикальное положение маятника будет неустойчивым (не хватает жесткости пружины, чтобы вернуть маятник в вертикальное положение при малом его отклонении).

Рассмотрим теперь более сложный пример – двойной обращенный маятник (рис. 2.4). Он состоит уже из двух невесомых стержней OA и AB с длинами l_1 и l_2 . На их концах расположены точечные грузы с массами m_1 и m_2 соответственно. Спиральных пружин тоже две, расположены они в шарнирах O и A , их жесткости равны c_1 и c_2 соответственно. Причем первая пружина не деформирована, если $\varphi_1 = 0$, а вторая – если $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$. Определим условия устойчивости вертикального положения равновесия двойного обращенного маятника (когда $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$).

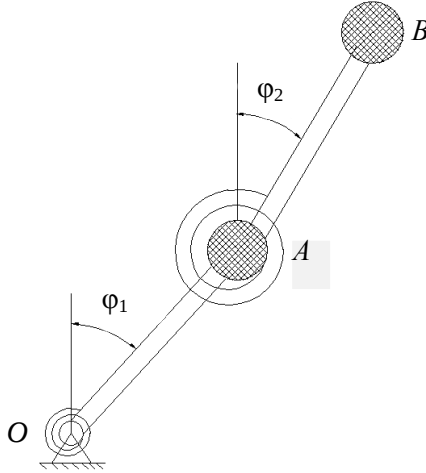


Рис. 2.4

Рассматриваемый двойной маятник имеет две степени свободы, $s = 2$. За обобщенные координаты возьмем углы φ_1 и φ_2 отклонений стержней OA и AB от вертикали. Считаем потенциальную энергию системы в исследуемом положении равновесия равной нулю, $\Pi(0,0) = 0$. Тогда (см. предыдущий пример)

$$\begin{aligned} \Pi(\varphi_1, \varphi_2) = & \frac{c_1 \varphi_1^2}{2} + \frac{c_2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2}{2} - m_1 g (l_1 - l_1 \cos \varphi_1) - \\ & - m_2 g (l_1 + l_2 - l_1 \cos \varphi_1 - l_2 \cos \varphi_2). \end{aligned}$$

Обобщенные коэффициенты жесткости, следовательно, будут равны

$$\begin{aligned} c_{11} = & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_1^2}(0,0) = c_1 + c_2 - m_1 g l_1 - m_2 g l_2; \\ c_{22} = & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_2^2}(0,0) = c_2 - m_2 g l_2; \quad c_{12} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2}(0,0) = -c_2. \end{aligned}$$

Тогда, в соответствии с (2.21), вертикальное положение маятника будет устойчивым при выполнении двух условий:

$$c_1 + c_2 - m_1 g l_1 - m_2 g l_2 > 0;$$

$$(c_1 + c_2 - m_1 g l_1 - m_2 g l_2)(c_2 - m_2 g l_2) - c_2^2 > 0.$$

Отметим, что для двойного обращенного маятника потенциальная энергия $\Pi(\varphi_1, \varphi_2)$ также является аналитической функцией своих аргументов и, по теореме Четаева, невыполнение выведенных выше условий приводит к неустойчивости вертикального положения равновесия.

Рассмотрим в заключение еще один пример. Пусть на дне гладкого цилиндрического желоба (рис. 2.5), образующие которого горизонтальны и параллельны оси X , находится в равновесии весомый шарик. Потенциальная энергия шарика в этом положении минимальна. Однако, если сообщить шарiku весьма малую начальную скорость v_0 , направленную вдоль оси X , то он будет двигаться по закону $x = v_0 t$, и при любой малой начальной скорости v_0 шарик через достаточно большой промежуток времени уйдет от своего первоначального положения сколь угодно далеко. Как это совместить с тем, что, согласно теореме Лагранжа–Дирихле, равновесие как будто должно быть устойчивым? Этот простой пример очень поучителен: он показывает, что достаточно пропустить одно слово в условии теоремы, и она может стать неверной. В данном примере положение равновесия шарика не является изолированным, и условия теоремы Лагранжа–Дирихле не выполнены (действительно, в этом примере любое положение шарика на низшей образующей является положением равновесия).

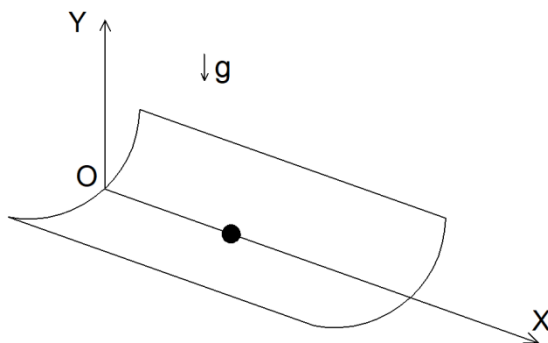


Рис. 2.5

Вопросы для самоконтроля

1. Что имеют в виду, когда говорят, что движение (или равновесие) устойчивое или неустойчивое? Приведите примеры устойчивых и неустойчивых движений (равновесий).
2. Какое решение системы дифференциальных уравнений называют невозмущенным по отношению к начальным условиям? А какое возмущенным?
3. Дайте строгое определение устойчивости (по Ляпунову) невозмущенного решения по отношению к начальным данным.
4. Какое решение называется асимптотически устойчивым (по Ляпунову)?
5. Является ли асимптотически устойчивое решение просто устойчивым по Ляпунову? А наоборот, является ли устойчивое решение асимптотически устойчивым?
6. Какие функции называют возмущениями (вариациями)?
7. Как получаются уравнения первого приближения для возмущенного решения?
8. Дайте формулировку теорем Ляпунова об устойчивости и о неустойчивости движения по первому приближению.

9. В каких случаях по уравнениям первого приближения нельзя судить об устойчивости движения?
10. Сформулируйте теорему Лагранжа – Дирихле об устойчивости равновесия консервативных систем.
11. Как формулируется теорема Четаева о неустойчивости равновесия консервативной системы?
12. Какой вид имеет потенциальная энергия в положении равновесия, если ее рассматривать как функцию обобщенных координат?
13. В чем состоит критерий Сильвестра положительности квадратичной формы? Как этот критерий используется при исследовании устойчивости равновесия консервативных систем?

Упражнения

- У1. Материальная точка, имея начальные условия $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$, движется далее вдоль оси x под действием силы сопротивления $R = kv$. Исследовать устойчивость ее движения по отношению к начальным условиям.
- У2. Однородный стержень AB длиной l опирается на гладкий полуцилиндр радиуса R , как показано на рис. 2.6. При каком угле φ стержень будет находиться в положении равновесия? Является ли оно устойчивым?

