

**С.М. АУЛЬЧЕНКО
А.А. БЕЛКИН
А.В. БОЛЕСТА
А.Я. РОЙТМАН
В.Я. РУДЯК**

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

НОВОСИБИРСК 2016

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (СИБСТРИН)

**С.М. Аульченко, А.А. Белкин, А.В. Болеста,
А.Я. Ройтман, В.Я. Рудяк**

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Учебное пособие

Под редакцией д-ра физ.-мат. наук, профессора В.Я. Рудяка

НОВОСИБИРСК 2016

УДК 531.3
ББК В21
Д 466

Динамика материальной точки : учеб. пособие / С. М. Аульченко, А. А. Белкин, А. В. Болеста, А. Я. Ройтман, В. Я. Рудяк ; Новосиб. гос. архитектур.-строит. ун-т (Сибстрин) ; под. ред. В. Я. Рудяка. – Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2016. – 72 с.

ISBN 978-5-7795-0786-8

Учебное пособие включает теоретический материал и индивидуальные задания по динамике материальной точки. Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство» и специальности 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений» всех форм обучения.

Печатается по решению издательско-библиотечного совета
НГАСУ (Сибстрин)

Рецензенты:

- И.Ф. Головнев, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. (ИТПМ СОРАН);
- С.Л. Краснолуцкий, канд. физ.-мат. наук, доцент (НГАСУ (Сибстрин))

ISBN 978-5-7795-0786-8

© Аульченко С.М., Белкин А.А.,
Болеста А.В., Ройтман А.Я.,
Рудяк В.Я., 2016

© Новосибирский государственный
архитектурно-строительный
университет (Сибстрин), 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
1. АКСИОМЫ ДИНАМИКИ ТОЧКИ	6
1.1. Задачи динамики	6
1.2. Аксиомы динамики (законы Галилея – Ньютона)	7
1.3. Первая задача динамики точки	13
1.4. Вторая (основная) задача динамики точки	16
Вопросы для самоконтроля	18
2. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.....	20
2.1. Рекомендации к решению основной задачи динамики точки.....	21
2.2. Прямолинейное движение точки под действием силы, зависящей от времени	23
2.3. Прямолинейное движение точки под действием силы, зависящей от скорости.....	27
2.4. Прямолинейное движение материальной точки под действием силы, зависящей от ее координаты.....	30
2.5. Криволинейное движение точки.....	32
Вопросы для самоконтроля	34
3. РЕШЕНИЕ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТОЧКИ В СЛУЧАЕ, КОГДА СИЛЫ ПОСТОЯННЫ ИЛИ ЗАВИСЯТ ОТ ВРЕМЕНИ	36
Пример выполнения задачи	47

4. РЕШЕНИЕ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТОЧКИ В СЛУЧАЕ, КОГДА СИЛЫ ЗАВИСЯТ ОТ СКОРОСТИ	52
Пример выполнения задачи	58
5. РЕШЕНИЕ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТОЧКИ В СЛУЧАЕ, КОГДА СИЛЫ ЗАВИСЯТ ОТ КООРДИНАТЫ.....	60
Пример выполнения задачи	67
6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАКОНОВ КРИВОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОСТОЯННОЙ СИЛЫ	68
Пример выполнения задачи	70

ПРЕДИСЛОВИЕ

Изменения, происходящие в нашей стране, столь масштабны, что коснулись всех сфер жизни. Естественно, такие изменения произошли и продолжают происходить в высшем образовании. Коснулось это и Сибстрина – Сибирского строительного института. Теперь уже это университет – НГАСУ (Сибстрин). Следует понимать, что это не просто смена вывески. Переход от института к университету означает, с одной стороны, смену парадигмы технического образования, а с другой – повышение его качества. Высшее образование стало двухуровневым и включает бакалавриат и магистратуру. Ясно, что подготовка бакалавра существенно отличается от подготовки специалиста (инженера). Чтобы обучение бакалавров было качественным, необходимо переосмысление структуры учебного процесса и создание соответствующей учебно-методической базы. Данное учебное пособие одно из первых в этом ряду. Оно посвящено изучению первых глав динамики – динамики материальной точки.

Освоение динамики, в отличие от статики, требует достаточно высокой математической культуры. Ее основы базируются на математическом анализе и теории дифференциальных уравнений, знание которых предполагается. Стоит понимать, что задачи динамики не имеют столь четкого алгоритма решения, как это было в статике. Однако логика решения и этих задач вполне формализуема. Ее следует освоить. В жизни мы постоянно сталкиваемся с решением нестандартных задач. Умение решать такие задачи – это главное, чему надо научиться в вузе. Решение задач динамики – первый шаг на этом пути.

Difficillimum autem est,
in omni conquisitione
rationis exordium¹.

Платон

Manifestum non eget probatione².

1. АКСИОМЫ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

1.1. Задачи динамики

При изучении курса статики было показано, что равновесие механической системы, т.е. системы взаимодействующих между собой тел, возможно лишь в некоторых специальных случаях: когда выполняются условия равновесия. Во всех остальных случаях механическая система будет двигаться. Геометрически, без учета действующих на систему сил, это движение описывается в кинематике. *Динамика же изучает движение механической системы под действием сил.*

В динамике принято выделять две основные задачи. *Первая задача состоит в определении сил, действующих на механическую систему, по заданному закону ее движения. Во второй же, напротив, заданы силы, действующие на механическую систему, и необходимо найти закон ее движения.*

Стоит отметить, что на практике часто приходится решать смешанную задачу, когда часть сил известна, а некоторые (например, реакции связей) необходимо найти наряду с законом движения. При решении этих задач будут использоваться уже изученные разделы механики – статика и кинематика. В частности, будет применяться аксиома связей. На механическую систему в общем случае может действовать не одна сила и, чтобы выяснить характер ее движения, нередко придется использовать

¹ Во всех изысканиях разума самое трудное – это начало.

² Очевидное не нуждается в доказательствах.

разработанные в статике способы приведения сил к простейшему виду и замены одной системы сил другой, ей эквивалентной.

Важнейшей моделью динамики (так же, как и статики, и кинематики) является материальная точка. В отличие от статики и кинематики понятие материальной точки здесь усложняется. Как и раньше, под материальной точкой понимается объект (тело), размерами и внутренней структурой которого можно пренебречь. В кинематике такой объект описывался координатами, мог иметь скорость и ускорение. У материальной точки в динамике появляется еще и важная динамическая характеристика – масса, которая будет подробно обсуждена в следующем разделе.

1.2. Аксиомы динамики (законы Галилея – Ньютона)

Динамика, как и статика, как и механика в целом, является аксиоматической наукой. В ее основе лежат несколько аксиом, с помощью которых затем разрабатываются методы решения ее задач. Аксиомы – законы, установленные опытным путем за долгую историю развития человечества. Систематически их впервые изложил Исаак Ньютон в книге «Математические начала натуральной философии» в 1687 г. Сформулируем их.

Аксиома 1 (закон инерции Галилея). *Свободная материальная точка покоится или движется равномерно и прямолинейно.*

Напомним, что свободной называется точка (тело), на которую не наложены связи, следовательно, не действуют силы реакции связей.

Аксиома 1, широко известная так же, как первый закон Ньютона. Она устанавливает эквивалентность состояний покоя и равномерного и прямолинейного движения. Сформулированная аксиома является выражением того экспериментального факта, что отличить состояние покоя от равномерного и прямолинейного движения нельзя. После изучения кинематики это становится вполне понятным. Действительно, если относительно некоторой системы отсчета K точка (тело) покоится, т.е. ее

расстояние от начала координат неизменно, то всегда можно построить такую систему K' , относительно которой данная точка будет двигаться равномерно и прямолинейно. Для этого система K' должна двигаться относительно первой с постоянной скоростью. Системы отсчета, относительно которых свободная материальная точка покоится или равномерно и прямолинейно движется, называются инерциальными. Таким образом, описанные системы отсчета K и K' являются инерциальными. Нетрудно также дальше понять, что инерциальных систем отсчета существует бесконечно много, и все они движутся друг относительно друга с постоянной скоростью.

Инерциальные системы отсчета являются идеализацией реально существующих. Другими словами, любая конкретная система отсчета, строго говоря, является неинерциальной, а инерциальная система отсчета — это идеальная система отсчета, чрезвычайно полезная при формулировании законов динамики. С большой степенью точности за инерциальную можно принять *гелиоцентрическую* систему отсчета с началом в центре Солнечной системы и осями, направленными на «неподвижные» звезды (центр масс солнечной системы движется относительно центра масс нашей Галактики с пренебрежимо малым ускорением, порядка $3 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2$). Для большинства технических задач за инерциальную можно принять *геоцентрическую* систему координат, жестко связанную с Землей (но не для всех, связано это с суточным вращением Земли и ее движением по орбите вокруг Солнца).

Из определения инерциальных систем отсчета следует, что все они эквивалентны. Но если мы устанавливаем какой-либо закон относительно данной инерциальной системы координат K , то в силу эквивалентности инерциальных систем отсчета установленный закон должен одинаково формулироваться и во всех других инерциальных системах отсчета. Это утверждение носит название *принципа относительности Галилея*. Математически эквивалентность формулировки тех или иных законов механики относительно разных систем отсчета означает их инвариантность относительно преобразования координат и скоростей при

переходе от одной инерциальной системы координат к другой. Если система координат K' движется относительно системы K со скоростью $\mathbf{V}$, а радиус-вектор рассматриваемой материальной точки равен $\mathbf{r}$, то ее радиус-вектор и скорость $\mathbf{v}'$ в системе K' определяются соотношениями:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{V}t, \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{V}, \quad (1.1)$$

которые носят название преобразований Галилея. Таким образом, все законы механики должны быть инвариантны относительно преобразований (1.1).

В своих «Математических началах» Ньютон дал математическую формулировку аксиомы 1 динамики. Чтобы понять, как он это сделал, вспомним кинематику. Движение тела, которое будем моделировать материальной точкой, характеризуется скоростью $\mathbf{v}$. Воздействуя на тело, можно изменить его скорость. Из обычного опыта известно, что разные тела в разной степени способны сохранять свою скорость. Чтобы охарактеризовать способность тела сохранять движение, Ньютон ввел понятие количества движения (импульса) точки:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (1.2)$$

Количество движения отличается от скорости коэффициентом m , который называется массой, а Ньютон первоначально называл количеством материи. Возвращаясь к первой аксиоме динамики, ее можно сформулировать так: импульс свободной материальной точки (тела) не меняется:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \text{const}. \quad (1.3)$$

В такой формулировке аксиома 1 динамики может быть представлена как закон сохранения импульса (количества движения) свободной материальной точки (тела).

Подводя итог обсуждению аксиомы 1 динамики, еще раз вернемся к определению материальной точки. В динамике материальная точка характеризуется не только радиус-вектором, скоростью, но и массой. Свободная материальная точка, соглас-

но аксиоме 1, покоится или равномерно и прямолинейно движется, она «сохраняет» движение.

Аксиома 2 (второй закон Ньютона). *Если в некоторой инерциальной системе отсчета на свободную материальную точку действует сила $\mathbf{F}$, то скорость изменения импульса (количества движения) материальной точки равна действующей на нее силе.*

Математически это утверждение записывается в виде дифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad \text{или} \quad \frac{d\mathbf{mv}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (1.4)$$

Левая часть этого уравнения содержит массу тела. Смысл понятия массы становится более прозрачным, она является мерой инертности. Очевидно, что инертность тела, т.е. его способность сохранять движение при отсутствии сил и постепенно изменять его при наличии сил, тем больше, чем больше масса. По этой причине массу (1.2) называют инертной массой. Масса – величина аддитивная и скалярная, т.е. масса системы N материальных точек массой m_i равна:

$$M = \sum_{i=1}^N m_i. \quad (1.5)$$

Вторая аксиома динамики определяет, как изменяется движение материальной точки, если на нее действует сила. В классической механике предполагается, что масса тела во всех инерциальных системах отсчета одинакова и не меняется со временем³. Поэтому аксиому 2 можно переформулировать.

³ Конечно, и в классической механике есть задачи, когда масса системы может меняться со временем. Типичной задачей такого рода является задача о движении ракеты, масса которой все время уменьшается из-за истечения топлива. В подобных случаях, разумеется, следует исходить из уравнения динамики в форме (1.5).

Аксиома 2. Сила, действующая на свободную материальную точку в инерциальной системе отсчета, сообщает точке ускорение, пропорциональное этой силе и имеющее то же направление, что и сила:

$$m \frac{dv}{dt} \equiv m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \quad \text{или} \quad m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \quad (1.6)$$

где $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$ – ускорение материальной точки. Применяя уравнение (1.6) к точке (телу) весом $\mathbf{P}$ и учитывая, что ускорение свободного падения на поверхности Земли у всех тел одинаково и равно $\mathbf{g}$, находим, что ее масса определяется соотношением:

$$m = P/g. \quad (1.7)$$

Аксиома 3 динамики устанавливает закон взаимодействия двух тел.

Аксиома 3 (третий закон Ньютона). Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по величине и направленными вдоль одной прямой в противоположные стороны.

Таким образом, если между собой взаимодействуют два тела, скажем 1 и 2, и со стороны первого на второе действует сила $\mathbf{F}_{12}$, а со стороны второго на первое – сила $\mathbf{F}_{21}$, то эти силы связаны соотношением:

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}. \quad (1.8)$$

Эта аксиома уже известна нам из курса статики, она совпадает с четвертой аксиомой статики, но ее использование в динамике свидетельствует об ее универсальности: она одинаково справедлива и в покое, и в равновесии, и в движении.

На практике обычно приходится изучать движение материальной точки под действием нескольких сил. Чтобы определить закон движения точки в этом случае, И. Ньютон сформулировал принцип независимости действия сил или суперпозиции, имеющий вид следующей аксиомы.

