



**В.А. ЮДИН**

**ЛЕКЦИИ  
ПО ОБЩИМ ТЕОРЕМАМ  
ДИНАМИКИ  
МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

**НОВОСИБИРСК 2015**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
(СИБСТРИН)

**В.А. Юдин**

**ЛЕКЦИИ  
ПО ОБЩИМ ТЕОРЕМАМ  
ДИНАМИКИ  
МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

**Учебное пособие**

НОВОСИБИРСК 2015

УДК 531.3  
ББК В21  
Ю 163

**Юдин В. А.**

Лекции по общим теоремам динамики механических систем : курс лекций / В. А. Юдин ; Новосиб. гос. архитектур.-строит. ун-т (Сибстрин). – Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2015. – 108 с.

**ISBN 978-5-7795-0731-8**

Учебное пособие включает четыре лекции по динамике механических систем: введение в динамику механической системы, теоремы о движении центра масс и об изменении количества движения, теорему об изменении момента количества движения, теорему об изменении кинетической энергии. Пособие предназначено для студентов всех специальностей дневной и вечерней форм обучения.

Издается по решению  
издательско-библиотечного совета НГАСУ (Сибстрин)

Рецензенты:

- С.М. Аульченко, д-р физ.-мат. наук,  
вед. науч. сотрудник (ИТПМ СО РАН);
- А.Я. Ройтман, канд. физ.-мат. наук, доцент  
НГАСУ (Сибстрин)

**ISBN 978-5-7795-0731-8** © Юдин В.А., 2015  
© Новосибирский государственный  
архитектурно-строительный  
университет (Сибстрин), 2015

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                      |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Предисловие.....                                                                     | 5  |
| Лекция 1. Введение в динамику механической системы.....                              | 6  |
| 1.1. Механическая система.....                                                       | 6  |
| 1.2. Дифференциальные уравнения (ДУ)<br>движения механической системы.....           | 7  |
| 1.3. Меры движения механической системы .....                                        | 9  |
| 1.4. Внешние и внутренние силы .....                                                 | 10 |
| 1.5. Масса системы, центр масс, момент инерции<br>относительно оси.....              | 12 |
| 1.6. Моменты инерции относительно параллельных осей.....                             | 16 |
| 1.7. Момент инерции относительно произвольной оси .....                              | 18 |
| Вопросы для самоконтроля.....                                                        | 21 |
| Упражнения.....                                                                      | 22 |
| Лекция 2. Теоремы о движении центра масс и об изменении<br>количества движения ..... | 23 |
| 2.1. Теорема о движении центра масс .....                                            | 23 |
| 2.2. Законы сохранения движения центра масс .....                                    | 25 |
| 2.3. Примеры, иллюстрирующие теорему<br>о движении центра масс .....                 | 26 |
| 2.4. Количество движения (импульс) системы .....                                     | 30 |
| 2.5. Импульс силы.....                                                               | 32 |
| 2.6. Теорема об изменении количества движения (импульса) .                           | 33 |
| 2.7. Законы сохранения количества движения (импульса).....                           | 34 |
| 2.8. Применение теоремы к движению жидкостей.....                                    | 35 |
| 2.9. Применение теоремы к движению тел<br>переменной массы.....                      | 38 |
| 2.10. Рекомендации к решению задач на применение теорем..                            | 41 |
| Вопросы для самоконтроля.....                                                        | 45 |
| Упражнения.....                                                                      | 45 |
| Лекция 3. Теорема об изменении момента количества<br>движения .....                  | 47 |
| 3.1. Момент количества движения точки и механической<br>системы .....                | 47 |

|                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.2. Теорема об изменении момента количества движения<br>(теорема моментов) ..... | 50  |
| 3.3. Законы сохранения момента количества движения .....                          | 54  |
| 3.4. Движение точки под действием центральной силы.<br>Закон площадей .....       | 56  |
| 3.5. Физический маятник .....                                                     | 58  |
| 3.6. Применение теоремы моментов к движению жидкости ....                         | 60  |
| 3.7. ДУ движения твердого тела .....                                              | 62  |
| 3.8. Приближенная теория гироскопа .....                                          | 65  |
| 3.9. Решение задач с использованием теоремы моментов .....                        | 71  |
| Вопросы для самоконтроля .....                                                    | 76  |
| Упражнения .....                                                                  | 77  |
| Лекция 4. Теорема об изменении кинетической энергии .....                         | 78  |
| 4.1. Кинетическая энергия механической системы .....                              | 78  |
| 4.2. Работа силы .....                                                            | 81  |
| 4.3. Теорема об изменении кинетической энергии .....                              | 92  |
| 4.4. Решение задач с помощью теоремы<br>об изменении кинетической энергии .....   | 94  |
| 4.5. Закон сохранения механической энергии .....                                  | 101 |
| Вопросы для самоконтроля .....                                                    | 107 |
| Упражнения .....                                                                  | 108 |

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая работа посвящена систематическому изложению части курса теоретической механики, обычно читаемому в технических вузах. А именно, она посвящена основному разделу курса – общим теоремам динамики механических систем.

Данное пособие – это не учебник, а курс лекций. Автор намеренно написал его максимально приближенным к аудитории в надежде вызвать отклик и живую реакцию. Всего в пособии содержится четыре лекции – введение в динамику механической системы, теоремы о движении центра масс и об изменении количества движения, теорема об изменении момента количества движения, теорема об изменении кинетической энергии. Пособие написано на основе лекций, которые автор в течение многих лет читал в Новосибирском государственном архитектурно-строительном университете (Сибстрин).

Автор выражает благодарность всем сотрудникам кафедры теоретической механики, которые принимали активное участие в работе над лекциями.

# Лекция 1. ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

## 1.1. Механическая система

В разделе «Динамика точки» мы рассматривали движение лишь одной материальной точки. Теперь наша задача перейти к изучению движения системы материальных точек. *Совокупность материальных точек, движения которых взаимосвязаны, называют механической системой.* Твердые тела или системы тел, соединенных связями, также можно моделировать механической системой. Для этого разобьем их на  $N$  частей (на рис. 1.1 условно изображена система двух тел).

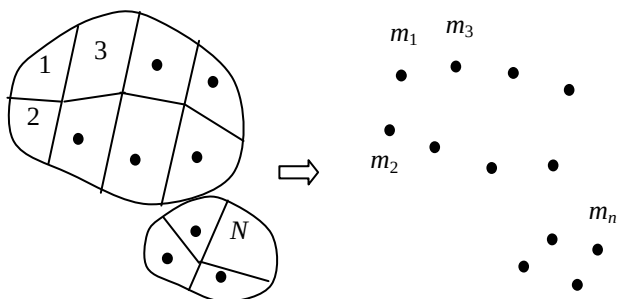


Рис. 1.1

Считая далее  $N$  достаточно большим, а каждый  $k$ -й ( $k = 1, \dots, N$ ) элемент разбиения конструкции достаточно малым, заменим его приближенно на материальную точку с массой  $m_k$ , равной массе этого элемента. При таком подходе задача о движении тела или системы тел сведется к задаче о движении совокупности из  $N$  материальных точек. Так как каждый из элементов разбиения на рис. 1.1 связан с соседними элементами, то движение  $k$ -й материальной точки будет зависеть от движения остальных точек  $p = 1, \dots, N, p \neq k$ .

## 1.2. Дифференциальные уравнения (ДУ) движения механической системы

Рассмотрим теперь движение механической системы в инерциальной системе координат  $Oxyz$ . Для каждой ее точки  $k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) можем применить второй закон Ньютона

$$m_k \frac{d^2 \mathbf{r}_k}{dt^2} = \mathbf{F}_k, \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{r}_k$  — ее радиус-вектор, а под  $\mathbf{F}_k$  понимается равнодействующая всех сил (активных и реакций связей), действующих на нее.

В проекциях на оси  $x, y, z$  векторные уравнения (1.1) запишутся в виде

$$m_k \ddot{x}_k = F_{kx}, \quad m_k \ddot{y}_k = F_{ky}, \quad m_k \ddot{z}_k = F_{kz}. \quad (1.2)$$

Уравнения (1.2) представляют собой *ДУ движения механической системы*. Число этих уравнений равно  $3N$ , а общее решение зависит от  $6N$  произвольных скалярных постоянных. Конечно, если все точки движутся параллельно некоторой плоскости, или прямой, то число ДУ (1.2) будет, соответственно,  $2N$  и  $N$ , а общее их решение будет зависеть от  $4N$  и, соответственно,  $2N$  произвольных скалярных постоянных.

Проиллюстрируем методы составления ДУ на примерах.

**Задача 1.** Два тела с массами  $m_1$  и  $m_2$  связаны между собой тросом, перекинутым через блок (рис. 1.2). Пренебрегая силами трения, массой троса и блока, определить ускорение грузов и натяжение троса.



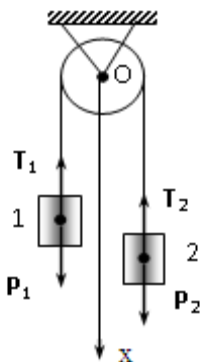


Рис. 1.2

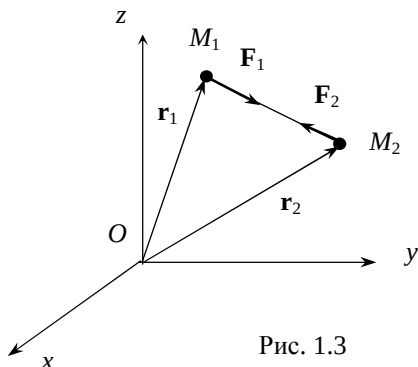


Рис. 1.3

**Решение.** Механическая система состоит из двух материальных точек, движущихся параллельно оси  $x$  (рис. 1.2). Следовательно, мы должны получить два ДУ движения этих точек в проекции на ось  $x$ . Предположим, что левый груз движется вниз с ускорением  $\ddot{x}_1$ , тогда правый груз будет двигаться вверх с ускорением  $\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1$ . Обозначая силы натяжения левой и правой части троса через  $T_1$  и  $T_2$ , составим ДУ движения в проекции на ось  $x$

$$m_1 \ddot{x}_1 = P_1 - T_1, \quad m_2 \ddot{x}_2 = P_2 - T_2,$$

в которых  $P_1 = m_1 g$ ,  $P_2 = m_2 g$ . Учитывая теперь, что  $\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1$  и  $T_2 = T_1 = T$  (так как силами трения и массой троса и блока пренебрегаем), получим

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g, \quad T = 2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Из этого решения видно, что правый груз движется равноускоренно вниз, если  $m_1 > m_2$  или вверх, если  $m_1 < m_2$ . Если же  $m_1 = m_2$ , то грузы покоятся или равномерно движутся. Отметим, что натяжение троса при  $m_1 \neq m_2$  не совпадает с силами тяжести  $P_1$ ,  $P_2$  грузов.

**Задача 2** (задача двух тел). Две свободные материальные точки  $M_1$  и  $M_2$  с массами  $m_1$  и  $m_2$ , соответственно, движутся под действием сил ньютоновского притяжения. Составить ДУ движения системы в векторной форме.

**Решение.** Введем инерциальную систему отсчета  $Oxyz$  и обозначим через  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  радиусы векторы точек  $M_1$  и  $M_2$  (рис. 1.3). Пусть еще  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  – вектор, соединяющий эти точки. По закону всемирного тяготения имеем  $F_1 = F_2 = f m_1 m_2 / r^2$ , где  $f$  – гравитационная постоянная. Направления сил  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$  определяются единичными векторами  $\mathbf{r}/r$  и  $-\mathbf{r}/r$  и, следовательно,  $\mathbf{F}_1 = (f m_1 m_2 / r^2) \cdot (\mathbf{r}/r)$  и  $\mathbf{F}_2 = -(f m_1 m_2 / r^2) \cdot (\mathbf{r}/r)$ . ДУ движения рассматриваемой системы в векторной форме будут тогда иметь вид

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = f \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}, \quad m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = -f \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}.$$

### 1.3. Меры движения механической системы

В общем случае произвольных механических систем составление ДУ (1.1) или (1.2) и решение их сопряжено с двумя основными трудностями.

Первая из них состоит в том, что, как правило, мы не знаем полностью сил  $\mathbf{F}_k$  ( $k=1, \dots, N$ ). Действительно, ведь  $\mathbf{F}_k$  представляют собой равнодействующие всех сил, действующих на точки системы. То есть в них входят и силы взаимодействия этих точек между собой, которые чаще всего заранее неизвестны. Для преодоления этой трудности приходится вносить дополнительные предположения о характере взаимодействия элементов механической системы между собой. Например, считать, что они ведут себя как упругие тела, или обладают заданными свойствами пластичности, или же моделировать их жидкими элементами (при возведении плотин с помощью взрыва с успехом может быть применено моделирование грунта идеальной несжимаемой

жидкостью, именно так производился расчет при строительстве плотины в урочище Медео близ города Алма-Аты).

Вторая трудность связана с решением систем ДУ с большим числом уравнений. Ведь  $N$  может быть очень большим. Для моделирования движения сложных конструкций их приходится разбивать на большое число элементов. Современный инженерный расчет может содержать десятки, сотни тысяч, а то и миллионы (!) таких элементов. Ясно, что такой расчет требует применения самых мощных ЭВМ и разработки численных методов решения систем ДУ, обеспечивающих заданную точность расчета.

Задача о движении механической системы значительно упростится, если отказаться от решения систем ДУ (1.1) или (1.2), т.е. отказаться от нахождения законов движения каждой точки механической системы. Вместо этого можно ввести несколько величин, характеризующих движение механической системы в целом и определить (с использованием системы (1.1) или (1.2)) их поведение со временем. Зная характер изменения этих величин, можно составить частичное представление, а иногда и полное, о движении механической системы. Такие величины называются *мерами движения*. Всего мы введем четыре меры движения – *центр масс, количество движения (импульс), момент количества движения (момент импульса) и кинетическую энергию* механической системы. Этому будут посвящены последующие три лекции. В этой же лекции нам нужно еще провести подготовительную работу – ввести ряд нужных в дальнейшем величин и исследовать их свойства.

#### **1.4. Внешние и внутренние силы**

В курсе статики мы рассматривали равновесие систем тел и уже разделяли силы на внешние и внутренние. Напомним еще раз их определение. *Внешними* по отношению к данной механической системе называются силы, действующие на точки этой системы со стороны тел (или полей), не входящих в нее. *Внутренними* называются силы взаимодействия между точками (элементами) данной механической системы. Будем обозначать внешние силы индексом « $e$ », а внутренние – индексом « $i$ ».

Согласно этим определениям, прежде чем говорить о том, какие силы внешние, а какие внутренние, нужно задать механическую систему. Так, например, силы ньютоновского притяжения между Солнцем и Землей будут внешними по отношению к механической системе, состоящей из Земли и Луны. Вместе с тем эти же силы будут внутренними по отношению к механической системе, состоящей из Солнца, Земли и Луны. Если же в качестве механической системы взять всю Солнечную систему, то силы взаимодействия между отдельными ее планетами будут внутренними, а силы притяжения звезд – внешними.

Движение отдельных точек механической системы зависит как от внешних, так и от внутренних сил. На основании третьего закона Ньютона (о равенстве действия и противодействия) каждой внутренней силе соответствует другая внутренняя сила, равная ей по модулю и противоположная по направлению. Из этого следуют *два свойства внутренних сил*:

1. *Главный вектор внутренних сил системы равен нулю*

$$\sum_k \mathbf{F}_k^i = 0. \quad (1.3)$$

2. *Главный момент внутренних сил системы относительно любого центра равен нулю*

$$\sum_k \mathbf{M}_0(\mathbf{F}_k^i) = 0. \quad (1.4)$$

Отметим, что хотя уравнения (1.3) и (1.4) и имеют вид равновесия сил, произвольно расположенных в пространстве, внутренние силы не уравниваются, так как приложены к разным точкам (телам) системы и могут вызывать перемещения этих точек (тел) относительно друг друга. Например, планеты Солнечной системы совершают под действием внутренних сил довольно сложные движения.

Кроме того, несмотря на выполнение равенств (1.3) и (1.4), внутренние силы могут изменять или порождать внешние силы. Так, например, внешняя сила трения скольжения  $\mathbf{F}^e$  ведущих колес автомобиля (рис. 1.4), за счет которой и происходит его движение, вызвана вращающим моментом  $M^i$  внутренних сил, передающимся на ось ведущего колеса вследствие работы двига-

теля. Действительно, при действии момента  $M^i$  колесо стремится толкать Землю назад, а Земля, в соответствии с третьим законом Ньютона, будет двигать автомобиль вперед с силой трения  $F^e$ .

Равенства (1.3) и (1.4) будут использованы нами в дальнейшем при выводе законов изменения со временем мер движения механических систем, о которых мы говорили в п. 1.3.

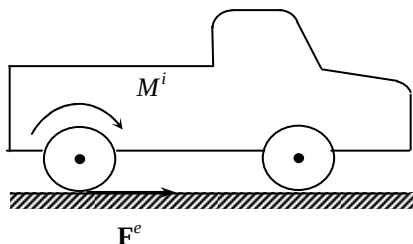


Рис. 1.4

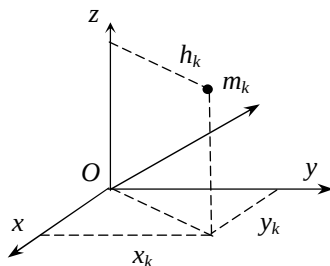


Рис. 1.5

### 1.5. Масса системы, центр масс, момент инерции относительно оси

При изучении движения материальной точки ее масса  $m$  полностью характеризовала меру инертности точки. Это означает, согласно второму закону Ньютона  $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ , что движение точки при заданной массе будет полностью определяться заданными силами, действующими на точку и ее начальными условиями. В случае механической системы, состоящей из  $N$  точек, оказывается, что массы  $m_1, \dots, m_N$  уже не определяют полностью ее меру инертности. Например, вращение фигуриста будет происходить с разной угловой скоростью, в зависимости от того, прижаты или расставлены у него руки. То есть движение механической системы зависит еще и от распределения масс, определяемое координатами ее отдельных точек. Поэтому наряду с *массой системы  $M$ , равной сумме масс ее точек (или тел)*, еще вводят понятия *центра масс* и *момента инерции относительно оси*.

*Центром масс механической системы называется геометрическая точка  $C$ , координаты которой определяются формулами*

$$x_c = (\sum_k m_k x_k) / M, \quad y_c = (\sum_k m_k y_k) / M, \quad z_c = (\sum_k m_k z_k) / M. \quad (1.5)$$

Отметим, что в однородном поле силы тяжести, для которого  $\mathbf{g} = \text{const}$ , сила тяжести любой точки пропорциональна ее массе, и точка  $C$ , согласно (1.5), совпадает с центром тяжести, хорошо известным нам из курса статики. Вместе с тем, в отличие от центра тяжести, понятие центра масс сохраняет смысл и для систем, находящихся в любом силовом поле.

*Моментом инерции тела (системы) относительно данной оси  $Oz$  называется величина, равная сумме произведений масс всех точек тела (системы) на квадраты их расстояний до этой оси (рис. 1.5)*

$$J_z = \sum_k m_k h_k^2. \quad (1.6)$$

Как мы скоро убедимся (в лекции 3), осевой момент инерции для вращающегося тела играет такую же роль, что и масса при его поступательном движении. В рассматриваемом нами примере вращения фигуриста его момент инерции относительно оси вращения менялся в зависимости от положения рук (при прижимании рук он уменьшался, при их расставлении – увеличивался). Согласно (1.6), для вычисления осевых моментов можно расстояния точек до осей выразить через их координаты  $x_k, y_k, z_k$ . Так,

для момента инерции относительно оси  $z$ ,  $h_k^2 = x_k^2 + y_k^2$  и

$$J_z = \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2), \text{ и мы получаем формулы}$$

$$J_z = \sum_k m_k (y_k^2 + z_k^2), \quad J_y = \sum_k m_k (x_k^2 + z_k^2), \quad J_x = \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2). \quad (1.7)$$

Иногда в ходе расчетов пользуются понятием *радиуса инерции* тела (системы)  $\rho_z$  – скалярной величиной, определяемой соотношением

$$J_z = M \rho_z^2, \quad (1.8)$$

где  $M$  – масса тела (системы).

Из определения следует, что радиус инерции геометрически равен расстоянию от оси той точки, в которой нужно сосредоточить всю массу тела (системы), чтобы момент инерции одной этой точки был равен моменту инерции всего тела (системы).

В случае сплошного тела, разбивая его на элементарные части, найдем, что в пределе сумма, стоящая в равенстве (1.6), обратится в интеграл. Учитывая при этом, что  $dm = \rho dV$ , где  $\rho$  – плотность, а  $V$  – объем, получим

$$J_z = \int_{(M)} h^2 dm = \int_{(V)} \rho h^2 dV. \quad (1.9)$$

Интеграл здесь распространяется на весь объем тела, а плотность  $\rho$  и расстояние  $h$  зависят от координат точек тела. Для однородных тел  $\rho = \text{const}$  и ее можно вынести за знак интеграла. Рассмотрим несколько примеров.

1. *Тонкий однородный стержень* длиной  $l$  и массой  $M$ . Вычислим его момент инерции относительно оси  $Oz$ , перпендикулярной плоскости рис. 1.6 и проходящей через его конец  $O$ . Направим ось  $x$  вдоль стержня. Тогда для любого элементарного отрезка длины  $dx$  величина  $h = x$ , а масса  $dm = \rho dx$ , где  $\rho_1 = M/l$  – масса единицы длины стержня. По формуле (1.9) получаем

$$J_z = \int_0^M x^2 dm = \rho_1 \int_0^l x^2 dx = \rho_1 l^3 / 3 = Ml^2 / 3. \quad (1.10)$$

Найдем еще радиус инерции стержня. Согласно формуле (1.8),  $Ml^2 / 3 = M \rho_z^2$ , откуда  $\rho_z = l / \sqrt{3} \approx 0,58l$ .

2. *Тонкое однородное кольцо (обруч)* радиуса  $R$  и массы  $M$ . Найдем его момент инерции относительно оси  $Cz$ , перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр  $C$ . Так как все точки кольца находятся на одинаковом расстоянии  $R$  от оси  $Cz$ , то по формуле (5.6) получим

$$J_z = \sum_k m_k h_k^2 = \left( \sum_k m_k \right) R^2 = MR^2. \quad (1.11)$$

3. *Однородный диск радиуса  $R$  и массой  $M$ .* Вычислим момент инерции относительно оси  $Cz$ , проходящей через его центр  $C$  перпендикулярно диску. Выделим элементарное кольцо радиусом  $r$  и шириной  $dr$  (рис. 1.7). Площадь этого кольца  $2\pi r dr$ , а масса  $dm = \rho_2 2\pi r dr$ , где  $\rho_2 = M / \pi R^2$  – масса единицы площади диска. Тогда по формуле (1.9) получим

$$J_z = \int_{(M)} h^2 dm = \int_0^R r^2 \rho_2 2\pi r dr = 2\pi \rho_2 \int_0^R r^3 dr = \pi \rho_2 R^4 / 2 = MR^2 / 2. \quad (1.12)$$

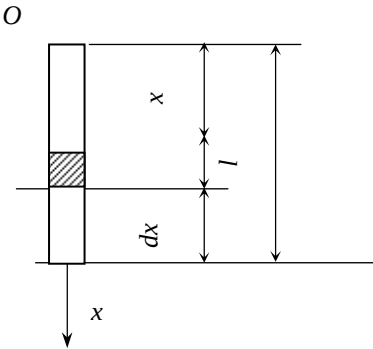


Рис. 1.6

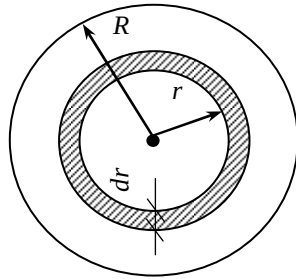


Рис. 1.7

Радиус инерции найдем по формуле (1.8),  $MR^2 / 2 = M \rho_z^2$ , откуда  $\rho_z \approx 0,705R$ . То есть радиус инерции однородного диска радиуса  $R$  равен радиусу инерции тонкого кольца той же массы, но радиуса  $0,705R$ .

Моменты инерции многих типичных однородных тел (прямоугольника, пластины, конуса, шара и т.д.) можно найти в справочниках. Что же касается неоднородных тел сложной конфигурации, то их моменты инерции определяют в технике экспериментально (один из способов будет указан нами в п. 3.5 лекции 3).



## 1.6. Моменты инерции относительно параллельных осей

Моменты инерции тела относительно разных осей будут, вообще говоря, различны. Покажем, как, зная момент инерции относительно какой-либо оси, определить момент инерции относительно другой оси, ей параллельной. Пусть  $C$  – центр масс системы. Найдем связь между  $J_{cz_1}$  и  $J_z$ , где оси  $z_1$  и  $z$  параллельны. Возьмем точку  $O$  на оси  $z$  так, чтобы отрезок  $OC$  был перпендикулярен осям  $z$  и  $z_1$ , и введем две системы координат  $Cx_1y_1z_1$  и  $Oxyz$ , как показано на рис. 1.8. Расстояние между осями  $z$  и  $z_1$  обозначим через  $d$ . Тогда по формуле (1.7) будем иметь

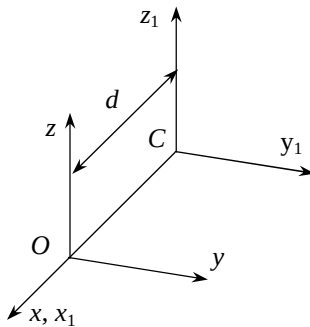


Рис. 1.8

$$J_z = \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2),$$

$$J_{cz_1} = \sum_k m_k (x_{1k}^2 + y_{1k}^2). \quad \text{Учитывая}$$

далее связь  $x_k = x_{1k} - d, x_k^2 = x_{1k}^2 + 2x_{1k}d + d^2$ , получим

$$J_z = \sum_k m_k (x_{1k}^2 + y_{1k}^2) + (\sum_k m_k) d^2 - 2(\sum_k m_k x_{1k}) d. \quad \text{Но, по определе-}$$

нию центра масс  $\sum_k m_k x_{1k} = Mx_{1c}$ , и  $x_{1c} = 0$ , так как точка  $C$  явля-

ется началом системы координат  $Cx_1y_1z_1$ . Следовательно,

$$\sum_k m_k x_{1k} = 0. \quad \text{Окончательно получаем}$$

$$J_z = J_{cz_1} + Md^2. \quad (1.13)$$

Формула (1.13) выражает теорему Гюйгенса: момент инерции тела относительно данной оси равен моменту инерции относительно оси, ей параллельной и проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением его массы на квадрат расстояния между осями.