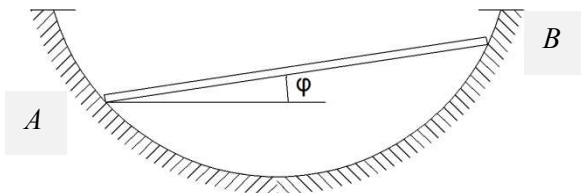


Рис. 2.6

- У3.** Система состоит из двух однородных стержней OA и AB длиной b и массой m и ползуна B массой m_1 . Середины стержней соединены пружиной жесткости c (рис. 2.7). Длина пружины в ненапряженном состоянии $l_0 < b$. Пренебрегая трением в шарнирах и направляющих, определить положения равновесия и исследовать их на устойчивость.

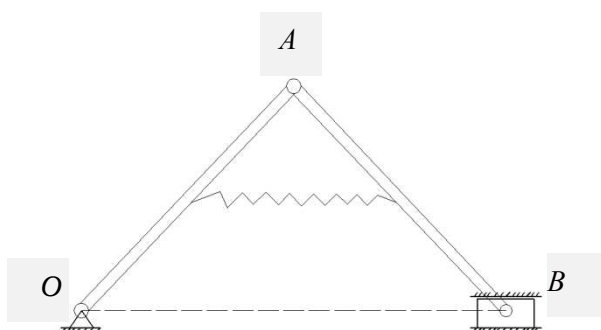


Рис. 2.7

Лекция 3. ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ И РАЗМЕРНОСТЕЙ

Введение

Очертим круг проблем, к которым теория подобия и размерностей имеет непосредственное отношение.

1. Изучение различных технических устройств часто проводят на моделях. То есть строят модель устройства (самолета, моста, корабля и т.д.), изучают ее поведение, а затем полученные результаты переносят на само устройство.

При этом возникают вопросы: как правильно построить модель, что именно изучать на модели, как переносить результаты на устройство (на натуру)?

Рассмотрим простейший пример. Пусть некое техническое устройство A нужно закрепить на опорах B (рис. 3.1). Вопрос, который нас интересует: выдержат ли опоры? Для ответа на него мы можем построить модель этого устройства. Будем строить точно такую же, из того же материала, только уменьшенную в 10 раз. Для этой модели с помощью эксперимента подберем толщину опор B так, чтобы они выдерживали вес устройства A , скажем, с пятикратным запасом прочности. Останется ли такой же запас прочности «на натуре» (на самом устройстве)?

Давайте разберемся. Прежде всего заметим, что прочность опор пропорциональна площади их сечения. Так как материал у натуре и у модели один и тот же, то вес увеличится во столько же раз, во сколько и объем, то есть в 1000 раз. При этом площадь сечения опор увеличится в 100 раз. Поэтому нагрузка, приходящаяся на единицу площади, на натуре будет в десять раз больше, чем на модели! То есть нашего пятикратного запаса прочности не хватит, опоры не выдержат, а само устройство рухнет!

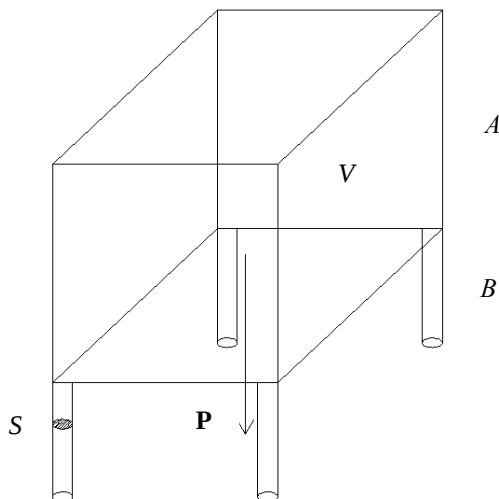


Рис. 3.1

Данный пример наглядно показывает, что вопрос о том, какую модель строить и как переносить результаты на натуру, требует предварительного изучения. И это один из вопросов, на который теория подобия и размерностей дает ответ.

Замечание. Возвращаясь к нашему простейшему примеру, мы можем сделать вывод о том, что для сохранения того же запаса прочности нужно, чтобы площадь сечения опор тоже увеличилась в 1000 раз. А это означает, что диаметр сечения опор нужно было увеличивать не в 10 раз, а в $\sqrt{1000} \approx 32$ раза. В общем случае, если натура больше модели в n раз, то диаметр сечения опор природы должен быть в $n^{3/2}$ раз больше диаметра опор модели. Если же мы возьмем отношение диаметра сечения d опор к размеру R конструкции, то получим:

$$(d_n / R_n) = \sqrt{n} (d_m / R_m), \quad (3.1)$$

где индексы n и m обозначают «натуру» и «модель» соответственно.

Вы замечали, читатель, что у больших собак лапы по отношению к туловищу гораздо толще, чем у маленьких? При-

чем, оказывается, в полном соответствии с равенством (3.1). Для наглядности на рис. 3.2 приведен сенбернар (слева) и той-терьер (справа). Высота в холке сенбернара ≈ 80 см, той-терьера ≈ 20 см, то есть $n \approx 4$. На рис. 3.3 слева показан тот же сенбернар, а справа – увеличенный в четыре раза той-терьер.



Рис. 3.2



Рис. 3.3

Теперь посмотрите: лапы у сенбернара примерно в два раза ($\sqrt{n} = 2$) толще лап увеличенного той-терьера, то есть, действительно, в полном соответствии с равенством (3.1). Причем ссылка на равенство (3.1) корректна, так как кости у обеих собак из одного и того же материала.

2. Поведение сложных технических устройств зависит от большого количества физических величин – десятков, а то и сотен. Если пойти по пути изучения поведения устройства в зависимости от изменения каждой из этих величин по отдельности, то, во-первых, это приведет к большому объему работы (большому количеству экспериментов или расчетов). Во-вторых, если даже весь этот объем работы будет проделан, то мы получим большой объем информации (пусть даже и обработанный в виде графиков или диаграмм). Как ее использовать? Какой от нее прок? На самом деле, влияние отдельных параметров, как правило, проявляется не порознь, а совместно, и, по сути дела, нужно рассматривать не эти отдельные параметры, а некоторые их совокупности, определенные для каждого изучаемого процесса. Теория подобия и размерностей как раз и дает метод построения таких совокупностей. Она позволяет непосредственно на основании анализа постановки задачи найти связь между отдельными группами величин и соединить их в комплексы. Эти комплексы имеют ясный физический смысл, и они-то и характеризуют свойства изучаемого объекта.

Переход от обычных физических величин к комплексам, во-первых, упрощает задачу (число комплексов, как правило, значительно меньше числа исходных параметров). Во-вторых, при исследовании поведения объекта в зависимости от этих комплексов более отчетливо проявляются внутренние связи, характеризующие изучаемый процесс, и вся количественная картина становится более ясной. Например (рис. 3.4), при изучении колебательного движения груза на пружинке (без учета сопротивления среды) основными (исходными) величинами являются c , m , x_0 , v_0 (жесткость пружинки, масса груза, начальное положение груза, начальная скорость

грузика). Однако если нас интересует частота колебаний k или период $T = 2\pi/k$, то, как мы знаем, они зависят лишь от комплекса c/m . Амплитуда колебаний A зависит от x_0 и комплекса v_0/k .

