С.Л. КРАСНОЛУЦКИЙ
В.В. ЛЕМАНОВ
Е.В. ПОДРЯБИНКИН
В.А. ЮДИН

СБОРНИК ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Динамика точки

НОВОСИБИРСК 2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(СИБСТРИН)

**С.Л. Краснолуцкий, В.В. Леманов,
Е. В. Подрябинкин, В.А. Юдин**

СБОРНИК
ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ
Динамика точки

Учебное пособие

Под редакцией В.А. Юдина, В.В. Леманова

НОВОСИБИРСК 2015

УДК 531/534
ББК В213
С 232

Сборник тестовых заданий по теоретической механике. Динамика точки : учеб. пособие / С. Л. Краснолуцкий [и др.] ; под ред. В. А. Юдина, В. В. Леманова ; Новосиб. гос. архитектур.-строит. ун-т (Сибстрин). – Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2015. – 80 с.

ISBN 978-5-7795-0748-6

Сборник включает четыре задания по динамике точки, предусмотренные стандартным курсом теоретической механики технического университета. Каждое задание содержит около 40–50 вариантов. Задания предваряются кратким изложением основ динамики точки и примерами выполнения.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по всем направлениям всех форм обучения.

Печатается по решению издательско-библиотечного совета
НГАСУ (Сибстрин)

Рецензенты:

– Л.В. Городилов, д-р физ.-мат. наук,
вед. науч. сотрудник (ИГД СО РАН);
– А.А. Белкин, канд. физ.-мат. наук,
доцент (НГАСУ (Сибстрин))

ISBN 978-5-7795-0748-6

© Кранолуцкий С.Л., Леманов В.В.,
Подрябинкин Е.В., Юдин В.А.,
2015
© Новосибирский государственный
архитектурно-строительный
университет (Сибстрин), 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

Общие рекомендации при выполнении тестирования.................5

1. Уравнения динамики точки...7
   1.1. Задачи динамики точки..7
   1.2. Законы Галилея – Ньютона...7
   1.3. Дифференциальные уравнения движения точки..............8
   1.4. Решение задач динамики точки...9
   1.5. Вопросы для самоконтроля...10
   Тесты по теме «Уравнения динамики точки».......................11

2. Прямолинейные колебания точки..25
   2.1. Свободные незатухающие колебания..............................26
   2.2. Свободные затухающие колебания..................................26
   2.3. Вынужденные колебания без учета сопротивления среды...27
   2.4. Вынужденные колебания при наличии сил сопротивления...28
   2.5. Решение задач на колебательное движение точки..........29
   2.6. Вопросы для самоконтроля...29
   Тесты по теме «Прямолинейные колебания точки».............31

3. Движение точки в неинерциальной системе отсчета............41
   3.1. Основной закон динамики в неинерциальной системе отсчета...41
   3.2. Решение задач в неинерциальной системе......................42
   3.3. Покой в неинерциальной системе отсчета.......................42
   3.4. Вопросы для самоконтроля...44
   Тесты по теме «Движение точки в неинерциальной системе отсчета»...44

4. Общие теоремы динамики точки...62
   4.1. Теорема об изменении количества движения (импульса) точки..62

4.1.1. Законы сохранения количества движения (импульса) 63
4.2. Теорема об изменении момента количества движения точки 64
4.2.1. Законы сохранения момента количества движения 66
4.3. Кинетическая энергия точки 66
4.3.1. Работа силы 66
4.3.2. Теорема об изменении кинетической энергии 67
4.3.3. Закон сохранения полной механической энергии 68
4.4. Момент инерции точки относительно оси 69
4.5. Вопросы для самоконтроля 69
Тесты по теме «Общие теоремы динамики точки» 70

ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ТЕСТИРОВАНИЯ

Данное пособие является третьей частью сборника тестовых заданий по курсу теоретической механики. Первая часть сборника была посвящена статике, вторая – кинематике, а данное пособие по динамике точки. В нем собраны тесты по четырем основным разделам (дидактическим единицам): уравнениям движения точки, прямолинейным колебаниям точки, движению точки в неинерциальной системе отсчета и общим теоремам динамики точки. В каждом разделе представлено по четыре-пять десятков тестовых вопросов (мини-задач). К каждому тестовому вопросу дано несколько ответов, один из которых правильный. Его-то и нужно указать.