Из формулы (1.13) видно, что  $J_z > J_{Cz_1}$ , т.е. из всех осей данного направления наименьший момент инерции будет относительно оси, проходящей через центр масс.

Связь между моментами инерции относительно двух произвольных параллельных осей  $z_1$  и  $z_2$ , согласно (1.13), дается, очевидно, формулой

$$J_{z_2} = J_{z_1} + M(d_2^2 - d_1^2), \quad (1.14)$$

где  $d_1$  и  $d_2$ , соответственно, расстояния от осей  $z_1$  и  $z_2$  до оси, параллельной данным осям и проходящей через центр масс.

**Задача 3.** Определить момент инерции  $J_{oz}$  тонкого однородного кольца массой  $M$  с внутренним радиусом  $R_1$  и внешним радиусом  $R_2$  (рис. 1.9).

**Решение.** Сначала определим момент инерции  $J_c$  кольца относительно оси  $Cz_1$ . Для этого дополним мысленно это кольцо до сплошного диска радиуса  $R_2$ . Тогда, очевидно, момент инерции нашего кольца будет равен разности между моментами инерции дисков радиусов  $R_2$  и  $R_1$ , т.е.

$$J_c = M_2 R_2^2 / 2 - M_1 R_1^2 / 2,$$

где  $M_2$  и  $M_1$  – массы этих дисков.

Учитывая, что  $M_2 = \rho \pi R_2^2$ ,  $M_1 = \rho \pi R_1^2$ ,  $\rho$  – плотность, получим  $J_c = \rho \pi R_2^4 / 2 - \rho \pi R_1^4 / 2$ . Масса кольца  $M = M_2 - M_1 = \rho \pi (R_2^2 - R_1^2)$ , следовательно,  $J_c = M (R_1^2 + R_2^2) / 2$ . Теперь уже для определения  $J_{oz}$  воспользуемся формулой Гюйгенса  $J_{oz} = J_c + MR^2 = M(3R_2^2 + R_1^2) / 2$ .

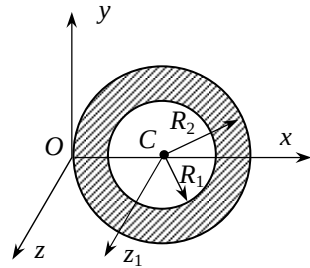


Рис. 1.9

## 1.7. Момент инерции относительно произвольной оси

Проведем через некоторую точку  $O$  три взаимно перпендикулярных оси  $x, y, z$  и произвольную ось  $l$ , образующую с этими осями углы  $\alpha, \beta, \gamma$  соответственно (рис. 1.10). Момент инерции тела относительно оси  $l$  по определению равен  $J_l = \sum_k m_k h_k^2$ , где, как видно из

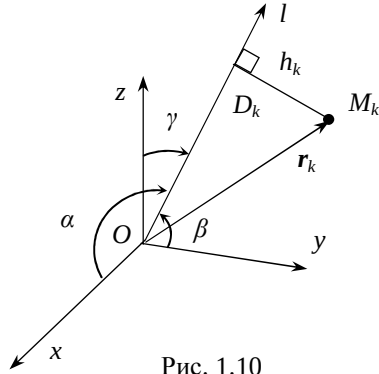


Рис. 1.10

рис. 1.10,  $h_k^2 = r_k^2 - (OD_k)^2$ . Но  $OD_k$ , как проекция вектора  $\mathbf{r}_k = x_k \mathbf{i} + y_k \mathbf{j} + z_k \mathbf{k}$ , на ось  $l$ , равна сумме проекций составляющих этого вектора на ту же ось, причем  $x_k i_l = x_k \cos \alpha$ ,  $y_k j_l = y_k \cos \beta$ ,  $z_k k_l = z_k \cos \gamma$ . Учитывая также, что  $r_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2$ , получим

$$J_l = \sum_k ((x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) - (x_k \cos \alpha + y_k \cos \beta + z_k \cos \gamma)^2). \quad (1.15)$$

Возводя в (1.15) вторую круглую скобку в квадрат и учитывая геометрическое тождество  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ , получим

$$\begin{aligned} J_l = & \cos^2 \alpha \sum_k m_k (y_k^2 + z_k^2) + \cos^2 \beta \sum_k m_k (x_k^2 + z_k^2) + \\ & + \cos^2 \gamma \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2) - 2 \cos \alpha \cos \beta \sum_k m_k x_k y_k - \\ & - 2 \cos \alpha \cos \gamma \sum_k m_k x_k z_k - 2 \cos \beta \cos \gamma \sum_k m_k y_k z_k. \end{aligned}$$

В первые три слагаемых входят моменты инерции  $J_x = \sum_k m_k (y_k^2 + z_k^2)$ ,  $J_y = \sum_k m_k (x_k^2 + z_k^2)$ ,  $J_z = \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2)$  относительно осей  $x, y, z$ , а в последние три слагаемых выражения

$$J_{yz} = \sum_k m_k y_k z_k, \quad J_{xz} = \sum_k m_k x_k z_k, \quad J_{xy} = \sum_k m_k x_k y_k. \quad (1.16)$$

Величины  $J_{xy}, J_{yz}, J_{xz}$ , очевидно, не зависят от выбора оси  $l$  и называются *центробежными моментами инерции*.

Таким образом, знание осевых и центробежных моментов инерции позволяет определить момент инерции относительно любой оси  $l$ , проходящей через начало системы координат  $Oxyz$

$$J_l = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - \\ - 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2J_{xz} \cos \alpha \cos \gamma - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta. \quad (1.17)$$

**1.7.1. Центробежные моменты инерции.** В отличие от осевых, центробежные моменты инерции могут быть как положительными, так и отрицательными и, в частности, при определенном выборе осей обращаться в нули. Осевой момент инерции характеризует меру инертности тела при его вращении вокруг соответствующей оси. Чтобы выяснить механический смысл центробежных моментов инерции, покажем сначала, что для симметричных однородных тел они обращаются в нули. Действительно, если ось  $z$  является осью симметрии, то каждой точке тела с массой  $m_k$  и координатами  $x_k, y_k, z_k$  будет соответствовать точка тела с такой же массой  $m_k$  и координатами  $-x_k, -y_k, z_k$ . В результате получим, что  $J_{xz} = \sum_k m_k x_k z_k = 0$ ,  $J_{yz} = \sum_k m_k y_k z_k = 0$ . Таким же образом показывается, что если тело имеет плоскость симметрии, например плоскость  $Oxy$ , то также  $J_{xz} = J_{yz} = 0$  (только теперь уже потому, что любой точке с координатами  $x_k, y_k, z_k$  соответствует такая же точка с координатами  $x_k, y_k, -z_k$ ).

Можно сказать поэтому, что центробежные моменты инерции характеризуют несимметричность распределения масс тела относительно координатных осей или плоскостей.

**1.7.2. Главные оси инерции.** Ось  $z$ , для которой  $J_{xz} = J_{yz} = 0$ , называется *главной осью инерции*. Если же эта ось

проходит еще через центр масс, то ее называют *главной центральной осью инерции*. Как мы убедились только что, если ось  $z$  является осью симметрии, либо плоскость  $Oxy$  является плоскостью симметрии, то она является главной (или главной центральной, если точка  $O = C$  – центр масс). Оказывается, такая симметрия тела (системы) вовсе не обязательна, чтобы ось была главной осью инерции. Более того, можно доказать, что через любую точку  $O$  какого угодно тела можно провести три взаимно перпендикулярных оси, которые будут главными осями инерции (если  $O = C$ , то главными центральными осями инерции). Для главных осей инерции  $J_{xz} = J_{yz} = J_{xy} = 0$  и формула (1.17) для вычисления момента инерции  $J_l$  относительно произвольной оси  $l$ , проходящей через начало системы координат  $Oxyz$ , упрощается и приобретает вид

$$J_l = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma. \quad (1.18)$$

**Задача 4.** Найти момент инерции однородной прямоугольной пластины с массой  $m$  и сторонами  $a$  и  $b$  относительно ее диагонали  $l$  (рис. 1.11).

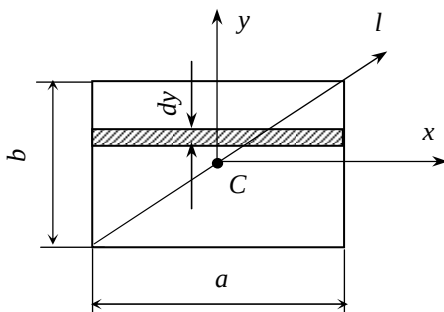


Рис. 1.11

**Решение.** Проведем через центр  $C$  пластины оси  $x, y$ , которые, как оси симметрии, будут главными осями инерции. Тогда

по формуле (1.18), учитывая, что  $\gamma = 90^\circ$  (ось  $z$  на рис. 1.11 «смотрит на нас»), получим

$$J_I = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta. \quad (1.19)$$

Для нахождения  $J_y$  разобьем пластину по вертикали на элементарные полоски шириной  $dy$ , при этом  $dm = \rho_1 ady$ , где  $\rho_1 = m/S = m/ab$  – вес единицы площади пластины. Тогда, согласно формуле (1.6)

$$\begin{aligned} J_y = \sum_k m_k h_k^2 &= \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dm = \int_{-b/2}^{b/2} y^2 \rho_1 a dy = 2\rho_1 a \int_0^{b/2} y^2 dy = \\ &= \rho_1 ab^3 / 12 = mb^2 / 12. \end{aligned}$$

Аналогично получим, что  $J_x = ma^2 / 12$ . Учитывая теперь, что  $\cos^2 \alpha = a^2 / (a^2 + b^2)$ ,  $\cos^2 \beta = b^2 / (a^2 + b^2)$ , получим окончательно  $J_I = ma^2 b^2 / (6(a^2 + b^2))$ .

Понятие о главных осях инерции играет важную роль в динамике твердого тела. Мы этим понятием воспользуемся при выводе ДУ движения твердого тела (в п. 3.7 лекции 3).

### Вопросы для самоконтроля

1. Каким образом задача о движении произвольной механической системы (конструкции) приближенно сводится к задаче о движении конечного числа материальных точек?
2. Каковы основные сложности решения системы ДУ движения  $N$  материальных точек, описывающих движение материальной системы? Каков другой путь приближенного описания движения механических систем?
3. Какие силы называются внутренними, а какие внешними для выбранной механической системы?
4. Какими свойствами обладают внутренние силы, действующие на элементы механической системы?
5. Что называют центром масс системы? Как определяются его координаты?

6. Какова связь между центром масс и центром тяжести системы?
7. Как определяется момент инерции тела относительно оси? Что такое радиус инерции?
8. Какова зависимость между моментами инерции относительно двух параллельных осей?
9. Относительно какой из параллельных осей момент инерции будет наименьшим?
10. Как определяются центробежные моменты инерции и что они характеризуют?
11. Как определить момент инерции относительно произвольной оси, проходящей через начало системы координат  $Oxyz$ , зная моменты инерции относительно ее осей и центробежные моменты инерции?
12. Какую ось называют главной, а какую главной центральной?

### Упражнения

**У.1.** Три свободные материальные точки  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  с массами  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$ , соответственно, движутся под действием сил ньютоновского притяжения. Составить ДУ движения системы в векторной форме.

**У.2.** Пользуясь определением, найти момент инерции однородного конуса массой  $M$  и радиусом основания  $R$  относительно его оси.

**У.3.** Найти момент инерции однородной прямоугольной пластины с массой  $m$  и сторонами  $a$  и  $b$  относительно ее диагонали.

## Лекция 2. ТЕОРЕМЫ О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС И ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

### 2.1. Теорема о движении центра масс

Часто для определения характера движения механической системы требуется знать движение ее центра масс. Например, движение камня или снаряда можно приближенно описать движением его центра масс. Действительно, мы знаем из кинематики, что движение любого твердого тела всегда можно представить как поступательное движение вместе с полюсом и вращательное движение вокруг полюса (в пространственном случае вращение происходит вокруг мгновенной оси вращения, проходящей через этот полюс). Если теперь в качестве полюса взять центр масс  $C$  тела, то по его движению мы определим в точности поступательную часть движения тела – камня или снаряда (определение вращательной части движения тела мы рассмотрим в следующей лекции). Другой пример: если в качестве механической системы взять рой пчел (а их в нем может быть порядка тысячи), то у нас нет практической возможности проследить за полетом каждой из пчел. Однако, чтобы ответить на вопрос: «куда полетели пчелы?», согласитесь, читатель, что лучшей точки, чем центр масс этого роя, вы не найдете!

Для определения закона движения центра масс обратимся к ДУ движения механической системы (1.1), которые перепишем в виде

$$m_k \mathbf{a}_k = \mathbf{F}_k^e + \mathbf{F}_k^i. \quad (2.1)$$

Мы здесь представили  $\mathbf{F}_k$  в виде суммы равнодействующей  $\mathbf{F}_k^e$  всех внешних сил и равнодействующей  $\mathbf{F}_k^i$  всех внутренних сил, действующих на  $k$ -ю точку механической системы.

Складывая почленно левые и правые части уравнений (2.1), получим

$$\sum_k m_k \mathbf{a}_k = \sum_k \mathbf{F}_k^e + \sum_k \mathbf{F}_k^i. \quad (2.2)$$



По свойству внутренних сил  $\sum_k \mathbf{F}_k^i = 0$ , а левая часть равенства (2.2) преобразуется к виду  $\sum_k m_k \mathbf{a}_k = M \mathbf{a}_C$  (чтобы убедиться в этом, достаточно дважды продифференцировать равенство  $\sum_k m_k \mathbf{r}_k = M \mathbf{r}_C$ , следующего из формулы (1.5), определяющей радиус-вектор центра масс  $\mathbf{r}_C$ ). В результате мы получим

$$M \mathbf{a}_C = \sum_k \mathbf{F}_k^e. \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) выражает *теорему о движении центра масс: произведение массы системы на ускорение ее центра масс равно сумме всех действующих на систему внешних сил*. Сравнивая (2.3) со вторым законом Ньютона для материальной точки, можно также сказать, что *центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему*.

Теорема, таким образом, дает обоснование методам динамики точки. А именно, решения, которые получаются при рассмотрении данного тела как материальной точки, имеют вполне конкретный смысл – они определяют движение его центра масс. При поступательном движении твердого тела скорости и ускорения всех его точек равны и поэтому теорема о движении центра масс полностью определяет его движение. В случае произвольного движения твердого тела теорема определяет поступательную часть движения вместе с центром масс (вращательную часть движения вокруг центра масс мы также определим, но для этого нам понадобится ввести другую меру движения – момент количества движения, см. лекцию 3). Поэтому вопрос о том, можно ли рассматриваемое тело считать точкой или нет, зависит от характера интересующего нас движения. Например, при исследовании поступательного движения планет солнечной системы их можно считать точками (расположенными в центрах масс планет и обладающими их массами), но при изучении вращений планет вокруг их осей, конечно же, нельзя.

Практическая ценность теоремы состоит еще и в том, что она позволяет при определении движения центра масс любой механической системы исключить все заранее неизвестные внутренние силы. При решении задач на применение этой теоремы механическую систему стараются выбирать так, чтобы заранее неизвестные силы сделать внутренними.

## 2.2. Законы сохранения движения центра масс

Из теоремы о движении центра масс можно получить следующие важные следствия.

1. Пусть сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю  $\sum_k \mathbf{F}_k^e = 0$ . Тогда из уравнения (2.3) следует, что

$\mathbf{a}_C = 0$ , или  $\mathbf{v}_C = \text{const}$ . Это означает, что *если сумма внешних сил, действующих на механическую систему, равна нулю, то ее центр масс движется равномерно прямолинейно*. В частности, если в начальный момент времени центр масс был в покое, то он и останется в покое.

2. Пусть теперь сумма внешних сил не равна нулю, но эти силы таковы, что сумма их проекций на какую-нибудь ось (например, ось  $x$ ) равна нулю  $\sum_k F_{kx} = 0$ . Тогда из уравнений (2.4)

следует, что  $\ddot{x}_C = 0$ , или  $v_{Cx} = \dot{x}_C = 0$ . То есть *если сумма проекций всех действующих внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция скорости центра масс на эту ось не меняется*. В частности, если в начальный момент времени скорость центра масс системы вдоль какой-то оси равна нулю, то в любой момент времени центр масс системы вдоль этой оси перемещаться не будет.

Полученные результаты выражают *законы сохранения* центра масс системы. В частности, из законов сохранения следует, что *пара сил, приложенная к твердому телу, не может изменить движение его центра масс* (она может только вызвать вращение тела вокруг центра масс).

### 2.3. Примеры, иллюстрирующие теорему о движении центра масс

Теорема о движении центра масс системы, одна из основных теорем динамики, позволяет объяснить целый ряд явлений, которые мы наблюдаем. Рассмотрим некоторые из них.

1. *Движение человека.* Если человек идет по Земле, то его перемещение происходит под действием сил сцепления между подошвами его обуви и Землей. Эти силы направлены в сторону движения человека и являются по отношению к нему внешними. Возникают они согласно третьему закону Ньютона – человек внутренними усилиями мускулов толкает Землю назад (сила действия), а Земля толкает человека вперед (сила противодействия).

Заметим, что если в качестве механической системы мы рассмотрим не человека, а человека и Землю, то обе силы будут внутренними. Поэтому центр масс системы «человек + Земля» должен остаться в покое. При отталкивании человека от Земли она должна двигаться в сторону, противоположную движению человека. Это и происходит на самом деле! Но так как масса Земли во много раз больше массы человека, то перемещение Земли практически незаметно.

По идеально гладкому льду человек двигаться не может, так как такой лед не позволяет ему оттолкнуться от Земли. Как только нам удастся вынести вперед одну ногу, вторая нога отодвинется назад и центр тяжести не переместится.

2. *Откат и отдача орудия при выстреле.* Внутренние силы взрыва, действующие в стволе орудия, при выстреле не могут привести в движение центр масс системы «орудие + снаряд». Если снаряд вылетает в горизонтальном направлении вперед, то орудие, если оно не закреплено, откатывается назад. Если же орудие закрепить, то центр масс системы «орудие + снаряд» теперь уже будет двигаться с ускорением вперед. В соответствии опять же с теоремой о движении центра масс должны появиться внешние горизонтальные силы, «толкающие» центр масс системы вперед. В случае стрельбы из винтовки такой внешней силой является сила реакции плеча стреляющего (кто стрелял, тот знает, что приклад винтовки «отдает в плечо», и, согласно третьему за-

кону Ньютона, со стороны плеча возникает сила реакция, направленная вперед).

3. *Торможение поездов и автомобилей.* Для торможения к барабанам, жестко связанным с катящимися колесами, прижимают колодки. Возникающие при этом силы трения создают тормозящие моменты  $m_c$  на колесах (все это пока внутренние силы!), которые вызывают силы трения (уже внешние!) колес  $F_f$  с дорогой, направленные против движения (рис. 2.1). За счет этих сил и происходит торможение.

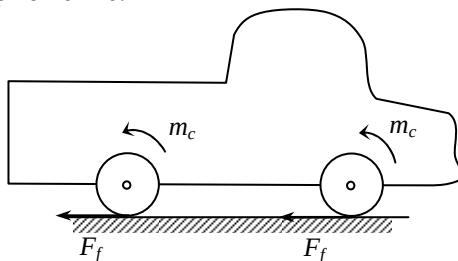


Рис. 2.1

Казалось бы, на первый взгляд, что чем сильнее мы прижмем колодки (сильнее надавим на педаль тормоза), тем больший момент  $m_c$  создадим и, следовательно, согласно третьему закону Ньютона, получим большую силу трения колес о дорогу. Однако все это верно до тех пор, пока колеса находятся в режиме качения без проскальзывания. При резком нажмем на тормоз колеса, вместо того чтобы катиться, будут скользить по поверхности дороги (это же касается и режима разгона при резком трогании с места). Сила трения  $F_f$  от этого не только не увеличится, но на самом деле уменьшится. Это уже связано с тем, что динамический коэффициент трения скольжения убывает с увеличением скорости проскальзывания колес, причем довольно резко (при скорости проскальзывания колес поезда 20 км/ч коэффициент трения скольжения равен 0,2, а при скорости проскальзывания 80 км/ч он падает до 0,136). Поэтому для наиболее быстрой остановки нужно тормозить колеса такими силами, которые не вызывали бы

их проскальзывания и вместе с тем были бы настолько велики, чтобы малейшее их увеличение вызывало уже скользящее движение колес.

4. *Вращающиеся тела со смещенным центром масс.* Вращающиеся части конструкций обычно «центрируют» так, чтобы, в частности, их центры масс находились на оси вращения. Смещение центра масс тела от оси вращения приводит к его движению по окружности. Даже при равномерном вращении у центра масс появляется в этом случае ускорение. Согласно теореме о движении центра масс это приводит к появлению дополнительных внешних нагрузок, которые могут быть нежелательны для конструкции в целом. Рассмотрим конкретный пример.

**Задача 5.** Центр масс  $C_1$  вала мотора смещен от оси вращения на величину  $AC_1 = b$  (рис. 2.2). Масса вала  $m_1$ , а масса всех остальных частей мотора –  $m_2$ . Определить, по какому закону будет двигаться мотор, поставленный на гладкую горизонтальную плоскость и силу его давления на плоскость, если вал вращается с угловой скоростью  $\omega$ .

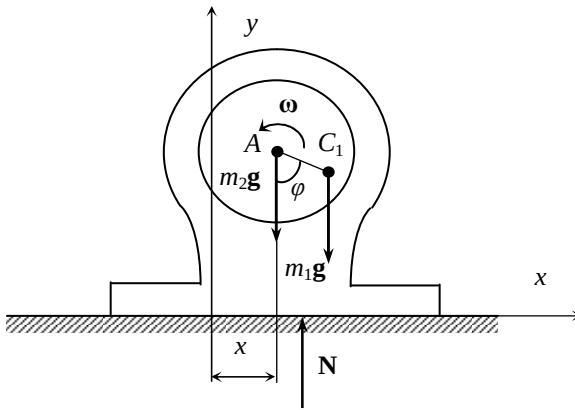


Рис. 2.2

**Решение.** Чтобы исключить силы, вращающие вал, сделав их внутренними, рассмотрим в качестве механической системы весь мотор с валом.

Изображаем мотор с валом в произвольном положении (рис. 2.2), считая, что при  $t = 0$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $\varphi(0) = 0$ .

Внешними силами, действующими на механическую систему, будут вес вала  $m_1 \mathbf{g}$ , вес остальных частей мотора  $m_2 \mathbf{g}$  и реакция гладкой поверхности  $\mathbf{N}$ .

Согласно теореме о движении центра масс  $(m_1 + m_2)\ddot{x}_C = 0$ ,  $(m_1 + m_2)\ddot{y}_C = -(m_1 + m_2)g + N$ . Первое уравнение означает, что в нашей задаче центр масс всей системы вдоль оси  $x$  двигаться не будет. С учетом начальных условий это означает, что  $x_C = 0$ , или  $m_2 x_2 + m_1(x_2 + b \sin \omega t) = 0$ . Откуда

$$x_2 = -m_1 b \sin \omega t / (m_1 + m_2). \quad (2.4)$$

Следовательно, мотор будет совершать гармонические колебания с частотой  $\omega$  и амплитудой  $m_1 b / (m_1 + m_2)$ .

Реакцию  $N$  найдем из второго уравнения  $N = (m_1 + m_2)\ddot{y}_C + (m_1 + m_2)g$ . Учитывая, что  $(m_1 + m_2)y_C = m_1(y_A - b \cos \omega t) + m_2 y_A$ ,  $y_A = \text{const}$ , получим

$$N = (m_1 + m_2)g + b m_1 \omega^2 \cos \omega t. \quad (2.5)$$

Первое слагаемое (2.5) определяет статическое давление мотора на плоскость, равное его весу, а второе слагаемое – динамический добавок  $b m_1 \omega^2 \cos \omega t$ , связанный со смещением центра масс на величину  $b$ . Этот добавок при значительных  $b$  и  $\omega$  может быть большим. В частности, он может быть больше веса мотора (при  $b \omega^2 > (m_1 + m_2)g / m_1$ ), и в этом случае мотор будет подпрыгивать на площадке.