Аксиома 4 (принцип суперпозиции). *Действие на материальную точку произвольной системы n сил $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$ эквивалентно действию одной силы, равной их сумме:*

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k. \quad (1.9)$$

Эта аксиома означает следующее: если при действии одной силы $\mathbf{F}_k$ точка получает ускорение $\mathbf{a}_k = \mathbf{F}_k / m$, то при одновременном действии на нее указанных n сил она получит ускорение:

$$\mathbf{a} = \mathbf{F} / m = \sum_{k=1}^n \mathbf{a}_k.$$

Нетрудно видеть, что данная аксиома фактически является просто следствием теоремы о равнодействующей для системы сходящихся сил, которую мы доказали в статике.

Мы уже упоминали о необходимости использования в динамике, как и в статике, аксиомы связей.

Аксиома 5. *Всякое несвободное движение материальной точки можно рассматривать как свободное, если освободить ее от связей и заменить их силами реакций.*

В заключение обратим внимание на важное обстоятельство. Формально, первый закон Ньютона является простым следствием второго. Действительно, подставляя в уравнение (1.6) $\mathbf{F} = 0$, получаем, что $\mathbf{a} = 0$, или, что то же самое, $\mathbf{v} = \text{const}$. Тогда спрашивается: а зачем он нужен? Ответ на этот вопрос следующий: закон инерции Галилея постулирует существование инерциальных систем отсчета, и тем самым указывает на рамки применимости второго закона Ньютона. В форме уравнений (1.5) или (1.6) он применим лишь в инерциальных системах отсчета.

1.3. Первая задача динамики точки

Уравнение Ньютона (1.6) является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка и устанавливает связь между силами, действующими на точку, и ее ускорением при векторном способе задания движения. Если движение точки задается в декартовой системе координат, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, то соответствующие уравнения Ньютона принимают вид:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \\ m\ddot{y} &= F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \\ m\ddot{z} &= F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь учтено, что силы, действующие на материальную точку, в общем случае могут быть функциями не только времени, но и координат точки и ее скорости.

При естественном способе задания движения точки векторное уравнение движения точки проецируется на оси естественной системы координат τ, n, b (рис. 1.1). Линия OM на рисунке – траектория точки. Ускорение в проекциях на эти оси тогда определяется соотношениями:

$$a_\tau = \ddot{s}, \quad a_n = \dot{s}^2 / \rho, \quad a_b = 0,$$

где a_τ , a_n , a_b – проекции ускорения соответственно на оси τ – касательной к траектории; n – внутренняя нормаль к траектории и бинормаль b ; ρ – радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке M ; s – криволинейная координата. В результате уравнение Ньютона (1.6) в проекциях на естественные оси имеет вид:

$$m\ddot{s} = F_\tau(t, s, \dot{s}), \quad m\dot{s}^2 / \rho = F_n(t, s, \dot{s}), \quad 0 = F_b(t, s, \dot{s}). \quad (1.11)$$

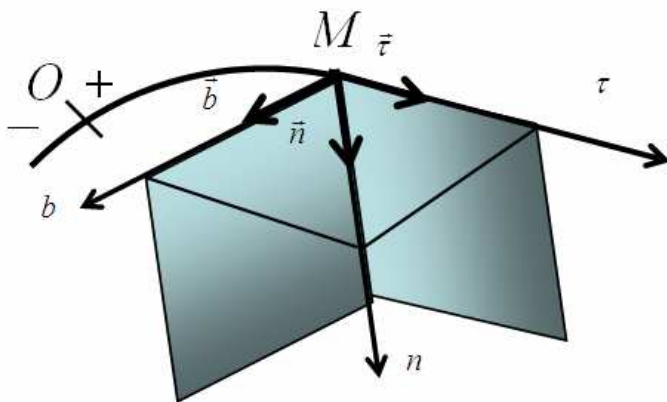


Рис. 1.1. Естественная система координат

Дифференциальные уравнения (1.5), (1.6), (1.10), (1.11) являются основным инструментом для решения задач динамики точки. Первая задача, как уже указывалось, состоит в определении силы или равнодействующей сил, действующих на точку, по заданному закону движения. Формулировку этой задачи теперь следует уточнить. Задача имеет решение лишь в том случае, если задана и масса точки (тела). Решение этой задачи всегда возможно и сводится к дифференцированию известных функций, задающих закон движения точки. Например, если закон движения задан в декартовой системе координат уравнениями $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, а масса точки равна m , то проекции искомой силы F_x , F_y , F_z , согласно уравнениям движения (1.9), вычисляются следующим образом:

$$F_x = m \frac{d^2 f_1}{dt^2}, F_y = m \frac{d^2 f_2}{dt^2}, F_z = m \frac{d^2 f_3}{dt^2}. \quad (1.12)$$

Выполняя дифференцирование, определяем проекции силы, а затем ее модуль и направляющие косинусы:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2};$$

$$\cos(\mathbf{F}, x) = F_x / F, \cos(\mathbf{F}, y) = F_y / F, \cos(\mathbf{F}, z) = F_z / F.$$

Задача 1. Закон движения материальной точки массой 2 кг задается уравнением: $\mathbf{r} = (2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + 4t\mathbf{k})$ м. Определить силу, действующую на точку.

Решение. Дифференцируя уравнения движения, находим ускорение материальной точки: $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = 6\mathbf{j}$ м/с². Используя теперь уравнение (1.6), видим, что на материальную точку действует постоянная сила, равная $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = 12\mathbf{j}$ н, направленная вдоль оси y .

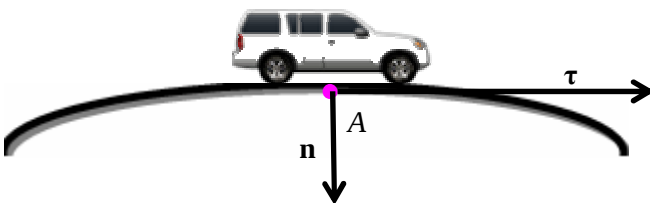


Рис. 1.2

Задача 2. Радиус закругления моста в точке A равен R (рис. 1.2). Найти давление автомобиля массой m , движущегося со скоростью u , на мост в точке A .

Решение. Считая автомобиль материальной точкой, введем естественную систему координат (см. рис. 1.2) и воспользуемся уравнением Ньютона в форме (1.11). В проекции на нормаль $mu^2 / R = -N + mg$, где N – направленная вертикально вверх нормальная реакция моста; mg – сила тяжести, действующая на ав-

томобиль. Таким образом, сила реакции: $N = mg - mu^2/R$. Сила давления автомобиля на мост, согласно третьему закону Ньютона, равна по модулю найденной силе реакции и направлена вниз. Так как по физическому смыслу задачи $N \geq 0$, то получаем ограничение на скорость движения автомобиля $u \leq \sqrt{Rg}$. При $u > \sqrt{Rg}$ автомобиль оторвется в точке А от поверхности моста (полетит).

1.4. Вторая (основная) задача динамики точки

Решение первой задачи динамики не вызывает особых проблем. Однако на практике обычно законы движения тел не известны. Наоборот, задаются силы, действующие на точку (тело), и необходимо найти закон ее движения. Именно поэтому вторую задачу динамики обычно называют основной. Вторая задача динамики оказывается значительно сложнее. Связано это с тем, что теперь необходимо решить систему трех дифференциальных уравнений (1.10) (или (1.11)) второго порядка или эквивалентную ей систему шести дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} ma_x &= F_x(t, x, y, z, \mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y, \mathbf{v}_z), \quad \mathbf{v}_x = \dot{x}; \\ ma_y &= F_y(t, x, y, z, \mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y, \mathbf{v}_z), \quad \mathbf{v}_y = \dot{y}; \\ ma_z &= F_z(t, x, y, z, \mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y, \mathbf{v}_z), \quad \mathbf{v}_z = \dot{z}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Общее решение системы уравнений (1.10) или (1.13) зависит от шести произвольных постоянных C_i , $i = 1, 2, \dots, 6$.

$$\begin{aligned} x &= x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \\ y &= y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \\ z &= z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Изменяя в общем решении (1.14) постоянные интегрирования, мы, очевидно, будем получать различные решения. Каждое из этих решений описывает некоторое движение материальной точки под действием одной и той же силы (или сил). Характер этих движений может быть разным, определяется начальными условиями, т.е. координатой и скоростью материальной точки в начальный момент времени $t = 0$.

$$\begin{aligned}x(0) &= x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0; \\ \dot{x}(0) &= v_{x0}, \quad \dot{y}(0) = v_{y0}, \quad \dot{z}(0) = v_{z0}.\end{aligned}\tag{1.15}$$

Этих шести условий достаточно для определения всех произвольных постоянных в решении (1.13). В результате каждая из постоянных C_i может быть вычислена как функция начальных данных (1.15):

$$C_i = C_i(x_0, y_0, z_0, v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}), \quad i = 1, \dots, 6.\tag{1.16}$$

Подставляя постоянные (1.16) в общее решение (1.14), получим искомое частное решение задачи, соответствующее конкретным начальным условиям (1.15).

$$\begin{aligned}x &= f_1(t, x_0, y_0, z_0, v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}); \\ y &= f_2(t, x_0, y_0, z_0, v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}); \\ z &= f_3(t, x_0, y_0, z_0, v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}).\end{aligned}\tag{1.17}$$

Сложность решения основной задачи динамики состоит в том, что сила в общем случае может зависеть не только от времени, но и от координат рассматриваемой материальной точки и ее скоростей. Поэтому в общем случае системы уравнений (1.10) или (1.13) – это системы нелинейных дифференциальных уравнений. Общая теория построения решений таких уравнений отсутствует. Поэтому удастся в общем случае получить лишь приближенные решения с помощью ЭВМ. Однако и здесь нас часто поджидают неприятные сюрпризы. Оказывается, что решения

для большинства физически интересных и содержательных задач неустойчивы относительно малых изменений начальных данных. Но неточность задания данных в ходе численного решения задачи на компьютере является принципиальным шагом. Так что построение численного решения требует чрезвычайной осторожности, аккуратности и специальных методов.

Ситуация значительно проще, если задача приводит к линейным дифференциальным уравнениям. В этом случае удастся построить точные решения, поскольку для таких уравнений разработана строгая теория их решений. Что же касается решения задач в целом, то общие рекомендации и полезные советы приводятся далее.

Вопросы для самоконтроля

1. Что изучается в динамике?
2. Каковы основные задачи динамики?
3. В чем суть закона инерции Галилея?
4. Какие системы отсчета называют инерциальными, а какие неинерциальными?
5. Как связаны между собой две инерциальные системы отсчета?
6. В каких случаях систему отсчета, связанную с Землей, можно приближенно считать инерциальной?
7. Для чего нужны преобразования Галилея?
8. Сформулируйте условия, при которых справедлив второй закон Ньютона.
9. Что такое количество движения материальной точки?
10. Импульс точки и ее количество движения – это одно и то же?
11. В чем состоит принцип суперпозиции действия сил на точку?
12. Почему масса точки является мерой ее инерции?
13. Что такое импульс материальной точки?

14. Проверьте, удовлетворяет ли второй закон Ньютона принципу относительности Галилея?
15. Как применять второй закон Ньютона, если движение точки несвободно?
16. В чем состоит принцип относительности Галилея классической механики?
17. Для чего нужны дифференциальные уравнения движения точки?
18. Сформулируйте две основных задачи динамики точки. Все ли задачи динамики точки сводятся к этим двум?
19. Для чего необходимо задавать начальные условия при решении основной задачи динамики точки? Сколько таких условий требуется задавать?
20. Придумайте и решите две первые задачи динамики.

Истинное вдохновение
современная математика
черпает в естественных
науках.

Джон фон Нейман

2. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Любая задача динамики свободного движения материальной точки принципиально может быть решена интегрированием основного уравнения динамики – уравнения Ньютона (1.6) или эквивалентной ему системы трех скалярных уравнений в проекциях на оси той или иной системы координат (например, декартовой). Каждое из трех этих уравнений является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка, которые можно эквивалентно представить в виде системы уравнений первого порядка (см. уравнения (1.13)). В зависимости от вида действующей (или действующих) на точку силы эти уравнения могут быть линейными или нелинейными. И если теория линейных обыкновенных дифференциальных уравнений хорошо разработана, то решение нелинейных уравнений требует незаурядного искусства. Решение почти каждого нового нелинейного уравнения является открытием, а само уравнение обычно носит затем имя человека, его решившего. Правда, с развитием вычислительной техники наши возможности существенно расширились. Сегодня численно удается решить почти любое уравнение. Однако, как уже отмечалось ранее, и здесь нас часто поджидают неприятные сюрпризы.

2.1. Рекомендации к решению основной задачи динамики точки

При решении конкретной задачи прежде всего нужно выбрать систему координат. Чаще всего удобно использовать прямоугольную декартову систему координат. В этом случае решение задачи сводится к решению системы уравнений (1.10) или (1.13) с начальными условиями⁴ (1.15). Однако если известна траектория движения материальной точки, то часто удобнее использовать уравнения Ньютона в естественной системе координат (1.11).

Удачный выбор начала системы координат и направлений ее осей также может существенно упростить ход решения задачи. Начало системы координат часто совмещают с положением точки в начальный момент времени, а направление одной из осей – с направлением возможного движения.

Далее необходимо в произвольный текущий момент времени изобразить материальную точку и указать все силы, которые на нее действуют. Обязательно нужно учесть, что второй закон Ньютона справедлив для свободной материальной точки. Поэтому если на тело наложены связи, необходимо сначала воспользоваться аксиомой связей и заменить все связи их реакциями. Следовательно, изображая силы, действующие на данную точку, нужно кроме активных сил указать еще и все силы реакций связей. Затем следует в векторном виде написать второй закон Ньютона:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} = \sum_k \mathbf{F}_k ,$$

включив в эту сумму все активные силы и реакции связей.

Вслед за этим нужно спроецировать второй закон Ньютона на выбранные оси координат и получить систему дифференциальных уравнений движения точки в виде (1.10) или (1.11). Про-

⁴ Решение дифференциального уравнения с некоторыми начальными значениями математики называют задачей Коши для этого уравнения.