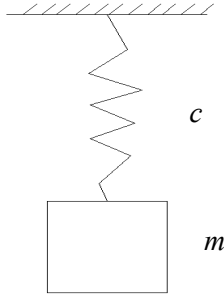


Рис. 3.4

При изучении движения несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе (рис. 3.5) основными параметрами будут ее диаметр d , плотность жидкости ρ , коэффициент вязкости жидкости μ и средняя по сечению трубы скорость U . Тогда давление p в каком-нибудь сечении трубы будет функцией $p = p(d, \rho, \mu, U)$. Как мы вскоре убедимся, теория подобия и размерностей позволяет сразу выделить безразмерный комплекс $Re = dU\rho/\mu$ (число Рейнольдса), от которого только и будет зависеть давление $p = p(Re)$. То есть в эксперименте или теории не нужно изучать по отдельности зависимости давления от параметров d, ρ, μ, U (большой объем работы и мало толку от полученной информации), а необходимо лишь исследовать зависимость $p = p(Re)$.

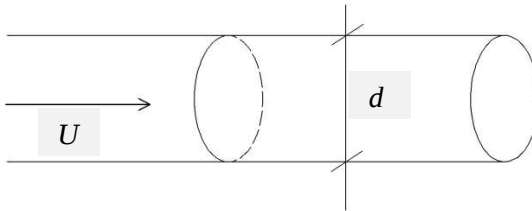


Рис. 3.5

3. Пусть мы уже знаем (изучили экспериментально или теоретически) поведение данного конкретного объекта. Можем ли мы использовать эти знания по отношению к другим объектам? То есть сохраняются ли основные выводы о поведении исследуемых характеристик, или нам необходимо для другого объекта снова проделывать ту же работу (эксперимент или расчет)? Речь идет о том, насколько общими являются полученные результаты – для какой совокупности других объектов (может, даже и другой физической природы) мы их можем применить. И в каком виде нам нужно представить полученные результаты, чтобы эту совокупность объектов можно было выделить. То есть, другими словами, какие еще объекты ведут себя подобным образом. На эти вопросы также отвечает теория подобия и размерностей. Причем ответы на них (без знания теории подобия и размерностей) не такие уж очевидные. В рассмотренных нами примерах мы в этом уже убедились. В первом примере (см. рис. 3.1), несмотря на полное геометрическое подобие и идентичность материала, из которого изготовлены две конструкции, ответ оказался отрицательным (для модели опоры выдерживали вес конструкции, причем с пятикратным запасом, а для натуры – нет). Для третьего примера (см. рис. 3.5), наоборот, течение во всех трубах будет одинаковым, если только для них действительно одно и то же число Рейнольдса, $Re = dU\rho/\mu$, несмотря на то, что по отдельности параметры d , ρ , μ , U могут как угодно сильно отличаться.

Поставленные здесь три проблемы (1, 2, 3) на самом деле взаимосвязаны. Собственно, теория подобия и размерностей и должна это сделать. Суть данной теории достаточно проста, и ее можно выразить следующим образом: обычные переменные в исследуемой задаче (физические размерные величины и параметры задачи) нужно заменить их безразмерными комплексами, то есть перейти к другим, «обобщенным» переменным. Тогда оказывается, что два «объекта» подобны, если у них одинаковый набор этих комплексов. Переход же от обычных переменных к обобщенным можно осуществить либо из анализа размерностей физических величин,

либо из анализа системы дифференциальных уравнений и начальных условий, описывающих поведение исследуемых объектов. Понять это и научиться это делать – и есть цель данной лекции.

3.1. Размерные и безразмерные величины

Величины, численное значение которых зависит от принятых масштабов, называют *размерными*. Измерить какую-либо размерную величину Q – это значит сравнить ее с другой величиной q той же физической природы, то есть определить, во сколько раз Q больше или меньше q . Обозначив численное значение величины Q через C , можно написать:

$$Q = Cq, \text{ или } C = Q/q.$$

Для величины q устанавливают определенное значение и называют ее *единицей измерения*. Если за единицу измерения взять другую величину q_1 , причем $q_1 = kq$, то численное значение величины Q станет другим: $C_1 = Q/q_1 = C/k$, то есть численное значение величины Q зависит от выбранного масштаба (q или q_1).

Единицы измерения различных физических величин образуют *систему единиц*. Например, в международной системе единиц СИ за единицу измерения времени принята *секунда* (время, равное 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133, находящегося в покое при температуре 0 градусов по Кельвину), за единицу длины – *метр* (длина пути, проходимого светом в вакууме за $1 / 299\,792\,458$ секунды), а за единицу массы – *килограмм* (масса цилиндра диаметром и высотой 39,17 мм из платино-иридиевого сплава (90 % платины, 10 % иридия), который хранится в Международном бюро мер и весов в Севре близ Парижа).

Величины, численное значение которых не зависит от выбора системы единиц измерения, называют *безразмерными*. Так, например, сила, момент силы, энергия являются размерными величинами. А углы, отношение двух длин, от-

ношение квадрата длины к площади, отношение энергии к моменту силы – безразмерные величины.

Замечание. Подразделение величин на размерные и безразмерные является до некоторой степени условным. Так, например, угол мы только что называли безразмерной величиной. Однако углы тоже можно измерять в радианах, градусах, долях прямого угла, то есть в различных единицах. Следовательно, число, определяющее угол, зависит от выбора единицы измерения угла. Поэтому угол можно рассматривать и как размерную величину. Но если во всех системах единиц измерять углы только в радианах, то угол уже можно рассматривать как безразмерную величину. Точно так же, если для длины ввести единую фиксированную единицу измерения (например, метр), то после этого длину можно считать безразмерной величиной. Но фиксирование единицы измерения для углов оказалось удобным, а для длин и других физических величин – нет.

3.2. Первичные и вторичные величины

Различные физические величины связаны между собой определенными соотношениями. Поэтому, если некоторые из них принять за основные и установить для них какие-то единицы измерения, то единицы измерения всех остальных величин будут определенным образом выражаться через единицы измерения основных величин. Принятые для основных величин единицы измерения будем называть основными, или *первичными*, а все остальные – *вторичными*. В механике достаточно установить единицы измерения для трех величин. Каких именно, это зависит от конкретных условий той или иной задачи, в разных вопросах целесообразно за основные единицы брать единицы измерения различных величин. Так, в физических исследованиях удобно за основные брать единицы длины, времени и массы, а в технике – единицы длины, времени и силы. Но можно было бы взять за основные единицы скорость, вязкость и плотность, если это удобно для решения конкретной задачи.