Значительные динамические добавки к силам давления можно наблюдать при работе стиральных машин с центрифугой в моменты отжимания белья (например, при работе «Вятки»; если вы, читатель, уже не помните такую, спросите у родителей). В режиме отжимания угловая скорость  $\omega$  центрифуги (вала) становится большой, а смещение центра масс  $b$  неизбежно возникает из-за неравномерного распределения белья в центрифуге. В ре-

зультате величина  $m_1 b \omega^2$  (здесь  $m_1$  – масса самой центрифуги с бельем) может стать большой, и, в частности, больше веса всей стиральной машины (в результате наша родная «Вятка» начинает интенсивно «ходить» по полу, подпрыгивать и при этом шуметь так, что приходится затыкать уши!).

## 2.4. Количество движения (импульс) системы

Введем теперь еще одну меру движения. *Количеством движения (импульсом) точки* будем называть вектор  $m\mathbf{v}$ , равный произведению ее массы на скорость. *Количеством движения (импульсом) механической системы* будем называть векторную величину  $\mathbf{Q}$ , равную сумме количеств движения всех ее точек

$$\mathbf{Q} = \sum_k m_k \mathbf{v}_k. \quad (2.6)$$

Единицей измерения количества движения в системе СИ является 1 кгм/с.

Пользуясь этим определением, найдем формулу, с помощью которой значительно легче вычислять величину  $\mathbf{Q}$ , а также уяснить ее смысл. Из определения центра масс следует, что  $\sum_k m_k \mathbf{r}_k = M \mathbf{r}_C$ . Дифференцируя это равенство по времени, полу-

чим  $\sum_k m_k \mathbf{v}_k = M \mathbf{v}_C$ . Отсюда находим

$$\mathbf{Q} = M \mathbf{v}_C. \quad (2.7)$$

То есть *количество движения системы равно произведению массы всей системы на скорость ее центра масс*. Другими словами, количество движения всей системы равно количеству движения ее центра масс, если в нем сосредоточить всю массу системы.

Из формулы (2.7) видно, что если механическая система движется так, что ее центр масс остается неподвижным, то количество движения ее равно нулю. Например, количество движения тела, вращающегося вокруг оси, проходящей через его центр масс, равно нулю.

В случае произвольного движения твердого тела представим его движение как сложное, введя систему координат  $Cx_1y_1z_1$ , начало которой совпадает с его центром масс  $C$ , а оси  $Cx_1, Cy_1, Cz_1$  параллельны осям исходной системы координат  $Ox, Oy, Oz$  соответственно (рис. 2.3). Теперь движение каждой точки тела можно представить как сложное – переносное вместе с осями  $Cx_1y_1z_1$  и движение относительно этих осей. Поэтому и количество движения тела можно представить как сумму количеств движения переносного и относительного движений  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_e + \mathbf{Q}_r$ . Но так как в относительном движении  $\mathbf{v}_{Cr} = 0$  (центр масс  $C$  совпадает с началом системы координат  $Cx_1y_1z_1$ ), то по формуле (2.7)  $\mathbf{Q}_r = 0$  и, следовательно,  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_e$ . Таким образом, *количество движения механической системы характеризует ее поступательное движение вместе с центром масс.*

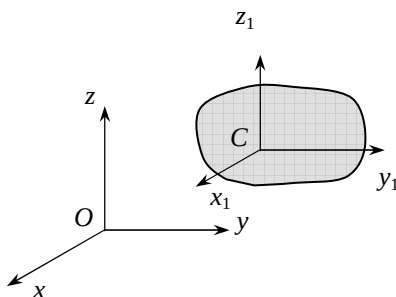


Рис. 2.3

При поступательном движении твердого тела скорости всех его точек равны, и мы получаем формулу  $\mathbf{Q} = M\mathbf{v}$ , где  $\mathbf{v}$  – скорость тела. В этом случае  $\mathbf{Q}$  является мерой поступательного движения тела, численно равной произведению его массы на скорость. Например, разрушительное действие летящего камня характеризуется как раз его количеством движения. Оно будет, очевидно, тем больше, чем больше произведение массы камня на его скорость.



Вектор количества движения  $\mathbf{Q}$  может быть задан своими проекциями, выражения для которых непосредственно следуют из формул (2.6) и (2.7)

$$\begin{aligned} Q_x &= m_k v_{kx} = Mv_{Cx}, \quad Q_y = m_k v_{ky} = Mv_{Cy}, \\ Q_z &= m_k v_{kz} = Mv_{Cz}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

## 2.5. Импульс силы

Для характеристики действия, оказываемого на тело силой за некоторый промежуток времени, вводится понятие *импульса силы*. Сначала введем понятие об элементарном импульсе, т.е. об импульсе силы за промежуток времени  $dt$ . *Элементарным импульсом силы называется векторная величина  $d\mathbf{S}$ , равная произведению силы  $\mathbf{F}$  на элементарный промежуток времени  $dt$*

$$d\mathbf{S} = \mathbf{F}dt. \quad (2.9)$$

Направлен элементарный импульс вдоль линии действия силы. Импульс  $\mathbf{S}$  любой силы  $\mathbf{F}$  за конечный промежуток времени  $t_2 - t_1$  определяется далее как предел интегральной суммы соответствующих элементарных импульсов, т.е.

$$\mathbf{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)dt. \quad (2.10)$$

Единицей измерения импульса силы в системе СИ является 1 кгм/с. В частном случае, если  $\mathbf{F} = \mathbf{const}$ , то  $\mathbf{S} = \mathbf{F}(t_2 - t_1)$  и  $S = F(t_2 - t_1)$ . В общем случае модуль и направление импульса могут быть определены по его проекциям

$$S_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x(t)dt, \quad S_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y(t)dt, \quad S_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z(t)dt. \quad (2.11)$$

Если к точке приложено несколько сил  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ , то импульс их равнодействующей очевидно равен сумме импульсов составляющих ее сил  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \dots + \mathbf{S}_n$ , соответственно,

$$S_x = S_{1x} + S_{2x} + \dots + S_{nx}, \quad S_y = S_{1y} + S_{2y} + \dots + S_{ny}, \\ S_z = S_{1z} + S_{2z} + \dots + S_{nz}.$$

## 2.6. Теорема об изменении количества движения (импульса)

Дифференцируя равенство (2.7) по времени, получим

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = M \frac{d\mathbf{v}_C}{dt} = M\mathbf{a}_C.$$

Согласно теореме о движении центра масс  $M\mathbf{a}_C = \sum_k \mathbf{F}_k^e$ , и, следовательно,

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \sum_k \mathbf{F}_k^e. \quad (2.12)$$

Равенство (2.12) выражает собой теорему об изменении количества движения (импульса) механической системы в дифференциальной форме. *Производная по времени от количества движения механической системы равна главному вектору действующих на нее внешних сил.*

В дифференциальной форме эта теорема практически совпадает с теоремой о движении центра масс. Поэтому чаще она используется в интегральной форме. Для получения ее проинтегрируем равенство (2.12) по времени в пределах от  $t_1$  до  $t_2$

$$\mathbf{Q}(t_2) - \mathbf{Q}(t_1) = \sum_k \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_k^e(t) dt = \sum_k \mathbf{S}_k^e. \quad (2.13)$$

Мы получили, что *изменение количества движения механической системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов действующих на нее внешних сил за тот же промежуток времени.*

В проекциях на координатные оси равенство (2.13) перепишется в виде

$$Q_{2x} - Q_{1x} = \sum_k S_{kx}^e, \quad Q_{2y} - Q_{1y} = \sum_k S_{ky}^e, \quad Q_{2z} - Q_{1z} = \sum_k S_{kz}^e. \quad (2.14)$$

Уравнения (2.14) обычно используются при решении задач на применение теоремы. Отметим, что так же, как и в теореме о

движении центра масс, внутренние силы непосредственно не могут влиять на изменение количества движения системы. Поэтому при решении задач механическую систему выбирают из тех соображений, чтобы наперед неизвестные силы сделать внутренними.

## 2.7. Законы сохранения количества движения (импульса)

Аналогично п. 2.2 рассмотрим теперь случаи, когда сохраняется со временем количество движения системы.

1. Пусть сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю  $\sum_k \mathbf{F}_k^e = 0$ . Тогда из уравнения (2.12) следует, что

$\mathbf{Q} = \text{const}$ . Таким образом, *если сумма внешних сил, действующих на механическую систему равна нулю, то вектор количества движения сохраняется во все время движения.*

Если же за некоторый промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$  сумма импульсов внешних сил, действующих на систему, равна нулю, т.е.

$\sum_k \mathbf{S}_k^e = \sum_k \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_k^e(t) dt = 0$ , то, как следует из (2.13), не ме-

няется и количество движения за этот промежуток времени  $\mathbf{Q}(t_2) = \mathbf{Q}(t_1)$ .

2. Пусть внешние силы таковы, что  $\sum_k F_{kx}^e = 0$ . Тогда посто-

янным во все время движения остается  $Q_x = \text{const}$ . То есть *если сумма проекций всех действующих на систему внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция количества движения на эту ось сохраняется во времени.*

Если же равна нулю проекция суммы импульсов внешних сил за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$ ,  $S_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x(t) dt = 0$ , то сохраняется за этот промежуток времени и проекция количества движения системы на эту ось,  $Q_x(t_2) = Q_x(t_1)$ .

Эти результаты и выражают законы сохранения количества движения механической системы. Из них, в частности, следует, что внутренние силы не могут изменить количество движения системы.

## 2.8. Применение теоремы к движению жидкостей

Рассмотрим установившееся движение жидкости (или газа) в трубе, т.е. такое движение, при котором в каждой точке течения скорости  $\mathbf{v}$  давление  $p$  и плотность  $\rho$  не изменяются со временем. Пусть через каждое сечение трубы протекает в секунду масса воды  $G_c$  (секундный расход). В качестве механической системы рассмотрим объем жидкости в трубе, ограниченный в момент времени  $t_1$  сечениями  $ab$  и  $cd$  (рис. 2.4). В сечение  $ab$  вода вступит со скоростью  $\mathbf{v}_0$ , направленной перпендикулярно  $ab$ . Постоянное давление, направленное вдоль скорости в этом сечении, назовем  $p_0$ , а плотность  $\rho_0$ . Из сечения  $cd$  вода вытекает со скоростью  $\mathbf{v}_1$ , направленной перпендикулярно  $cd$ , имея давление  $p_1$ , направленное вдоль скорости  $\mathbf{v}_1$ , и плотность  $\rho_1$ .

Заметим, что давления  $p_0$  и  $p_1$  иногда представляют действие атмосферы, а в некоторых случаях могут значительно отличаться от него. Это будет, например, в случае, когда вода втекает в сечение  $ab$  из особого резервуара или истечение из сечения  $cd$  происходит в особый резервуар, наполненный жидкостью или находящийся под некоторым напором.

В момент времени  $t_2 = t_1 + \Delta t$  выделенный объем жидкости займет положение между сечениями  $a_1b_1$  и  $c_1d_1$ . Частицы, которые лежали в сечении  $ab$ , теперь займут положение  $a_1b_1$ , а частицы, которые занимали выходное сечение  $cd$ , перейдут в сечение  $c_1d_1$ .

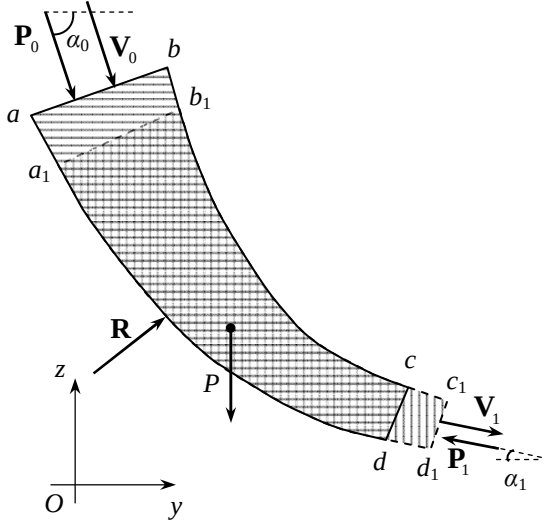


Рис. 2.4

Пользуясь тем, что течение жидкости установившееся, мы можем очень просто определить изменение количества движения жидкости  $\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_1$  за время  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Для этого представим  $\mathbf{Q}_1$  в виде суммы количеств движения объема жидкости  $aba_1b_1$  и объема жидкости  $a_1b_1cd$ :  $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_{aba_1b_1} + \mathbf{Q}_{a_1b_1cd}$ . Аналогично представим  $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_{a_1b_1cd} + \mathbf{Q}_{cdc_1d_1}$ . Так как при установившемся движении параметры течения от времени не зависят, то величина  $\mathbf{Q}_{a_1b_1cd}$  для моментов времени  $t_1$  и  $t_2$  будет одной и той же, и, следовательно,  $\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_{cdc_1d_1} - \mathbf{Q}_{aba_1b_1}$ . Так как при установившемся движении расход жидкости также не меняется, то масса воды в объемах  $aba_1b_1$  и  $cdc_1d_1$  будет одинакова и равна  $G_c \Delta t$ .

В соответствии с теоремой об изменении количества движения  $G_c (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0) = \sum_k \mathbf{F}_k^e$ . Внешними силами, действующими на выделенный нами объем жидкости, будут ее вес  $\mathbf{P}$ , сила реакции

трубы  $\mathbf{R} = (R_x, R_y)$  и силы давления отброшенной части жидкости в сечениях  $ab$  и  $cd$ . Эти силы будут равны, соответственно,  $S_0 \mathbf{p}_0$  и  $S_1 \mathbf{p}_1$ , где  $S_0$  и  $S_1$  площади сечений  $ab$  и  $cd$  трубы. Следовательно,

$$G_c(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0) = \mathbf{P} + \mathbf{R} + \mathbf{p}_0 S_0 + \mathbf{p}_1 S_1. \quad (2.15)$$

Уравнение (2.15) позволяет, в частности, определить силу давления  $\mathbf{N}$  воды на трубу, равную взятой со знаком минус силе реакции  $\mathbf{R}$  трубы на воду  $\mathbf{N} = -\mathbf{R}$ .

$$\begin{aligned} N_x &= -R_x = -G_c(v_1 \cos \alpha_1 - v_0 \cos \alpha_0) + S_0 p_0 \cos \alpha_0 - S_1 p_1 \cos \alpha_1, \\ N_y &= -R_y = G_c(v_1 \sin \alpha_1 - v_0 \sin \alpha_0) - \\ &\quad - S_0 p_0 \sin \alpha_0 + S_1 p_1 \sin \alpha_1 + mg. \end{aligned}$$

В этих выражениях члены  $N_x^{st} = S_0 p_0 \cos \alpha_0 - S_1 p_1 \cos \alpha_1$  и  $N_y^{st} = -S_0 p_0 \sin \alpha_0 + S_1 p_1 \sin \alpha_1 + mg$  представляют статическую часть давления  $\mathbf{N}^{st} = (N_x^{st}, N_y^{st})$ , т.е. давление на трубу, которое было бы, если бы жидкость, заполняющая трубу, не двигалась. Члены  $N_x^d = -G_c(v_1 \cos \alpha_1 - v_0 \cos \alpha_0)$  и  $N_y^d = G_c(v_1 \sin \alpha_1 - v_0 \sin \alpha_0)$  представляют, соответственно, динамическую часть давления  $\mathbf{N}^d = (N_x^d, N_y^d)$ . Они полностью определяются скоростями течений жидкости в сечениях  $ab$  и  $cd$  трубы, в частности, изогнутостью трубы. На прямом участке трубы равного сечения динамическое давление на трубу равно нулю.

Заметим, в заключение этого пункта, что рассмотренный подход применим ко многим практическим задачам. Давление, производимое водой в случаях, изображенных на рис. 2.5, находится буквально так же, как это было сделано в рассмотренном нами случае.

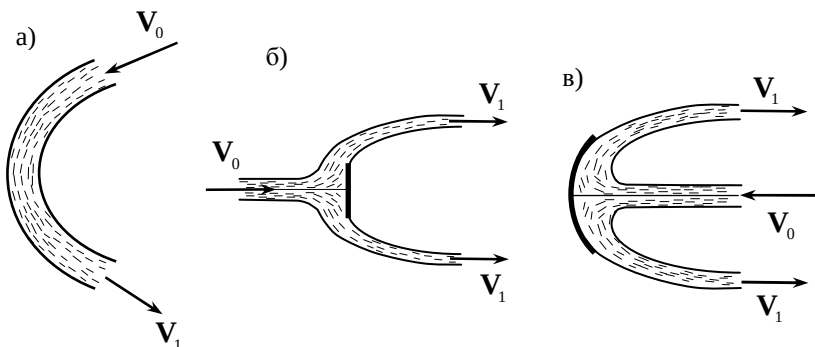


Рис. 2.5

## 2.9. Применение теоремы к движению тел переменной массы

Под телом переменной массы будем понимать тело, масса которого меняется вследствие отделения от него или присоединения к нему материальных точек. Примерами таких тел являются ракеты на активном участке полета – от них отделяются продукты сгорания топлива, снежные лавины – при их движении к ним присоединяется снег со склона горы, капли дождя – при падении к ним присоединяется масса насыщенных паров воздуха.

Будем считать, что масса тела  $m = m(t)$  является непрерывно дифференцируемой функцией времени (т.е. мы считаем, что масса каждой отделяющейся или присоединяющейся частицы мала, а также мало время между последовательными отделениями или присоединениями частиц). Рассмотрим также только простейший случай – поступательного движения тела, которое тогда считать *точкой переменной массы*.

В качестве примера применения теоремы об изменении количества движения рассмотрим движение ракеты. Обозначим через  $\mathbf{u}$  относительную (по отношению к корпусу ракеты) скорость истечения продуктов сгорания, а через  $\mathbf{F}^e$  – главный вектор приложенных к ракете внешних сил (рис. 2.6). В качестве механиче-

ской системы возьмем ракету с оставшимся в ней на данный момент времени  $t$  горючим.

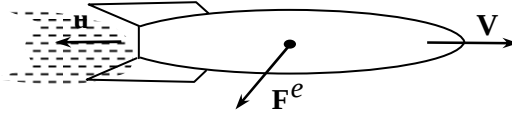


Рис. 2.6

Будем еще считать, что отделившиеся продукты сгорания сразу же после отделения перестают взаимодействовать с ракетой. Тогда количество движения механической системы в момент времени  $t$  будет равно  $\mathbf{Q}(t) = m(t)\mathbf{v}$ . Через промежуток времени  $\Delta t$  масса ракеты станет  $m(t) + \Delta m$ , где  $\Delta m < 0$ , причем  $(-\Delta m)$  – масса продуктов сгорания. Скорость ракеты в момент времени  $t + \Delta t$  обозначим через  $\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}$ . Тогда количество движения ракеты и отделившихся от нее продуктов сгорания в момент времени  $t + \Delta t$  будет равно  $\mathbf{Q}(t + \Delta t) = (m(t) + \Delta m)(\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}) + (-\Delta m)\mathbf{v}_1$ , где  $\mathbf{v}_1$  – абсолютная скорость отделившегося горючего, складывающаяся из скорости истечения  $\mathbf{u}$  (относительной скорости) и скорости ракеты  $\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}$  (переносной скорости). То есть  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u} + \mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}$ . Поэтому  $\mathbf{Q}(t + \Delta t) = m(t)(\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}) - \Delta m\mathbf{u}$ . Значит  $\Delta \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t + \Delta t) - \mathbf{Q}(t) = m(t)\Delta \mathbf{v} - \Delta m\mathbf{u}$ , или  $\Delta \mathbf{Q} / \Delta t = m(t)\Delta \mathbf{v} / \Delta t - (\Delta m / \Delta t)\mathbf{u}$ .

Устремляя теперь  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим, что  $\dot{\mathbf{Q}} = m\dot{\mathbf{v}} - \dot{m}\mathbf{u}$ . Согласно теореме об изменении количества движения (2.12)  $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F}^e$  и, следовательно,

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}^e + \dot{m}\mathbf{u}. \quad (2.16)$$

Уравнение (2.16) представляет собой в векторной форме дифференциальное уравнение движения точки переменной массы и называется *уравнением Мещерского*.

Учитывая, что последнее слагаемое в (2.16) имеет размерность силы, обозначим его через

$$\Phi = \dot{m}\mathbf{u}. \quad (2.17)$$



Величина  $\Phi$  называется *реактивной силой*. Так как  $\dot{m} < 0$ , то *реактивная сила направлена в сторону движения ракеты*. Со-множитель  $\dot{m}$  численно равен массе топлива, сгораемой в еди-ницу времени, т.е. с точностью до знака секунднему расходу топ-лива  $G_c = -\dot{m}$ . Тогда

$$\Phi = -G_c \mathbf{u}. \quad (2.18)$$

При отсутствии внешних сил  $\mathbf{F}^e = 0$  (в безвоздушном про-странстве и вне поля тяжести) уравнение Мещерского (2.16) в проекции на ось  $x$ , направленную в сторону движения ракеты, примет вид  $m\dot{v} = -u\dot{m}$ , или  $dv = -dm/m$ . Интегрируя это уравне-ние и считая, что в начальный момент времени масса  $m = m_0$ , а скорость  $v = v_0$  и направлена вдоль оси  $x$ , получим

$$v = v_0 + u \ln(m_0 / m). \quad (2.19)$$

Обозначим еще массу корпуса ракеты через  $m_k$ , а всю массу топлива через  $m_t$ . Тогда, очевидно,  $m_0 = m_k + m_t$ , а масса раке-ты после сгорания всего топлива равна  $m_k$ . Подставляя эти зна-чения в (2.19), получим *формулу Циолковского* для скорости ра-кеты, когда все топливо в ней будет израсходовано

$$v_{пред} = v_0 + u \ln(m_t / m_k). \quad (2.20)$$

Из формулы Циолковского видно, что предельная скорость ракеты зависит от начальной скорости  $v_0$ , от относительной ско-рости продуктов сгорания  $u$  и от запаса топлива  $m_t$ . При этом от режима сгорания топлива, т.е. от того, насколько быстро или медленно оно сгорает, предельная скорость ракеты не зависит.

Формула Циолковского указывает на возможные пути полу-чения больших скоростей, необходимых для космических поле-тов. Этими путями являются увеличение  $v_0, u$  и  $m_t$ . Значения  $m_t / m_k$  для одноступенчатых ракет таковы, что не позволяют получить скорости для космических полетов. Поэтому применя-ют многоступенчатые ракеты, части которых по мере израсходо-

вания содержащегося в них топлива автоматически отделяются от последней ступени, придавая ракете дополнительную начальную скорость.

## 2.10. Рекомендации к решению задач на применение теорем

При решении конкретных задач на определение движения конструкции полезно придерживаться следующих рекомендаций.

1. Выбрать механическую систему (к которой и будет применяться одна из теорем). Так же, как и в статике, в качестве механической системы можно выбирать как всю конструкцию, так и часть ее. Необходимо помнить при этом, что при расчленении конструкции возникают силы реакции частей друг на друга. Так как в обеих теоремах участвуют только внешние силы, то выбрать механическую систему следует так, чтобы наперед неизвестные силы сделать внутренними.

2. Изобразить все внешние силы, действующие на выбранную механическую систему (активные и реакции связей).

3. Выбрать оси координат и записать соответствующую теорему в проекциях на эти оси. Какой из теорем при этом удобнее пользоваться, зависит от решаемой задачи. Обычно, если требуется определить скорости движения отдельных частей конструкции, то применяют теорему об изменении количества движения. Если же требуется определить перемещение отдельных частей, то применяют теорему о движении центра масс.

4. Проинтегрировать полученную систему уравнений. Постоянные интегрирования определяются при этом из дополнительных (начальных) условий задачи.

5. Определить искомые величины из полученных уравнений движения.

Решим теперь несколько задач, пользуясь этими рекомендациями.

**Задача 6.** Пуля весом  $P_1$ , летящая горизонтально со скоростью  $u$ , попадает в тележку с песком весом  $P_2$  (рис. 2.7). С какой скоростью будет двигаться тележка после удара? (Трением колес о землю и сопротивлением воздуха пренебречь, считать, что после удара пуля застревает в тележке.)

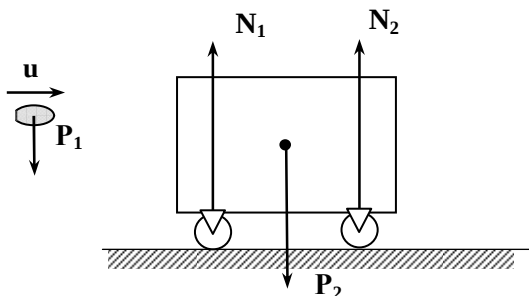


Рис. 2.7

**Решение.** 1. В качестве механической системы возьмем пулю и тележку.

2. Внешние силы показаны на рис. 2.7 и состоят из весов пули  $\mathbf{P}_1$  и тележки  $\mathbf{P}_2$  и сил реакций колес  $\mathbf{N}_1$  и  $\mathbf{N}_2$  (вертикальных, так как трением о землю пренебрегаем).

3. Ось  $x$  направим горизонтально в сторону движения тележки и запишем теорему об изменении количества движения в интегральной форме в проекции на эту ось  $Q_{2x} - Q_{1x} = \sum_k F_{kx}^e$ . Так как все внешние силы вертикальны, то  $\sum_k F_{kx}^e = 0$ , и мы имеем

$$Q_{2x} = Q_{1x}.$$

4. До удара тележка покоилась, поэтому  $Q_{1x} = P_1 u / g$ , после удара ящик и тележка поедут с одной скоростью, поэтому  $Q_{2x} = (P_1 + P_2)v/g$ . Приравняв левую и правую части, получим  $v = P_1 u / (P_1 + P_2)$ .