екции сил при этом следует выразить через входящие в эту систему переменные (в общем случае через время, положение точки и ее скорость).

Далее следует сформулировать начальные условия, т.е. задать координаты и скорости точки в начальный момент времени. Число этих условий должно равняться числу произвольных постоянных интегрирования, появляющихся при интегрировании уравнений движения. Скажем, при определении плоского движения точки в прямоугольной декартовой системе координат Ox нужно задать четыре условия: начальное положение точки, $x(0), y(0)$, ее начальную скорость, $\dot{x}(0), \dot{y}(0)$. Другими словами, число начальных условий определяется порядком дифференциального уравнения.

Теперь необходимо проинтегрировать полученную систему дифференциальных уравнений движения точки при заданных начальных условиях. Здесь можно пользоваться как определенными интегралами, находя пределы интегрирования по начальным условиям, так и неопределенными интегралами. В последнем случае нужно искать общее решение задачи, в которое войдут постоянные интегрирования, и выражать эти постоянные через начальные условия. В результате будет найден закон движения материальной точки, соответствующий данным начальным условиям.

Из закона движения материальной точки находят и остальные неизвестные величины, требуемые в условии задачи. Ими могут быть, например, траектория движения, дальность и высота полета либо максимальное растяжение пружины в задачах о колебании груза и т.д.

Сформулируем еще раз основные этапы решения задачи:

- выбрать систему координат;
- освободиться от связей и заменить их реакциями;
- изобразить в произвольный момент времени все действующие на точку активные силы и силы реакции связей;
- записать уравнение Ньютона в векторном виде;

- записать полученное уравнение Ньютона в проекциях на оси выбранной системы координат;
- сформулировать начальные условия задачи;
- проинтегрировать полученную систему дифференциальных уравнений движения точки при заданных начальных условиях и найти искомые неизвестные.

Далее будет рассмотрено несколько типичных простейших задач движения материальной точки.

2.2. Прямолинейное движение точки под действием силы, зависящей от времени

Простейшим случаем движения материальной точки массой m является случай прямолинейного ее движения. Рассмотрим ее движение, возникающее под действием силы, зависящей от времени. Выберем для этого декартову систему координат $Oxyz$. Пусть для определенности эта сила действует вдоль оси Ox : $\mathbf{F}(t) = F(t)\mathbf{i}$. Пусть далее в начальный момент времени эта точка находилась в начале координат (точка O) и имела скорость $\mathbf{v}(0) = v_0\mathbf{i}$. В соответствии со вторым законом Ньютона, направление ускорения, которое получит точка, совпадает с направлением действия силы. Тогда, очевидно, что в дальнейшем она будет двигаться лишь вдоль оси Ox .

Уравнение движения точки имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t),$$

или в проекциях на оси координат

$$m\ddot{x} = F(t), \quad m\ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = 0. \quad (2.1)$$

Начальные условия для задачи записываются так:

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 0. \quad (2.2)$$

Построить решение дифференциального уравнения второго порядка всегда сложнее, чем уравнения первого порядка. По-

этому можно попробовать свести систему уравнений (2.1) к системе уравнений первого порядка (1.12), которая в данном случае имеет вид

$$m\dot{v}_x = F_x(t), \quad v_x = \dot{x}; \quad (2.3a)$$

$$\dot{v}_y = 0, \quad v_y = \dot{y}; \quad (2.3b)$$

$$\dot{v}_z = 0, \quad v_z = \dot{z}. \quad (2.3c)$$

Решая первое уравнение системы (2.3b) с начальными условиями (2.2), видим, что $v_y(t) = v_y(0) = 0$. Используя тогда второе уравнение (2.3b) и соответствующее начальное условие (2.2), получаем: $y(t) = y(0) = 0$. Решая аналогично уравнение (2.3c), находим, что $z(t) = z(0) = 0$. Итак, мы были правы, утверждая, что материальная точка движется только вдоль оси Ox . Построим теперь решение уравнений (2.3a). В правой части первого уравнения (2.3a) стоит функция времени, поэтому это уравнение можно решить методом разделения переменных, т.е. записав его так, чтобы в левой части стояла лишь неизвестная функция v_x , а в правой – время t .

$$dv_x = m^{-1}F_x(t)dt. \quad (2.4)$$

Проинтегрируем теперь это уравнение, используя сразу начальные условия (2.2).

$$\int_{v_0}^{v_x} dv_x = m^{-1} \int_0^t F_x(t)dt = f(t).$$

Таким образом,

$$v_x(t) = v_0 + f(t). \quad (2.5)$$

Второе уравнение системы (2.3a) с учетом (2.5) принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + f(t).$$

Его снова можно решить методом разделения переменных:

$$\int_0^x dx = \int_0^t [v_0 + f(t)] dt,$$

откуда

$$x = x_0 + \int_0^t [v_0 + f(t)] dt = v_0 t + \int_0^t f(t) dt. \quad (2.6)$$

В частности, если сила F постоянна, то из формул (2.5), (2.6) следуют законы равнопеременного движения:

$$v_x(t) = v_0 + at, \quad x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

где $a = F/m$ – ускорение материальной точки.

Задача 3. На двигающуюся со скоростью v_0 вдоль оси Ox материальную точку массой m начинает действовать сила $F_x(t) = F \sin \omega t$, где F и ω – постоянные. Определить закон движения точки.

Решение. В соответствии с формулой (2.5) закон изменения скорости данной материальной точки определяется соотношением:

$$v_x(t) = v_0 + m^{-1} \int_0^t F_x(t) dt = v_0 + \frac{F}{m\omega} (1 - \cos \omega t).$$

Закон движения находится интегрированием уравнения:

$$dx = \left[v_0 + \frac{F}{m\omega} (1 - \cos \omega t) \right] dt.$$

Откуда находим:

$$x(t) = x_0 + \left(v_0 + \frac{F}{m\omega} \right) t - \frac{F}{m\omega^2} \sin \omega t.$$

Любопытно, что даже в том случае, когда начальные условия в задаче однородные (нулевые), материальная точка будет удаляться от начала координат:

$$x(t) = \frac{F}{m\omega} \left(t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right).$$

Проверьте, таков ли будет характер движения, если на ту же точку будет действовать сила $F_x(t) = F \cos \omega t$. Если характер движения изменится, постарайтесь найти причину этого.

Задача 4. На двигающуюся со скоростью v_0 вдоль оси Ox материальную точку массой m в момент времени $t = 0$ начинает действовать сила $\mathbf{F}(t) = -F e^{-\alpha t} \mathbf{i}$, где F и α – постоянные. Определить закон движения точки.

Решение. Сила, действующая на точку, – это сила сопротивления, экспоненциально убывающая со временем. Приняв за начало координат положение точки в момент начала действия силы, сводим решение этой задачи к решению системы уравнений первого порядка (2.3а) с начальными условиями: $x(0) = 0$, $v(0) = v_0$. Закон изменения скорости материальной точки снова определяется соотношением (2.5):

$$v_x(t) = v_0 - \int_0^t \frac{F}{m} e^{-\alpha t} dt = v_0 + \frac{F}{m\alpha} (e^{-\alpha t} - 1).$$

Асимптотически при $t \rightarrow \infty$ точка приобретает скорость

$$v_x = v_0 - F/(m\alpha).$$

Поэтому если $v_0 = F/(m\alpha)$, то она остановится. Чтобы найти, какой путь при этом она пройдет, необходимо найти еще закон движения, который, как нетрудно установить, определяется выражением:

$$x(t) = \left(v_0 - \frac{F}{m\alpha} \right) t - \frac{F}{m\alpha^2} (e^{-\alpha t} - 1).$$

Итак, при данной силе сопротивления материальная точка может сколь угодно далеко уйти от начала координат, если только $v_0 > F/(m\alpha)$. В противном случае она удаляется на расстояние, равное $x \sim F/(m\alpha^2)$.

2.3. Прямолинейное движение точки под действием силы, зависящей от скорости

Рассмотрим теперь прямолинейное движение точки под действием силы, которая зависит лишь от ее скорости. Пусть движение происходит вдоль оси Ox , а сила $F = F(v_x)$. Мы уже знаем, что если материальная точка в начальный момент времени находилась в начале координат (так всегда можно выбрать систему отсчета) и имела отличную от нуля скорость только вдоль оси Ox , то она и будет двигаться прямолинейно. Поэтому чтобы найти закон движения точки под действием данной силы, достаточно решить систему уравнений:

$$m\dot{v} = F(v), \quad v = \dot{x}, \quad (2.7)$$

с начальными условиями: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$.

После разделения переменных решение получается непосредственно квадратурой:

$$m \int_{v_0}^v \frac{dv}{F(v)} = t.$$

Если полученный интеграл обозначить через $f(v)$, то первый интеграл уравнения (2.7) принимает вид $f(v) = t$. Из этого выражения можно найти скорость точки, как функцию времени: $v = v(t)$. Подставляя ее во второе уравнение (2.7) и интегрируя его с начальным условием $x(0) = x_0$, получаем закон движения:

$$x = x_0 + \int_0^t v(t) dt. \quad (2.8)$$

Задача 5. Материальная точка массой m , двигающаяся прямолинейно с постоянной скоростью v_0 , попадает в вязкую жидкость, где на нее действует сила сопротивления $F_x = -m\alpha v_x$. Найти закон движения точки в жидкости.

Решение. Выберем за начало отсчета положение входа точки в жидкость. Задача тогда сводится к решению уравнения $m\ddot{x} = -\alpha\dot{x}$ при начальных условиях $x(0) = 0$, $v_x(0) = v_0$. Перепишем уравнение движения точки в форме: $m\dot{v}_x = -\alpha v_x$. Разделяя в нем переменные и решая его, получаем:

$$m \int_{v_0}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = -\alpha \int_0^t dt. \quad (2.9)$$

Поэтому

$$\ln v_x / v_0 = -\alpha t / m \quad (2.10)$$

или

$$v_x = v_0 \exp(-\alpha t / m). \quad (2.11)$$

Скорость движения материальной точки в жидкости, таким образом, экспоненциально уменьшается. Чтобы найти закон движения, вновь используем уравнение $v_x = \dot{x}$:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \exp(-\alpha t / m).$$

Интегрируя его, окончательно находим:

$$x = v_0 \frac{m}{\alpha} [1 - \exp(-\alpha t / m)]. \quad (2.12)$$

При $t \rightarrow \infty$ второй член в этом выражении стремится к нулю, и, следовательно, максимальное расстояние, которое точка пройдет после входа в жидкость $x = v_0 / \alpha$.

Задача 6. Материальная точка массой m , двигающаяся прямолинейно с постоянной скоростью v_0 , входит в газовую среду, где на нее действует сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости: $F_x = -\beta m v^2$. Определить закон движения точки.

Решение. Как и в предыдущей задаче, имеем:

$$\frac{dv}{dt} = -\beta v^2 \text{ и } \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = -\beta \int_0^t dt,$$

откуда получаем

$$-\frac{1}{v} + \frac{1}{v_0} = -\beta t$$

или

$$v = \frac{v_0}{1 + v_0 \beta t}. \quad (2.13)$$

Подставляя теперь это выражение в формулу (2.10), имеем ($x_0 = 0$):

$$x = \int_0^t \frac{v_0}{1 + v_0 \beta t} dt = \beta^{-1} \ln(1 + \beta v_0 t). \quad (2.14)$$

Полученное решение полезно сравнить с решением (2.12) для случая, когда сила сопротивления была линейной функцией скорости. При $t \rightarrow \infty$ материальная точка в газе логарифмически медленно уходит на бесконечность, тогда как в жидкости она проходит конечное расстояние. Физически это связано с тем, что в газе сила сопротивления уменьшается при $t \rightarrow \infty$ быстрее, чем уменьшается скорость. В результате при $t \rightarrow \infty$ скорость точки становится равной нулю (см. формулу (2.13)), но лишь на бесконечном расстоянии от входа (при $x = \infty$).

2.4. Прямолинейное движение материальной точки под действием силы, зависящей от ее координаты

Пусть опять точка движется прямолинейно, но теперь на нее действует сила, зависящая от ее координаты: $F_x = F(x)$. Чтобы найти закон движения точки, необходимо решить уравнение Ньютона:

$$m\ddot{x} = F(x) \quad (2.15)$$

с начальными условиями $x(0) = x_0$, $v_x(0) = v_0$. Это уравнение снова можно решить методом разделения переменных, если от переменных x, t перейти к переменным v, x :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dx}.$$

Тогда уравнение Ньютона (2.15) принимает вид

$$mv \frac{dv}{dx} = F(x), \quad (2.15a)$$

переменные в котором легко разделяются

$$v dv = \frac{F(x)}{m} dx.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \psi(x), \text{ где } \psi(x) = \int_{x_0}^x \frac{F(x)}{m} dx$$

или для модуля скорости:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\psi(x)}. \quad (2.16)$$

Чтобы получить закон движения, выражение (2.16) надо подставить в уравнение $dx/dt = v$ и проинтегрировать его. В результате получаем

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + 2\psi(x)}} = t. \quad (2.17)$$

Задача 7. Найти закон падения метеорита массой m на Землю (сопротивлением воздуха пренебречь).

Решение. Падение метеорита происходит под действием силы гравитации, которая обратно пропорциональна расстоянию между телами. Таким образом, на метеорит массой m со стороны Земли действует сила

$$F = -\frac{mM\gamma}{r^2},$$

где M – масса Земли; γ – гравитационная постоянная; r – расстояние между центрами Земли и метеорита, который в данном случае можно считать материальной точкой.