В одной из первых физических систем основных единиц, предложенной Гауссом, за единицу длины был взят сантиметр, за единицу массы – грамм, а за единицу времени – секунда. Эта система носит название CGS (сантиметр-грамм-секунда). В технической системе за основные единицы приняты метр, килограмм-сила и секунда (система MKS). В настоящее время принята другая, международная система основных величин СИ (SI). В этой системе в качестве основных единиц приняты метр, килограмм-масса, секунда.

Как только установлены основные единицы измерения, единицы измерения для других, вторичных механических величин, например силы, скорости, энергии и т.д., получаются автоматически из определительного уравнения, служащего определением этой величины в математической форме. Например, определительным уравнением для силы можно считать второй закон Ньютона $F = ma$, для скорости $v = dl/dt$ и т.д.

3.3. Размерность, формула размерности

Выражение вторичной единицы измерения через принятые основные называется *размерностью* вторичной величины. Размерность записывается символически в виде формулы, в которой символ единицы длины обозначается буквой L , символ единицы массы – буквой M , символ единицы времени – буквой T . Для обозначения размерности какой-нибудь величины Q будем пользоваться символом $[Q]$, введенным Максвеллом. Тогда для основных величин, очевидно, $[L] = L$, $[T] = T$, $[M] = M$, а для вторичных, в соответствии с определительным уравнением: $[V] = LT^{-1}$, $[a] = LT^{-2}$, $[F] = [M] \cdot [a] = MLT^{-2}$ и т.д. Эти формулы, определяющие размерность величин, называют *формулами размерности*.

Оказывается, формула размерности любой вторичной величины имеет вид степенного многочлена

$$[Q] = M^m L^l T^t. \quad (3.2)$$

Такой вид формулы является следствием физического условия: отношение двух численных значений любой вторичной величины Q не должно зависеть от выбора основных единиц измерения (чисто математически доказывается, что такому условию удовлетворяют только степенные многочлены). Например, отношение двух площадей, измеренных в квадратных метрах, будем таким же, как и отношение этих площадей, измеренных в квадратных сантиметрах.

Зададимся теперь вопросом: нельзя ли в качестве первичных величин выбрать не известную уже тройку величин L, T, M , а какую-нибудь иную u_1, u_2, u_3 (например, скорость v , вязкость μ , плотность ρ)? Очевидно, это можно сделать, если:

1) размерности $[u_1], [u_2], [u_3]$ являются независимыми функциями L, T, M , то есть $[u_1] \neq [u_2]^\alpha [u_3]^\beta$ ни при каких α и β ;

2) возможно однозначное обратное преобразование, то есть L, T, M можно выразить через $[u_1], [u_2], [u_3]$ единственным образом.

Пусть размерности $[u_1], [u_2], [u_3]$ имеют вид:

$$[u_1] = L^{\lambda_1} T^{\tau_1} M^{\mu_1}; [u_2] = L^{\lambda_2} T^{\tau_2} M^{\mu_2}; [u_3] = L^{\lambda_3} T^{\tau_3} M^{\mu_3}.$$

Прологарифмируем эти выражения:

$$\lg[u_1] = \lambda_1 \lg L + \tau_1 \lg T + \mu_1 \lg M;$$

$$\lg[u_2] = \lambda_2 \lg L + \tau_2 \lg T + \mu_2 \lg M;$$

$$\lg[u_3] = \lambda_3 \lg L + \tau_3 \lg T + \mu_3 \lg M.$$

Как известно, такая система уравнений имеет единственное решение, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \tau_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \tau_2 & \mu_2 \\ \lambda_3 & \tau_3 & \mu_3 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3.3)$$

При выполнении условия (3.3) L, T, M однозначно выражаются через $[u_1], [u_2], [u_3]$. В то же время условие (3.3) обеспечивает и независимость функций $[u_1], [u_2], [u_3]$. Действительно, если бы имелось равенство $[u_1] \neq [u_2]^\alpha [u_3]^\beta$, то

$$\lg[u_1] = \alpha \lg[u_2] + \beta \lg[u_3],$$

а тогда и $\lambda_1 = \alpha\lambda_2 + \beta\lambda_3$; $\tau_1 = \alpha\tau_2 + \beta\tau_3$; $\mu_1 = \alpha\mu_2 + \beta\mu_3$, то есть налицо линейная комбинация строк определителя, и значит, $\Delta = 0$, что противоречит условию (3.3).

Таким образом, условием возможности выбора в качестве основных величин $[u_1], [u_2], [u_3]$ является соотношение (3.3). Например, первичными величинами могут быть сила, время, длина: $u_1 = F$, $u_2 = T$, $u_3 = L$, так как соответствующий определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Первичными величинами могут быть и сила, плотность, время, поскольку соответствующий определитель $\Delta = -4$. Но для силы, скорости и мощности $\Delta = 0$, эти величины не являются независимыми (что можно усмотреть из связывающего их уравнения $N = FV$), и их размерности не могут быть использованы в качестве основных единиц измерения.

3.4. Безразмерные комплексы

Как уже упоминалось во введении, в теории подобия и размерностей определяющую роль имеют безразмерные комплексы, или величины нулевой размерности, представляющие собой произведение различных степеней размерных физических величин, их обозначают обычно буквой Π (пи). Так, $Vt/l = \Pi_2$, $at/V = \Pi_2$ (V , t , l , a – соответственно скорость, время, длина, ускорение).

Выясним следующий вопрос, важный для дальнейшего: сколько независимых между собой безразмерных комплексов можно образовать из n размерных физических величин? Напомним, что независимость k величин Π_i ($i = 1, \dots, k$) означает, что ни для одного из значений i нельзя образовать тождество: $\Pi_i = F(\Pi_1, \dots, \Pi_{i-1}, \Pi_{i+1}, \dots, \Pi_k)$, символ F обозначает всевозможные операции (умножение, возведение в степень, сложение и т.д.).

Итак, пусть имеются n величин P_i , $i = 1, \dots, n$. Размерность любой из них можно выразить через основные едини-

цы измерения: $[P_i] = M^{m_i} L^{l_i} T^{t_i}$, $i = 1, \dots, n$. Любой безразмерный комплекс – некоторая комбинация величин P_i , $i = 1, \dots, n$: $\Pi = P_1^{z_1} P_1^{z_2} \dots P_n^{z_n}$. Следовательно,

$$[\Pi] = \prod_1^n (M^{m_i} L^{l_i} T^{t_i})^{z_i}.$$

Принимая во внимание, что безразмерные комплексы – это величины нулевой размерности, можно записать:

$$\begin{aligned} m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_n z_n &= 0; \\ l_1 z_1 + l_2 z_2 + \dots + l_n z_n &= 0; \\ t_1 z_1 + t_2 z_2 + \dots + t_n z_n &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Система (3.4) представляет собой систему трех алгебраических уравнений относительно неизвестных $z_1, z_2, \dots, z_n$. Поэтому число независимых решений равно $n - r$, где r – ранг матрицы ее коэффициентов. Тем самым мы доказали, что из n физических размерных величин можно получить $(n - r)$ независимых безразмерных комплексов. Эти $(n - r)$ независимых комплексов назовем *фундаментальными*, или *базовыми*. Всякий же следующий $(n - r + 1)$ -й комплекс уже не будет независим и выражается через базовые: $\Pi_{n-r+1} = F(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-r})$.