Отметим, что эту же задачу можно решить и с помощью теоремы о движении центра масс системы  $M\mathbf{a}_C = \sum_k \mathbf{F}_k^e$ . Проектируя это равенство на ось  $x$  и учитывая, что все внешние силы вертикальны, получаем  $Ma_{Cx} = 0$  и, следовательно,  $Mv_{Cx} = \text{const}$ . Вспоминая выражение  $Q_x = Mv_{Cx}$ , убеждаемся, что мы пришли к тому же равенству  $Q_{2x} = Q_{1x}$ , что и в предыдущем решении.

**Задача 7.** Однородный стержень  $AB$  длиной  $2l$ , опирающийся нижним концом  $A$  на гладкую горизонтальную плоскость, начинает падать из состояния покоя, образуя в начальный момент с плоскостью угол  $\alpha$ . Определить траекторию верхнего конца  $B$  стержня (рис. 2.8).

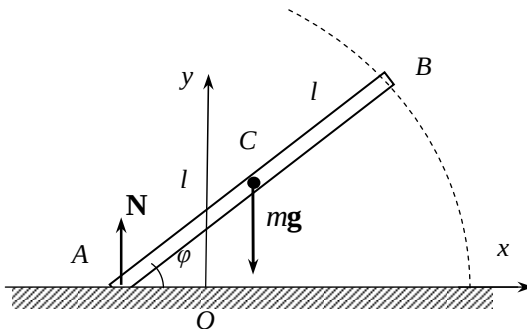


Рис. 2.8

**Решение.** 1. В качестве механической системы возьмем стержень  $AB$ .

2. Внешними силами являются сила тяжести  $mg$  стержня, приложенная в его центре  $C$ , и реакция гладкой поверхности  $N$ , приложенная к концу  $A$  стержня (рис. 2.8).

3. Систему координат  $Oxy$  выберем так, чтобы в начальный момент времени  $t=0$  точка  $O$  совпадала с нижним концом стержня  $A$ . Ось  $x$  направим горизонтально вдоль плоскости вправо, а ось  $y$  – вертикально вверх. Воспользуемся теоремой о движении центра масс стержня в проекции на ось  $x$ . Так как все внешние силы вертикальны и в начальный момент времени стержень находился в покое, то  $x_C(t) = \text{const} = x_C(0) = l \cos \alpha$ , и центр масс  $C$  стержня движется по вертикали.

4. Определим координаты  $x_B, y_B$  точки  $B$  стержня в зависимости от угла  $\varphi$ :  $x_B = x_C + l \cos \varphi = l \cos \alpha + l \cos \varphi$ ,  $y_B = 2l \sin \varphi$ .

5. Исключая из полученных уравнений параметр  $\varphi$ , найдем уравнение траектории точки  $B$ :  $\cos \varphi = (x_B - l \cos \alpha) / l$ ,

$\sin \varphi = y_B / 2l$ . Учитывая, что  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ , получим  $(x_B - l \cos \alpha)^2 / l^2 + y_B^2 / 4l^2 = 1$ .

Следовательно, конец  $B$  стержня движется по эллипсу, центр которого находится в точке с координатами  $(l \cos \alpha, 0)$ , а длины полуосей равны  $l$  и  $2l$ .

**Задача 8.** Тело поднимается по наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$ , имея начальную скорость  $v_0$ . Определить, за какое время  $T$  тело поднимется на максимальную высоту, если его коэффициент трения о плоскость равен  $f$ .

**Решение.** Заметим, что эту задачу мы могли бы решить, пользуясь вторым законом Ньютона. Однако более простое решение получается с использованием теоремы об изменении количества движения в проекции на ось  $x$  (рис. 2.9), согласно которой  $mv(T) - mv(0) = -(F_f + mg \sin \alpha)T$ , или с учетом того, что  $v(T) = 0, v(0) = v_0$ ,  $T = mv_0 / (F_f + mg \sin \alpha)$ . Для определения силы трения  $F_f = fN$  воспользуемся вторым законом Ньютона в проекции на ось  $y$ :  $0 = N - mg \cos \alpha$ . Следовательно,  $F_f = fmg \cos \alpha$ , и мы получаем, что  $T = mv_0 / mg(f \cos \alpha + \sin \alpha)$ .

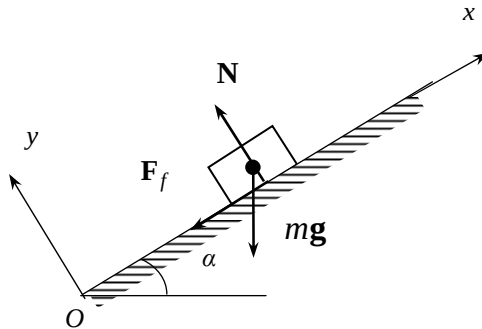


Рис. 2.9

## Вопросы для самоконтроля

1. Каким уравнением описывается движение центра масс?
2. Почему внутренние силы, действующие на систему, не влияют на движение ее центра масс?
3. В каком случае центр масс системы остается в покое?
4. Когда центр масс системы движется в направлении некоторой оси равномерно?
5. Почему человек не может сам себя поднять за волосы? А почему может присесть и какое при этом его давление на пол?
6. Какое действие на твердое тело оказывает приложенная к нему пара сил?
7. Как определяется импульс силы за конечный промежуток времени?
8. Как определяется количество движения системы?
9. Сформулируйте теорему об изменении количества движения системы в дифференциальной и интегральной формах.
10. При каких условиях количество движения системы не изменяется?
11. При каких условиях не меняется проекция количества движения на данную ось?
12. Можно ли за счет внутренних усилий изменить количество движения системы?
13. Почему происходит откат орудия при выстреле?
14. Перечислите основные этапы решения задач на применение теоремы о движении центра масс или теоремы об изменении импульса системы. Почему решение задач следует начинать с выбора механической системы?
15. В каких системах отсчета справедливы теоремы о движении центра масс и об изменении импульса системы?

## Упражнения

**У.1.** Два мальчика стояли в центре покоящегося плота. Один из них, массой  $m_1$ , переместился вправо на край плота. В каком направлении и на какое расстояние должен переместиться второй

мальчик массой  $m_2$  ( $m_2 > m_1$ ), чтобы плот осталась на прежнем месте? Сопротивлением воды пренебречь.

**У.2.** Ящик с песком массой  $M$  лежит на горизонтальной плоскости, коэффициент трения с которой равен  $f$ . В ящик со скоростью  $v$  влетает горизонтально пуля массой  $m$  и почти мгновенно застревает в песке. Через какое время после попадания пули в ящик он, начав двигаться, остановится?

**У.3.** Артиллерист стреляет из пушки ядром массой  $m$  так, чтобы оно упало в неприятельском лагере. На вылетевшее из пушки ядро садится барон Мюнхгаузен, масса которого  $5m$ . Какую часть пути до неприятельского лагеря ему придется идти пешком?

## Лекция 3. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

### 3.1. Момент количества движения точки и механической системы

В предыдущей лекции было показано, что центр масс и вектор количества движения системы характеризуют ее поступательное движение. Для характеристики вращательного движения системы введем еще одну векторную величину, а именно, момент количества движения.

Момент количества движения (момент импульса) одной материальной точки относительно некоторого центра  $O$  определим равенством  $\mathbf{K}_0 = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$  (рис. 3.1), т.е. точно так же, как в статике мы определяли момент силы относительно центра  $O$ , только роль силы играет вектор количества движения  $m\mathbf{v}$ . При этом  $\mathbf{K}_0$  направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через вектор  $m\mathbf{v}$  и точку  $O$  (в ту сторону, откуда вращение, производимое вектором  $m\mathbf{v}$ , видно происходящим против часовой стрелки), а его модуль равен  $K_0 = mvh$  (рис. 3.1).

*Моментом количества движения (моментом импульса) механической системы относительно центра  $O$  называется сумма моментов количеств движения всех ее точек относительно того же центра* (рис. 3.2)

$$\mathbf{K}_0 = \sum_k \mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{v}_k. \quad (3.1)$$

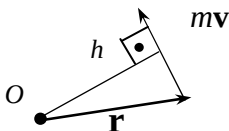


Рис. 3.1

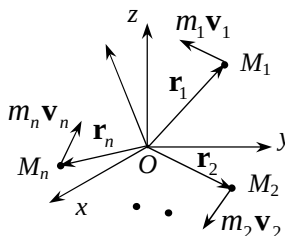


Рис. 3.2



Если механическая система представляет собой непрерывно распределенную материальную среду, заполняющую некоторый объем (например, абсолютно твердое тело), то сумма в равенстве (3.1), конечно, переходит в интеграл.

Как всякий вектор, момент количества движения  $\mathbf{K}_0$  может быть задан своими проекциями (моментами количеств движения относительно координатных осей)

$$K_x = \sum_k m_k (y_k v_{kz} - z_k v_{ky}), K_y = \sum_k m_k (z_k v_{kx} - x_k v_{kz}),$$

$$K_z = \sum_k m_k (x_k v_{ky} - y_k v_{kx}), \quad (3.2)$$

где  $x_k, y_k, z_k$  – координаты точек

$M_k, k=1, \dots, N$  механической системы.

В качестве примера рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси  $z$  с угловой скоростью  $\omega$  (рис. 3.3). Скорость любой его точки  $M_k$  равна по величине  $v_k = \omega h_k$ , где  $h_k$  – расстояние от нее до оси  $z$ , и направлена по касательной к окружности радиуса  $h_k$  с центром в точке  $O_k$  в сторону вращения тела. Следовательно,

$$K_z = \sum_k (m_k v_k) h_k = \left( \sum_k m_k h_k^2 \right) \omega = J_z \omega,$$

где  $J_z$  – момент инерции тела относительно оси  $z$ .

Определим еще  $K_x$  и  $K_y$ . Для этого заметим, что  $v_{kz} = 0, v_{ky} = \omega x_k, v_{kx} = -\omega y_k$ . Следовательно, согласно формулам (3.2),

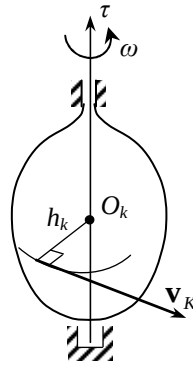


Рис. 3.3

$$K_x = \sum_k m_k (y_k v_{kz} - z_k v_{ky}) = -(\sum_k m_k x_k z_k) \omega = -J_{xz} \omega,$$

$$K_y = \sum_k m_k (z_k v_{kx} - x_k v_{kz}) = -(\sum_k m_k y_k z_k) \omega = -J_{yz} \omega,$$

где  $J_{xz}, J_{yz}$  – центробежные моменты инерции тела (см. п. 1.7 лекции 1).

Таким образом, для вращающегося вокруг оси  $z$  твердого тела его моменты количества движения относительно осей  $x, y, z$  равны

$$K_x = -J_{xz} \omega, K_y = -J_{yz} \omega, K_z = J_z \omega. \quad (3.3)$$

Заметим, что согласно (3.3) все три проекции  $K_x, K_y, K_z$  не равны нулю в случае твердого тела произвольной формы и вектор  $\mathbf{K}_0$  не направлен вдоль оси вращения. Для того чтобы  $\mathbf{K}_0$  был направлен вдоль оси вращения  $z$ , необходимо и достаточно, чтобы его центробежные моменты инерции  $J_{xz}, J_{yz}$  были равны нулю, или, другими словами, ось  $z$  была главной осью инерции (например, если она является осью симметрии тела).

Мы уже отмечали аналогию между поступательным и вращательным движениями твердого тела. Если для поступательного движения его масса  $M$  является мерой инертности, то для вращательного движения вокруг оси  $z$  его мерой инертности является момент инерции  $J_z$  относительно оси вращения. Теперь же отметим еще, что если мерой поступательного движения является количество движения  $\mathbf{Q} = (Q_x, Q_y, Q_z)$ , то мерой вращательного движения (мерой вращения) является его момент количества движения  $\mathbf{K}_0 = (K_x, K_y, K_z)$ .

Если твердое тело движется поступательно, то его момент количества движения относительно центра  $O$  равен  $\mathbf{K}_0 = \sum_k \mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{v}_k = (\sum_k m_k \mathbf{r}_k) \times \mathbf{v} = M \mathbf{r}_c \times \mathbf{v} = \mathbf{r}_c \times (M \mathbf{v})$ . То есть при поступательном движении твердого тела при определе-

нии момента количества движения его можно считать точкой, расположенной в центре масс (рис. 3.4).

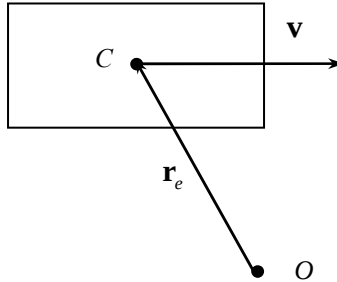


Рис. 3.4

Приведем еще, в заключение этого пункта, формулу, связывающую моменты количеств движения системы относительно разных точек  $A$  и  $B$ :

$$\mathbf{K}_B = \mathbf{K}_A + \mathbf{BA} \times (M\mathbf{v}_C). \quad (3.4)$$

Формула (3.4) аналогична формуле из статики  $\mathbf{M}_B = \mathbf{M}_A + \mathbf{BA} \times \mathbf{R}$ , связывающей главные моменты  $\mathbf{M}_A, \mathbf{M}_B$  системы сил  $(\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n)$  относительно точек  $A, B$  и их главный вектор  $\mathbf{R}$ , и выводится аналогичным образом, если учесть, что  $M\mathbf{v}_C = \sum_k m_k \mathbf{v}_k$  является главным вектором количеств движения точек системы.

### 3.2. Теорема об изменении момента количества движения (теорема моментов)

Рассмотрим теперь, как изменяется момент количества движения  $\mathbf{K}_0$  системы со временем. Обратимся снова к ДУ движения механической системы (1.1), записанным в виде

$m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} = \mathbf{F}_k^e + \mathbf{F}_k^i, k = 1, \dots, N$ , и умножим обе части этих уравнений векторно слева на  $\mathbf{r}_k$ . Получим, что

$$\mathbf{r}_k \times (m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt}) = \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^e + \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^i, k = 1, \dots, N.$$

Заметим, далее, что  $\mathbf{r}_k \times (m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt})$  можно представить в виде

$\mathbf{r}_k \times (m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{v}_k) + \mathbf{v}_k \times m_k \mathbf{v}_k$ . Так как векторы  $\mathbf{v}_k$  и  $m_k \mathbf{v}_k$  параллельны, то  $\mathbf{v}_k \times m_k \mathbf{v}_k = 0$ , и мы получаем

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{v}_k) = \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^e + \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^i. \quad (3.5)$$

Суммируя теперь уравнения (3.5) по всем точкам системы, получим

$$\sum_k \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{v}_k) = \sum_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^e + \sum_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^i.$$

По свойству внутренних сил  $\sum_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^i = 0$ . Учитывая еще, что сумма производных равна производной от суммы, получим

$$\frac{d}{dt} \sum_k (\mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{v}_k) = \sum_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^e, \text{ или}$$

$$\frac{d\mathbf{K}_0}{dt} = \sum_k \mathbf{M}_0(\mathbf{F}_k^e). \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6) выражает *теорему моментов: производная по времени от момента количества движения механической системы относительно некоторого неподвижного центра О равна сумме моментов всех внешних сил, действующих на эту систему относительно того же центра О.*

Теорема моментов, так же как и теоремы о движении центра масс и об изменении количества движения, позволяет исключить из рассмотрения все наперед неизвестные внутренние силы.

Проектируя обе части уравнения (3.6) на оси инерциальной системы координат  $x, y, z$ , получим

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum_k M_x(\mathbf{F}_k^e), \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum_k M_y(\mathbf{F}_k^e), \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum_k M_z(\mathbf{F}_k^e). \quad (3.7)$$

Уравнения (3.7) выражают теорему моментов относительно осей координат.

Доказанной теоремой широко пользуются для изучения вращательного движения твердого тела. В этом случае, как мы показали в предыдущем пункте,  $K_z = J_z \omega$  и, следовательно,  $J_z \varepsilon = \sum_k M_z(\mathbf{F}_k^e)$ , где  $\varepsilon$  – угловое ускорение вращательного

движения тела. Учитывая, что  $\varphi = \varphi(t)$  представляет собой закон вращательного движения твердого тела, уравнение

$$J_z \ddot{\varphi} = \sum_k M_z(\mathbf{F}_k^e) \quad (3.8)$$

представляет собой *ДУ вращательного движения твердого тела*.

Уравнение (3.8) позволяет, таким образом, полностью определить движение твердого тела при его вращении вокруг оси при заданных начальных данных  $\varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = \omega_0$ .

При изучении плоского (или произвольного) движения твердого тела мы можем представить его движение как сумму поступательного движения вместе с центром масс  $C$  и вращательного (или сферического) движения вокруг центра масс  $C$ .

Поступательная часть движения при этом полностью определяется теоремой о движении центра масс  $M\mathbf{a}_c = \sum_k \mathbf{F}_k^e$ . Для

определения вращательной части движения нам еще нужно найти выражение для теоремы моментов во вспомогательной системе координат  $Cx_1y_1z_1$ , движущейся поступательно относительно исходной инерциальной системы отсчета  $Oxyz$  (рис. 3.5). Для этого воспользуемся выражением второго закона Ньютона в неинерциальной системе отсчета  $m_k \mathbf{a}_{kr} = \mathbf{F}_k^i + \mathbf{F}_k^e + \mathbf{F}_{ke}^{in} + \mathbf{F}_{kc}^{in}$ , где  $\mathbf{F}_{ke}^{in} = -m_k \mathbf{a}_{ke}$ ,  $\mathbf{F}_{kc}^{in} = -m_k \mathbf{a}_{kc}$  – соответственно, переносная и ко-

риолисовая сила инерции для точки  $M_k, k = 1, \dots, N$ . Так как система координат  $Cx_1y_1z_1$  движется поступательно, то кориолисова сила инерции равна нулю  $\mathbf{F}_{kc}^{in} = 0$  и уравнение (3.6) приобретает вид

$$\frac{d\mathbf{K}_c}{dt} = + \sum_k \mathbf{M}_c(\mathbf{F}_k^e) + \sum_k \mathbf{M}_c(\mathbf{F}_{ke}^{in}), \quad (3.9)$$

где  $\mathbf{K}_c$  вычисляется в системе координат  $Cx_1y_1z_1$ .

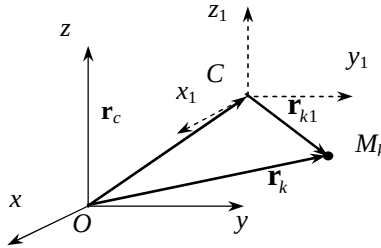


Рис. 3.5

Так как система координат  $Cx_1y_1z_1$  движется поступательно, то  $\mathbf{a}_{kc} = \mathbf{a}_c$  для всех точек  $M_k$  системы и, следовательно,  $\mathbf{F}_{ke}^{in} = -m_k \mathbf{a}_c$ . Но  $\sum_k m_k \mathbf{r}_{k1} = M \mathbf{r}_{c1}$ , где  $\mathbf{r}_{c1}$  – радиус-вектор центра масс  $C$  в системе координат  $Cx_1y_1z_1$ , т.е.  $\mathbf{r}_{c1} = 0$ , а значит, и  $\sum_k \mathbf{M}_c(\mathbf{F}_{ke}^{in}) = 0$ . В результате равенство (3.9) примет вид

$$\frac{d\mathbf{K}_c}{dt} = \sum_k \mathbf{M}_c(\mathbf{F}_k^e). \quad (3.10)$$

Сравнивая (3.10) с (3.6), приходим к выводу, что в системе координат, движущейся поступательно вместе с центром масс, теорема моментов относительно центра масс сохраняет тот же вид, что и относительно неподвижного центра.

В проекциях на оси  $Cx_1, Cy_1, Cz_1$  уравнение (3.10) запишется в виде

$$\frac{dK_{cx_1}}{dt} = \sum_k M_{cx_1}(\mathbf{F}_k^e), \quad \frac{dK_{cy_1}}{dt} = \sum_k M_{cy_1}(\mathbf{F}_k^e), \quad \frac{dK_{cz_1}}{dt} = \sum_k M_{cz_1}(\mathbf{F}_k^e). \quad (3.11)$$

В частности, для плоского движения твердого тела получим, что  $J_c \varepsilon = \sum_k M_c(\mathbf{F}_k^e)$ , где  $\varepsilon = \ddot{\varphi}$  – угловое ускорение тела. Таким образом, теорема моментов совместно с теоремой о движении центра масс дают ДУ плоского движения твердого тела:

$$M\ddot{x}_c = \sum_k F_{kx}^e, \quad M\ddot{y}_c = \sum_k F_{ky}^e, \quad J_c \ddot{\varphi} = \sum_k M_c(\mathbf{F}_k^e). \quad (3.12)$$

Уравнения (3.12) при известных начальных данных  $x_c(0) = x_{c_0}, y_c(0) = y_{c_0}, \varphi(0) = \varphi_0, \dot{x}(0) = v_{cx_0}, \dot{y}(0) = v_{cy_0}, \dot{\varphi}(0) = \omega_0$  полностью определяют плоское движение твердого тела.

### 3.3. Законы сохранения момента количества движения

Рассмотрим частные случаи, когда момент количества движения сохраняется.

1. Если сумма моментов относительно точки  $O$  всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю  $\sum_k \mathbf{M}_0(\mathbf{F}_k^e) = 0$ , то момент количества движения относительно этой же точки  $O$  сохраняется по величине и направлению  $\mathbf{K}_0 = \text{const}$ .

2. Если сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему относительно некоторой оси  $z$ , равна нулю  $\sum_k M_z(\mathbf{F}_k^e) = 0$ , то момент количества движения относительно этой оси сохраняется  $K_z = \text{const}$ .

Эти результаты непосредственно вытекают из уравнений (3.6) и (3.7) и выражают собой законы сохранения момента количества движения. Из этих законов следует, в частности, что внутренние силы изменить момент количества движения не могут.

В качестве примера рассмотрим систему, вращающуюся вокруг неподвижной оси  $z$ , для которой  $\sum_k M_z(\mathbf{F}_k^e) = 0$ . Тогда по

формулам (3.3)  $K_z = J_z \omega = \text{const}$ . Если система представляет собой абсолютно твердое тело, то  $J_z = \text{const}$  и, следовательно,  $\omega = \text{const}$ . То есть твердое тело, закрепленное на оси, в этом случае будет вращаться равномерно. Если же система изменяемая (т.е. расстояние между ее точками может меняться), то под действием внутренних сил отдельные точки могут удаляться от оси или приближаться к ней. Это вызовет, соответственно, увеличение или уменьшение ее момента инерции  $J_z$ . Но поскольку  $J_z \omega = \text{const}$ , то при увеличении  $J_z$  угловая скорость будет уменьшаться и, наоборот, при уменьшении  $J_z$  увеличиваться. Таким образом, действием внутренних сил можно изменять угловую скорость изменяемой системы. В этом мы уже убедились, когда рассматривали вращение фигуриста (см. п. 1.5 лекции 1) – при прижимании рук к телу его момент инерции уменьшается, что и приводит к увеличению угловой скорости вращения, а при расставлении рук, наоборот, его момент инерции увеличивается, и угловая скорость вращения уменьшается. Таким способом широко пользуются гимнасты. При выполнении сальто гимнаст должен сгруппироваться – максимально уменьшить момент инерции относительно оси поворота, проходящей в данном случае через его центр масс, тем самым увеличить угловую скорость вращения.

Приведем еще один пример. Наверняка вы наблюдали, читатель, что когда человек падает, скажем, подскользнувшись на скользкой дороге, то он (самопроизвольно!) раскидывает в стороны руки и ноги. При этом момент инерции относительно его оси вращения увеличивается и это приводит к уменьшению угловой скорости, а значит, и возможный удар при падении гасится (природа позаботилась о нас!).

Нагляднее всего можно продемонстрировать закон сохранения момента количества движения на простом приборе, называемом «скамейкой Жуковского», которая состоит из небольшой горизонтальной платформы, поставленной на шарики и могущей вращаться практически без трения (рис. 3.6). Человек, стоящий на



этой платформе неподвижно ( $K_z = J_z \omega = 0$ ), может начать вращать платформу, если будет рукой производить конические движения в обратную сторону (рис. 3.6). Угловая скорость туловища человека вместе с платформой будет такой, чтобы в сумме величина  $J_z \omega$  системы оставалась равной нулю.

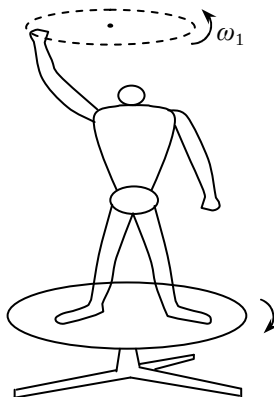


Рис. 3.6

Вы знаете, читатель, что падающая кошка всегда приземляется на лапы. Следовательно, она может повернуться, как нужно, во время падения, хотя при этом на нее не действует внешний момент. Изучение мгновенных фотографий с падающей кошкой показало, что при этом она производит лапкой ряд поворотов, подобно движению руки человека на предыдущем примере.

### 3.4. Движение точки под действием центральной силы. Закон площадей

Применим теорему моментов к случаю, когда механическая система состоит из одной точки  $M$ , на которую действует сила  $\mathbf{F}$ , направленная к некоторому неподвижному центру  $O$  (рис. 3.7). Такую силу называют *центральной силой*. Примером такого случая является движение Земли под действием силы притяжения Солнца. Сила притяжения здесь является центральной и направлена к центру Солнца.