Выберем начало координат в центре Земли. Метеорит будет двигаться к центру вдоль оси r . Пусть в начальный момент времени метеорит находится на расстоянии $r(0) = r_0$, а его начальная скорость равна нулю. Закон изменения его скорости со временем определяется выражением (2.16) $v = \sqrt{v_0^2 + 2\psi(r)}$, где $\psi(r) = M\gamma(r^{-1} - r_0^{-1})$. Таким образом, скорость метеорита описывается выражением:

$$v = \sqrt{2mM\gamma\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}.$$

В частности, на поверхности Земли:

$$v = \sqrt{2mM\gamma} \sqrt{\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}} = \sqrt{2mM\gamma} \sqrt{\frac{h}{R(R+h)}}.$$

Здесь R – радиус Земли; $h = r_0 - R$ – начальное положение метеорита над Землей. Поскольку на поверхности Земли

$M\gamma = gR^2$, а $R \gg h$, то эта скорость описывается известным выражением: $v = \sqrt{2gh}$.

Закон же движения, согласно (2.17), определяется:

$$\frac{1}{\sqrt{2mgR}} \int_{r_0}^r \frac{dx}{\sqrt{r^{-1} - r_0^{-1}}} = t.$$

2.5. Криволинейное движение точки

В предыдущих трех разделах рассматривалось прямолинейное движение материальной точки. В общем же случае материальная точка может двигаться так, что все три ее координаты изменяются во времени. Такое движение будем называть криволинейным. Оно описывается системой трех дифференциальных уравнений (1.9) (или (1.10)) второго порядка или эквивалентной ей системой шести дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} ma_x &= F_x(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z), \quad v_x = \dot{x}; \\ ma_y &= F_y(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z), \quad v_y = \dot{y}; \\ ma_z &= F_z(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z), \quad v_z = \dot{z}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

с начальными условиями:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0, \\ \dot{x}(0) &= v_{x0}, \quad \dot{y}(0) = v_{y0}, \quad \dot{z}(0) = v_{z0}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Ранее было показано, что движение будет криволинейным при выполнении двух условий: 1) силы действуют, по крайней мере, вдоль двух из осей; 2) и/или начальные скорости вдоль двух (трех) осей отличны от нуля. Особенности такого движения проанализируем на следующей задаче.

Задача 8. Тело (материальная точка) массой m брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 (рис. 2.1). Пренебрегая сопротивлением среды (воздуха) и считая дальность полета и высоту над горизонтом малыми по сравнению с радиусом Земли, найти закон движения, траекторию, дальность полета и максимальную высоту, на которую тело поднимается.

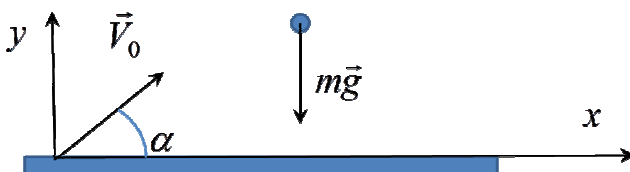


Рис. 2.1

Решение. Выберем систему координат Oxy так, что ее начало совпадает с начальным положением материальной точки (см. рис. 2.1). Тогда в произвольный момент времени на точку действует единственная сила – сила тяжести $m\vec{g}$. Поскольку движение происходит в плоскости x, y , то оно описывается системой двух дифференциальных уравнений с соответствующими начальными условиями:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 0, \quad v_x(0) = v_0 \cos \alpha, \quad x(0) = 0; \\ \ddot{y} &= -g, \quad v_y(0) = v_0 \sin \alpha, \quad y(0) = 0.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Интегрируя последовательно эти уравнения, находим сначала закон изменения скорости вдоль каждой из осей:

$$\dot{x} = v_x = v_0 \cos \alpha, \quad \dot{y} = v_y = v_0 \sin \alpha - gt.\tag{2.21}$$

Для нахождения закона движения рассматриваемого тела теперь следует проинтегрировать уравнения (2.21) с соответствующими начальными условиями. В результате получаем:

$$x(t) = v_0 t \cos \alpha, \quad y(t) = v_0 t \sin \alpha - gt^2 / 2. \quad (2.22)$$

Таким образом, тело вдоль оси x движется равномерно с начальной скоростью $v_0 \cos \alpha$, а вдоль оси y – ускоренно с ускорением свободного падения. Для определения его траектории исключим из уравнений (2.22) время. Легко установить, что траекторией является следующая парабола:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - gx^2 / (2v_0^2 \cos^2 \alpha). \quad (2.23)$$

Дальность полета можно определить непосредственно из (2.23), положив здесь $y = 0$, она получается равной:

$$L = v_0^2 \sin 2\alpha / g. \quad (2.24)$$

Поскольку траектория (2.23) симметричная, то очевидно, что максимальной высоты тело достигнет в ее середине. Подставляя тогда $x = L/2$ (см. формулу (2.24)) в уравнение (2.23), находим $h = v_0^2 \sin^2 \alpha / g$.

Вопросы для самоконтроля

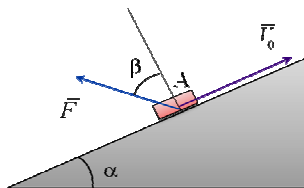
1. Какое движение называется прямолинейным?
2. Сколько начальных условий необходимо задать для нахождения закона прямолинейного движения материальной точки?
3. Что называется обыкновенным дифференциальным уравнением?
4. Чем определяется порядок дифференциального уравнения?
5. Что называется общим решением дифференциального уравнения?
6. Как из общего решения дифференциального уравнения получить его частное решение?
7. Какие силы сопротивления, зависящие от скорости движения тела, вы знаете?

8. В чем состоит метод разделения переменных решения дифференциальных уравнений первого порядка?
9. В каких случаях основная задача динамики материальной точки может быть решена методом разделения переменных?
10. Сформулируйте условия, при которых движение материальной точки будет прямолинейным.
11. Сколько постоянных в общем случае нужно определить при решении уравнения Ньютона движения материальной точки?
12. Под каким углом к горизонту нужно бросить тело в поле тяжести, чтобы оно улетело максимально далеко?
13. Под каким углом к горизонту нужно бросить тело в поле тяжести, чтобы оно поднялось на максимальную высоту?
14. Какая задача называется задачей Коши для дифференциального уравнения?

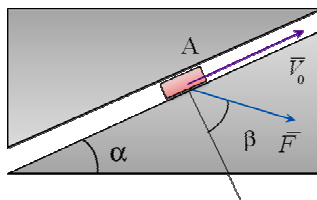
3. РЕШЕНИЕ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТОЧКИ В СЛУЧАЕ, КОГДА СИЛЫ ПОСТОЯННЫ ИЛИ ЗАВИСЯТ ОТ ВРЕМЕНИ

Задача предполагает интегрирование дифференциального уравнения движения в случае постоянных и зависящих от времени сил. Постоянные a, b задаются преподавателем в диапазоне от одного до десяти. При решении считать, что система находится в вертикальной плоскости.

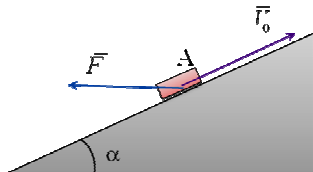
1. Телу A массой $m_A = 3a$ кг сообщили начальную скорость $V_0 = 4b$ м/с ($\beta = 30^\circ, \alpha = 30^\circ$). На тело действуют сила тяжести, постоянная сила $F = 8a$ (Н) и направленная вдоль поверхности влево сила, зависящая от времени $P = 3at^2$ Н. Определить время t_1 движения тела до момента, когда его скорость уменьшилась в два раза, и пройденный при этом путь s_1 . Коэффициент трения между телом и пластиной $f = 0,3$.



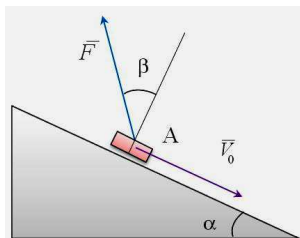
2. Тело A массой $m_A = 4a$ кг может двигаться между двумя треугольными пластинами ($\alpha = 30^\circ$). Ему сообщили начальную скорость $V_0 = 4b$ м/с, на тело действуют сила тяжести, постоянная сила $F = 80a$ Н ($\beta = 60^\circ$) и направленная вдоль линии его движения вправо сила, зависящая от времени $P = Bt^2$ Н, где B – неизвестная константа. Коэффициент трения между телом и пластинами $f = 0,2$. В момент времени $t_1 = 2$ с скорость возросла до значения $V_1 = 10b$ м/с. Определить константу B и пройденный до момента t_1 путь s_1 . При решении считать, что тело касается одной из пластин, например верхней.



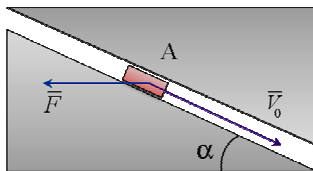
3. Телу А массой $m_A = 2a$ кг сообщили начальную скорость $V_0 = 2b$ м/с ($\alpha = 30^\circ$). На тело действуют сила тяжести, постоянная горизонтальная сила $F = 2a$ Н и направленная вдоль поверхности вправо сила, зависящая от времени $P = 30a + 3t^2$ Н. Определить скорость тела V_1 через время $t_1 = 2$ с после начала движения и пройденный за это время путь s_1 . Коэффициент трения между телом и пластиной $f = 0,15$.



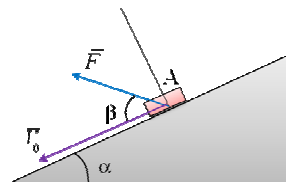
4. Телу А массой $m_A = 12a$ кг сообщили начальную скорость $V_0 = 2b$ м/с ($\beta = 30^\circ, \alpha = 30^\circ$). На него действуют сила тяжести, постоянная сила $F = 2a$ Н и направленная вдоль поверхности вправо сила, зависящая от времени $P = 10 + 3t^2$ Н. Определить скорость тела V_1 через время $t_1 = 2$ с после начала движения и пройденный за это время путь s_1 . Коэффициент трения между телом и пластиной $f = 0,1$.



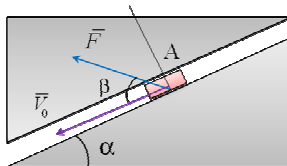
5. Тело А массой $m_A = 4a$ кг может двигаться между двумя треугольными пластинами ($\alpha = 30^\circ$). Ему сообщили начальную скорость $V_0 = 4a + b$ м/с, на тело действуют сила тяжести, постоянная горизонтальная сила $F = 2a$ Н и направленная вдоль линии его движения вправо сила, зависящая от времени $P = 5at^2$ Н. Коэффициент трения между телом и пластинами $f = 0,2$. Определить скорость тела V_1 через время $t_1 = 3$ с после начала движения и пройденный за это время путь s_1 . При решении считать, что тело касается одной из пластин, например верхней.



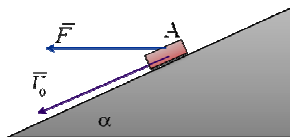
6. Телу А массой $m_A = 3a$ кг сообщили начальную скорость $V_0 = 4b$ м/с ($\beta = 60^\circ, \alpha = 30^\circ$). На тело действуют сила тяжести, постоянная сила $F = 8a$ Н и направленная вдоль поверхности влево сила, зависящая от времени $P = 3at$ Н. Определить время t_1 движения тела до момента, когда его скорость увеличилась в три раза, и пройденный при этом путь s_1 . Коэффициент трения между телом и пластиной $f = 0,2$.



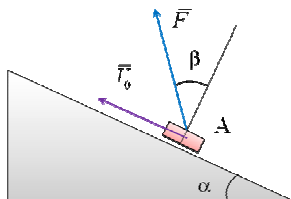
7. Тело А массой $m_A = 4a$ кг может двигаться между двумя треугольными пластинами ($\alpha = 30^\circ$). Ему сообщили начальную скорость $V_0 = 4b$ м/с, на тело действуют сила тяжести, постоянная сила $F = 80a$ Н ($\beta = 60^\circ$) и направленная вдоль линии его движения влево сила, зависящая от времени $P = Bt$ Н, где B – неизвестная константа. Коэффициент трения между телом и пластинами $f = 0,1$. В момент времени $t_1 = 2$ с скорость возросла до значения $V_1 = 10b$ м/с. Определить константу B и пройденный до момента t_1 путь s_1 . При решении считать, что тело касается одной из пластин, например верхней.



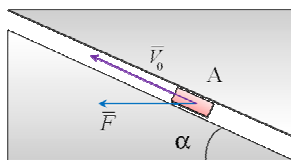
8. Телу А массой $m_A = 2a$ кг сообщили начальную скорость $V_0 = 2b$ м/с ($\alpha = 30^\circ$). На тело действуют сила тяжести, постоянная горизонтальная сила $F = 2a$ Н и направленная вдоль поверхности влево сила, зависящая от времени $P = 30a + 3t^2$ Н. Определить скорость тела V_1 через время $t_1 = 4$ с после начала движения и пройденный за это время путь s_1 . Коэффициент трения между телом и пластиной $f = 0,25$.



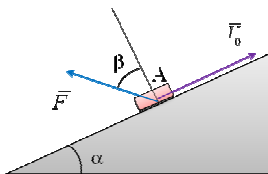
9. Телу А массой $m_A = 2a$ кг сообщили начальную скорость $V_0 = 2b$ м/с ($\beta = 30^\circ$, $\alpha = 30^\circ$). На него действуют сила тяжести, постоянная сила $F = 20a$ Н и направленная вдоль поверхности влево сила, зависящая от времени $P = 10 + 3at$ Н. Определить скорость тела V_1 через время $t_1 = 2$ с после начала движения и пройденный за это время путь s_1 . Коэффициент трения между телом и пластиной $f = 0,15$.



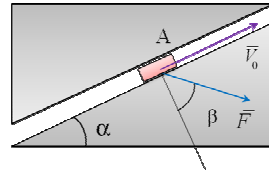
10. Тело А массой $m_A = 4a$ кг может двигаться между двумя треугольными пластинами ($\alpha = 30^\circ$). Ему сообщили начальную скорость $V_0 = 4b$ м/с, на тело действуют сила тяжести, постоянная горизонтальная сила $F = 2a$ Н и направленная вдоль линии его движения влево сила, зависящая от времени $P = 5at$ Н. Коэффициент трения между телом и пластинами $f = 0,1$. Определить скорость тела V_1 через время $t_1 = 3$ с после начала движения и пройденный за это время путь s_1 . При решении считать, что тело касается одной из пластин, например верхней.