Если среди n величин P_i , $i = 1, \dots, n$, найдутся три с независимыми размерностями, то ранг матрицы коэффициентов системы (3.4) будет равен трем. Таким образом, *из n размерных величин с r независимыми размерностями (для механических систем $r \leq 3$) можно составить $(n - r)$ независимых безразмерных комплексов Π_i , $i = 1, \dots, n$.*

Пример 1. Составить безразмерные комплексы для набора величин:

$$l \text{ (м)}, v \text{ (м/с)}, \mu \text{ (м}^2\text{/с)}, g \text{ (м/с}^2\text{)}, \rho \text{ (кг/м}^3\text{)}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} [l] &= M^0 L^1 T^0; \quad [v] = M^0 L^1 T^{-1}; \quad [\mu] = M^0 L^2 T^{-1}; \\ [g] &= M^0 L^1 T^{-2}; \quad [\rho] = M^1 L^{-3} T^0. \end{aligned}$$

Следовательно:

$$z_5 = 0; \quad z_1 + z_2 + z_3 + 2z_4 - 3z_5 = 0; \quad -z_2 - 2z_3 - z_4 = 0.$$

Видим, что $n = 5$, $r = 3$. Значит $n - r = 2$, и мы можем составить два независимых безразмерных комплекса, например:

$$z_1 = -1, z_2 = -1, z_3 = 0, z_4 = 1, z_5 = 0, \text{ тогда } \Pi_1 = \mu/(Vl);$$

$$z_1 = -1, z_2 = 2, z_3 = -1, z_4 = 0, z_5 = 0, \text{ и тогда } \Pi_2 = V^2/(lg).$$

3.5. Метод нулевых размерностей. Π -теорема

Физические закономерности, устанавливаемые теоретически или непосредственно из опыта, представляют собой функциональные зависимости между физическими величинами, характеризующими исследуемое явление. Численные значения этих физических величин зависят от выбора системы единиц измерения, в то время как система единиц никак не связана с существом явления. Поэтому имеет смысл перевести эти функциональные зависимости в безразмерный вид и тем самым освободить их от систем единиц измерения.

Пусть мы имеем некоторый процесс в рамках механической системы, характеризуемый величиной q , которая является функцией независимых между собой других размерных величин $q_1, q_2, \dots, q_n$:

$$q = q(q_1, q_2, \dots, q_n). \quad (3.5)$$

Задача состоит в том, чтобы выяснить структуру зависимости (3.5) в предположении, что эта функция выражает собой некоторый физический закон, не зависящий от выбора системы единиц измерения.

Пусть среди размерных величин $q_1, q_2, \dots, q_n$ первые r величин имеют независимые размерности. В этом случае, как мы уже знаем, можно составить $(n - r)$ независимых базовых комплексов $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-r}$. Любой следующий комплекс Π_{n-r+p} будет зависеть от этих базовых $\Pi_{n-r+p} = f_p(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-r})$, $p = 1, \dots, r$.

Выражение (3.5) в терминах безразмерных величин примет тогда вид:

$$\Pi = F(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-r}, f_1(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-r}), \dots, f_r(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-r})) = F1(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-r}). \quad (3.6)$$

Здесь функция F_1 включает и зависимость F от $P_1, P_2, \dots, P_{n-r}$, и зависимость f_p от тех же комплексов. Функциональная зависимость (3.6) уже не зависит от выбора системы единиц измерения, так как все величины в этом выражении имеют нулевую размерность.

Таким образом, связь между $(n + 1)$ размерными величинами $q, q_1, q_2, \dots, q_n$, независимая от выбора системы единиц измерения, принимает вид соотношения между $(n - r + 1)$ величинами $P, P_1, P_2, \dots, P_{n-r}$, представляющими собой безразмерные комбинации из $(n + 1)$ размерных величин. Этот общий вывод теории подобия и размерностей носит название *П-теоремы: функциональная зависимость между характеризующими процесс величинами может быть представлена в виде зависимости между составленными из них безразмерными комплексами.*

Практическая значимость этой теоремы в том, что при исследовании любой проблемы обычные переменные (физические размерные величины и параметры задачи) нужно заменить их безразмерными комплексами, то есть перейти к другим, «обобщенным» переменным. Преимущества такого подхода, как уже мы отметили во введении, состоят в том, что, во-первых, задача становится проще, так как число безразмерных комплексов меньше (на r) числа исходных размерных величин, а во-вторых, сами комплексы отчетливо проявляют внутренние связи, и качественная картина становится более ясной. В подтверждение сказанному рассмотрим несколько примеров.

Пример 2. Движение математического маятника

Ограничимся случаем плоского движения маятника (рис. 3.6). Введем обозначения: l – длина маятника; φ – угол поворота; t – время; m – масса груза. Если пренебречь силами сопротивления, то задача о движении маятника сводится к решению уравнений:

$$\ddot{\varphi} = -\left(\frac{g}{l}\right) \sin \varphi; \quad m\dot{\varphi}^2 l = N - mg \cos \varphi,$$

где N – натяжение нити.

Пусть начальные условия таковы: при $t = 0$ $\varphi = \varphi_0$; $\dot{\varphi} = 0$.

Из уравнений и начальных условий очевидно, что определяющими параметрами являются t, l, g, m, φ_0 . Численные значения всех остальных величин определяются полностью значениями этих параметров. В частности,

$$\varphi = \theta(t, l, g, m, \varphi_0); N = \sigma(t, l, g, m, \varphi_0), \quad (3.7)$$

где θ и σ – некоторые неизвестные функции.

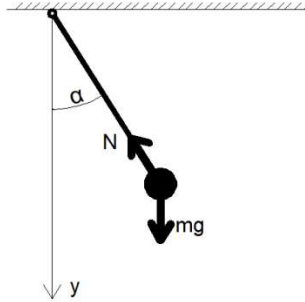


Рис. 3.6

Из пяти аргументов t, l, g, m, φ_0 можно составить два независимых безразмерных комплекса, так как в нашем случае имеются три независимые единицы измерения ($r = 3$). Составим их: $\Pi_1 = t^\alpha l^\beta g^\gamma m^\delta$; $\Pi_2 = \varphi_0$; $[\Pi_1] = T^\alpha L^\beta (LT^{-2})^\gamma M^\delta = T^{\alpha-2\gamma} L^{\beta+\gamma} M^\delta$.