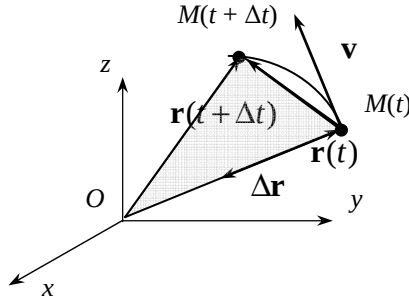


Рис. 3.7

Момент силы  $\mathbf{F}$  относительно центра  $O$ , очевидно, равен нулю, поэтому момент количества движения  $\mathbf{K}_0$  должен сохраняться во все время движения

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \text{const} . \quad (3.13)$$

Условие (3.13) означает, что  $\mathbf{K}_0$  сохраняется как по модулю, так и по направлению. Сохранение его модуля означает, что

$$|\mathbf{K}_0| = |\mathbf{r} \times m\mathbf{v}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (|\mathbf{r} \times \Delta \mathbf{r} / \Delta t| m) = m \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (|\mathbf{r} \times \Delta \mathbf{r}| / \Delta t). \quad (3.14)$$

Но  $|\mathbf{r} \times \Delta \mathbf{r}|$  равно численно удвоенной площади  $\Delta S$  треугольника  $OMM_1$  (рис. 3.7). Это означает, согласно (3.14), что  $dS/dt = \text{const}$ , т.е. скорость изменения площади треугольника  $OMM_1$  остается постоянной во все время движения. Или другими словами, *радиус-вектор точки описывает равные площади в любые одинаковые промежутки времени*. Этот результат называется *законом площадей*.

Постоянство направления  $\mathbf{K}_0$  означает, что радиус-вектор  $\mathbf{r}$  точки все время лежит в плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{K}_0$ . Это означает, в свою очередь, что *траектория движения точки является плоской кривой*. Поэтому орбиты планет в Солнечной системе являются плоскими кривыми.

**Задача 9.** Траектория наиболее удаленной от Солнца планеты Плутон имеет вид эллипса. Расстояние от Солнца до Плутона меняется при этом от  $4,46 \cdot 10^9$  км до  $7,4 \cdot 10^9$  км. Определить отношение между максимальной и минимальной скоростями движения Плутона.

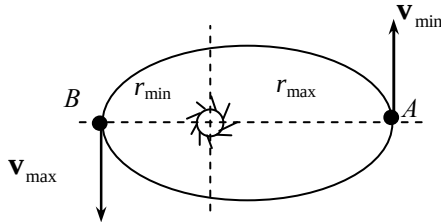


Рис. 3.8

**Решение.** Заметим, что в максимально удаленной (A) и минимально удаленной (B) точках скорости  $v_{\max}$  и  $v_{\min}$  составляют прямой угол с радиус-векторами  $\mathbf{r}_{\max}$  и  $\mathbf{r}_{\min}$  соответственно (см. рис. 3.8). Следовательно, условие постоянства модуля  $\mathbf{K}_0$  означает, что для этих точек  $r_{\max} v_{\max} = r_{\min} v_{\min}$ . Отсюда искомое отношение  $v_{\max}/v_{\min} = 1,66$ .

### 3.5. Физический маятник

Физическим маятником называется твердое тело, которое может совершать колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси под действием силы тяжести. Пусть  $m$  – его масса,  $OC = a$  – расстояние от центра тяжести  $C$  до оси вращения  $O$ ,  $J_0$  – момент инерции маятника относительно оси вращения,  $\varphi$  – угол отклонения линии  $OC$  от вертикали (рис. 3.9). Для определения закона его колебаний воспользуемся ДУ вращательного движения (3.8),

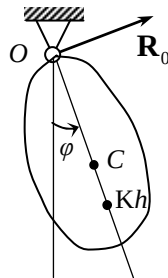


Рис. 3.9

которое в нашем случае будет иметь вид

$$J_0 \ddot{\varphi} = -mga \sin \varphi. \quad (3.15)$$

(мы учли, что сила реакции оси  $\mathbf{R}_0$  момента относительно оси вращения не создает). Деля обе части уравнения (3.15) на  $J_0$  и вводя обозначения  $k^2 = mga / J_0$ , запишем ДУ колебаний маятника в виде

$$\ddot{\varphi} + k^2 \sin \varphi = 0.$$

Полученное ДУ в элементарных функциях не интегрируется. Ограничимся поэтому случаем *малых колебаний* маятника, считая  $\varphi$  малым и полагая  $\sin \varphi \approx \varphi$ . Тогда ДУ приобретает вид

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0. \quad (3.16)$$

Это ДУ совпадает по виду с ДУ свободных колебаний точки без учета сопротивления среды и его общее решение будет иметь вид

$$\varphi = A \sin(kt + \beta).$$

Полагая, что при  $t = 0$ ,  $\varphi(0) = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi}(0) = \omega(0) = \omega_0$ , найдем постоянные интегрирования  $A = \sqrt{\varphi_0^2 + (\omega_0 / k)^2}$ ,  $\beta = \arctg(\varphi_0 k / \omega_0)$ . Следовательно, малые колебания физического маятника являются гармоническими, а период их определяется формулой

$$T_\varphi = 2\pi / k = 2\pi \sqrt{J_0 / mga} \quad (3.17)$$

и не зависит от начальных условий\*.

Полученный результат охватывает случай так называемого *математического маятника* – т.е. груза массы  $m$ , размерами которого можно пренебречь, подвешенного на невесомой нерастяжимой нити длиной  $OC = l$ . Для математического маятника  $J_0 = ml^2 / 2$ ,  $a = OC = l$  и

---

\* Решение точного уравнения (3.15) показывает, что период будет зависеть от амплитуды  $A$  колебаний маятника и выразится приближенной формулой  $T_\varphi = 2\pi \sqrt{J_0 / mga(1 + A^2 / 16)}$ .

$$T_M = 2\pi\sqrt{l/g} . \quad (3.18)$$

Из сравнения (3.17) и (3.18) следует, что при длине  $l_1 = J_0 / ma$  период колебаний математического маятника совпадает с периодом колебаний соответствующего физического маятника. Длина  $l_1$  для такого маятника называется *приведенной длиной* физического маятника. Точка  $K$ , отстоящая от точки подвеса на расстоянии  $OK = l_1$ , называется *центром качаний* физического маятника (см. рис. 3.9). Замечая, что по теореме Гюйгенса  $J_0 = J_c + ma^2$ , получим для приведенной длины выражение

$$OK = l_1 = a + J_c / ma , \quad (3.19)$$

из которого следует, что расстояние  $OK$  всегда больше  $OC$ , т.е. что *центр качаний физического маятника всегда расположен ниже его центра масс*.

Заметим, в заключение этого пункта, что формула (3.17) используется для экспериментального определения момента инерции тела относительно оси. Для этого достаточно подвесить тело, чтобы эта ось была горизонтальной, найти с помощью секундомера период  $T_\phi$  его колебаний около этой оси, найти положение его центра тяжести (например, методом взвешивания) и, подставив все эти значения в формулу (3.17), найти  $J_0 = mgaT_\phi^2 / 4\pi^2$ .

### 3.6. Применение теоремы моментов к движению жидкости

Так же, как и в п. 2.8. лекции 2, рассмотрим установившееся движение жидкости (или газа), а в качестве механической системы – объем жидкости, выделенный сечениями  $ab$  и  $cd$  в момент времени  $t_1$  (рис. 3.10). Найдем изменение момента количества движения  $\mathbf{K}_{20} - \mathbf{K}_{10}$  за время  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Рассуждая так же, как и в п. 2.8 лекции 2, убеждаемся, что  $\mathbf{K}_{20} - \mathbf{K}_{10} = \mathbf{K}_{cdc_1d_1} - \mathbf{K}_{aba_1b_1}$ . Считая теперь, что в объемах  $aba_1b_1$  и  $cdc_1d_1$  скорости жидкости постоянны (т.е. считая, что эти объемы движутся поступательно),

получаем  $\mathbf{K}_{cdc_1d_1} - \mathbf{K}_{aba_1b_1} = \mathbf{r}_{c_1} \times (m_{cdc_1d_1} \mathbf{v}_1) - \mathbf{r}_{c_0} \times (m_{aba_1b_1} \mathbf{v}_0)$ , где  $C_0, C_1$  – центры масс объемов  $aba_1b_1, cdc_1d_1$ . Учитывая, что  $m_{aba_1b_1} = m_{cdc_1d_1} = G_c \cdot \Delta t$ , где  $G_c$  – секундный расход жидкости, получим  $\mathbf{K}_{20} - \mathbf{K}_{10} = G_c (\mathbf{r}_{c_1} \times \mathbf{v}_1 - \mathbf{r}_{c_0} \times \mathbf{v}_0) \Delta t$ . Переходя теперь к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$  и применяя теорему моментов, получим

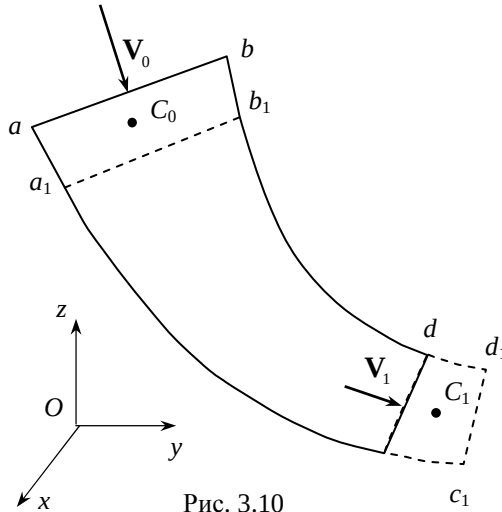
$$G_c (\mathbf{r}_{c_1} \times \mathbf{v}_1 - \mathbf{r}_{c_0} \times \mathbf{v}_0) = \sum_k \mathbf{M}_0(\mathbf{F}_k^e). \quad (3.20)$$


Рис. 3.10

Если величину  $G_c \mathbf{M}_0(\mathbf{v})$  назвать *секундным моментом количества движения* жидкости относительно центра  $O$ , то уравнение (3.20) выражает следующий факт: *разность секундных моментов количества движения жидкости относительно центра  $O$ , протекающих через два поперечных сечения трубы, равна сумме моментов всех внешних сил, действующих на объем жидкости, ограниченный этими сечениями, относительно того же центра  $O$ .*

**Задача 10.** В радиальной гидротурбине, у которой внешний радиус рабочего колеса  $R_1$ , а внутренний  $R_2$ , вода имеет на входе абсолютную скорость  $\mathbf{v}_1$ , а на выходе  $\mathbf{v}_2$ , при этом векторы  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$

образуют с касательными к ободам колес углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  соответственно (на рис. 3.11 показан один канал между лопатками турбины). Полный секундный расход через турбину равен  $G_c$ . Определить действующий на турбину момент  $M_z$  сил давления воды относительно ее оси  $z$  (она направлена вертикально, перпендикулярно рис. 3.11).

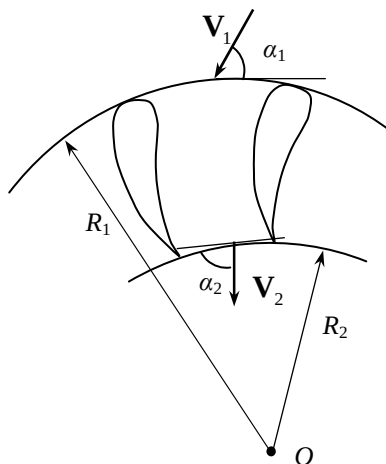


Рис. 3.11

**Решение.** Воспользуемся уравнением (3.20) в проекции на ось  $Oz$ , считая движение воды плоским и беря в качестве механической системы

объем жидкости во всех каналах между лопатками. Так как в силу симметрии центр тяжести такой механической системы лежит на оси  $Oz$ , то момент сил тяжести воды относительно этой оси будет равен нулю. Внешние силы давления жидкости во входном и выходном сечениях направлены вдоль радиусов и их моменты относительно оси  $Oz$  также равны нулю. Таким образом, в правой части равенства (3.20) останутся только моменты сил реакций лопаток турбины относительно оси  $Oz$ . Согласно третьему закону Ньютона сумма этих моментов равна искомому моменту  $M_z$ , т.е. согласно (3.20)

$$M_z = G_c (R_1 v_1 \cos \alpha_1 - R_2 v_2 \cos \alpha_2). \quad (3.21)$$

Формулу (3.21) получил Эйлер, и она носит название *турбинное уравнение Эйлера*.

### 3.7. ДУ движения твердого тела

В кинематике движение твердого тела мы начали изучать с рассмотрения простейших случаев – поступательного движения и вращения вокруг неподвижной оси. Затем изучили плоское дви-

жение, представив его как сумму этих простейших движений – поступательного движения вместе с полюсом и вращательного движения вокруг полюса. Для всех этих движений мы уже получили ДУ. А именно,

*ДУ поступательного движения:*

$$M\ddot{x}_c = \sum_k F_{kx}^e, \quad M\ddot{y}_c = \sum_k F_{ky}^e, \quad M\ddot{z}_c = \sum_k F_{kz}^e, \quad (3.22)$$

*ДУ вращательного движения:*

$$J_z \ddot{\varphi} = \sum_k M_z(\mathbf{F}_k^e), \quad (3.23)$$

*ДУ плоского движения:*

$$M\ddot{x}_c = \sum_k F_{kx}^e, \quad M\ddot{y}_c = \sum_k F_{ky}^e, \quad J_c \ddot{\varphi} = \sum_k M_c(\mathbf{F}_k^e), \quad (3.24)$$

где  $x_c, y_c, z_c$  – координаты центра масс тела.

Продолжили изучение движения твердого тела в кинематике мы рассмотрением сферического движения, выяснив, что его можно представить в каждый момент времени как мгновенное вращение вокруг мгновенной оси вращения. При этом вектор угловой скорости мы выразили через закон вращательного движения по кинематическим формулам Эйлера:

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \quad \omega_\eta = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_\zeta &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где  $O\xi\eta\zeta$  – подвижная система координат, жестко связанная с телом (рис. 3.12).

Скорость  $\mathbf{v}$  любой точки тела, имеющей координаты  $(\xi, \eta, \zeta)$ , при этом выразится формулой  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ , или в проекциях на подвижные оси

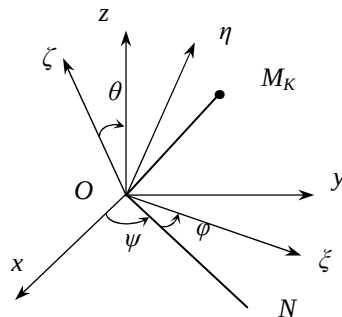


Рис. 3.12



$$\mathbf{v}_\xi = \omega_\eta \boldsymbol{\zeta} - \omega_\zeta \boldsymbol{\eta}, \mathbf{v}_\eta = \omega_\zeta \boldsymbol{\xi} - \omega_\xi \boldsymbol{\zeta}, \mathbf{v}_\zeta = \omega_\xi \boldsymbol{\eta} - \omega_\eta \boldsymbol{\xi}. \quad (3.26)$$

Если мы теперь перепишем формулы (3.2) для подвижных осей (вместо осей  $x, y, z$  возьмем оси  $\xi, \eta, \zeta$ ), подставив в них выражения (3.26) для проекций скорости и вспомним определения осевых и центробежных моментов инерции (лекция 5), то получим выражения для проекций вектора  $\mathbf{K}_0 = \sum_k \mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{v}_k$  на подвижные оси

$$\begin{aligned} K_\xi &= J_\xi \omega_\xi - J_{\xi\eta} \omega_\eta - J_{\xi\zeta} \omega_\zeta, \quad K_\eta = J_\eta \omega_\eta - J_{\xi\eta} \omega_\xi - J_{\eta\zeta} \omega_\zeta, \\ K_\zeta &= J_\zeta \omega_\zeta - J_{\xi\zeta} \omega_\xi - J_{\eta\zeta} \omega_\eta. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Дифференцируя теперь равенство

$$\mathbf{K}_0 = K_\xi \mathbf{i}_\xi + K_\eta \mathbf{j}_\eta + K_\zeta \mathbf{k}_\zeta$$

с учетом формул Пуассона  $\frac{d\mathbf{i}_\xi}{dt} = \vec{\omega} \times \mathbf{i}_\xi, \quad \frac{d\mathbf{j}_\eta}{dt} = \vec{\omega} \times \mathbf{j}_\eta,$

$\frac{d\mathbf{k}_\zeta}{dt} = \vec{\omega} \times \mathbf{k}_\zeta$ , получим из теоремы моментов

$$\begin{aligned} \frac{dK_\xi}{dt} + (\omega_\eta K_\zeta - \omega_\zeta K_\eta) &= M_\xi^e, \quad \frac{dK_\eta}{dt} + (\omega_\zeta K_\xi - \omega_\xi K_\zeta) = M_\eta^e, \\ \frac{dK_\zeta}{dt} + (\omega_\xi K_\eta - \omega_\eta K_\xi) &= M_\zeta^e. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Формулы (3.25), (3.27) и (3.28), таким образом, дают систему ДУ для определения закона сферического движения  $\varphi = \varphi(t), \psi = \psi(t), \theta = \theta(t)$ .

Если подвижную систему координат  $O\xi\eta\zeta$  выбрать так, чтобы ее оси были главными центральными осями инерции, то все центробежные моменты инерции будут равны нулю и уравнения (3.28) примут вид

$$J_\xi \frac{d\omega_\xi}{dt} + (J_\zeta - J_\eta) \omega_\eta \omega_\zeta = M_\xi^e,$$

$$J_{\eta} \frac{d\omega_{\eta}}{dt} + (J_{\xi} - J_{\zeta}) \omega_{\xi} \omega_{\zeta} = M_{\eta}^e, \quad (3.29)$$

$$J_{\zeta} \frac{d\omega_{\zeta}}{dt} + (J_{\eta} - J_{\xi}) \omega_{\xi} \omega_{\eta} = M_{\zeta}^e.$$

Уравнения (3.29) называют *динамическими уравнениями Эйлера*. Присоединяя к ним кинематические уравнения Эйлера (3.25), получим систему из шести ДУ для определения углов Эйлера  $\varphi, \psi, \theta$  как функций времени.

ДУ произвольного движения твердого тела мы теперь получим, представив его в виде поступательного движения вместе с центром масс  $C$  и сферического движения вокруг центра масс  $C$ . Для описания поступательной части движения применим уравнения (3.22), а для описания сферической части – уравнения (3.25), (3.27), (3.28) или, в случае главных центральных осей – уравнения (3.25), (3.29).

Интегрирование полученных ДУ в случае произвольного движения или даже сферического движения твердого тела представляет собой достаточно сложную математическую задачу и производится обычно приближенно на ЭВМ с использованием численных методов расчета.

### 3.8. Приближенная теория гироскопа

Рассмотрим частный случай сферического движения однородного твердого тела, для которого ось  $O\zeta$  является осью симметрии. Пусть еще (рис. 3.13) угловая скорость собственного вращения  $\omega_1 = \dot{\varphi}$  много больше угловой скорости прецессии  $\omega_2 = \dot{\psi}$  и угловой скорости нутации  $\omega_3 = \dot{\theta}$ . Такое тело называют *гироскопом* (в современных технических гироскопах  $\omega_1$  в десятки и сотни тысяч раз превосходит  $\omega_2$  и  $\omega_3$ ). Простейшим гироскопом является детский волчок (юла). Условия

$$\omega_1 \gg \omega_2, \omega_1 \gg \omega_3 \quad (3.30)$$

позволяют построить *приближенную теорию гироскопа*, в которой считается, что  $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \approx \omega_1$ .

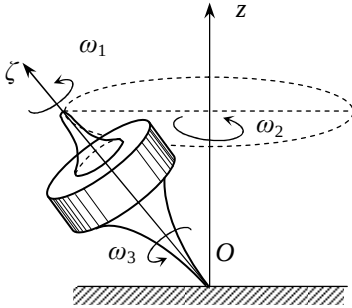


Рис. 3.13

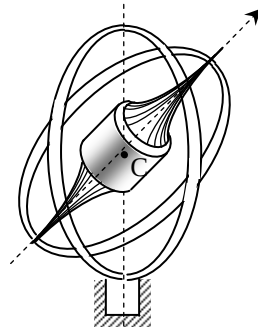


Рис. 3.14

Так как ось  $O\zeta$  является осью симметрии, то центробежные моменты инерции  $J_{\xi\zeta} = J_{\eta\zeta} = 0$  и, согласно формулам (7.27) и условию (3.30),  $K_{\xi} \ll K_{\zeta}, K_{\eta} \ll K_{\zeta}$ . Поэтому с той же степенью точности можно считать, что  $\mathbf{K}_0 \approx J_{\zeta}\omega$ . То есть приближенно считать, что вектор  $\mathbf{K}_0$  направлен вдоль оси  $O\zeta$ . Это позволяет определить изменение наклона оси гироскопа по изменению направления вектора  $\mathbf{K}_0$ .

*Свободный гироскоп.* Рассмотрим гироскоп, закрепленный так, что его центр тяжести  $C$  совпадает с неподвижной точкой  $O$  оси гироскопа (в гироскопических приборах это осуществляется в кольцевом (кардановом) подвесе, изображенном на рис. 3.14, позволяющем ротору гироскопа совершать любой поворот вокруг центра тяжести). Назовем такой гироскоп *свободным*, если на него никакие внешние силы, кроме силы тяжести, не действуют. Тогда главный момент внешних сил  $\sum_k \mathbf{M}_0(\mathbf{F}_k^e) = 0$  и, в силу

теоремы моментов,  $\mathbf{K}_0 = \text{const}$ . Так как  $\mathbf{K}_0$  направлен (приближенно) вдоль оси гироскопа, то она будет сохранять свое перво-

начальное направление по отношению к инерциальной («звездной») системе отсчета. Например, по отношению к Земле ось свободного гироскопа будет вращаться в сторону, противоположную вращению Земли (такой опыт впервые был проведен Фуко в 1852 г. с целью доказательства вращения Земли).

Свойство свободного гироскопа сохранять направление оси вращения используется в технике. Такие гироскопы применяются, например, в качестве навигационных приборов (гироскомпас, гирогоризонт и др.), в устройствах для автоматического управления движением самолетов (автопилоты), судов или ракет. Ствол винтовки делается нарезным, чтобы пуля после вылета из него приобрела значительную скорость вращения и не «кувыркалась» в полете.

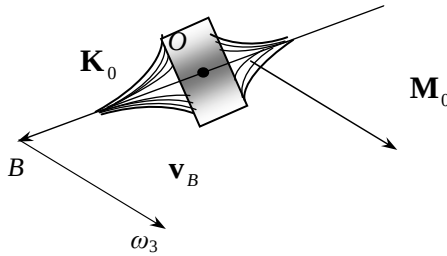


Рис. 3.15

*Действие силы на ось гироскопа.* Пусть на ось свободного гироскопа (рис. 3.15) начинает действовать сила  $\mathbf{F}$ , момент которой относительно центра  $O$  равен  $\mathbf{M}_0$ . Тогда по теореме моментов

$$\frac{d\mathbf{K}_0}{dt} = \mathbf{M}_0 \quad \text{или} \quad \frac{d\mathbf{OB}}{dt} = \mathbf{M}_0, \quad \text{где } B - \text{точка оси, совпадающая с}$$

концом вектора  $\mathbf{K}_0$ . Так как  $\frac{d\mathbf{OB}}{dt} = \mathbf{v}_B$  – скорость этой точки  $B$ ,

то получаем:

$$\mathbf{v}_B = \frac{d\mathbf{K}_0}{dt} = \mathbf{M}_0. \quad (3.31)$$

Равенство (3.31) выражает *теорему Резаля*: скорость конца вектора момента количества движения относительно центра  $O$  равна главному моменту внешних сил относительно этого же центра  $O$ . А значит, ось гироскопа перемещается по направлению вектора  $\mathbf{M}_0$ , т.е. отклоняется не в сторону действия силы  $\mathbf{F}$ , а перпендикулярно этой силе. Аналогичный результат имеет место при действии пары сил на ось гироскопа.

Из равенства (3.31) следует также, что как только действие силы  $\mathbf{F}$  прекращается, так сразу же становится  $\mathbf{v}_B = 0$  и ось гироскопа остановится. Отсюда следует, что если действие силы  $\mathbf{F}$  будет кратковременным (толчком), то ось гироскопа практически не изменит своего направления. То есть *ось гироскопа устойчива по отношению к толчкам*. Это обстоятельство обеспечивает надежность работы гироскопических приборов.

*Прецессия гироскопа.* Рассмотрим теперь гироскоп, у которого неподвижная точка  $O$  не совпадает с его центром тяжести  $C$ . Под действием веса  $m\mathbf{g}$  точка  $B$ , согласно теореме Резаля, не будет отклоняться в сторону действия веса и, следовательно, угол  $\theta$  будет оставаться постоянным (рис. 3.16). Значит, ось  $O\zeta$  гироскопа будет вращаться (прецессировать) вокруг вертикальной оси  $Oz$  с некоторой угловой скоростью прецессии  $\omega_2$ . Так как точка  $B$  (конец вектора  $\mathbf{K}_0$ ) при этом будет вращаться вокруг оси  $Oz$ , то ее скорость  $\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{OB} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{K}_0$ . Тогда  $\omega_2 = M_0 / K_0 \sin \theta = M_0 / J_\zeta \omega_1 \sin \theta$ . Прецессию совершает детская игрушка волчок (юла), если ось отклонена от вертикали. Аналогично прецессию совершает земная ось, так как равнодействующая сил притяжения Солнца и Луны не проходит через центр тяжести Земли из-за ее приплюснутости. Период прецессии земной оси приблизительно равен 26 000 лет.