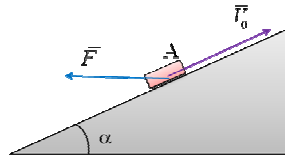
11. Телу А массой $m_A = 3a$ кг сообщили начальную скорость $V_0 = 4b$ м/с ($\beta = 30^\circ$, $\alpha = 30^\circ$). На тело действуют сила тяжести, постоянная сила $F = 8a$ Н и направленная перпендикулярно поверхности вниз сила, зависящая от времени $P = 3ct^2$ Н. Определить время t_1 движения тела до момента, когда его скорость уменьшилась в два раза, и пройденный при этом путь s_1 . Коэффициент трения между телом и пластиной $f = 0,3$.



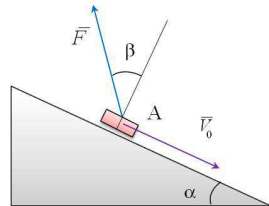
12. Тело А массой $m_A = 0,5a$ кг может двигаться между двумя треугольными пластинами ($\alpha = 30^\circ$). Ему сообщили начальную скорость $V_0 = 4b$ м/с. На тело действуют сила тяжести, постоянная сила $F = 80a$ Н ($\beta = 60^\circ$) и направленная перпендикулярно линии его движения вниз сила, зависящая от времени $P = at$ Н. Коэффициент трения между телом и пластинами $f = 0,1$. Определить время t_1 движения тела до момента, когда его скорость возросла до значения $V_1 = 10b$ м/с. и пройденный до момента t_1 путь s_1 . При решении считать, что тело касается одной из пластин, например верхней.



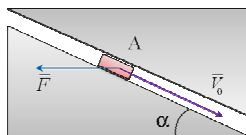
13. Телу А массой $m_A = 2a$ кг сообщили начальную скорость $V_0 = 2b$ м/с ($\alpha = 30^\circ$). На тело действуют сила тяжести, постоянная горизонтальная сила $F = 2a$ Н и направленная перпендикулярно поверхности вниз сила, зависящая от времени $P = 3at^2$ Н. Определить скорость тела V_1 через время $t_1 = 2$ с после начала движения и пройденный за это время путь s_1 . Коэффициент трения между телом и пластиной $f = 0,1$.



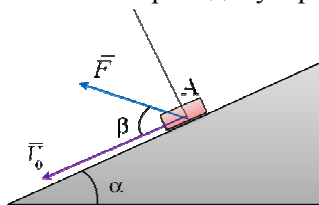
14. Телу А массой $m_A = 20a$ кг сообщили начальную скорость $V_0 = 4b$ м/с ($\beta = 30^\circ$, $\alpha = 30^\circ$). На него действуют сила тяжести, постоянная сила $F = 2a$ Н и направленная перпендикулярно поверхности вниз сила, зависящая от времени $P = at^2$ Н. Определить скорость тела V_1 через время $t_1 = 2$ с после начала движения и пройденный за это время путь s_1 . Коэффициент трения между телом и пластиной $f = 0,1$.



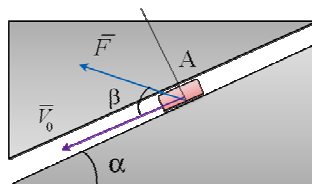
15. Тело А массой $m_A = 4a$ кг может двигаться между двумя треугольными пластинами ($\alpha = 30^\circ$). Ему сообщили начальную скорость $V_0 = 4a + b$ м/с. На тело действуют сила тяжести, постоянная горизонтальная сила $F = 2a$ Н и направленная перпендикулярно линии его движения вниз сила, зависящая от времени $P = 5at^2$ Н. Коэффициент трения между телом и пластинами $f = 0,2$. Определить скорость тела V_1 через время $t_1 = 1$ с после начала движения и пройденный за это время путь s_1 . При решении считать, что тело касается одной из пластин, например верхней.



16. Телу А массой $m_A = 3a$ кг сообщили начальную скорость $V_0 = 4b$ м/с ($\beta = 60^\circ$, $\alpha = 30^\circ$). На тело действуют сила тяжести, постоянная сила $F = 8a$ Н и направленная перпендикулярно поверхности вниз сила, зависящая от времени $P = 3at$ Н. Определить время t_1 движения тела до момента, когда его скорость увеличилась в полтора раза, и пройденный при этом путь s_1 . Коэффициент трения между телом и пластиной $f = 0,02$.

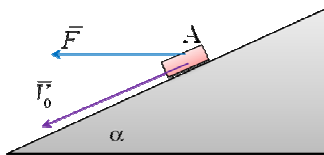


17. Тело А массой $m_A = 4a$ кг может двигаться между двумя треугольными пластинами ($\alpha = 30^\circ$). Ему сообщили начальную скорость $V_0 = 4b$ м/с, на тело действуют сила тяжести, постоянная сила $F = 80a$ Н ($\beta = 60^\circ$) и направленная перпендикулярно линии его движения вниз сила, зависящая от времени $P = at$ Н. Коэффициент трения между телом и пластинами $f = 0,1$. Определить время t_1 движения тела до момента, когда его ско-

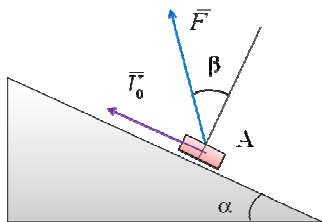


рость возросла до значения $V_1 = 10b$ м/с, и пройденный до момента t_1 путь s_1 . При решении считать, что тело касается одной из пластин, например верхней.

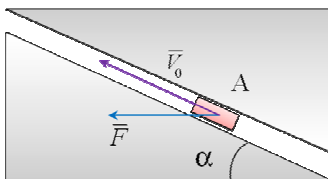
18. Телу А массой $m_A = 2a$ кг сообщили начальную скорость $V_0 = 2b$ м/с ($\alpha = 30^\circ$). На тело действуют сила тяжести, постоянная горизонтальная сила $F = 2a$ Н и направленная перпендикулярно поверхности вниз сила, зависящая от времени $P = 2at$ Н. Определить скорость тела V_1 через время $t_1 = 2$ с после начала движения и пройденный за это время путь s_1 . Коэффициент трения между телом и пластиной $f = 0,25$.



19. Телу А массой $m_A = a$ кг сообщили начальную скорость $V_0 = 2b$ м/с ($\beta = 30^\circ$, $\alpha = 30^\circ$). На него действуют сила тяжести, постоянная сила $F = 25a$ Н и направленная перпендикулярно поверхности вниз сила, зависящая от времени $P = at$ Н. Определить скорость тела V_1 через время $t_1 = 2$ с после начала движения и пройденный за это время путь s_1 . Коэффициент трения между телом и пластиной $f = 0,05$.

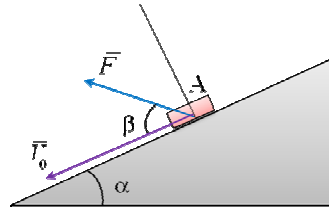


20. Тело А массой $m_A = a$ кг может двигаться между двумя треугольными пластинами ($\alpha = 30^\circ$). Ему сообщили начальную скорость $V_0 = 4b$ м/с. На тело действуют сила тяжести, постоянная горизонтальная сила $F = 30a$ Н и направленная перпендикулярно линии его движения вниз сила, зависящая от времени $P = 2at$ Н. Коэффициент трения между телом и пла-

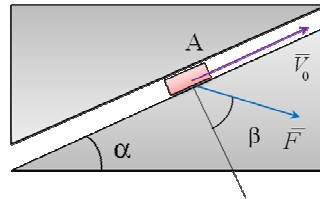


стинами $f = 0,1$. Определить скорость тела V_1 через время $t_1 = 2$ с после начала движения и пройденный за это время путь s_1 . При решении считать, что тело касается одной из пластин, например верхней.

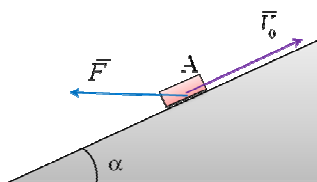
21. Телу А массой $m_A = 3a$ кг сообщили начальную скорость $V_0 = 4b$ м/с ($\beta = 30^\circ$, $\alpha = 30^\circ$). На тело действуют сила тяжести, постоянная сила $F = 8a$ Н и направленная вдоль поверхности вправо сила, зависящая от времени $P = 3Bt^2$ Н, где B – неизвестная константа. В момент времени $t_1 = 2$ с скорость возросла в два раза. Определить константу B и пройденный до момента t_1 путь s_1 . Коэффициент трения между телом и пластиной $f = 0,2$.



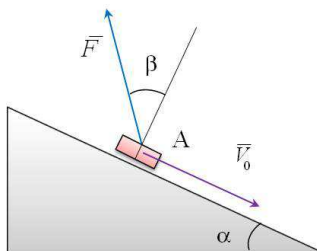
22. Тело А массой $m_A = 2a$ кг может двигаться между двумя треугольными пластинами ($\alpha = 30^\circ$). Ему сообщили начальную скорость $V_0 = 4b$ м/с, на тело действуют сила тяжести, постоянная сила $F = 80a$ Н ($\beta = 60^\circ$) и направленная вдоль линии его движения влево сила, зависящая от времени $P = Bt^2$ Н, где B – неизвестная константа. Коэффициент трения между телом и пластинами $f = 0,2$. В момент времени $t_1 = 1$ с скорость уменьшилась в два раза. Определить константу B и пройденный до момента t_1 путь s_1 . При решении считать, что тело касается одной из пластин, например верхней.



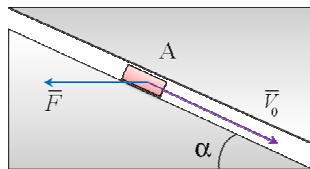
23. Телу А массой $m_A = 2a$ кг сообщили начальную скорость $V_0 = 2b$ м/с ($\alpha = 30^\circ$). На тело действуют сила тяжести, постоянная горизонтальная сила $F = 2a$ Н и направленная вдоль поверхности вправо сила, зависящая от времени $P = 3Bt$ Н, где B – неизвестная константа. В момент времени $t_1 = 2$ с скорость возросла в два раза. Определить константу B и пройденный до момента t_1 путь s_1 . Коэффициент трения между телом и пластиной $f = 0,15$.



24. Телу А массой $m_A = 2a$ кг сообщили начальную скорость $V_0 = 2b$ м/с ($\beta = 30^\circ$, $\alpha = 30^\circ$). На него действуют сила тяжести, постоянная сила $F = 40a$ Н и направленная вдоль поверхности вправо сила, зависящая от времени $P = 3Bt$ Н, где B – неизвестная константа. В момент времени $t_1 = 3$ с скорость возросла в полтора раза. Определить константу B и пройденный до момента t_1 путь s_1 . Коэффициент трения между телом и пластиной $f = 0,1$.

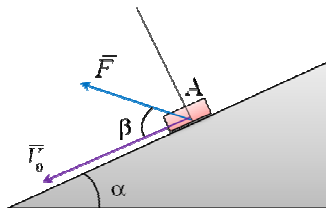


25. Тело А массой $m_A = 1,5a$ кг может двигаться между двумя треугольными пластинами ($\alpha = 30^\circ$). Ему сообщили начальную скорость $V_0 = 4a + b$ м/с, на тело действуют сила тяжести, постоянная горизонтальная сила $F = 30a$ Н и направленная вдоль линии его движения вправо сила, зависящая от времени $P = 3Bt$ Н, где B – неизвестная константа. В момент времени $t_1 = 3$ с скорость возросла в полтора раза. Определить константу B и пройденный до мо-

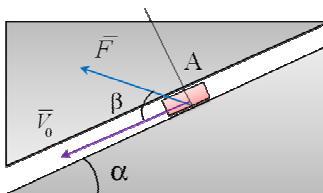


мента t_1 путь s_1 . Коэффициент трения между телом и пластинами $f = 0,1$. При решении считать, что тело касается одной из пластин, например верхней.

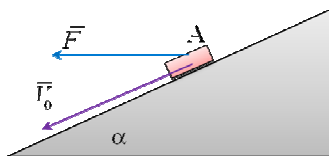
26. Телу А массой $m_A = 3a$ кг сообщили начальную скорость $V_0 = 4b$ м/с ($\beta = 60^\circ$, $\alpha = 30^\circ$). На тело действуют сила тяжести, постоянная сила $F = 8a$ Н и направленная вдоль поверхности влево сила, зависящая от времени $P = 3at + t^2$ Н. Определить время t_1 движения тела до момента, когда его скорость увеличилась в два раза, и пройденный при этом путь s_1 . Коэффициент трения между телом и пластиной $f = 0,2$.



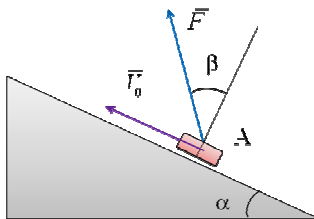
27. Тело А массой $m_A = 4a$ кг может двигаться между двумя треугольными пластинами ($\alpha = 30^\circ$). Ему сообщили начальную скорость $V_0 = 4b$ м/с, на тело действуют сила тяжести, постоянная сила $F = 80a$ Н ($\beta = 60^\circ$) и направленная вдоль линии его движения влево сила, зависящая от времени $P = At$ Н, где A – неизвестная константа. Коэффициент трения между телом и пластинами $f = 0,2$. В момент времени $t_1 = 2$ с скорость возросла в полтора раза. Определить константу A и пройденный до момента t_1 путь s_1 . При решении считать, что тело касается одной из пластин, например верхней.