Тогда $\alpha - 2\gamma = 0$; $\beta + \gamma = 0$; $\delta = 0$. Следовательно, $\gamma = \alpha/2$; $\beta = -\alpha/2$; $\delta = 0$; $\Pi_1 = t^\alpha l^{-\alpha/2} g^{\alpha/2} = (t\sqrt{g/l})^\alpha$. Так как выражение в скобках нулевой размерности, то, не ограничивая общности, можно положить $\alpha = 1$. Таким образом,

$$\Pi_1 = t\sqrt{g/l}; \quad \Pi_2 = \varphi_0.$$

Величина φ является безразмерной, а сила N обезразмеривается на очевидное выражение mg . И мы получаем вместо (3.7) его безразмерный аналог:

$$\varphi = \theta(\varphi_0, t\sqrt{g/l}); \quad N/(mg) = \sigma(\varphi_0, t\sqrt{g/l}). \quad (3.8)$$

Полученные выражения (3.8) показывают, что закон движения не зависит от массы груза, а натяжение нити прямо пропорционально массе груза.

Значительно более детальный результат можно получить для периода колебаний маятника $T_m = F(l, g, m, \varphi_0)$, так как процесс считается установившимся, и период не зависит от времени. В этом случае из l, g, m, φ_0 можно составить только один безразмерный комплекс $\Pi_1 = \varphi_0$, а применение теории размерностей дает $\Pi_0 = F(\varphi_0)$, где $\Pi_0 = T_m l^a g^b m^c$ – безразмерная величина периода колебаний T_m .

$$[\Pi_0] = TL^2(LT^{-2})^b M^c = T^{1-2b} L^{2+b} M^c.$$

Следовательно, $1 - 2b = 0$; $a + b = 0$; $c = 0$, то есть $b = 1/2$, $a = -1/2$, $c = 0$. Значит, $T_m \sqrt{g/l} = F(\varphi_0)$, или $T_m = F(\varphi_0) \sqrt{l/g}$.

Для малых колебаний (малых φ) безразмерную функцию $F(\varphi_0)$ с учетом ее четности можно представить в виде степенного ряда $F(\varphi_0) = a_0 + a_1 \varphi_0^2 + \dots \approx a_0 = \text{const}$, или $T_m = a_0 \sqrt{l/g}$. Как известно из точного решения соответствующей задачи, $a_0 = 2\pi$.

Рассмотренный пример показывает, что применение теории размерностей существенно облегчает решение задачи. Не решая дифференциального уравнения (или не проводя эксперимента), мы почти решили задачу об определении периода колебаний. Нам осталось лишь найти функцию $F(\varphi_0)$, а в случае малых колебаний – постоянную a_0 . Отметим, что изначально $T_m = F(l, g, m, \varphi_0)$.

Пример 3. Движение несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе

Во введении (см. рис. 3.5) мы этот пример уже рассматривали, сказав при этом, что давление $p = p(d, \rho, \mu, U)$ на самом деле будет зависеть только от числа Рейнольдса: $p = p(\text{Re})$, $\text{Re} = dU\rho/\mu$. Сейчас, вооружившись теорией размерностей, мы убедимся в этом.

Основных размерных величин четыре: d, ρ, μ, U . Независимых – три. Значит, мы можем составить один безразмер-

ный комплекс $\Pi_1 = d^a \rho^b \mu^c U^d$. Его размерность $[\Pi_1] = L^a M^b L^{-3b} M^c L^{-c} T^{-c} L^d T^{-d} = L^{a-3b-c+d} T^{-c-d} M^{b+c}$. Следовательно, $a - 3b - c + d = 0$; $-c - d = 0$; $b + c = 0$. Не ограничивая общности, положим $a = 1$, и тогда $b = d = 1$, $c = -1$, значит, $\Pi_1 = dU\rho/\mu = \text{Re}$.

Обезразмерим еще давление: $\Pi_0 = p/(\rho U^2)$. Тогда соотношение $\Pi_0 = F(\Pi_1)$ примет вид:

$$p = \rho U^2 F(\text{Re}). \quad (3.9)$$

Отметим, что полученное соотношение (3.9) означает, что если мы для одной конкретной цилиндрической трубы найдем с помощью расчета или эксперимента вид функции $F = F(\text{Re})$, то результаты такого расчета или эксперимента останутся верны для определения давления жидкости в любой цилиндрической трубе при том же самом числе Рейнольдса.

Пример 4. Истечение тяжелой жидкости через водослив

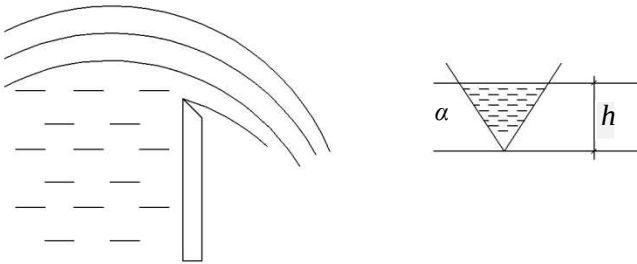


Рис. 3.7

Рассмотрим задачу о струйном течении тяжелой жидкости через водослив (рис. 3.7), представляющий собой вертикальную стенку с треугольным вырезом. Жидкость вытекает под напором превышения уровня жидкости над минимальным уровнем выреза h . Предполагается при этом, что течение установившееся, то есть h не меняется со временем. При та-

ком истечении основное значение имеют свойства инерции и весомости, которые характеризуются значениями плотности жидкости ρ и ускорением силы тяжести g соответственно. Тогда масса жидкости Q , вытекающая через отверстие водослива в единицу времени, может быть функцией только этих параметров ρ, g, h : $Q = Q(\rho, g, h)$. Обезразмерим Q с помощью данных величин ρ, g, h : $\Pi_0 = Q/\rho^a g^b h^c$. Имеем: $[\Pi_0] = M T^{-1} M^{-a} L^{3a} L^{-b} T^{2b} L^{-c} = M^{1-a} L^{3a-b-c} T^{2b-1}$. Следовательно, $1-a=0$; $3a-b-c=0$; $2b-1=0$. Отсюда $a=1$; $b=1/2$; $c=5/2$. Тогда $\Pi_0 = Q/(\rho g^{1/2} h^{5/2})$.

Как следует из теории размерностей, из величин ρ, g, h нельзя составить ни одного безразмерного комплекса в силу их независимости. Это означает, что $\Pi_0 = F = \text{const}$, или

$$Q = C \rho g^{1/2} h^{5/2}, \quad (3.10)$$

где C – абсолютная постоянная, которую можно определить из опыта.