В начале каждого раздела приведены основные сведения, систематическое знание которых необходимо для прохождения тестирования. Естественно, эти сведения приводятся конспективно, в стиле справочника. Здесь нет доказательств, а что-то отмечено лишь пунктиром. Полноценная подготовка к тестированию предполагает подготовку по учебнику. В качестве такого учебника мы рекомендуем курс лекций, разработанный одним из авторов: **Юдин В.А. Лекции по динамике точки. Новосибирск : НГАСУ, 2014.** Они изданы в электронном варианте, и их можно найти по ссылкам:

1) www.sibstrin.ru\struct\chair\termeh\student_work

2) www.sibstrin.ru\files\RudyakV\ЮдинДинамикаТочки2014.pdf

Далее в разделе приводятся вопросы для самоконтроля. Прежде чем перейти к тестам, постарайтесь ответить на них. Если не можете ответить на какой-то вопрос, вернитесь к теоретическому материалу. Каждый раздел завершается тестами, которые можно использовать при освоении материала данного раздела, подготовке к зачетам, экзаменам или министерскому тестированию.

В заключение несколько практических советов.

1. Точно узнайте, по каким разделам будет проводиться тестирование.

2. Постарайтесь освоить тестируемый материал: выучите основные теоретические положения, попрактикуйтесь в решении задач.

3. В тестах обязательно есть вопросы, которые требуют не механического заучивания, а понимания освоенного материала. Будьте готовы к этому.

4. Наличие в вопросах правильного варианта ответа не означает, что вы обязательно наберете определенное количество баллов, просто угадав ряд ответов. Выставление оценки по тесту учитывает эту возможность и вычитает из нее вклад случайных правильных ответов.

5. Внимательно читайте и условия вопросов, и варианты ответов.

6. Как правило, отвечать на вопросы теста можно в произвольном порядке. Поэтому трудные для вас вопросы лучше сначала пропустить и вернуться к ответу на них позднее, когда ответите на остальные.

7. Довольно часто условием прохождения теста является наличие определенной доли правильных ответов по всем разделам (дидактическим единицам) контролируемого материала. В этом случае обращайте внимание на названия разделов (тем), если таковые указываются, и старайтесь равномерно распределить время на различные разделы теста.

8. Если вы считаете, что ответили на какой-то вопрос неправильно, к нему можно вернуться и изменить ответ, но только до того, как вы ответили на все вопросы теста (если тестирование проводится централизованно на компьютере).

9. Отвечая на вопросы, держите под рукой лист бумаги для комментариев по вопросам («пропустил», «сомневаюсь» и т.д.), а также выполнения необходимых рисунков, решения задач.

10. Если не знаете, как ответить на вопрос, постарайтесь отбросить заведомо неправильные, на ваш взгляд, варианты ответов и выбирайте из оставшихся.

11. Рассчитывайте и бережно расходуйте свое время, но не торопитесь.

В путь!

1. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

1.1. Задачи динамики точки. Динамика точки изучает движение материальных точек под действием сил. Под материальной точкой мы понимаем геометрическую точку, наделенную массой. *Силы* в динамике будем считать в общем случае переменными, зависящими от времени, положения точки и ее скорости. При всем разнообразии динамических задач выделим *две основные задачи*. В *первой задаче (прямой)* заданным будем считать закон движения точки, а находить силы, под действием которых это движение совершается. Во *второй задаче (обратной)*, наоборот, будем считать заданными силы, а искать закон движения. Стоит отметить, что на практике часто приходится решать смешанную задачу, когда часть сил известна, а некоторые (например, реакции связей) необходимо найти наряду с законом движения. При решении этих задач мы будем существенно опираться на уже изученные разделы – статику и кинематику. А именно, пользоваться принципом освобождаемости от связей, способами приведения сил и методами описания движения тел.