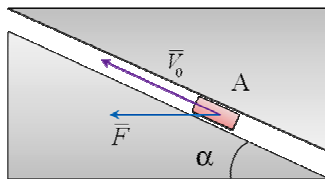
28. Телу А массой $m_A = 2a$ кг сообщили начальную скорость $V_0 = 2b$ м/с ($\alpha = 30^\circ$). На тело действует сила тяжести, постоянная горизонтальная сила $F = 2a$ Н и направленная вдоль поверхности влево сила, зависящая от времени $P = 30at^2$ Н. Определить скорость тела V_1 через время $t_1 = 2$ с после начала движения и пройденный за это время путь s_1 . Коэффициент трения между телом и пластиной $f = 0,05$.



29. Телу А массой $m_A = 1,2a$ кг сообщили начальную скорость $V_0 = 2b$ м/с ($\beta = 30^\circ$, $\alpha = 30^\circ$). На него действуют сила тяжести, постоянная сила $F = 12a$ Н и направленная вдоль поверхности влево сила, зависящая от времени $P = 20at$ Н. Определить скорость тела V_1 через время $t_1 = 2$ с после начала движения и пройденный за это время путь s_1 . Коэффициент трения между телом и пластиной $f = 0,15$.



30. Тело А массой $m_A = 4a$ кг может двигаться между двумя треугольными пластинами ($\alpha = 30^\circ$). Ему сообщили начальную скорость $V_0 = 4b$ м/с, на тело действуют сила тяжести, постоянная горизонтальная сила $F = 2a$ Н и направленная вдоль линии его движения влево сила, зависящая от времени $P = 20at$ Н. Коэффициент трения между телом и пластинами $f = 0,15$. Опре-



делить скорость тела V_1 через время $t_1 = 2$ с после начала движения и пройденный за это время путь s_1 . При решении считать, что тело касается одной из пластин, например верхней.

Пример выполнения задачи

Тело А массой $m_A = 8$ кг может двигаться между двумя треугольными пластинами (рис. 3.1) ($\alpha = 30^\circ$). Ему сообщили начальную скорость $V_0 = 10$ м/с, на тело действуют сила тяжести, постоянная горизонтальная сила $F = 4$ Н и направленная перпендикулярно линии его движения вниз сила, зависящая от времени $P = 10t^2$ Н. Коэффициент трения между телом и пластинами $f = 0,2$. Определить скорость тела V_1 через время $t_1 = 1$ с после начала движения и пройденный за это время путь s_1 .

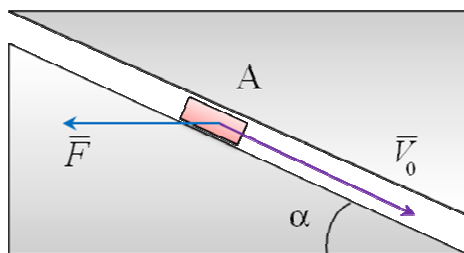


Рис. 3.1

Решение. Изобразим на рис 3.2 силы, действующие на тело А, которое будем считать в дальнейшем материальной точкой. Согласно условию, на него, кроме силы $\vec{F}$ действуют направленная вертикально вниз сила тяжести $m\vec{g}$, нормальная реакция пластины $\vec{N}$, сила трения $\vec{F}_m$, направленная в сторону, проти-

воположную скорости, и сила $\bar{P}$, направленная перпендикулярно линии движения вниз.

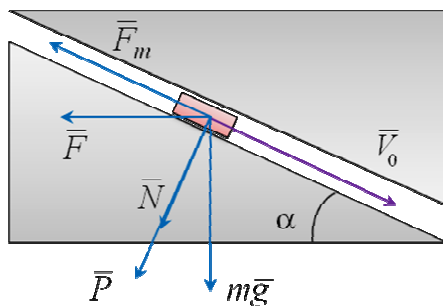


Рис 3.2

Изображая силу $\bar{N}$, предположили, что тело касается верхней пластины. Запишем для данной материальной точки второй закон Ньютона:

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{P} + \bar{N} + \bar{F} + \bar{F}_m. \quad (3.1)$$

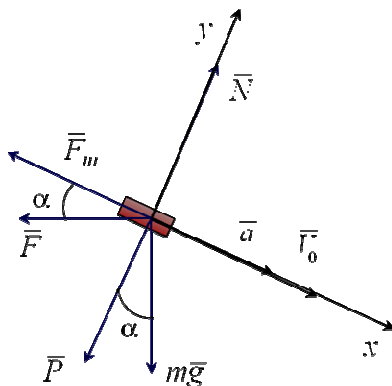


Рис. 3.3

Это векторное равенство можем спроектировать на координатные оси. Удобно направить ось x туда же, куда направлена начальная скорость тела V_0 , а ось y – в перпендикулярном направлении, начало координат выберем в начальном положении тела (рис. 3.3). Кроме того, необходимо изобразить вектор ускорения. Траекторией точки является прямая, поэтому ее нормальное ускорение равно нулю. Вектор ускорения будет параллелен касательной к траектории точки. Поскольку мы решаем задачу динамики, связанную с определением ускорения по заданным силам, то не можем заранее утверждать, будет ли ускорение сонаправлено с вектором V_0 или направлено противоположно ему. Выберем одно из этих направлений, вектор ускорения, изображенный на рис. 3.3, соответствует ускоренному движению. Позднее проверим правильность нашего предположения.

Векторное равенство (3.1) эквивалентно двум скалярным уравнениям:

$$\begin{aligned} ma_x &= mg \sin \alpha - F \cos \alpha - F_m; \\ ma_y &= -N - P - mg \cos \alpha - F \sin \alpha. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Учитывая, что $a_x = a$, $a_y = 0$, получим:

$$\begin{aligned} ma &= mg \sin \alpha - F \cos \alpha - F_m; \\ -N - P - mg \cos \alpha - F \sin \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для определения ускорения a из первого уравнения необходимо предварительно определить силу трения F_m . Воспользуемся для этого законом Кулона $F_m = f|N|$, нормальную реакцию N найдем из второго уравнения системы (3.3):

$$N = -P - mg \cos \alpha - F \sin \alpha.$$

Отрицательное значение силы N говорит о том, что она направлена в направлении, обратном выбранном нами. Однако это не принципиально, так как для определения силы трения необходим модуль реакции N :

$$|N| = P + mg \cos \alpha + F \sin \alpha;$$

$$F_m = f (P + mg \cos \alpha + F \sin \alpha).$$

Отметим, что сила трения в данной задаче не является постоянной величиной, так как она связана с зависящей от времени силой P . Первое уравнение системы (3.3) можно переписать в виде

$$ma = mg \sin \alpha - F \cos \alpha - f (P + mg \cos \alpha + F \sin \alpha). \quad (3.4)$$

Правая часть уравнения содержит как постоянные слагаемые, так и слагаемое, зависящее от времени. Введем для удобства константу

$$C = g \sin \alpha - F \cos \alpha / m - f (g \cos \alpha + F \sin \alpha / m).$$

Эта константа имеет размерность ускорения, подставляя в ее выражение условия задачи, получим, что она равна $3,37 \text{ м}^2/\text{с}$. Тогда, учитывая, что $P = 10t^2$, из формулы (3.4) получим:

$$a(t) = C - 10 ft^2 / m. \quad (3.5)$$

Зависимость скорости от времени можно получить, интегрируя уравнение (3.5) по времени:

$$v(t) = \int a(t) dt + c_1 = Ct - 10 ft^3 / 3m + c_1. \quad (3.6)$$

Для определения константы интегрирования c_1 воспользуемся начальным условием $v(0) = V_0$ и запишем формулу (3.6) в

начальный момент времени. При этом содержащие время слагаемые становятся равными нулю:

$$v(0) = c_1 = V_0.$$

Поэтому для скорости получаем следующее выражение:

$$v(t) = V_0 + Ct - 10 ft^3 / 3m. \quad (3.7)$$

Записывая уравнение (3.7) в момент времени $t_1 = 1$ с, найдем требуемое по условию задачи значение скорости:

$$V_1 = v(t_1) = V_0 + Ct_1 - 10 ft_1^3 / 3m = 12,53 \text{ м/с}.$$

Для определения пройденного пути получим, используя формулу (3.7), зависимость от времени координаты точки x :

$$x(t) = \int v(t) dt + c_2 = V_0 t + Ct^2 / 2 - 10 ft^4 / 12m + c_2.$$

Используя начальное условие $x(0) = 0$ (вспомните, где мы выбрали начало координат), получим, что константа интегрирования c_2 равна нулю, поэтому:

$$x(t) = V_0 t + Ct^2 / 2 - 10 ft^4 / 12m.$$

В момент времени t_1 координата $x(t_1) = 11,48$ м. Точка не изменяла направления движения (подумайте, откуда это следует), поэтому для определения пройденного ей пути необходимо из конечной координаты вычесть начальную:

$$s_1 = x(t_1) - x(0) = 11,48 \text{ м}.$$

4. РЕШЕНИЕ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТОЧКИ В СЛУЧАЕ, КОГДА СИЛЫ ЗАВИСЯТ ОТ СКОРОСТИ

1. Тело весом $P = 4$ кН движется по горизонтальной поверхности. Сила сопротивления воздуха $R = 4v^2$ Н. На каком расстоянии скорость тела уменьшится со 120 до 12 км/ч?
2. Тело, имеющее массу $m = 5$ кг и начальную скорость 100 м/с, движется прямолинейно. Определить время и путь до остановки тела, если на него действует сила сопротивления $R = 25v^{1/2}$ Н.
3. Самолет массой $m = 15000$ кг в момент приземления имел скорость $V_0 = 50$ м/с. Определить, какое расстояние он пройдет и какую будет иметь скорость через 10 с при выключенных моторах, если суммарное сопротивление движению выражается формулой $R = 20v^2$ (Н).
4. На горизонтальнодвигающуюся материальную точку массой $m = 2$ кг действуют сила $F = 50$ Н и сила сопротивления $R = \mu v$, где $\mu = 5$ Н·с/м – постоянный коэффициент сопротивления. Найти закон движения тела, если в начальный момент его скорость была равна нулю.
5. В момент, когда гоночный автомобиль весом $P = 8$ кН пересекает финиш со скоростью 360 км/ч, водитель выключает двигатель. Учитывая силу сопротивления воздуха $R = \alpha v^2$ Н, где $\alpha = 0,075$ Н·с²/м², определить время, прошедшее к моменту, когда скорость автомобиля уменьшилась в два раза, и расстояние, которое автомобиль прошел за это время.
6. Сила тяги мотора катера $Q = 5$ кН, а сопротивление воды определяется формулой $R = 10v$ (Н). Определить закон движения катера на начальном участке движения и предельную скорость, которую он может достичь, если движение начинается из состояния покоя, а масса катера 2000 кг.

7. Лодка с человеком общим весом $P = 1,47$ кН двигалась в спокойной воде. Когда человек перестал грести, скорость лодки была равна 2 м/с. Определить расстояние, которое пройдет лодка к моменту, когда ее скорость уменьшится в четыре раза, если сопротивление воды ее движению пропорционально первой степени скорости $R = 40v$ (Н).

8. Шарик весом $P = 0,05$ Н вылетает вертикально вверх из пружинного пистолета со скоростью 10 м/с. Считая, что сопротивление воздуха пропорционально первой степени скорости и равно 0,01 Н при скорости $v = 1$ м/с, определить максимальную высоту, на которую поднимется шарик, и время достижения этой высоты. Насколько увеличится максимальная высота подъема, если не учитывать сопротивление воздуха?

9. Неподвижное в начальный момент времени тело весом $P = 80$ Н падает в некоторой среде по вертикали. Считая, что сопротивление среды пропорционально скорости тела и равно $R = 20v$ (Н), определить максимальное значение скорости падения, время, прошедшее к моменту, когда скорость тела достигнет 0,99 ее максимального значения, и расстояние, пройденное телом за это время.

10. Сила тяги винтов вертолета массой $m = 4000$ кг при его вертикальном подъеме в два раза больше его веса. Сопротивление воздуха выражается формулой $R = 200v$ (Н), где v – скорость подъема. Найти закон движения вертолета и определить предельно достижимую скорость вертолета.

11. Самолет массой $m = 25000$ кг в момент приземления имел скорость $V_0 = 50$ м/с. Определить, какое расстояние он пройдет при выключенных моторах до момента времени, когда его скорость уменьшится в пять раз, если суммарное сопротивление движению выражается формулой $R = 10v^2$ (Н).

12. На тело массой $m = 4$ кг действуют сила $F = 100$ Н и сила сопротивления $R = \mu v$, где $\mu = 10$ Н·с/м. Найти закон движения тела и максимально достижимую его скорость, если в начальный момент его скорость была равна 2 м/с. Движение считать проходящим по горизонтальной прямой.

13. Самолет массой $m = 10000$ кг в момент приземления имел скорость $V_0 = 150$ м/с. Определить, какое расстояние он пройдет и какую будет иметь скорость через 10 с при выключенных моторах и силе сопротивления $R = 5v^2$ (Н).

14. Тело массой $m = 10$ кг движется по наклонной плоскости с углом 30° . Сила сопротивления $R = 10v$ (Н). Найти закон движения, если начальная скорость была равна нулю.

15. Парусная лодка весом $P = 1000$ Н двигалась со скоростью 2,5 м/с. После снятия паруса лодка движется, преодолевая сопротивление воды $R = 50v$ (Н). Определить время, в течение которого скорость уменьшилась в три раза, и расстояние, которое она прошла за это время.

16. Шарик весом $P = 0,05$ Н вылетает вертикально вверх из пружинного пистолета со скоростью 10 м/с. Сопротивление воздуха пропорционально первой степени скорости и при $v = 1$ м/с равно 0,01 Н. Найти максимальную высоту подъема и время достижения этой высоты.

17. Материальная точка массой $m = 4$ кг имеет начальную скорость 50 м/с и движется прямолинейно. На нее действует сила сопротивления $R = 60v^{1/3}$ (Н). Через какое время скорость уменьшится в два раза? Какой путь при этом будет пройден?