Полученная формула (3.10) полностью определяет зависимость расхода жидкости от напора h и от плотности ρ при фиксированном угле α . Если изменить α и проделать те же выкладки, то изменится только $C = C(\alpha)$. То есть допуская водосливы с различными углами α , система определяющих параметров дополняется углом α , и формула (3.10) принимает вид:

$$Q = C(\alpha) \rho g^{1/2} h^{5/2}.$$

Рассмотренный пример показывает, что соображения, полученные с помощью теории подобия и размерностей, могут приносить большую пользу при постановке опытов, позволяя ограничивать их количество и получать благодаря этому экономию не только в средствах, но и во времени. Изменение одних величин можно заменять в опыте изменением других. На основе опытов, проведенных с водой, можно дать исчерпывающие ответы при вытекании нефти, ртути и т.д.

Пример 5. Теорема Пифагора

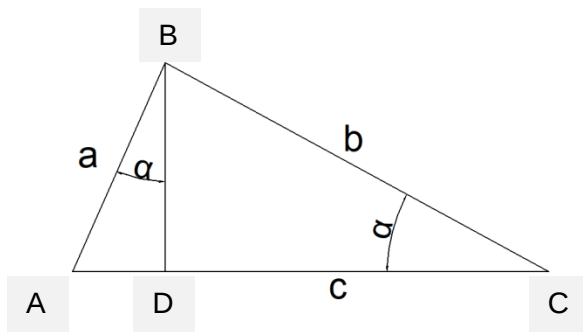


Рис. 3.8

Всего известно более полутора сотен доказательств теоремы Пифагора! Приведем ее доказательство с помощью нашей теории.

Определяющими параметрами (рис. 3.8) будут длина гипотенузы c и угол α . То есть $n = 2$, $r = 1$. Следовательно, $n - r = 1$, и мы можем составить один безразмерный комплекс $L_1 = \alpha$. Введем обозначения: $S = S_{ABC}$; $S_1 = S_{ABD}$; $S_2 = S_{CBD}$. Имеем: $S = S(c, \alpha)$; $[S] = L^2$. Следовательно, $S = c^2 F(\alpha)$. Аналогично, $S_1 = a^2 F(\alpha)$; $S_2 = b^2 F(\alpha)$. Так как $S = S_1 + S_2$, то $c^2 F(\alpha) = a^2 F(\alpha) + b^2 F(\alpha)$, отсюда $c^2 = a^2 + b^2$. Теорема доказана.

3.6. Подобие систем

Пусть $p_1, \dots, p_n$ – параметры системы, которые полностью ее определяют. И пусть $q_1, \dots, q_S$ – обобщенные координаты, описывающие ее поведение. Их количество S равно числу степеней свободы системы. Тогда

$$q_i = f_i(p_1, \dots, p_n), \quad i = 1, \dots, S. \quad (3.11)$$

Например, для грузика, колеблющегося на пружинке, параметрами будут m, c, g, x_0, v_0, t , число степеней свободы $S = 1$, $q_1 = x$, $x = f(m, c, g, x_0, v_0, t)$.

Пусть теперь мы имеем две системы. *Две системы называются подобными, если их обобщенные координаты для сходных значений параметров пропорциональны.*

Для удобства первую систему назовем *натурой*, а вторую – *моделью* (соответствующие величины будем обозначать индексами n и m).

$$\begin{aligned} q_{ni} &= f_i(p_{n1}, \dots, p_{nm}), \\ q_{mi} &= f_i(p_{m1}, \dots, p_{mm}), i = 1, \dots, S. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Подобие тогда означает, что

если $p_{nk} = a_k p_{mk}$, $a_k = \text{const}$, $k = 1, \dots, n$,
то и $q_{nj} = b_j q_{mj}$, $b_j = \text{const}$, $j = 1, \dots, S$.

Воспользуемся теперь Π -теоремой и перепишем (3.12) в безразмерном виде:

$$\Pi_{ni} = \varphi_i(\Pi_{n1}, \dots, \Pi_{n(n-r)}); \Pi_{mi} = \varphi_i(\Pi_{m1}, \dots, \Pi_{m(n-r)}), \quad (3.13)$$

где $(n - r)$ – число базовых комплексов для природы и для модели;

r – число независимых размерностей.

Видим, что если в правых частях уравнений (3.13) все безразмерные комплексы у природы и у модели равны, то есть $\Pi_{nj} = \Pi_{mj}$, $j = 1, \dots, (n - r)$, то и левые части равны: $\Pi_{ni} = \Pi_{mi}$, $i = 1, \dots, S$.

Мы показали тем самым, что если у модели и природы базовые безразмерные комплексы равны, то модель подобна природе. Так как любой безразмерный комплекс может быть выражен через базовые, то для подобных систем любые безразмерные комплексы совпадают. Базовые безразмерные комплексы поэтому называют *критериями подобия*. Полученный результат формулируется в виде теорем подобия:

Необходимым и достаточным условием подобия двух систем является равенство численных значений определяющих критериев подобия. Равенство численных значений остальных критериев подобия является следствием существования подобия. Эти остальные критерии являются функциями определяющих критериев.

Уравнения (3.13) называют еще *критериальными уравнениями*. Они представляют собой интересные нас зави-

симости между обобщенными координатами и параметрами системы, выраженные в безразмерной форме. Конкретная форма функциональных зависимостей, то есть функций φ_i , может быть найдена либо экспериментально, либо с помощью расчета (аналитического или с применением ЭВМ).

3.7. Основы физического моделирования

Теперь мы уже можем дать ответы на следующие вопросы: как строить модель, как обрабатывать данные, как обобщать и распространять полученные данные на другие объекты?

Чтобы применить результаты теории подобия и размерностей, нужно:

1. Обеспечить, чтобы модель и натура описывались одним и тем же набором параметров $(p_{n1}, \dots, p_{nm})$ и $(p_{m1}, \dots, p_{mn})$. Поэтому нужно сначала определить этот набор параметров. Если задача сформулирована математически, то такой набор легко выписать исходя из дифференциальных уравнений, начальных и граничных условий. В этом случае нужно просто отметить все размерные и безразмерные параметры, входящие в эти уравнения. Если математической постановки нет, то необходимо установить те факторы, которые необходимы для полного определения искомых величин.

2. Составить из выбранного определяющего набора параметров $(n - r)$ базовых критериев подобия. Согласно теоремам подобия, нужно обеспечить равенство численных значений этих критериев для природы и для модели:

$$P_{ni} = P_{mi}, \quad i = 1, \dots, (n - r). \quad (3.14)$$

Суть дела здесь в следующем: при моделировании параметры p_{ni} , $i = 1, \dots, n$ мы изменяем, как нам это удобно (например, уменьшаем размеры модели по сравнению с натурой), то есть $p_{ni} = a_i p_{mi}$, $a_i = \text{const}$. Но нельзя все a_i выбирать произвольно! Можно брать только такие a_i , $i = 1, \dots, n$, которые обеспечивают равенство критериев подобия (3.14). Эти равенства дают жесткие ограничения при построении модели.