*Гироскопический момент.* Под действием момента внешней силы гироскоп начнет, согласно теореме Резаля, прецессировать. Если же, наоборот, мы заставим каким-либо способом ось гироскопа прецессировать, то, согласно той же теореме, должен возникнуть момент внешних сил. Пусть ось гироскопа прецессирует

с угловой скоростью  $\omega_2$  (рис. 3.17). Момент внешних сил, вызывающих эту прецессию, согласно теореме Резаля, будет равен

$$\mathbf{M}_0^e = \frac{d\mathbf{K}_0}{dt} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{OB} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{K}_0 = \boldsymbol{\omega}_2 \times (J_\zeta \boldsymbol{\omega}_1) = J_\zeta \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1.$$

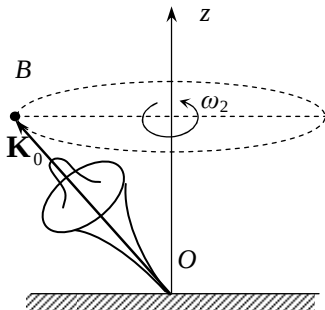


Рис. 3.16

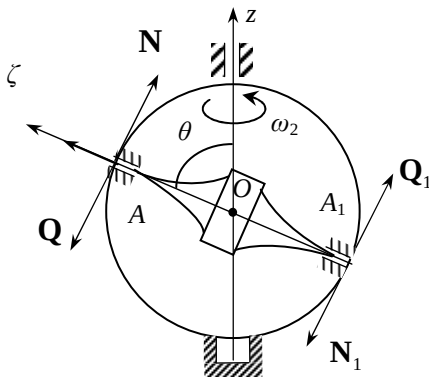


Рис. 3.17

На рис. 3.17 этот момент создают силы  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{Q}_1$  давления подшипников  $A$  и  $A_1$  на ось гироскопа. Так как центр масс  $C$  гироскопа остается неподвижным, то по теореме о его движении силы  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{Q}_1$  таковы, что  $\mathbf{Q} + \mathbf{Q}_1 = 0$ , т.е. они образуют пару сил. Согласно третьему закону Ньютона, со стороны гироскопа на подшипники будет действовать пара сил  $\mathbf{N}, \mathbf{N}_1$ . Эта пара называется *гироскопической парой*, а ее момент  $\mathbf{M}_{\text{гир}}$  — *гироскопическим моментом*. Поскольку момент  $\mathbf{M}_{\text{гир}} = -\mathbf{M}_0$ , то

$$\mathbf{M}_{\text{гир}} = J_\zeta \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2, M_{\text{гир}} = J_\zeta \omega_1 \omega_2 \sin \theta. \quad (3.32)$$

Отсюда получаем следующее правило Н.Е. Жуковского: *если гироскопу сообщить вынужденное прецессионное движение, то на подшипники, в которых закреплена ось его ротора, начнет*

действовать гироскопическая пара с моментом  $\mathbf{M}_{\text{гир}}$ , стремящимся кратчайшим путем установить ось ротора параллельно оси прецессии так, чтобы направления  $\boldsymbol{\omega}_1$  и  $\boldsymbol{\omega}_2$  совпали.

Свойство гироскопа создавать гироскопический момент также нашло широкое применение в практике. Например, при повороте судна с помощью гироскопа можно создать его дополнительный крен. Действительно (рис. 7.18), когда судно поворачивает, то ось гироскопа, установленного горизонтально поперек судна, начинает вращаться с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}_1$ , направленной вертикально. Такое вращение вызовет гироскопическую пару  $\mathbf{N}, \mathbf{N}_1$ , создающую крен судна в сторону поворота. Заметим, что если гироскоп будет вращаться в другую сторону, то и крен судна будет в другую сторону, что может привести к переворачиванию корабля. Поэтому направление поворота корабля и направление вращения гироскопа должны быть согласованы между собой.

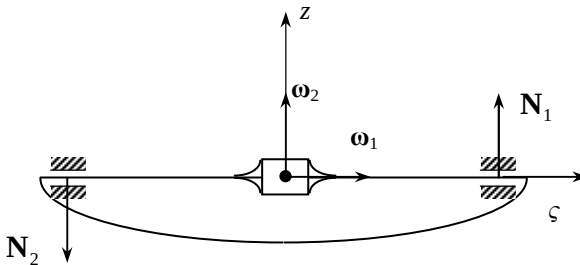


Рис. 3.18

**Задача 11.** Ротор турбины (рис. 3.19), ось которой расположена вдоль судна, вращается с угловой скоростью  $\Omega$ . Судно поворачивается вокруг оси  $z$  с угловой скоростью  $\omega$ . Определить возникающие при этом давления  $N$  и  $N_1$  на подшипники, если  $AB = l$ , а момент инерции ротора  $J_\zeta$ .

**Решение.** По формуле (3.32)  $M_{\text{гир}} = Nl = J_\zeta \Omega \omega$ , следовательно,  $N = N_1 = N_2 = J_\zeta \Omega \omega / l$ . Величины этих сил могут достигать десятков килоньютонов и должны учитываться при расчете

подшипников. Если при этом судно достаточно легкое, то эти давления вызывают при повороте опускание киля или носа. Подобный эффект может наблюдаться на винтовых самолетах при виражах (поворотах в горизонтальной плоскости).

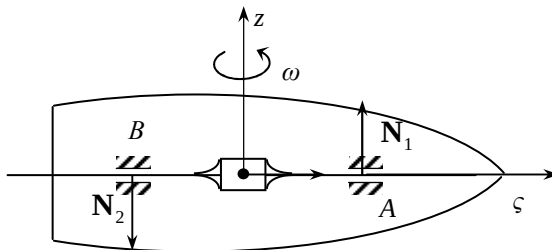


Рис. 3.19

### 3.9. Решение задач с использованием теоремы моментов

Так как момент количества движения ответственен за вращательную часть движения системы, то теорема моментов обычно применяется в случаях, когда механическая система совершает вращательное движение вокруг неподвижной точки или оси. Либо ее применяют совместно с теоремой о движении центра масс. При этом поступательная часть движения определяется теоремой о движении центра масс, а вращательная часть движения относительно центра масс – теоремой моментов. Что же касается рекомендаций по поводу последовательности решения задач, то они дословно те же, что и при решении задач на применение теорем о движении центра масс или об изменении количества движения (см. п. 2.10 лекции 2).

**Задача 12.** Платформа в виде однородного диска радиуса  $R$  и веса  $P$  может вращаться вокруг вертикальной оси  $z$  без трения (рис. 3.20). Как изменится ее угловая скорость, если человек весом  $Q$  пойдет по платформе по окружности радиуса  $R$  с относительной скоростью  $u$ ? Считать, что в начальный момент времени платформа вращалась с угловой скоростью  $\omega_0$ , а человек относительно платформы не двигался.



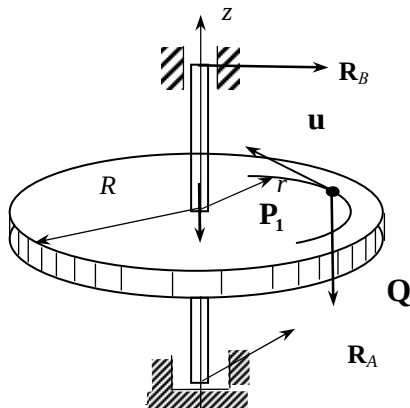


Рис. 3.20

**Решение.** 1. В качестве механической системы рассмотрим платформу вместе с человеком.

2. Внешними силами, действующими на систему, будут тогда силы реакции  $\mathbf{R}_A$  и  $\mathbf{R}_B$  опор платформы, ее вес  $\mathbf{P}$  и вес человека  $\mathbf{Q}$ .

3. Применим теорему моментов относительно оси  $z$ :

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_k M_z(\mathbf{F}_k^e).$$

Все внешние силы таковы, что  $\sum_k M_z(\mathbf{F}_k^e) = 0$  и мы получа-

ем, что  $K_z = \text{const}$ .

4. Пусть угловая скорость платформы в начальный момент времени (когда человек покоился) была  $\omega_0$ , а потом стала  $\omega$ . Определим  $K_z$  для этих моментов времени и приравняем их.

Когда человек стоит,  $K_z = J_z \omega_0 + (Q/g)r^2 \omega_0$ , где  $J_z = PR^2/2g$  – момент инерции платформы. Когда человек идет,  $K_z = J_z \omega + (Q/g)r(\omega r + u)$ . Мы здесь учли, что скорость человека (нам нужна абсолютная, т.е. относительно земли!) складывается из скорости платформы  $\omega r$  (переносной) и скорости человека от-

носителю платформы  $u$  (относительной). При этом значение  $u > 0$  соответствует движению человека в сторону первоначального вращения платформы. Приравнявая оба выражения, получим, что

$$\omega = \frac{(PR^2 + 2Qr^2)\omega_0 - 2Qru}{PR^2 + 2Qr^2}. \quad (3.33)$$

Выражение (3.33) показывает, что если человек будет идти в сторону первоначального вращения платформы, то он уменьшит ее угловую скорость. Даже может ее остановить при  $u = (PR^2 + 2Qr^2)\omega_0 / 2Qr$ , или заставить вращаться в противоположную сторону при  $u > (PR^2 + 2Qr^2)\omega_0 / 2Qr$ . Если же человек будет идти в сторону, противоположную вращению платформы, то он всегда будет увеличивать ее угловую скорость, т.е. разгонять платформу.

**Задача 13** (про двух обезьян). Две обезьяны с равными массами сидят на концах каната, перекинутого через блок (рис. 3.21). Первая обезьяна ползет все время по канату вверх с постоянной относительной скоростью  $u$ , а вторая – просто сидит и ничего не делает. Какая из обезьян окажется наверху быстрее? Считать канат и блок невесомыми и трением в блоке пренебречь.

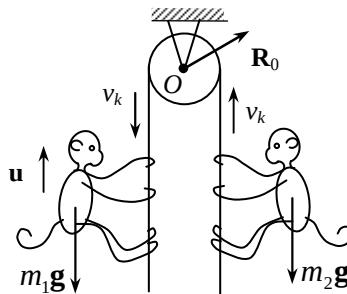


Рис. 3.21

**Решение.** 1. В качестве механической системы возьмем обезьян вместе с канатом и блоком.

2. Внешними силами будут силы реакции блока  $\mathbf{R}_0$  и веса обезьян.

3. Применим теорему моментов относительно оси  $O$  блока

$\frac{dK_0}{dt} = \sum_k M_0(\mathbf{F}_k^e)$ . Так как обезьяны одинаковые, то их массы равны  $m_1 = m_2$  и моменты от их весов будут равными и противоположными по знаку, а реакция  $\mathbf{R}_0$  момента относительно оси блока не создает. Следовательно, в нашем случае  $\sum_k M_0(\mathbf{F}_k^e) = 0$ , и

$K_0 = \text{const}$  во все время движения системы. Так как в начальный момент времени система покоилась, то  $K_0 = 0$ .

4. Вычислим момент количества движения системы  $K_0 = Rm_1v_1 - Rm_2v_2$ , где  $R$  – радиус блока, а  $v_1$  и  $v_2$  – абсолютные скорости обезьян. Знаки моментов количеств движения мы поставили, считая условно, что обе обезьяны будут подниматься, т.е. что канат будет двигаться справа налево (рис. 3.21). Тогда, очевидно,  $v_1 = v_1 - v_k$ ,  $v_2 = v_k$ , где  $v_k$  – скорость каната. Так как в начальный момент времени система покоилась, то  $K_0 = \text{const} = 0$ , и мы получаем, что  $Rm(u - v_k) = Rmv_k$ . Следовательно,  $v_k = u/2$ , а значит  $v_1 = v_2 = u/2$ .

То есть обезьяны будут во все время движения находиться на одной высоте от земли и поднимутся одновременно (!).

Заметим, что если бы вторая обезьяна тоже ползла по канату с относительной скоростью  $u$ , то обезьяны также поднялись бы одновременно, но в два раза быстрее, так как их абсолютные скорости были бы вдвое больше  $v_1 = v_2 = u$ .

**Задача 14.** Определить ускорение  $a$  однородного цилиндра массы  $m$ , катящегося без проскальзывания по наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$ . Трением качения пренебречь.

**Решение.** 1. В качестве механической системы рассмотрим цилиндр.

2. Внешними силами, действующими на цилиндр, будут его вес  $m\mathbf{g}$ , нормальная реакция плоскости  $\mathbf{N}$  и сила трения  $\mathbf{F}_{тр}$  (рис. 3.22).

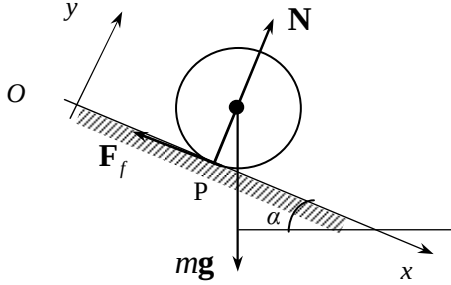


Рис. 3.22

3. Цилиндр совершает плоское движение, поэтому сразу воспользуемся ДУ его движения

$$m\ddot{x}_c = \sum_k F_{kx}^e = mg \sin \alpha - F_{mp}, \quad m\dot{y}_c = \sum_k F_{ky}^e = N - mg \cos \alpha,$$

$$J_c \ddot{\phi} = \sum_k M_c(F_k^e) = -F_{mp} R. \quad (3.34)$$

Здесь  $R$  – радиус цилиндра, а оси  $x, y$  показаны на рис. 3.22. Так как  $\dot{y}_c = 0$ , то второе условие системы (3.34) дает  $N = mg \cos \alpha$ . Условие отсутствия проскальзывания означает, что точка  $P$  является МЦС и поэтому  $\omega = \dot{\phi} = -v_c / R$ . Следовательно,  $\ddot{\phi} = \dot{\omega} = -a_c / R = -\ddot{x}_c / R$ , где  $a_c = a$  – искомое ускорение цилиндра. Уравнения (3.34) тогда перепишутся в виде

$$ma = mg \sin \alpha - F_{\dot{o}\delta}, \quad N = mg \cos \alpha, \quad J_c a = F_{mp} R^2. \quad (3.35)$$

Учитывая, что для однородного цилиндра  $J_c = mR^2 / 2$ , получим, что  $F_{mp} = ma / 2$ . Подставляя теперь это значение в первое уравнение (3.35), находим окончательно  $a = 2g \sin \alpha / 3$ .

Заметим, что режим качения без проскальзывания для цилиндра возможен лишь в случае, когда  $F_{mp} \leq F_{mp}^{npe\delta} = fN = fmg \cos \alpha$ , где  $f$  – коэффициент трения сцепления цилиндра о

плоскость. Так как мы получили, что  $F_{mp} = ma/2 = mg \sin \alpha/3$ , то должно выполняться условие  $mg \sin \alpha/3 \leq fmg \cos \alpha$ , откуда  $\operatorname{tg} \alpha \leq 3f$ . При невыполнении этого условия цилиндр будет проскальзывать.

### Вопросы для самоконтроля

1. Как определяется и для чего вводится момент количества движения системы?
2. Чему равен момент количества движения твердого тела относительно оси его вращения?
3. Как связаны моменты количеств движения относительно разных точек?
4. В чем состоит теорема моментов для системы? Справедлива ли она в системе отсчета, движущейся поступательно с центром масс системы?
5. Когда сохраняется момент количества движения системы относительно точки? А относительно оси?
6. Зачем фигурист прижимает руки к туловищу, если он хочет вращаться быстрее?
7. Можно ли изменить момент количества движения за счет внутренних сил? А момент инерции относительно оси?
8. В чем аналогия между поступательным и вращательным движением твердого тела?
9. Как происходит движение материальной точки под действием центральной силы?
10. Что называют физическим маятником? Каким уравнением описываются его малые колебания? При каком условии периоды физического и математического маятника совпадают?
11. Какой вид имеют ДУ вращательного, поступательного и плоского движения твердого тела?
12. Можно ли составить ДУ произвольного движения твердого тела?
13. Каковы основные предположения приближенной теории гироскопа? В чем состоит теорема Резаля? Почему ось гироскопа устойчива по отношению к толчкам?

14. Когда и почему происходит прецессия гироскопа? Как определяется давление в подшипниках оси гироскопа? От чего оно зависит?
15. Каковы основные этапы решения задач на применение теоремы моментов? В каких случаях удобно использовать именно эту теорему?

### **Упражнения**

**У.1.** Однородный диск массы  $M = 50$  кг и радиуса  $R = 0,5$  м катится без скольжения по горизонтальной плоскости, делая вокруг своей оси 60 об/мин. Вычислить момент количества движения диска относительно мгновенной оси вращения.

**У.2.** При полете снаряда вращение его вокруг оси симметрии замедляется действием момента силы сопротивления воздуха  $M_c = k\omega$ , где  $k = \text{const}$ , а  $\omega$  – угловая скорость вращения снаряда. Определить закон убывания угловой скорости, если начальная угловая скорость снаряда  $\omega_0$ , а момент инерции снаряда относительно его оси симметрии равен  $J$ .

**У.3.** На каком расстоянии от центра масс должен быть подвешен физический маятник, чтобы период его малых колебаний был наименьшим?

## Лекция 4. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

### 4.1. Кинетическая энергия механической системы

В качестве четвертой меры движения механической системы введем величину

$$T = \sum_k m_k v_k^2 / 2, \quad (4.1)$$

равную сумме кинетических энергий всех ее точек и называемую *кинетической энергией механической системы*. Кинетическая энергия является характеристикой и поступательного и вращательного движений системы. В отличие от количества движения  $\mathbf{Q}$  и момента количества движения  $\mathbf{K}_O$  относительно центра  $O$  кинетическая энергия является величиной скалярной. Она полностью определяется модулями скоростей ее точек и не зависит от направления их движения (раньше кинетическую энергию называли еще «живой силой»).

Если механическая система состоит из нескольких тел, то согласно определению (4.1) ее кинетическая энергия будет равна сумме кинетических энергий каждого из тел. Для одного тела кинетическая энергия в разных случаях его движения будет определяться по формулам:

1. *Поступательное движение*. В этом случае все точки тела движутся с одинаковыми скоростями  $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}$  и формула (4.1) дает

$$T = \sum_k m_k v_k^2 / 2 = (\sum_k m_k) v^2 / 2 = M v^2 / 2, \quad (4.2)$$

где  $M$  – масса тела.

2. *Вращательное движение*. Если твердое тело вращается вокруг какой-нибудь оси  $z$ , то скорости ее точек равны  $v_k = \omega h_k$ , где  $h_k$  – расстояния точек от этой оси,  $\omega$  – угловая скорость, и мы имеем

$$T = \sum_k m_k v_k^2 / 2 = (\sum_k m_k h_k^2) \omega^2 / 2 = J_z \omega^2 / 2, \quad (4.3)$$

где  $J_z$  – момент инерции тела относительно оси вращения  $z$ .

Сравнивая (4.3) с (4.2), замечаем, что при вращательном движении тела роль массы  $M$  играет его момент инерции  $J_z$ , а роль скорости  $v$  – угловая скорость  $\omega$  его вращения.

3. *Произвольное движение твердого тела.* Как мы знаем из кинематики, произвольное движение твердого тела можно рассматривать как сумму поступательного движения вместе с центром масс  $C$  и вращательного движения вокруг мгновенной оси вращения  $\Omega_C$ , проходящей через центр масс. Согласно теореме о сложении скоростей при сложном движении для любой точки тела  $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{kr} + \mathbf{v}_{ke}$ , где  $\mathbf{v}_{kr}$  – относительная скорость вращательного движения вокруг мгновенной оси вращения  $\Omega_C$ , а  $\mathbf{v}_{ke} = \mathbf{v}_C$  – переносная скорость поступательного движения вместе с его центром масс  $C$  (рис. 4.1).

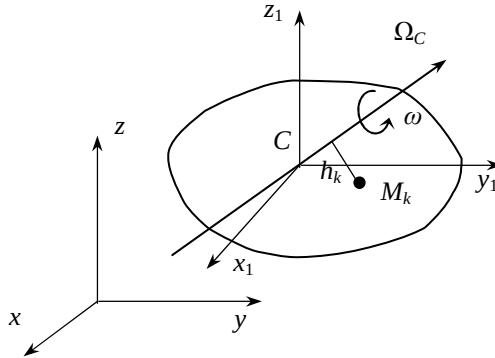


Рис. 4.1

Тогда  $v_k^2 = \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k = (\mathbf{v}_{kr} + \mathbf{v}_C) \cdot (\mathbf{v}_{kr} + \mathbf{v}_C) = v_{kr}^2 + v_C^2 + 2\mathbf{v}_{kr} \cdot \mathbf{v}_C$ . При этом  $\mathbf{v}_{kr} = \omega \mathbf{h}_k$ , где  $h_k$  – расстояние от точки  $M_k$  до оси  $\Omega_C$ . Следовательно,

$$T = \sum_k m_k v_k^2 / 2 = (\sum_k m_k) v_C^2 / 2 + (\sum_k m_k h_k^2) \omega^2 / 2 + (\sum_k m_k \mathbf{v}_{kr}) \cdot \mathbf{v}_C.$$



Заметим теперь, что  $\sum_k m_k \mathbf{v}_{kr} = M \mathbf{v}_{Cr}$ , где  $\mathbf{v}_{Cr}$  – относительная скорость вращения центра масс вокруг оси  $\Omega_C$ . Так как ось  $\Omega_C$  проходит через точку  $C$ , то  $\mathbf{v}_{Cr} = 0$ , и мы получаем, что

$$T = M \mathbf{v}_C^2 / 2 + J_{\Omega_C} \omega^2 / 2. \quad (4.4)$$

Равенство (4.4) выражает собой *теорему Кенига*: кинетическая энергия тела при его произвольном движении складывается из кинетической энергии его поступательного движения вместе с центром масс и кинетической энергии его вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс.

В частности, для плоского движения твердого тела формула (4.4) дает

$$T = M \mathbf{v}_C^2 / 2 + J_C \omega^2 / 2. \quad (4.5)$$

Заметим, что если вместо центра масс  $C$  в качестве полюса взять другую точку тела, то формула, аналогичная (4.4), не получается. То есть равенство  $T = T_{пост} + T_{вр}$  справедливо только для полюса, совпадающего с центром масс тела.

**Задача 15.** Вычислить в данный момент времени кинетическую энергию механической системы (рис. 4.2), состоящей из катящегося без проскальзывания со скоростью  $v_0$  однородного диска радиуса  $R$  и массой  $m_1$  и прикрепленного к нему шарнирно в точке  $B$  однородного стержня  $AB$  длиной  $R\sqrt{2}$  и массой  $m_2$ .

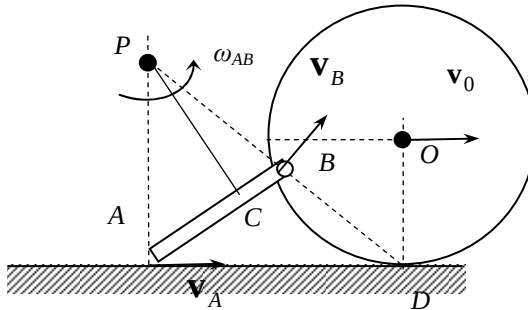


Рис. 4.2

**Решение.** Механическая система состоит из двух тел – диска и стержня. Поэтому  $T = T_1 + T_2$ . Кинетическую энергию диска  $T_1$  вычислим по формуле Кенига (4.5)  $T_1 = m_1 v_0^2 / 2 + J_0 \omega^2 / 2$ .

Условие отсутствия проскальзывания дает соотношение  $v_0 = \omega R$ . Для однородного диска  $J_0 = m_1 R^2 / 2$ . Следовательно,  $T_1 = 3m_1 R^2 / 4$ .

Стержень  $AB$  совершает мгновенное вращение вокруг точки  $P$  (рис. 4.2), являющейся его МЦС. Поэтому кинетическая энергия стержня  $T_2$  может быть вычислена по формуле (4.3):  $T_2 = J_p \omega^2 / 2$ . По формуле Гюйгенса  $J_p = J_c + m_2 PC^2$ , где  $C$  – центр масс стержня. Для однородного стержня  $BC = AC = R\sqrt{2} / 2$  и  $J_c = m_2 (R\sqrt{2})^2 / 12 = m_2 R^2 / 6$ . Так как точка  $D$  является МЦС диска, то  $v_B$  направлено перпендикулярно  $BD$  и так как  $AB = BD$ , то  $AB$  перпендикулярно  $PB$  и  $PB = R\sqrt{2}$ . Следовательно, из прямоугольного треугольника  $PBC$ ,  $PC^2 = BC^2 + PB^2 = 5R^2 / 2$ . Тогда  $J_p = m_2 R^2 / 6 + m_2 \cdot 5R^2 / 2 = 8m_2 R^2 / 3$ ,  $\omega_{AB} = v_B / PB = \omega \cdot BD / PB = \omega = v_0 / R$ . Значит,  $T_2 = 4m_2 v_0^2 / 3$ . Следовательно,  $T = (3m_1 / 4 + 4m_2 / 3) v_0^2$ .

## 4.2. Работа силы

Перейдем теперь к понятию работы сил, с помощью которой мы получим теорему об изменении кинетической энергии. Сначала вспомним, что в школьном курсе физики понятие работы силы уже определялось, только для случая постоянной по модулю и по направлению силы  $\mathbf{F}$ , приложенной к точке  $M$ , движущейся прямолинейно. А именно, если точка за время  $\Delta t = t_2 - t_1$  переместилась на расстояние  $M_2 M_1 = s$ , то работа  $A_{12}$  силы  $\mathbf{F}$  на этом перемещении определялась формулой

$$A_{12} = Fs \cos \alpha, \quad (4.6)$$

где  $\alpha$  – угол между вектором силы  $\mathbf{F}$  и перемещением точки (рис. 4.3).