18. Материальная точка массой $m = 8$ кг имеет начальную скорость 20 м/с и движется прямолинейно. На нее действует сила сопротивления $R = 10v^2$ (Н). Через какое время будет пройден путь 1 м? Какая скорость будет в этот момент времени?

19. Материальная точка массой $m = 4$ кг имеет начальную скорость 10 м/с и движется прямолинейно под действием силы $F = 25$ Н и силы сопротивления $R = 5v$ (Н). Через какое время будет достигнута половина максимальной скорости? Какой при этом пройден путь?
20. Материальная точка массой $m = 6$ кг имеет начальную скорость 30 м/с и движется прямолинейно. На нее действует сила сопротивления $R = 15v^{1/4}$ (Н). Через какое время скорость уменьшится в три раза? Какой путь при этом будет пройден?
21. Материальная точка массой $m = 2$ кг имеет начальную скорость 1 м/с и движется прямолинейно под действием силы $F = 20$ Н и силы сопротивления $R = 4v$ (Н). Через какое время будет достигнута скорость 2 м/с? Какой при этом пройден путь?
22. Материальная точка массой $m = 8$ кг при нулевой начальной скорости движется прямолинейно под действием силы $F = 25$ Н и силы сопротивления $R = 5v$ (Н). Через какое время будет достигнута треть максимальной скорости? Какой при этом пройден путь?
23. Лыжник массой m скользит по склону крутизной α , не отталкиваясь палками. Коэффициент трения лыж о снег f . Сопротивление воздуха $R = kv$, $k = \text{const}$. Найти закон движения и максимальную скорость лыжника.
24. Тело массой m , брошенное вертикально вверх со скоростью V_0 , испытывает силу сопротивления воздуха $R = \mu v$. Через какое время тело достигнет наивысшего положения и на какую высоту оно при этом поднимется?
25. Точка массой m , двигаясь по горизонтали, в начальный момент имела скорость V_0 . Определить ее скорость через t с и пройденный за это время путь, если сопротивление $R = kmv^2$, где k – постоянная величина.

26. Автомобиль массой m движется по горизонтальной прямой дорожке. Принимая силу тяги мотора постоянной и равной Q , а сопротивление движению $R = \mu v$, определить скорость автомобиля по прошествии им пути s , если в начале этого пути он имел скорость, равную V_0 .
27. Принимая силу сопротивления равной $R = \mu v$, где μ – коэффициент пропорциональности, V – скорость, определить расстояние, которое пройдет точка за t с от момента, когда скорость ее была V_0 . Движение точки происходит вдоль горизонтальной прямой. Масса точки равна m .
28. Точка массой m начала останавливаться, имея скорость V_0 . Определить время, прошедшее до остановки точки, если сила сопротивления $R = c + kv$, где c и k – постоянные, а v – скорость точки.
29. Определить для мгновения t скорость точки весом P , падающей без начальной скорости и испытывающей сопротивление $R = P\mu v$.
30. Сила сопротивления, тормозящая моторную лодку массой m , пропорциональна квадрату скорости $R = kv^2$. За какое время после выключения мотора ее скорость уменьшится вдвое? Какое расстояние при этом пройдет лодка?

Пример выполнения задания

Материальная точка массой $m = 4$ кг движется прямолинейно под действием силы $F = 12$ Н и силы сопротивления $R = 3v$ (Н) (рис. 4.1). Начальная скорость равна нулю. Через какое время будет достигнута одна треть максимальной скорости и какой при этом пройден путь?



Рис. 4.1

Решение. Максимальная скорость достигается при равенстве нулю суммы проекций на направление движения сил, действующих на точку, что соответствует нулевому значению ускорения.

Следовательно, $F = 3v$, откуда $v_{\max} = 4$ м/с.

Для того чтобы найти время, за которое точка достигнет скорости, равной одной трети от максимальной составим уравнение движения в проекции на направление движения, из которого найдем зависимость скорости от времени:

$$ma = F - R \text{ или } m \frac{dv}{dt} = F - R.$$

После подстановки значений параметров получим уравнение в виде:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{3}{4}(4 - v).$$

Разделяя переменные, получим выражение:

$$\frac{dv}{4-v} = \frac{3}{4} dt.$$

Интегрируем левую и правую части этого уравнения:

$$\int \frac{dv}{4-v} = \int \frac{3}{4} dt + C_1.$$

Получаем:

$$\ln\left(\frac{4-v}{4}\right) = -\frac{3}{4}t + C_1. \quad (4.1)$$

Константу интегрирования C_1 находим из формулы (4.1) с учетом начального условия $v(0) = 0$:

$$C_1 = \ln\left(\frac{4-v(0)}{4}\right) = \ln(1) = 0.$$

Время, через которое будет достигнута треть максимальной скорости, находим из формулы (4.1):

$$t^* = \ln\left(\frac{4-\frac{1}{3}v_{\max}}{4}\right) = \ln\left(\frac{4-\frac{4}{3}}{4}\right) = 0,54 \text{ с.}$$

Для определения пройденного пути выразим из формулы (4.1) скорость как функцию времени:

$$v(t) = -4e^{-\frac{3}{4}t} - 4. \quad (4.2)$$

Так как $v = \frac{dx}{dt}$, из формулы (4.2) получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = -4e^{-\frac{3}{4}t} - 4.$$

Разделяя переменные, получим выражение:

$$dx = -\left(4e^{-\frac{3}{4}t} + 4\right)dt.$$

Интегрируем левую и правую части этого уравнения:

$$\int dx = -\int \left(4e^{-\frac{3}{4}t} + 4\right)dt + C_2.$$

Тогда

$$x(t) = \frac{16}{3}e^{-\frac{3}{4}t} + 4t + C_2.$$

С учетом, что $x(0) = 0$, получим:

$$x(t) = \frac{16}{3}e^{-\frac{3}{4}t} + 4t. \quad (4.3)$$

Поставляя в формулу (4.3) $t^* = 0,54$ с, найдем путь $x^* = 5,5$ м.

5. РЕШЕНИЕ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТОЧКИ В СЛУЧАЕ, КОГДА СИЛЫ ЗАВИСЯТ ОТ КООРДИНАТЫ

1. На материальную точку массой $m = 3$ кг действует постоянная по направлению сила $F = 4x^3$. В начальный момент времени точка имела скорость $v_0 = 10$ м/с и координату $x_0 = 0$. Определить скорость точки как функцию ее координаты. Найти путь, пройденный точкой к моменту, когда ее скорость увеличится в 3 раза.
2. Материальная точка массой $m = 1$ кг движется прямолинейно под действием силы $F = 200(x + 2)$ (Н). В начальный момент она имела скорость $v_0 = 10$ м/с и координату $x_0 = 0$. Определить скорость точки как функцию ее координаты. Какое расстояние точка пройдет к моменту, когда ее скорость увеличится в 2 раза?
3. Материальная точка массой $m = 2$ кг движется прямолинейно под действием силы $F = -8(x + 3)^{-2}$ (Н). В начальный момент она имела скорость $v_0 = 2$ м/с и координату $x_0 = 0$. Определить скорость точки как функцию ее координаты. Какое расстояние точка пройдет к моменту, когда ее скорость уменьшится в 3 раза?
4. Материальная точка массой $m = 10$ кг совершает прямолинейное движение под действием силы, изменяющейся по закону $F = 1000x$ (Н). В начальный момент времени точка имела скорость $v_0 = 10$ м/с и координату $x_0 = 0$. Определить скорость точки как функцию ее координаты. Какое расстояние точка пройдет к моменту, когда ее скорость увеличится в 3 раза?
5. Материальная точка массой $m = 20$ кг совершает прямолинейное движение под действием силы, изменяющейся по закону $F = 2e^{2x}$ (Н). В начальный момент точка имела скорость $v_0 = 0,1$ м/с и координату $x_0 = 0$. Определить скорость точки как функцию ее координаты. Какое расстояние точка пройдет к моменту, когда ее скорость увеличится в 2 раза?

6. Небольшой брусок начинает скользить по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Покрытие плоскости неоднородно и коэффициент трения зависит от пройденного пути x по закону $k = \gamma x$, где γ – величина постоянная. Считая брусок материальной точкой, определить его скорость как функцию координаты x .

7. Материальная точка массой $m = 25$ кг совершает прямолинейное движение под действием силы, изменяющейся по закону $F = e^{8x}$ (Н). В начальный момент времени она имела скорость $v_0 = 0,1$ м/с и координату $x_0 = 0$. Определить скорость точки как функцию ее координаты. Какое расстояние точка пройдет к моменту, когда скорость точки увеличится в 5 раз?

8. Материальная точка массой $m = 1$ кг движется прямолинейно под действием силы $F = 400(x + 1)$ (Н). В начальный момент она имела скорость $v_0 = 20$ м/с и координату $x_0 = 0$. Определить скорость точки как функцию ее координаты. Какое расстояние точка пройдет к моменту, когда ее скорость увеличится в 2 раза?

9. Материальная точка массой $m = 10$ кг совершает прямолинейное движение под действием силы сопротивления, изменяющейся по закону $F = -2e^{-2x}$ (Н). В начальный момент точка имела скорость $v_0 = 10$ м/с и координату $x_0 = 0$. Определить скорость точки как функцию ее координаты. Какое расстояние точка пройдет к моменту, когда ее скорость уменьшится в 5 раз?

10. Материальная точка массой $m = 2$ кг движется прямолинейно под действием силы $F = 800(x - 1)$ (Н). В начальный момент времени положение и скорость точки определялись величинами $x_0 = 0$ и $v_0 = 3$ м/с. Определить скорость точки как функцию ее координаты. Какое расстояние точка пройдет к моменту, когда ее скорость увеличится в 2 раза?

11. Материальная точка массой $m = 2$ кг движется прямолинейно под действием силы $F = 0,24(x + 1)^5$ (Н). В начальный момент она имела скорость $v_0 = 0,2$ м/с и координату $x_0 = 0$. Определить скорость точки как функцию ее координаты. Какое расстояние точка пройдет к моменту, когда ее скорость возрастет в 5 раз?

12. Материальная точка массой $m = 2$ кг совершает прямолинейное движение под действием силы, изменяющейся по закону $F = -32e^{-8x}$ (Н). В начальный момент времени она имела скорость $v_0 = 0,4$ м/с и координату $x_0 = 0$. Определить скорость точки как функцию ее координаты. Какое расстояние точка пройдет к моменту, когда ее скорость уменьшится в 2 раза?

13. Материальная точка массой $m = 2$ кг движется вдоль оси x под действием силы $F = 3(x + 4)^2$ (Н). В начальный момент времени положение и скорость точки определялись величинами $x_0 = 0$ и $v_0 = 8$ м/с. Определить скорость точки как функцию ее координаты. Какое расстояние точка пройдет к моменту, когда ее скорость увеличится в 2,5 раза?

14. Материальная точка массой $m = 2$ кг движется прямолинейно под действием силы $F = 100(x - 2)^2$ (Н). В начальный момент времени положение и скорость точки определялись величинами $x_0 = 0$ и $v_0 = 2$ м/с. Определить скорость точки как функцию ее координаты. Какое расстояние точка пройдет к моменту, когда ее скорость увеличится в 2 раза?

15. Материальная точка массой $m = 2$ кг движется вдоль оси x под действием силы $F = -5(x + 0,5)^{-5}$ (Н). В начальный момент времени положение и скорость точки определялись величинами $x_0 = 0$ и $v_0 = 5$ м/с. Определить скорость точки как функцию ее координаты. Какое расстояние точка пройдет к моменту, когда ее скорость уменьшится в 5 раз?

16. Материальная точка массой $m = 2$ кг движется прямолинейно под действием силы $F = 300(x - 3)$ (Н). В начальный момент времени положение и скорость точки определялись величинами $x_0 = 0$ и $v_0 = 3$ м/с. Определить скорость точки как функцию ее координаты. Какое расстояние точка пройдет к моменту, когда ее скорость увеличится в 2 раза?

17. Материальная точка массой $m = 2$ кг движется прямолинейно под действием силы $F = -(x + 3)^2$ (Н). В начальный момент времени положение и скорость точки определялись величинами $x_0 = 0$ и $v_0 = 1$ м/с. Определить скорость точки как функцию ее координаты. Какое расстояние точка пройдет к моменту, когда ее скорость уменьшится в 2 раза?

18. Материальная точка массой $m = 2$ кг движется прямолинейно под действием силы $F = 3(x + 4)^2$ (Н). В начальный момент времени положение и скорость точки определялись величинами $x_0 = 0$ и $v_0 = 8$ м/с. Определить скорость точки как функцию ее координаты. Какое расстояние точка пройдет к моменту, когда ее скорость увеличится в 2 раза?

19. Материальная точка массой $m = 10$ кг совершает прямолинейное движение вдоль оси x под действием силы, изменяющейся по закону $F = -250 x^{-3}$ (Н). В начальный момент точка имела скорость $v_0 = 5$ м/с и координату $x_0 = 0$. Определить скорость точки как функцию ее координаты. Какое расстояние точка пройдет к моменту, когда ее скорость уменьшится в 3 раза?

20. Материальная точка массой $m = 0,5$ кг совершает прямолинейное движение под действием силы, изменяющейся по закону $F = 25(x + 2)$ (Н). В начальный момент точка имела скорость $v_0 = 5$ м/с и координату $x_0 = 0$. Определить скорость точки как функцию ее координаты. Какое расстояние точка пройдет к моменту, когда ее скорость увеличится в 2 раза?

21. Материальная точка массой $m = 20$ кг совершает прямолинейное движение под действием силы, изменяющейся по закону $F = 2e^{2x}$ (Н). В начальный момент точка имела скорость $v_0 = 0,1$ м/с и координату $x_0 = 0$. Определить скорость точки как функцию ее координаты. Какое расстояние точка пройдет к моменту, когда ее скорость увеличится в 2 раза?