3. Предметом исследования на модели должно быть определение функциональных зависимостей $\Pi_{mi} = \varphi_i(\Pi_{m1}, \dots, \Pi_{m(n-r)})$. То есть эксперимент (или расчет) на модели должен проводиться так, чтобы можно было изменять все величины, содержащиеся в критериях подобия.

4. Обработка полученных на модели данных должна производиться в критериальной форме и результаты представляться в виде графиков (диаграмм) критериальных зависимостей. В случае необходимости подбираются эмпирические формулы, наиболее удовлетворительно описывающие полученные критериальные зависимости. Только в этом случае результаты, полученные на модели, можно применять для целого ряда натуральных объектов, подобных модели (то есть таких, для которых базовые критерии численно равны модельным).

Пример 6. Рассмотрим задачу об установившемся поступательном плоскопараллельном движении тела в несжимаемой вязкой жидкости (рис. 3.9). Список основных параметров будет следующий: v – скорость тела; α – угол атаки; ρ – плотность жидкости; d – характерный размер тела; μ – вязкость жидкости. Из этих пяти величин можно составить два ($n - r = 2$) безразмерных комплекса: $\Pi_1 = \alpha$; $\Pi_2 = \text{Re} = v d \rho / \mu$. Поэтому при моделировании необходимо их сохранить. Первое условие $\alpha = \text{const}$ всегда легко осуществить в эксперименте. Труднее удовлетворить второму условию $\text{Re} = v d \rho / \mu = \text{const}$, особенно в тех случаях, когда обтекаемое тело имеет большие размеры, как, например, крыло самолета. Если модель меньше натуры, то для сохранения $\text{Re} = \text{const}$ необходимо увеличивать скорость V обтекающего потока, что практически неосуществимо. Либо существенно изменить плотность или вязкость жидкости. На практике эти обстоятельства вносят большие затруднения при изучении гидродинамического сопротивления. Необходимость выполнения условия $\text{Re} = \text{const}$ привела к постройке гигантских аэродинамических труб, в которых можно производить продувки

самолетов в натуре, а также к постройке труб закрытого типа, в которых циркулирует с большой скоростью сжатый воздух (более плотный).

Пример 7. Разберемся теперь с самым первым примером (см. рис. 3.1), рассмотренным во введении. А именно, выясним, где допущена ошибка при создании модели. Определяющими параметрами в этом примере являются l (м), ρ (кг/м³), g (м/с²), σ (Н/м² = кг/(м·с²)). Имеем: $n = 4$, $r = 3$, $n - r = 1$, $\Pi_1 = l^a \rho^b g^c \sigma^d$. Полагаем $a = 1$.

$$[\Pi_1] = L M^b L^{-3b} L^c T^{-2c} M^d L^{-d} T^{-2d}.$$

Следовательно,

$$1 - 3b + c - d = 0; \quad b + d = 0; \quad -2c - 2d = 0.$$

Значит,

$$a = b = c = 1; \quad d = -1,$$

и тогда

$$\Pi_1 = l \rho g / \sigma.$$

У нас было: $l_H = 10l_M$; $\rho_H = \rho_M$; $g_H = g_M$; $\sigma_H = \sigma_M$. Поэтому $\Pi_{1H} = 10\Pi_{1M}$. То есть критерий подобия не выполняется, отсюда и «прокол» (на модели пятикратный запас прочности, а на натуре стойки сломались). При правильном моделировании нужно было, например, полагать $\sigma_H = 10\sigma_M$.

Теория подобия и размерностей, таким образом, является «грамматикой» моделирования. Незнание этой грамматики может приводить (и приводит!) к неправильным результатам при переносе данных модельного эксперимента на натуру.

Отметим в заключение, что исследование на моделях зачастую является единственно возможным способом. Так обстоит дело при изучении натуральных явлений, протекающих в природе сотни или даже тысячи лет. Или наоборот, при изучении очень быстро протекающих процессов. В условиях модельного опыта эти же явления могут протекать в течение минут или часов.

Вопросы для самоконтроля

1. К каким проблемам теория подобия и размерностей имеет непосредственное отношение?
2. Какие величины называют размерными? А какие безразмерными? В чем основное отличие между ними?
3. Назовите основные системы единиц измерения в механике.
4. Какие величины называются первичными, а какие вторичными? Приведите примеры.
5. Что называют размерностью величины?
6. Какой вид имеет формула размерности?
7. Можно ли в качестве первичных величин выбрать не известную уже тройку величин L , T , M , а какую-нибудь иную u_1 , u_2 , u_3 ? Какое условие должно при этом выполняться?
8. Что такое безразмерный комплекс?
9. Что означает независимость безразмерных комплексов между собой?
10. Сколько независимых безразмерных комплексов можно составить из n размерных величин?
11. В чем суть метода нулевых размерностей?
12. Приведите формулировку Π -теоремы.
13. Какие две системы называют подобными?
14. Каковы критерии подобия двух систем?
15. Какие уравнения называют критериальными?
16. Какие условия должны быть выполнены при построении модели явления?
17. Почему нельзя при построении модели коэффициенты подобия основных параметров выбирать произвольно? Каким дополнительным условиям они должны удовлетворять?
18. Что должно быть предметом исследования на модели?
19. В каком виде нужно проводить обработку полученных на модели данных?

Упражнения

- У1.** Выяснить, можно ли в качестве первичных величин выбрать тройку: ρ – плотность, m – масса, v – скорость.
- У2.** Составить безразмерные комплексы для набора физических величин:
 ρ (кг/м³), n (1/с), l (м), Q (м³/с), H (н/м²), N (Вт).
- У3.** Пусть основными параметрами задачи являются:
 l (м), v (м/с), g (м/с²), μ (м²/с), ρ (кг/м³).
1. Показать, что в качестве основных величин можно принять l , v , ρ .
 2. Приняв эту тройку за основные величины, составить безразмерные комплексы.
 3. Переписать уравнение $F = f(\rho, n, l, Q, H, N)$, где F – сила (Н), в критериальной форме.

Учебное издание

Юдин Владимир Алексеевич

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЛЕКЦИИ
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Учебное пособие

ISBN 978-5-7795-0824-7



Темплан 2017 г.

Редактор Э.Е. Полякова
Корректор Е.Л. Корецкая

Санитарно-эпидемиологическое заключение

№ 54.НС.05.953.П.006252.06.06 от 26.06.2006 г.

Подписано к печати 23.08.2017. Формат 60×84 $\frac{1}{16}$ д.л.

Гарнитура Таймс. Бумага офсетная. Ризография.

Объем 4,88 уч.-изд.л.; 5,25 п.л. Тираж 110 экз. Заказ №

Новосибирский государственный архитектурно-строительный
университет (Сибстрин)

630008, Новосибирск, ул. Ленинградская, 113

Отпечатано