Конечно, равенство (8.6) можно записать в виде скалярного произведения

$$A_{12} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}, \quad (4.7)$$

где  $\mathbf{s}$  – вектор перемещения точки.

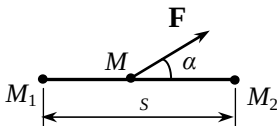


Рис. 4.3

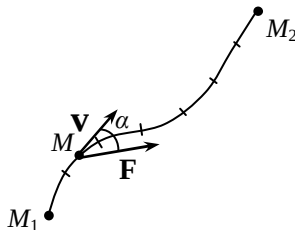


Рис. 4.4

Перейдем теперь к общему определению работы, когда сила  $\mathbf{F}$  может изменяться по величине и по направлению, а точка  $M$  приложения силы перемещается за время  $\Delta t = t_2 - t_1$  по любой криволинейной траектории (рис. 4.4). Разобьем отрезок кривой  $M_2M_1$  на  $n$  произвольных, но малых участков, обозначив длину участка с номером  $k$  через  $\Delta s_k$ . Заменяя теперь каждый малый участок прямолинейным отрезком и считая, что при перемещении по этому отрезку сила остается постоянной по величине и по направлению, получим, что работа на  $k$ -м участке, согласно (4.6), будет приблизительно равна  $F_k \Delta s_k \cos \alpha_k$  (см. рис. 4.4), а на всем пути от  $M_1$  до  $M_2$  – сумме работ на отдельных участках

$$A_{12} \approx \sum_k F_k \Delta s_k \cos \alpha_k = \sum_k \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{s}_k.$$

Точное значение работы получим, переходя к пределу, когда число участков неограниченно возрастает, а длина каждого из них неограниченно убывает. Такой предел выражается криволинейным интегралом

$$\begin{aligned}
A_{12} &= \int_{M_1 M_2} \mathbf{F}(s) \cdot d\mathbf{s} = \int_{M_1 M_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \\
&= \int_{M_1 M_2} F(s) \cos \alpha(s) ds = \int_{M_1 M_2} F_\tau(s) ds,
\end{aligned} \tag{4.8}$$

где  $F_\tau$  – проекция силы  $\mathbf{F}$  на направление перемещения точки  $M$ , а интегрирование ведется вдоль траектории точки  $M$ . Величина

$$\delta A = \mathbf{F}(s) \cdot d\mathbf{s} = F(s) \cos \alpha(s) ds = F_\tau(s) ds \tag{4.9}$$

выражает работу силы на элементарном перемещении  $d\mathbf{s}$  и называется *элементарной работой*. Формула (4.8) тогда означает, что *работа силы на перемещении равна интегралу от элементарной работы, взятому вдоль этого перемещения*.

Единицей измерения работы является 1 джоуль (1 Н·м).

Если сила  $\mathbf{F}$  задана как функция положения точки, т.е.

$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$ , то в соответствии с (4.8)

$$A_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz, \tag{4.10}$$

где  $(x_1, y_1, z_1)$  и  $(x_2, y_2, z_2)$  – координаты точки  $M$  в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ .

При естественном задании движения точки работа силы на конечном перемещении точки из положения  $s_1$  в положение  $s_2$ , согласно (4.8), выразится формулой

$$A_{12} = \int_{s_1}^{s_2} F(s) \cos \alpha(s) ds = \int_{s_1}^{s_2} F_\tau(s) ds. \tag{4.11}$$

Если известен график функции  $F_\tau(s)$ ,  $s \in [s_1, s_2]$ , то, согласно геометрическому смыслу интеграла, работа  $A_{12}$  численно равна площади криволинейной трапеции, изображенной на рис. 4.5.

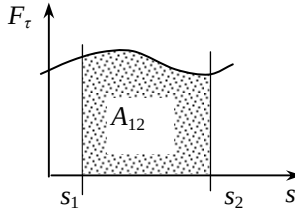


Рис. 4.5

Если сила  $\mathbf{F}$  известна как функция времени, то формулу (4.8) удобно преобразовать, используя равенство  $d\mathbf{s} = \mathbf{v}dt$ , к виду

$$A_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{v}(t) dt. \quad (4.12)$$

В этой формуле величина

$$N(t) = \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = F_\tau(s) v(s) = F_\tau(s) \frac{ds}{dt} = \frac{dA}{dt} \quad (4.13)$$

характеризует работу силы, совершенную в единицу времени, и называется *мощностью силы*. Мощность силы измеряется в ваттах (джоуль/сек). Из равенства  $N = F_\tau v$  видно, например, что у двигателя, имеющего данную мощность  $N$ , сила тяги тем больше, чем меньше скорость. Поэтому на подъеме или на плохом участке дороги у автомобиля включают низшие передачи, позволяющие при полной мощности двигателя с меньшей скоростью развивать большую тягу.

Согласно формуле (4.12) работа силы за время  $\Delta t = t_2 - t_1$  равна

$$A_{12} = \int_{t_1}^{t_2} N(t) dt. \quad (4.14)$$

Если мощность постоянная  $N(t) = N$ , то

$$A_{12} = N \cdot (t_2 - t_1), \quad (4.15)$$

т.е. работу можно измерять произведением мощности на время. Отсюда возникла употребительная в технике единица измерения киловатт-час ( $1 \text{ кВт} \cdot \text{ч} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ Дж}$ ).

Перейдем теперь к примерам вычисления работы сил, приложенных к механической системе.

1. *Работа силы тяжести.* На каждую точку  $M_k$  системы действует сила тяжести  $m_k g$ , элементарная работа которой  $\delta A_k = m_k g ds_k$ , где  $ds_k$  – элементарное перемещение точки  $M_k$ . Так как вектор  $\mathbf{g}$  направлен вертикально вниз, то его проекции на оси  $x, y, z$ , соответственно, будут равны  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$  (если ось  $z$  направлена вертикально вверх). Поэтому  $\delta A_k = -m_k g dz_k$ . Найдем теперь сумму элементарных работ всех сил тяжести, приложенных к системе

$$\delta A = \sum_k \delta A_k = -g \sum_k m_k dz_k = -gd \left( \sum_k m_k z_k \right) = -gd(Mz_C) = -gMdz_C,$$

где  $M$  – масса всей системы, а  $z_C$  – аппликата ее центра тяжести.

Следовательно, полная работа сил тяжести за время  $\Delta t = t_2 - t_1$  определится равенством

$$A_{12} = -Mg \int_{z_{C1}}^{z_{C2}} dz_C = -Mg(z_{C2} - z_{C1}) = -Mgh_C. \quad (4.16)$$

*Работа силы тяжести механической системы равна ее весу  $Mg$ , умноженному на вертикальное перемещение  $h_C$  ее центра тяжести* (при этом работа положительная, если ее центр тяжести опускается,  $h_C < 0$  и отрицательная – если поднимается,  $h_C > 0$ ).

**Задача 16.** Оконную штору массы 1 кг и длины 2 м свортывают в тонкий валик над окном (рис. 4.6). Считая штору гибкой и пренебрегая трением, определить затрачиваемую при этом работу.

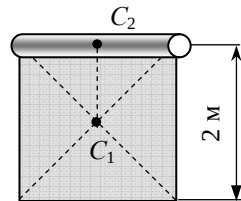


Рис. 4.6

**Решение.** По условиям задачи затрачиваемая работа при свертывании шторы равна работе по преодолению силы тяжести шторы. Так как ее центр тяжести поднимается из положения  $C_1$  в положение  $C_2$  (см. рис. 4.6), т.е. на один метр, то, согласно формуле (4.16), работа  $A_{12} = -Mgh_c \approx -9,8$  Дж. Таким образом, работа, затраченная на поднятие шторы, равна  $\approx 9,8$  Дж.

2. *Работа силы упругости.* Вычислим работу силы упругости пружины  $AB$  жесткости  $c$  при перемещении груза  $B$  из положения  $B_1$ ,  $l = l_1$  в положение  $B_2$ ,  $l = l_2$ . Так как сила упругости  $F = c\lambda$ , где  $\lambda = l - l_0$  – деформация пружины, то согласно формуле (4.8)

$$A_{12} = \int_{l_1}^{l_2} c\lambda \cos 180^\circ dl = - \int_{l_1}^{l_2} c(l - l_0)dl = c(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)/2. \quad (4.17)$$

*Работа силы упругости равна половине произведения коэффициента жесткости на разность квадратов начального и конечного удлинений пружины.*

3. *Работа силы трения скольжения.* Так как сила трения  $F_f$  при скольжении тела всегда направлена против его движения, то  $F_f ds = -F_f ds$  и, согласно формуле (4.8), получаем

$$A_{12} = - \int_{s_1}^{s_2} F_f ds = -f \int_{s_1}^{s_2} N(s) ds. \quad (4.18)$$

Если нормальная реакция  $N(s) = N$  численно постоянная (например, при движении тела по горизонтальной поверхности  $N = mg = \text{const}$ ), то

$$A_{12} = -fN(s_2 - s_1). \quad (4.19)$$

Работа силы трения всегда отрицательная и зависит от длины дуги  $\widetilde{M_1 M_2}$  и тем самым от формы траектории, по которой тело (точка) пришла из положения  $M_1$  в положение  $M_2$  (рис. 4.7).

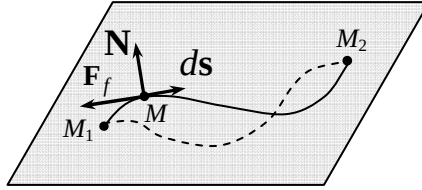


Рис. 4.7

Заметим, что работа силы тяжести и силы упругости (см. формулы (4.16) и (4.18)) полностью определялись начальным и конечным положениями механической системы и не зависели от пути перехода системы из начального в конечное положение. На это обстоятельство мы обратим особое внимание в п. 4.5.

4. *Работа сил, приложенных к твердому телу.* Прежде всего, заметим, что для *твердого тела* сумма работ всех его *внутренних сил* равна нулю. Действительно, для любых двух его точек  $M_1$  и  $M_2$ , согласно третьему закону Ньютона,  $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$  (рис. 4.8). Причем  $ds_1 \cos \alpha_1 = ds_2 \cos \alpha_2$ , так как для твердого тела проекции скоростей двух его точек на прямую, их соединяющую, равны  $v_1 \cos \alpha_1 = v_2 \cos \alpha_2$ , и при этом  $ds_1 = v_1 dt$ ,  $ds_2 = v_2 dt$ . Следовательно,  $\delta A_1 + \delta A_2 = F_1 ds_1 \cos \alpha_1 + F_2 ds_2 \cos \alpha_2 = 0$ . Так как все внутренние силы входят попарно, то отсюда и следует сформулированное выше свойство.

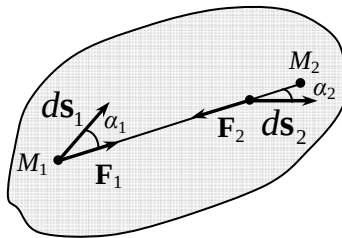


Рис. 4.8

Отметим, что аналогично можно показать, что работа внутренних сил абсолютно гибкой и нерастяжимой нити также равна нулю (докажите это самостоятельно).



Разберемся теперь с работой внешних сил  $\mathbf{F}_1^e, \mathbf{F}_2^e, \dots, \mathbf{F}_n^e$ , действующих на твердое тело (рис. 4.9). Если твердое тело движется поступательно, то перемещения всех его точек одинаковы  $d\mathbf{s}_1 = d\mathbf{s}_2 = \dots = d\mathbf{s}_n$  и элементарная работа всех внешних сил равна

$$\delta A^e = \sum_k \delta A_k^e = \sum_k \mathbf{F}_k^e d\mathbf{s}_k = (\sum_k \mathbf{F}_k^e) d\mathbf{s} = \mathbf{R}^e d\mathbf{s}. \quad (4.19)$$

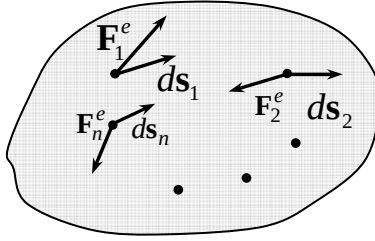


Рис. 4.9

Равенство (4.19) показывает, что *при поступательном движении твердого тела сумма работ всех действующих на него внешних сил равна работе главного вектора этих сил.*

При вращательном движении тела вокруг неподвижной оси  $z$  (рис. 4.10)

$$\begin{aligned} \delta A^e &= \sum_k \delta A_k^e = \sum_k \mathbf{F}_k^e \cdot d\mathbf{r}_k = \sum_k \mathbf{F}_k^e \cdot \mathbf{v}_k dt = \sum_k \mathbf{F}_k^e \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k) dt = \\ &= \sum_k (\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^e) \cdot \boldsymbol{\omega} dt = \mathbf{M}_0^e \cdot \boldsymbol{\omega} dt \end{aligned}$$

(мы воспользовались свойством смешанного произведения трех векторов  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) = -(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$ ). Следовательно, при вращательном движении

$$\delta A^e = \mathbf{M}_0^e \cdot \boldsymbol{\omega} dt = M_z^e \omega dt = M_z^e d\varphi, \quad (4.20)$$

где  $M_z^e = \sum_k M_z(\mathbf{F}_k^e)$ .

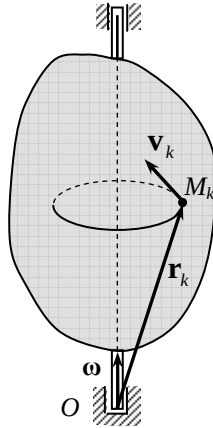


Рис. 4.10

То есть элементарная работа внешних сил при вращательном движении твердого тела равна произведению главного момента внешних сил относительно оси вращения на приращение угла поворота.

Если угол поворота твердого тела меняется от  $\varphi_1$  до  $\varphi_2$ , то сумма работ внешних сил будет равна

$$A_{12}^e = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z^e(\varphi) d\varphi. \quad (4.21)$$

В частности, если  $M_z^e = \text{const}$ , то  $A_{12}^e = M_z^e(\varphi_2 - \varphi_1)$ .

Теперь рассмотрим произвольное движение твердого тела. Как мы знаем из кинематики, его можно представить как сумму поступательного движения вместе с полюсом  $O$  и вращательного движения вокруг оси вращения, проходящей через этот полюс  $O$  (рис. 4.11). Тогда сумма элементарных работ внешних сил на поступательном перемещении определится по формуле (4.19) как элементарная работа главного вектора внешних сил  $\mathbf{R}^e$ , приложенного в полюсе  $O$ . А сумма элементарных работ всех сил на перемещении при повороте вокруг мгновенной оси  $\Omega$  определится по формуле (4.20) как произведение главного момента

внешних сил  $M_{\Omega}^e$  относительно этой оси на угол поворота  $d\varphi$  вокруг нее. Следовательно,

$$\delta A^e = \mathbf{R}^e d\mathbf{r}_0 + M_{\Omega}^e d\varphi. \quad (4.22)$$

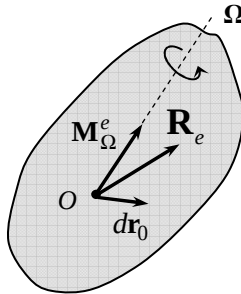


Рис. 4.11

*Элементарная работа внешних сил, приложенных к твердому телу, равна сумме элементарных их работ главного вектора на перемещении точки его приложения – полюса, и главного момента этих сил относительно мгновенной оси вращения, проходящей через этот полюс, на приращении угла поворота.*

Для того чтобы осмыслить формулу (4.21), вспомним основную теорему статики о приведении системы сил к заданному центру  $O$ . Согласно этой теореме любую систему сил  $(\mathbf{F}_1^e, \mathbf{F}_2^e, \dots, \mathbf{F}_n^e)$ , действующую на твердое тело можно привести к главному вектору  $\mathbf{R}^e = \sum_k \mathbf{F}_k^e$  и главному моменту

$\mathbf{M}_0^e = \sum_k \mathbf{M}_0(\mathbf{F}_k^e)$ . Полученный же нами результат (4.22) означает,

что все равно, как считать сумму работ всех внешних сил: либо сначала посчитать работы всех сил и сложить их, либо, наоборот, сначала сложить все силы (точнее, привести их к центру), а затем посчитать работу их главного вектора и их главного момента.

В частности, если система сил имеет равнодействующую, то работа равнодействующей равна сумме работ составляющих ее сил.

5. *Работа сил трения, действующих на катящееся колесо.*  
 Как мы знаем из курса статики, силы трения, действующие на катящееся колесо, сводятся (рис. 4.12) к нормальной реакции  $N$ , силе сцепления  $F_f$  и к моменту сопротивления качению  $M_k = Nk$ , где  $k$  – коэффициент трения качения.

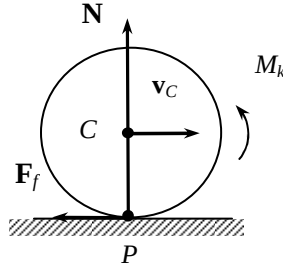


Рис. 4.12

При отсутствии проскальзывания силы  $N$  и  $F_f$  – работы не совершают, так как они приложены к точке контакта  $P$ , являющейся МЦС и, следовательно,  $ds_p = 0$ , а значит, и  $\delta A_N = \delta A_{mp} = 0$ . Работа момента сопротивления качению, как мы теперь уже тоже знаем, равна  $\delta A_k = -M_k d\varphi$ . Так как точка  $P$  является МЦС, то  $v_C = \omega R$ , а значит,  $ds_C = R d\varphi$  (так как  $ds_C = v_C dt$  и  $d\varphi = \omega dt$ ). Следовательно,

$$\delta A_k = -kN ds_C / R. \quad (4.23)$$

Если  $N = \text{const}$  (например, в случае качения колеса по горизонтальной плоскости  $N = mg$ ), то  $A_{12}^k = -kN(s_{2C} - s_{1C}) / R$ , где  $s_{2C} - s_{1C}$  – перемещение оси  $C$  колеса за время  $t_2 - t_1$ .

Так как величина  $k/R$  обычно мала, то при решении задач часто работой сил сопротивления качению пренебрегают.

### 4.3. Теорема об изменении кинетической энергии

Установим теперь зависимость между кинетической энергией системы и действующими на нее внешними и внутренними силами. Для этого снова рассмотрим второй закон Ньютона для точек  $M_k, k = 1, \dots, N$  системы

$$m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} = \mathbf{F}_k^e + \mathbf{F}_k^i.$$

Умножим каждое из этих уравнений скалярно на  $\mathbf{v}_k$  и перепишем их в виде

$$m_k \mathbf{v}_k d\mathbf{v}_k = \mathbf{F}_k^e dt + \mathbf{F}_k^i dt.$$

Просуммируем теперь все уравнения с учетом соотношений  $m_k \mathbf{v}_k d\mathbf{v}_k = d(m_k \mathbf{v}_k^2 / 2)$ . Тогда получим

$$\sum_k d(m_k \mathbf{v}_k^2 / 2) = \sum_k \delta A_k^e + \sum_k \delta A_k^i$$

или

$$dT = \delta A^e + \delta A^i. \quad (4.24)$$

Равенство (4.24) выражает *теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме*. Интегрируя теперь это равенство по времени в пределах от  $t_1$  до  $t_2$ , получим

$$T_2 - T_1 = A_{12}^e + A_{12}^i. \quad (4.25)$$

Мы получили теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме: *изменение кинетической энергии системы равно сумме работ всех действующих на нее внешних и внутренних сил*.

Отметим два обстоятельства, которые отличают теорему об изменении кинетической энергии от других теорем:

1. Уравнение (4.25) скалярное и, следовательно, позволяет получить лишь одно уравнение движения механической системы.

2. В теорему входят как внешние, так и внутренние силы, действующие на механическую систему. То есть *под действием внутренних сил кинетическая энергия может изменяться*.

Рассмотрим несколько наглядных примеров.

\* При движении автомобиля движущей силой, как мы уже убедились, является сила трения между ведущими колесами и дорогой. Без этой силы осуществить движение автомобиля нельзя. Однако сила трения при отсутствии проскальзывания (см. предыдущий п. 4.2) работы не производит. Работу производят внутренние силы давления газов, образующиеся при сгорании горючей смеси. Кроме того, работу производят внутренние силы трения в движущихся частях автомобиля.

\* При выстреле силы давления пороховых газов являются внутренними. Они производят работу и сообщают скорость снаряду.

\* При движении колеса без проскальзывания по горизонтальной дороге единственной силой, производящей работу, является работа момента сопротивления качению. Эта работа отрицательная, поэтому согласно теореме (4.25) кинетическая энергия колеса, а значит, и скорость оси колеса, будут убывать со временем. Но так как обычно сопротивление качению мало, то это убывание происходит медленно, и колесо может катиться до остановки достаточно долго.

Расчет работ сил является основной сложностью при решении задач на применение теоремы об изменении кинетической энергии. Укажем поэтому на силы, работу которых считать не нужно (так как она равна нулю на любом перемещении системы):

1. Внутренние силы абсолютно твердого тела и гибкой и нерастяжимой нити.

2. Реакции идеальных связей (связей без трения). Таковыми являются реакция гладкой поверхности, реакция гладкой опоры, реакция идеального шарнира (с идеальной смазкой), реакция невесомого идеального стержня (покажите, читатель, исходя из примеров вычисления работ сил п. 4.2, что во всех перечисленных случаях работа перечисленных реакций связей действительно равна нулю).

3. Силы, приложенные к неподвижным или мгновенно неподвижным точкам.

#### 4.4. Решение задач с помощью теоремы об изменении кинетической энергии

Обычно теорему об изменении кинетической энергии используют при рассмотрении механических систем, отдельные части которой совершают поступательное движение, в то время как другие ее части вращаются или совершают сложное движение, состоящее из суммы поступательного и вращательного движений. Определяющим при этом является возможность расчета работ всех сил, действующих на систему. Поскольку основная трудность состоит в расчете работ внутренних сил, то теорема с успехом может быть применена, если система состоит из абсолютно твердых тел, соединенных идеальными связями (без трения), либо когда передача движения от одной части системы к другой происходит посредством гибких и нерастяжимых нитей.

С помощью теоремы обычно находят скорости отдельных точек (или тел) системы либо работу одной из сил, приложенных к системе. Теорему можно применять также и для определения ускорений отдельных точек либо угловых ускорений тел. В этом случае можно исходить из теоремы, записанной в интегральной форме (4.25), беря в качестве  $t_2$  текущий момент времени  $t$ , определяя скорости точек или угловые скорости тел и затем дифференцируя их по времени. Либо с самого начала применяя теорему в дифференциальной форме (4.24), составляя ДУ движения системы, из которых уже определяются ускорения.

Что же касается последовательности решения задач с использованием нашей теоремы, то она остается почти такой же, как и при применении других общих теорем динамики, и мы ее изложили в п. 2.10 лекции 2. Отличием здесь является лишь то, что при составлении уравнений (4.24) или (4.25) нам нужны лишь силы, работа которых отлична от нуля. Поэтому при составлении рабочих рисунков достаточно изобразить только эти «работающие» силы, не забывая, конечно, что среди этих сил могут быть как внешние, так и внутренние.

Необходимо иметь в виду, что теорема дает лишь одно уравнение. Поэтому, если это возможно, решение задачи нужно свести к нахождению одной неизвестной величины. Например, в

случае определения скоростей или угловых скоростей нужно при вычислении кинетической энергии системы выразить их через скорость какого-то одного тела (точки), используя для этого кинематические соотношения. Если же этого сделать не удастся, т.е. задача не сводится к задаче с одной неизвестной, то наряду с теоремой об изменении кинетической энергии следует еще использовать другие общие теоремы динамики, применяя их к этой же механической системе или к ее части. В этом случае нужно исходить из того, чтобы в конечном счете число составленных уравнений движения и число неизвестных задачи совпало. Заметим, что именно так мы поступали и при расчете составных конструкций в статике – рассматривали либо всю конструкцию, либо расчленяли ее на части, рисуя столько рабочих «картинок», чтобы их хватило для составления замкнутой системы уравнений.

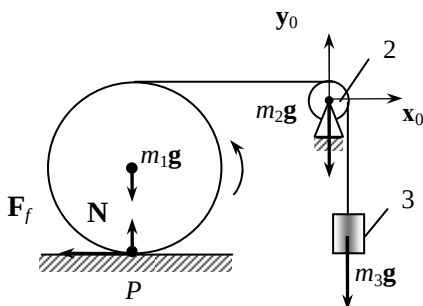


Рис. 4.13

**Задача 17.** Каток 1 массы  $m_1$  лежит на горизонтальной плоскости и обмотан тросом, перекинутым через блок 2 массы  $m_2$  и радиуса  $r_2$  (рис. 4.13). К свободному концу троса прикреплен груз 3 массы  $m_3$ . При опускании груза трос, разматываясь, приводит в качение без проскальзывания каток. Определить скорость груза при опускании его на высоту  $h$ , если момент инерции блока относительно оси вращения равен  $J_2$ . Каток считать однородным диском, массой троса, трением качения катка и трением на оси блока пренебречь.