22. Материальная точка массой $m = 2$ кг движется прямолинейно под действием силы $F = -18(x + 4)^{-2}$ (Н). В начальный момент она имела скорость $v_0 = 3$ м/с и координату $x_0 = 0$. Определить скорость точки как функцию ее координаты. Какое расстояние точка пройдет к моменту, когда ее скорость уменьшится в 3 раза?

23. Материальная точка массой $m = 2$ кг движется прямолинейно под действием силы $F = 15(x + 0,5)$ (Н). В начальный момент времени ее скорость $v_0 = 3$ м/с, а координата $x_0 = 0$. Определить скорость точки как функцию ее координаты. Какое расстояние точка пройдет к моменту, когда ее скорость увеличится в 2 раза?

24. Материальная точка массой $m = 2$ кг движется прямолинейно под действием силы $F = 300(2x + 1)$ (Н). В начальный момент ее скорость $v_0 = 3$ м/с, а координата $x_0 = 0$. Определить скорость точки как функцию ее координаты. Какое расстояние точка пройдет к моменту, когда ее скорость увеличится в 3 раза?

25. Материальная точка массой $m = 5$ кг движется прямолинейно вдоль оси x под действием силы $F = 10(x + 2)^3$ (Н). В начальный момент она имела скорость $v_0 = 4$ м/с и координату $x_0 = 0$. Определить скорость точки как функцию ее координаты. Какое расстояние точка пройдет к моменту, когда ее скорость увеличится в 2 раза?

26. Материальная точка массой $m = 2$ кг движется прямолинейно под действием силы $F = 100(x - 2)$ (Н). В начальный момент времени положение и скорость точки определялись величинами $x_0 = 0$ и $v_0 = 3$ м/с. Определить скорость точки как функцию ее координаты. Какое расстояние точка пройдет к моменту, когда ее скорость увеличится в 2 раза?

27. Материальная точка массой $m = 2$ кг движется прямолинейно под действием силы $F = 0,1e^{2x}$ (Н). В начальный момент времени положение и скорость точки определялись величинами $x_0 = 0$ и $v_0 = 3$ м/с. Определить скорость точки как функцию ее координаты. Какое расстояние точка пройдет к моменту, когда ее скорость увеличится в 3 раза?

28. Материальная точка массой $m = 2$ кг движется прямолинейно под действием силы $F = 0,4(x + 0,5)^5$ (Н). В начальный момент времени положение и скорость точки определялись величинами $x_0 = 0$ и $v_0 = 3$ м/с. Определить скорость точки как функцию ее координаты. Какое расстояние точка пройдет к моменту, когда ее скорость увеличится в 2 раза?

29. Материальная точка массой $m = 3$ кг движется прямолинейно под действием силы $F = 10e^{3x}$ (Н). В начальный момент времени положение и скорость точки определялись величинами $x_0 = 0$ и $v_0 = 3$ м/с. Определить скорость точки как функцию ее координаты. Какое расстояние точка пройдет к моменту, когда ее скорость увеличится в 2 раза?

30. На материальную точку массой $m = 3$ кг действует постоянная по направлению сила $F = 5(x + 2)^3$. В начальный момент времени точка имела скорость $v_0 = 10$ м/с и координату $x_0 = 0$. Определить скорость точки как функцию ее координаты. Найти путь, пройденный точкой к моменту, когда ее скорость увеличится в 3 раза.

Пример выполнения задания

При прямолинейном движении материальной точки в неоднородной среде (рис. 5.1) сила сопротивления изменяется по следующему закону:

$$F = -2 V^2 / (3 + x) \text{ Н},$$

где V – скорость тела, м/с; x – пройденный путь, м.

Масса точки $m = 1$ кг, начальная скорость $V_0 = 5$ м/с. Определить скорость точки как функцию ее координаты и пройденный точкой путь как функцию времени.

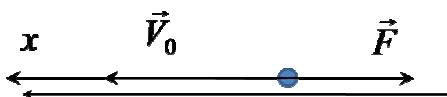


Рис. 5.1

Решение

Запишем второй закон Ньютона для материальной точки:

$$m \frac{dV}{dt} = - \frac{2V^2}{3 + x}.$$

В таком виде дифференциальное уравнение движения точки содержит три переменные: V , x и t . Чтобы решить его методом разделения переменных, воспользуемся альтернативной формой записи ускорения:

$$a = \frac{dv}{dt} = V \frac{dV}{dx}.$$

Тогда при $m = 1$ имеем:

$$V \frac{dv}{dt} = - \frac{2V^2}{x + 3},$$

и переменные легко разделяются. Интегрируя полученное уравнение с учетом заданных начальных условий, найдем скорость точки как функцию ее координаты:

$$\int_s^V \frac{dV}{V} = -2 \int_0^x \frac{dx}{x+3} \Rightarrow \ln|V|_5^V = -2 \ln|x+3|_0^x;$$

$$\ln \frac{V}{5} = \ln \frac{9}{(x+3)^2} \Rightarrow V = \frac{45}{(x+3)^2}.$$

Чтобы определить закон движения точки, перепишем полученное для скорости выражение с учетом того, что $V = dx/dt$, тем самым получим:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{45}{(x+3)^2}.$$

Разделяя переменные и интегрируя с учетом начальных условий, имеем:

$$\int_0^t 45 dt = \int_0^x (x+3)^2 \Rightarrow 45t = \frac{(x+3)^3}{3} - 9;$$

$$(x+3)^3 = 27 \cdot 5t + 27,$$

откуда находим:

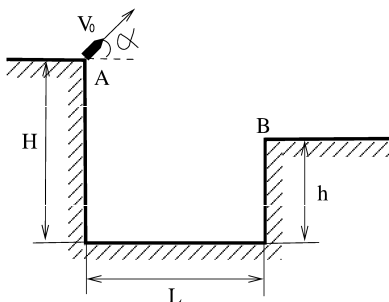
$$x = 3\sqrt[3]{5t+1} - 3 = 3(\sqrt[3]{5t+1} - 1).$$

Это и есть закон движения точки, т.е. зависимость координаты точки от времени:

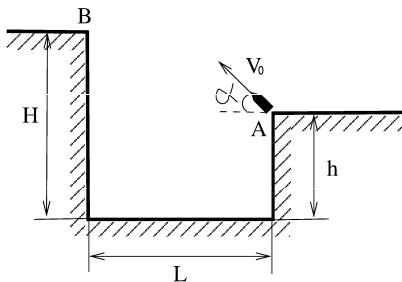
$$V = \frac{45}{(x+3)^2}, \text{ м/с; } x = 3(\sqrt[3]{5t+1} - 3), \text{ м.}$$

6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАКОНОВ КРИВОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОСТОЯННОЙ СИЛЫ

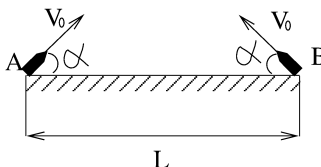
1. Снаряд движется из точки А, начальная скорость V_0 направлена под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонтальной линии. Чему должен быть равен модуль V_0 , чтобы снаряд перелетел через ров и попал в точку В? Ширина рва $L = 100$ м, высоты H и h равны соответственно 20 и 10 м. Сопротивлением воздуха пренебречь.



2. Снаряд движется из точки А, начальная скорость V_0 направлена под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонтальной оси. Чему должен быть равен модуль V_0 , чтобы снаряд перелетел через ров и попал в точку В? Ширина рва $L = 100$ м, высоты H и h равны соответственно 20 и 10 м. Сопротивлением воздуха пренебречь.



3. Два снаряда одновременно вылетают из точек А и В под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонтальной оси с начальной скоростью $V_0 = 500$ м/с. На какой высоте h они встретятся? Расстояние между А и В равно 5000 м. Сопротивлением воздуха пренебречь.



4. Самолет летит на постоянной высоте 3000 м над землей со скоростью 150 м/с. Какое расстояние x по горизонтали пролетит груз, сброшенный с самолета, за время падения? Считать, что начальная скорость груза равна скорости самолета. Сопротивлением воздуха пренебречь.
5. Самолет летит на постоянной высоте 3000 м над землей со скоростью 150 м/с. Из орудия, находящегося в момент выстрела прямо под самолетом, произведен выстрел по самолету. С какой скоростью должен вылететь снаряд, чтобы он мог попасть в самолет, если выстрел был сделан под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонтальной оси? Сопротивлением воздуха пренебречь.
6. Наибольшая горизонтальная дальность полета снаряда $L = 1000$ м. Определить его горизонтальную дальность полета при угле вылета с горизонтальной осью α , равном 60° . Сопротивлением воздуха пренебречь.
7. Горизонтальная дальность полета снаряда L при угле вылета $\alpha = 60^\circ$ к горизонтальной оси равна 1000 м. Определить его горизонтальную дальность полета при угле вылета $\alpha = 45^\circ$. Сопротивлением воздуха пренебречь.
8. Определить угол вылета снаряда, начальная скорость которого равна 500 м/с, если он должен поразить цель, находящуюся на земле на расстоянии 20 км от орудия. Сопротивлением воздуха пренебречь.
9. С крепостной башни производятся два выстрела из орудий, находящихся рядом, причем углы вылета снарядов относительно горизонтальной оси 30° и 45° . Скорости каждого снаряда равны 500 м/с. Определить высоту башни, если известно, что снаряды попали в одну точку на поверхности земли. Сопротивлением воздуха пренебречь.

10. Снаряд выпущен под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонтальной оси. Определить скорость вылета снаряда из орудия, если известно, что на максимальной высоте h над землей 100 м его скорость равна 300 м/с. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Пример выполнения задания

Наибольшая горизонтальная дальность снаряда равна L . Какова его дальность l при угле между начальной скоростью и горизонтальной линией $\alpha = 30^\circ$? Какова максимальная высота h в этом случае? Сопротивлением воздуха пренебречь (рис. 6.1).

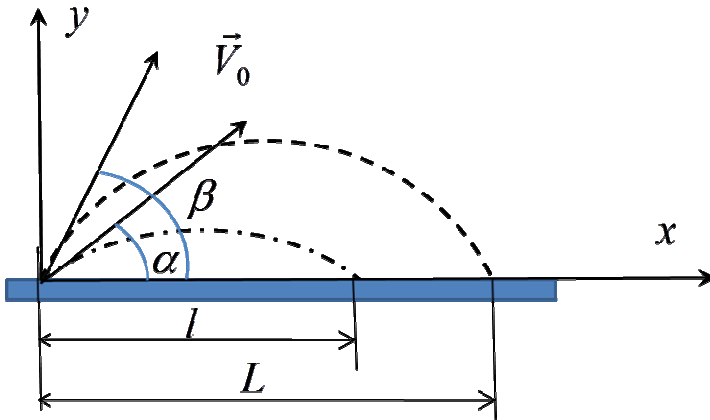


Рис. 6.1

Решение. Уравнения движения снаряда в поле тяжести выглядят следующим образом:

$$\frac{dV_x}{dt} = 0, \quad \frac{dV_y}{dt} = -g. \quad (6.1)$$

Пусть начальная скорость снаряда равна V_0 , а угол вылета β , тогда решения уравнений (6.1) имеют вид

$$V_x = V_0 \cos \beta, \quad V_y = V_0 \sin \beta - gt.$$

Проекции скорости могут быть записаны как производные по времени от соответствующих координат:

$$\frac{dx}{dt} = V_0 \cos \beta, \quad \frac{dy}{dt} = V_0 \sin \beta - gt. \quad (6.2)$$

Уравнения (6.2) можно проинтегрировать, учитывая начальные условия $x(0) = 0$ и $y(0) = 0$:

$$x(t) = V_0 t \cos \beta, \quad y(t) = V_0 t \sin \beta - \frac{gt^2}{2}. \quad (6.3)$$

Условием приземления снаряда в момент времени t_1 является

$$y(t_1) = 0. \text{ Отсюда находим } t_1 = \frac{2V_0 \sin \beta}{g}.$$

Подставив это время в первое из уравнений (6.3), получим горизонтальную дальность полета при произвольном угле β :

$$x(t_1) = V_0 t_1 \cos \beta = \frac{2V_0^2 \sin \beta \cos \beta}{g}.$$

Чтобы найти максимальную дальность полета, возьмем от этого выражения производную по углу вылета и приравняем ее к нулю. Что даст нам $\beta = 45^\circ$ и соответственно:

$$L = x(t_1) = \frac{V_0^2}{g}.$$

Следовательно, скорость $V_0 = \sqrt{Lg}$. Для угла вылета α получим:

$$l = \frac{2V_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{\sqrt{3}}{2} L \approx 0,87L.$$

Высота траектории может быть определена из уравнения (6.2) с учетом того, что высшей точки снаряд достигнет в тот момент, когда $V_y(t_2) = 0$. Время, необходимое для достижения максимальной высоты:

$$t_2 = \frac{V_0 \sin \alpha}{g}.$$

Подставляя его во второе уравнение (6.3), определим высоту траектории при $\alpha = 30^\circ$:

$$h = y(t_2) = \frac{L}{2} \sin^2 \alpha = \frac{L}{8}.$$

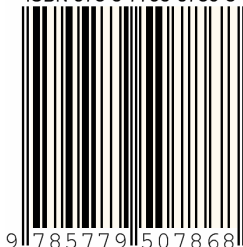
Учебное издание

Аульченко Сергей Михайлович
Белкин Александр Анатольевич
Болеста Алексей Владимирович
Ройтман Анатолий Яковлевич
Рудяк Валерий Яковлевич

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Учебное пособие

ISBN 978-5-7795-0786-8



Темплан 2016 г.

Редактор Г.К. Найденова

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 54.НС.05.953.П.006252.06.06 от 26.06.2006 г.
Подписано к печати 15.09.2016. Формат 60х84 1/16 д.л.
Гарнитура Таймс. Бумага офсетная. Ризография.
Объем 4,31 уч.-изд.л.; 4,75 п.л. Тираж 400 экз. Заказ №

Новосибирский государственный
архитектурно-строительный университет (Сибстрин)
630008, Новосибирск, ул. Ленинградская, 113

Отпечатано