**Решение.** 1. В качестве механической системы рассмотрим каток + блок + груз + трос.

2. По условиям задачи все внутренние силы, действующие на механическую систему, работы не совершают (считаем каток, блок и груз абсолютно твердыми телами, а трос – нерастяжимым и идеально гибким). Из всех внешних сил  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{F}_f$ ,  $m_1\mathbf{g}$ ,  $m_2\mathbf{g}$ ,  $m_3\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{y}_0$  (см. рис. 4.13), единственной силой, совершающей работу, является сила тяжести груза  $m_3\mathbf{g}$ . Действительно, силы  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{F}_f$  работы не совершают, так как приложены к точке  $P$ , являющейся МЦС, и  $d\mathbf{s}_P = 0$ . Сила тяжести  $m_1\mathbf{g}$  работы не совершает, так как она перпендикулярна перемещению  $d\mathbf{s}_C$  ( $\delta A_1 = m_1 g ds_C \cos 90^\circ = 0$ ). Силы  $m_2\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{y}_0$  работы не совершают, так как приложены к неподвижной точке  $O$ . Таким образом,  $\delta A = m_3 g ds_3$ , где  $ds_3$  – перемещение груза 3.

3. Найдем кинетическую энергию системы  $T = T_1 + T_2 + T_3$  (кинетическая энергия троса равна нулю, так как по условию задачи его весом мы пренебрегаем). Груз 3 движется поступательно, поэтому  $T_3 = m_3 v_3^2 / 2$ . Блок 2 совершает вращательное движение, поэтому  $T_2 = J_2 \omega_2^2 / 2$ . Каток 1 совершает плоское движение, его кинетическую энергию находим по теореме Кенига (4.5):  $T_1 = m_1 v_{C1}^2 / 2 + J_{C1} \omega_1^2 / 2$ . Учитывая теперь кинематические соотношения  $\omega_2 = v_3 / r_2$ ,  $\omega_1 = v_3 / 2r_1$ ,  $v_{C1} = \omega_1 r_1$  и формулу  $J_{C1} = m_1 r_1^2 / 2$  для однородного диска, получим, что  $T_1 = 3m_1 v_3^2 / 2$ . Следовательно,  $T = (3m_1 / 16 + J_2 / 2r_2^2 + m_3 / 2) v_3^2$ .

4. Применим теперь теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме (4.25), беря в качестве  $t_1$  и  $t_2$  моменты времени 0 и  $t$ . Тогда, с учетом того, что при  $t = 0$  система покоилась, получаем  $T = mgh$ . Подставляя теперь в это равенство выражение для кинетической энергии, получим

$$v_3 = \sqrt{2m_3 gh / (3m_1 / 8 + J_2 / r_2^2 + m_3)}. \quad (4.27)$$

Заметим, что решение задачи (4.27) мы можем проверить для предельного случая  $m_1 = J_2 = 0$ , который соответствует свободному падению груза. Формула (4.27) дает  $v_3 = \sqrt{2gh}$ , что и совпадает с выражением для скорости точки при ее свободном падении.

Заметим еще, что формула (4.27) дает ненулевую скорость при любой, сколь угодно большой массе катка  $m_1$ . То есть согласно полученному решению груз 3 будет опускаться и катить сколь угодно тяжелый каток (!). Это противоречие с нашим опытом является следствием того, что мы пренебрегли трением качения. Мы предоставляем читателю самостоятельно решить эту задачу с учетом трения качения и убедиться, что движение возможно лишь при выполнении условия  $m_3 > km_1 / 2r_1$ , где  $k$  – коэффициент трения качения катка.

**Задача 18.** Определить для предыдущей задачи ускорение груза 3 и силы натяжения левой и правой части троса.

**Решение.** Для определения ускорения груза продифференцируем равенство (4.27) по времени. Для этого предварительно перепишем его в виде  $v_3 = A\sqrt{h}$ , где  $A = \sqrt{2m_3g / (3m_1/8 + J_2/r_2^2 + m_3)}$ . Тогда  $a_3 = \dot{v}_3 = A\dot{h} / 2\sqrt{h}$ . Но  $\dot{h} = v_3$ , поэтому  $a_3 = Av_3 / 2\sqrt{h} = A^2 / 2$ . То есть  $a_3 = m_3g / (3m_1/8 + J_2/r_2^2 + m_3)$ .

Для определения натяжения правой от блока 2 части троса лучше всего рассмотреть движение только груза 3. Так как груз движется поступательно, то его можно считать точкой и применить к его движению второй закон Ньютона в проекции на ось  $x$  (рис. 4.14)  $m_3a_3 = m_3g - T_{np}$ . Откуда  $T_{np} = m_3g - m_3a_3$ .

Для определения натяжения левой от блока 2 части троса рассмотрим в качестве механической системы только блок 2 (рис. 4.15). Так как блок совершает чисто вращательное движение, то из теоремы моментов относительно его оси  $O$  имеем  $J_2\mathcal{E}_2 = T_{лев}r_2 - T_{np}r_2$ . При условии отсутствия проскальзывания

троса относительно блока  $a_3 = -\varepsilon_2 r_2$  (знак минус потому, что блок вращается по часовой стрелке и  $\varepsilon_2 < 0$ ), и мы получаем  $T_{лев} = T_{пр} - J_2 a_3 / r_2^2 = m_3(g - a_3) - J_2 a_3 / r_2^2$ .

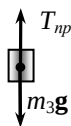


Рис. 4.14

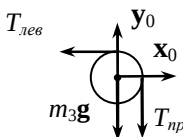


Рис. 4.15

Если блок 2 невесомый, то  $J_2 = 0$  и  $T_{лев} = T_{пр}$ , т.е. силы натяжения троса слева и справа от блока равны. Для весомого блока  $T_{лев} < T_{пр}$  и возможный разрыв троса следует ожидать в его правой части.

Объединяя теперь обе задачи 17 и 18, видим, что для их решения нам понадобилось рассмотреть как всю механическую систему (и применить к ней теорему об изменении кинетической энергии), так и ее части – груз 3 и блок 2 (и применить к ним, соответственно, второй закон Ньютона и теорему моментов).

**Задача 19.** Тело массой  $m$  падает на пружину без начальной скорости с высоты  $h$  (рис. 4.16). Найти наибольшее сжатие пружины, если ее жесткость  $c$ . Массой пружины пренебречь.

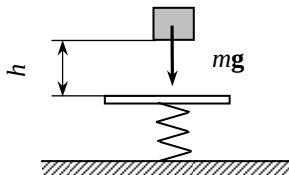


Рис. 4.16

**Решение.** В качестве механической системы рассмотрим тело массы  $m$ . Так как тело движется поступательно, то его кинетическая энергия равна  $mv^2 / 2$ .

Найдем работу всех сил, действующих на тело. Считаем его абсолютно твердым, поэтому работа внутренних сил равна нулю. Внешними силами являются вес тела  $mg$  и сила упругости пружины  $F$ , появляющаяся после соприкосновения тела с пружиной.  $F = c\lambda$ , где  $\lambda$  – сжатие пружины. Следовательно,

$A = A^e = A_{mg} + A_F = mg(h + \lambda) - c\lambda^2 / 2$ . Применяя теперь теорему об изменении кинетической энергии для моментов времени  $t_1 = 0$  и  $t_2$ , соответствующего максимальному сжатию пружины, получаем  $mv_2^2 / 2 - mv_0^2 / 2 = A$ . Учитывая, что начальная скорость  $v_0 = 0$ , а в момент времени  $t_2$ , соответствующий  $\lambda = \lambda_{\max}$ , также  $v_2 = 0$ , получим, что  $0 = mg(h + \lambda_{\max}) - c\lambda_{\max}^2 / 2$ . Решая это квадратное уравнение относительно  $\lambda_{\max}$  и учитывая, что  $\lambda_{\max} > 0$ , получаем  $\lambda_{\max} = mg + \sqrt{(mg/c)^2 + 2mgh/c}$ .

Заметим, что эту задачу можно было бы решать, разделив все движение на два участка – до соприкосновения с пружиной и после соприкосновения с ней. Затем к каждому из этих участков можно было бы применить второй закон Ньютона. Из рассмотрения первого участка найти скорость «приземления» груза на пружину, а затем уже, зная эту скорость и считая ее начальной для второго участка, решить задачу на колебательное движение точки. Определив закон колебательного движения, найти, наконец,  $\lambda_{\max}$ . Однако этот путь решения задачи был бы значительно длиннее. Таким образом, хотя второй закон Ньютона и является основным инструментом для решения задач динамики точки, применение общих теорем динамики может существенно упростить их решение.

**Задача 20.** Горизонтальная балка  $AB$  массой  $m_1$  и радиусом инерции  $\rho_z$  относительно вертикальной оси  $z$  вращается вокруг этой оси с угловой скоростью  $\omega_0$ . В некоторый момент времени находящийся в трубке шарик массой  $m_2$ , чуть смещенный относительно точки  $A$  (рис. 4.17), начинает двигаться вдоль трубки без начальной скорости. Найти скорость  $u$  шарика относительно трубки как функцию его расстояния до оси  $z$ . Соппротивлением воздуха и всеми силами трения пренебречь.

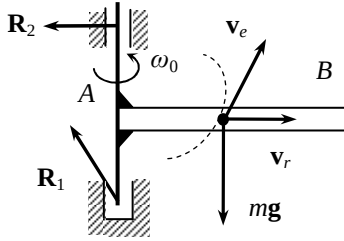


Рис. 4.17

**Решение.** 1. В качестве механической системы возьмем трубку с шариком.

2. По условию задачи механическая система такова, что никакие силы – ни внешние, ни внутренние – работу не производят (убедитесь в этом самостоятельно). Следовательно,  $T = T_0$  в любой момент времени.

3. В момент времени  $t = 0$  шарик находится в точке  $A$  и его абсолютная скорость равна нулю. Поэтому кинетическая энергия системы в начальный момент времени равна кинетической энергии трубки,  $T_0 = J_z \omega_0^2 / 2 = m_1 \rho_z^2 \omega_0^2 / 2$ .

В текущий момент времени  $t$  шарик будет находиться на расстоянии  $x$  от оси  $z$  и его кинетическая энергия  $T_2 = m_2 v^2 / 2 = m_2 (v_r^2 + v_e^2) / 2$  (формула  $v^2 = v_r^2 + v_e^2$  следует из формулы сложения скоростей  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e$  и условия перпендикулярности векторов  $\mathbf{v}_r$  и  $\mathbf{v}_e$ ). Кинетическая энергия трубки  $T_1 = m_1 \rho_z^2 \omega^2 / 2$ . Следовательно  $T = m_1 \rho_z^2 \omega^2 / 2 + m_2 (u^2 + \omega^2 x^2)$ . Подставляя полученные выражения для кинетической энергии в равенство  $T = T_0$ , получим

$$u^2 = m_1 \rho_z^2 (\omega_0^2 - \omega^2) + x^2 \omega^2. \quad (4.28)$$

4. Для определения неизвестной величины  $\omega$  воспользуемся теоремой моментов относительно оси  $z$  для той же механической системы. Так как в нашей задаче  $\sum_k M_z(\mathbf{F}_k^e) = 0$  (см. рис. 4.17), то

$K_z = \text{const} = K_{z0}$ , или  $m_1 \rho_z^2 \omega + m_2 x^2 \omega = m_1 \rho_z^2 \omega_0$ . Выражая теперь из последнего равенства  $\omega$  и подставляя в (4.28), получим значение искомой относительной скорости шарика  $u = \rho_z \omega_0 x \sqrt{m_1 / (m_1 \rho_z^2 + m_2 x^2)}$ .

Для решения этой задачи мы применили две теоремы – об изменении кинетической энергии и об изменении момента количества движения.

#### 4.5. Закон сохранения механической энергии

При изучении школьного курса физики при решении задач применялся закон сохранения полной механической энергии

$$T + P = 0, \quad (4.29)$$

где  $P$  – потенциальная энергия системы.

В этом пункте мы покажем, что этот закон является частным случаем нашей теоремы, но для этого нам нужно разобраться с потенциальной энергией системы. Для этого введем несколько определений.

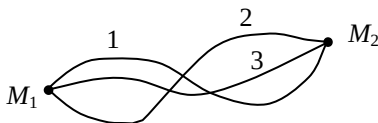


Рис. 4.18

Силу  $\mathbf{F}$  назовем *потенциальной (или консервативной)*, если работа этой силы на любом перемещении не зависит от формы траектории, по которой оно совершается. На рис. 4.18 для иллюстрации этого определения изображены несколько траекторий (1, 2 и 3), по которым совершается переход из точки  $M_1$  в точку  $M_2$ . Для потенциальных (консервативных) сил интеграл

$$A_{12} = \int_{M_1 M_2} \mathbf{F}(s) \cdot d\mathbf{s} \text{ остается одним и тем же, т.е. не зависит от то-}$$

го, вдоль какой из траекторий (1, 2 или 3) мы его будем вычислять. Если же этот интеграл зависит от формы траектории, то си-

ла, соответственно, называется *непотенциальной* (*неконсервативной*). В п. 4.2 мы уже обратили внимание на то, что работа силы тяжести и работа силы упругости определяются полностью начальным  $M_1$  и конечным  $M_2$  положениями системы и не зависят от формы траектории, т.е. эти силы являются потенциальными. Примером потенциальной силы является также сила ньютоновского притяжения тел. В этом же пункте мы убедились, что работа силы трения скольжения зависит от формы траектории, т.е. сила трения скольжения не является потенциальной. Не являются потенциальными также силы трения качения и силы сопротивления среды (например, воздуха или воды).

Для потенциальной силы  $\mathbf{F}$  можно ввести понятие потенциальной энергии этой силы. А именно: *потенциальная энергия силы  $\mathbf{F}$  в точке  $M(x, y, z)$  – это работа, которую производит эта сила при перемещении из положения  $M(x, y, z)$  в положение  $O(0, 0, 0)$*

$$П(x, y, z) = A_{MO} = \int_{MO} \mathbf{F}(s) ds. \quad (4.30)$$

Из этого определения ясно, что если сила непотенциальная (неконсервативная), то для нее нельзя ввести потенциальную энергию, так как интеграл (4.30) зависит от формы траектории движения из положения  $M$  в положение  $O$  (рис. 4.19) и однозначной функции  $П(x, y, z)$  просто не существует.

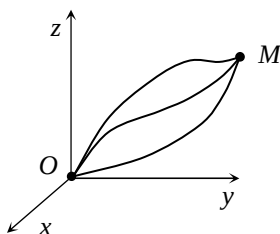


Рис. 4.19

Из формулы (4.30) непосредственно следует, что для потенциальной силы

$$A_{M_1 M_2} = П_1 - П_2, \quad (4.31)$$

где  $П_1$  и  $П_2$  – соответственно, значение потенциальной энергии в точках  $M_1$  и  $M_2$ .

Действительно, ведь  $A_{M_1M_2} = A_{M_1O} + A_{OM_2} = A_{M_1O} - A_{M_2O} = P_1 - P_2$  (здесь мы использовали определение работы силы и то, что работа потенциальной силы не зависит от выбора траектории).

Таким образом, все силы, действующие на механическую систему, можно разделить на потенциальные и непотенциальные. *Если все действующие на механическую систему силы потенциальны (консервативны), то она называется консервативной.*

Теперь уже легко видеть, что для консервативных систем полная механическая энергия сохраняется, т.е. выполняется равенство (4.29). Под  $P$  при этом понимается сумма потенциальных энергий всех сил, действующих на механическую систему  $P = \sum_k P_k, k=1, \dots, N$ . Действительно, согласно теореме об изменении кинетической энергии  $T_2 - T_1 = \sum_k A_{12} = \sum_k (P_{1k} - P_{2k}) = P_1 - P_2$  и, следовательно,  $T_2 + P_2 = T_1 + P_1$ .

Если система неконсервативна, т.е. среди сил, действующих на нее, есть непотенциальные силы, то полная механическая энергия не сохраняется. При наличии сил трения механическая энергия системы будет убывать, так как работа сил трения всегда отрицательная. Если же работа непотенциальных сил будет положительной, то механическая энергия системы будет возрастать. Примером такой силы является вынуждающая сила при колебаниях груза на пружинке при резонансе и при отсутствии сопротивления среды (см. п. 2.4.1 лекции 2). В этом случае работа вынуждающей силы за полный период колебаний груза положительная (заметим, что, и только в этом случае (!), вне резонанса работа за полный период равна нулю), это и приводит к возрастанию амплитуды колебаний. При наличии сопротивления среды даже на резонансе наблюдается баланс энергии – положительная работа вынуждающей силы компенсируется отрицательной работой силы сопротивления среды. В результате полная механическая энергия в колебательной системе «пружинка–грузик» сохраняется, и амплитуда колебаний остается конечной (хотя и может быть очень большой на резонансе).



Исходя из вышесказанного, важным является вопрос о том, является ли конкретная сила  $\mathbf{F}$ , действующая на механическую систему, потенциальной или нет. Для решения этого вопроса сначала докажем теорему.

**Теорема.** Для того чтобы сила  $\mathbf{F}$  была потенциальной, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая функция  $\Pi(x, y, z)$ , для которой

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}. \quad (4.32)$$

### Доказательство

1. *Необходимость.* Пусть сила  $\mathbf{F}$  – потенциальна, т.е. работа не зависит от выбора пути. Тогда в качестве функции  $\Pi$  возьмем потенциальную энергию этой силы  $\Pi = A_{MO}$ , в качестве траектории возьмем путь  $M\ddot{O} = M\ddot{M}_1 + M_1\ddot{M}_2 + M_2\ddot{O}$  (рис. 4.20) и вычислим работу  $A_{MO}$  по формуле (4.14)

$$\Pi = A_{MO} = \int_z^0 F_z dz + \int_y^0 F_y dy + \int_x^0 F_x dx.$$

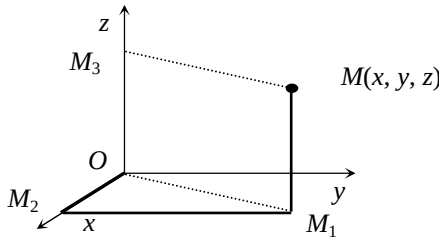


Рис. 4.20

Перепишем теперь последнее равенство в виде

$$-\Pi(x, y, z) = \int_0^x F_x dx + \int_0^y F_y dy + \int_0^x F_x dx. \quad (4.33)$$

Беря теперь частные производные от левой и правой части равенства (4.33) и учитывая, что вдоль каждого из участков интегрирования  $OM_2$ ,  $M_2M_1$ ,  $M_1M$  меняется только одна из координат

нат (соответственно,  $x, y, z$ ), получаем требуемые соотношения

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

2. *Достаточность.* Пусть теперь существует такая функция  $\Pi(x, y, z)$ , для которой

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

Тогда

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz\right) = -d\Pi,$$

и, следовательно, для любых точек  $M_1$  и  $M_2$ ,  $A_{M_1 M_2} = \int_{M_1 M_2} \delta A = - \int_{M_1 M_2} d\Pi = \Pi_1 - \Pi_2$ . Это и означает, что сила  $\mathbf{F}$  потенциальная.

Условие (4.32), в силу доказанной теоремы, часто берут за определение потенциальной силы.

Перейдем теперь к решению поставленной задачи: как, зная только проекции силы  $F_x, F_y, F_z$ , определить, является она потенциальной или нет? Для этого продифференцируем частным образом первое равенство (4.32) по  $y$ , а второе – по  $x$ . Имеем:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial x}.$$

Так как смешанные частные производные не зависят от порядка дифференцирования, то проекции сил должны удовлетворять условию (два других равенства получаются аналогичным образом)

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}. \quad (4.34)$$

Проверка «на потенциальность» силы  $\mathbf{F}$  заключается, следовательно, в проверке на выполнимость равенств (4.34) для ее проекций  $F_x, F_y, F_z$ . И если они выполняются, то находят потенциальную энергию  $\Pi$  вычислением работы  $\Pi = A_{MO}$ , выбирая путь интегрирования так, чтобы вычисления были как можно проще.

**Задача 21.** Проверить, является ли сила  $\mathbf{F}(xy^2, x^2y, z^2)$  потенциальной, и если да, то найти ее потенциальную энергию.

**Решение.** 1. Проверяем равенства (4.34)  $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 2xy$ ,

$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0$ . Следовательно, сила  $\mathbf{F}$  – потенциальная.

2. Для определения потенциальной энергии выберем путь интегрирования, изображенный на рис. 4.20. Тогда, согласно (4.33),

$$-\Pi(x, y, z) = \int_0^x F_x dx + \int_0^y F_y dy + \int_0^z F_z dz = 0 + \int_0^y x^2 y dy + \int_0^z z^2 dz \quad (\text{первый}$$

интеграл равен нулю, так как  $y = 0$  на участке  $OM_2$ ). Значит,

$$\Pi(x, y, z) = -x^2 y^2 / 2 + z^3 / 3.$$

**Задача 22.** Маятник массы  $m$  отклонен от вертикали на угол  $\varphi_0$  так, что его центр тяжести находится на расстоянии  $z_0$  от земли и отпущен без начальной скорости. Определить его угловую скорость  $\omega$ , когда его центр тяжести находится на расстоянии  $z$  от земли (рис. 4.21). Всеми силами трения пренебречь, момент инерции маятника относительно точки подвеса  $A$  считать равным  $J_A$ .

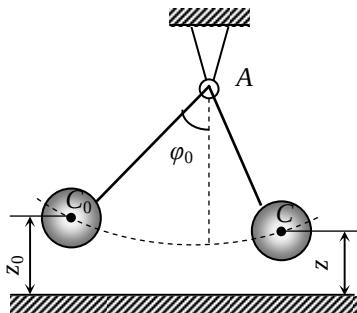


Рис. 4.21

**Решение.** По условиям задачи полная механическая энергия маятника сохраняется  $T + \Pi = \Pi_0$ . Или  $J_A \omega^2 / 2 + mgz = mgz_0$ .

Следовательно,  $\omega = \sqrt{2mg(z_0 - z) / J_A}$ .

## Вопросы для самоконтроля

1. Как определяется и что характеризует кинетическая энергия механической системы?
2. Как вычисляется кинетическая энергия для твердого тела в случаях его поступательного и вращательного движений?
3. В чем состоит теорема Кенига? Как с ее помощью вычислить кинетическую энергию в случае плоского (или произвольного) движения твердого тела?
4. Как определяется работа постоянной силы на прямолинейном перемещении точки, к которой она приложена? А если сила переменная и точка перемещается по кривой?
5. Что понимают под элементарной работой силы и как она связана с работой силы на конечном перемещении точки, к которой она приложена? В каких случаях элементарная работа равна нулю?
6. Приведите формулы для вычисления работы силы в случаях, когда она задана как функция времени, естественной координаты движения точки, прямоугольных декартовых координат точки, скорости точки.
7. Что называется мощностью силы? В каких единицах она измеряется?
8. Чему равна работа силы тяжести механической системы? А работа силы упругости и сил трения?
9. Почему работа всех внутренних сил твердого тела равна нулю? Для каких еще тел работа внутренних сил равна нулю?
10. Чему равна работа внешних сил, приложенных к твердому телу, при его поступательном, вращательном и плоском движении? А если движение твердого тела произвольное?
11. Дайте формулировку теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной и интегральной форме. Чем эта теорема отличается от остальных общих теорем динамики? Приведите примеры механических систем, для которых работа внутренних сил не равна нулю. А в каких случаях она равна нулю?
12. Дайте рекомендации к решению задач на применение теоремы об изменении кинетической энергии. В каких случаях

движения механических систем эту теорему удобнее всего применять? Сколько уравнений можно получить с ее помощью?

13. Как определяется потенциальная энергия? Для любой ли силы можно ее определить? Для каких из сил существует потенциальная энергия: тяжести, сопротивления среды (воздуха, воды), упругости пружины, всемирного тяготения, трения скольжения, трения качения?
14. Как по проекциям силы определить, является ли она потенциальной?
15. В чем состоит закон сохранения полной механической энергии? Для каких механических систем она сохраняется? Приведите примеры, когда полная механическая энергия системы сохраняется; возрастает; убывает со временем.

### Упражнения

**У.1.** Вычислите кинетическую энергию тележки массой  $M$ , движущейся со скоростью  $v$  без проскальзывания колес, масса каждого из которых  $m$  (колеса четыре). А если это будет не тележка, а гусеничный трактор?

**У.2.** Какую начальную скорость нужно сообщить однородному диску радиуса  $R$ , чтобы он поднялся по наклонной плоскости на высоту  $H$ ? Угол наклона плоскости  $\alpha$ , коэффициент трения качения  $k$ , диск катится без проскальзывания.

**У.3.** Вычислите работу, совершенную мотором автомобиля, движущегося по прямой горизонтальной дороге, если его скорость возросла от  $v_1$  до  $v_2$ . Масса кузова автомобиля  $M$ , масса каждого колеса  $m$ , радиус колеса  $r$ . Колеса, катящиеся без скольжения, считать однородными дисками. Кинетической энергией всех деталей, кроме кузова и колес, пренебречь, коэффициентом трения колес о шоссе тоже пренебречь.

**У.4.** Решите предыдущую задачу с учетом коэффициента трения колес о шоссе, равного  $k$ . Считать, что автомобилем был пройден путь  $S$ .

Учебное издание

Юдин Владимир Алексеевич

## ЛЕКЦИИ ПО ОБЩИМ ТЕОРЕМАМ ДИНАМИКИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Учебное пособие

ISBN 978-5-7795-0731-8



Темплан 2015 г.

Редактор Н.Б. Литвинова

Санитарно-эпидемиологическое заключение

№ 54.НС.05.953.П.006252.06.06 от 26.06.2006 г.

Подписано к печати 01.10.2015. Формат  $60 \times 84 \frac{1}{16}$  д.л.

Гарнитура Таймс. Бумага офсетная. Ризография.

Объем 6,36 уч.-изд.л.; 7,0 п.л. Тираж 300 экз. Заказ № 348

---

Новосибирский государственный  
архитектурно-строительный университет (Сибстрин)

630008, Новосибирск, ул. Ленинградская, 113

---

Отпечатано мастерской оперативной полиграфии  
НГАСУ (Сибстрин)