1.2. Законы Галилея – Ньютона

Закон инерции Галилея или первый закон Ньютона. *Если на свободную материальную точку не действуют силы, то она находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения*. Соответствующее этому случаю движение называют *движением по инерции*. Система отсчета, в которой справедлив закон инерции Галилея, называется *инерциальной*. И наоборот, система отсчета, в которой несправедлив закон инерции Галилея, называется *неинерциальной*. Все инерциальные системы отсчета движутся относительно друг друга с постоянной по модулю и направлению скоростью.

Второй закон Ньютона. *Сила, действующая на свободную материальную точку, сообщает ей ускорение, которое в инерциальной системе отсчета пропорционально этой силе и имеет одинаковое с ней направление*. В аналитической форме этот закон представляется в виде *основного уравнения динамики*

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}\,, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{F} = \sum_{1}^{n} \mathbf{F}_k$ – равнодействующая всех сил – активных и реакций связей, действующих на точку, $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$ – ее ускорение, а m – коэффициент пропорциональности между силой и ускорением, который в классической механике считается постоянным и называется *массой*.

Третий закон Ньютона. *Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по величине и направленными вдоль одной прямой в противоположные стороны.*

1.3. Дифференциальные уравнения движения точки. Основной закон динамики (1.1) устанавливает зависимость между силами, действующими на точку, и ее ускорением. Найдем теперь взаимосвязь этих сил непосредственно с законом движения материальной точки. В декартовой системе координат такой закон задается уравнениями $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, а в естественной системе координат – уравнением $s = s(t)$. Ускорение $\mathbf{a}$, как известно из кинематики, связано с этими функциями соотношениями $a_x = \ddot{x}, a_y = \ddot{y}, a_z = \ddot{z}, a_\tau = \ddot{s}, a_n = \dot{s}^2/\rho, \quad a_b = 0,$ где (a_x, a_y, a_z) и (a_τ, a_n, a_b) – проекции ускорения на оси x, y, z декартовой и на оси τ, n, b естественной систем координат, а ρ – радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке M.

Проектируя теперь равенство (1.1) на эти оси, получим уравнения

$$m\ddot{x} = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})\,, m\ddot{y} = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})\,,$$

$$m\ddot{z} = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})\,, \tag{1.2}$$

$$m\ddot{s} = F_\tau(t, s, \dot{s})\,, m\dot{s}/\rho = F_n(t, s, \dot{s})\,, 0 = F_b(t, s, \dot{s})\,. \tag{1.3}$$

Уравнения (1.2), (1.3) называются *дифференциальными уравнениями (ДУ) движения точки,* соответственно, в декартовой и естественной системе координат.

1.4. Решение задач динамики точки. Решение *прямой задачи* сводится к дифференцированию известных функций, задающих закон движения точки. Например, если закон движения задан в декартовой системе координат уравнениями $x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t)$, то проекции искомой силы F_x, F_y, F_z согласно уравнениям движения (1.2) вычисляются так

$$F_x = m\ddot{x} = m\frac{d^2 f_1}{dt^2},\ F_y = m\ddot{y} = m\frac{d^2 f_2}{dt^2},\ F_z = m\ddot{z} = m\frac{d^2 f_3}{dt^2}.$$

Для решения *обратной задачи* необходимо проинтегрировать уравнения (1.2) или (1.3).

Прежде всего, нужно выбрать систему координат. Чаще всего удобно использовать прямоугольную декартову систему координат. Однако, если известна траектория движения материальной точки, то предпочтительней может оказаться естественная система координат. Удачный выбор начала системы и направлений ее осей также может существенно упростить ход решения задачи.

Далее необходимо в произвольный текущий момент времени изобразить материальную точку и указать все силы – активные и реакции связей, которые на нее действуют. Затем следует в векторном виде написать второй закон Ньютона $m\mathbf{a} = \mathbf{F} = \sum_k \mathbf{F}_k$.

Вслед за этим нужно спроецировать второй закон Ньютона на выбранные оси координат и получить систему ДУ в виде (1.2) или (1.3). Проекции сил нужно при этом выразить через входящие в эту систему переменные (в общем случае через время, положение точки и ее скорость).

Прежде чем интегрировать полученную систему уравнений, нужно предварительно сформулировать начальные условия задачи. Число этих условий должно равняться числу произвольных постоянных интегрирования.

Следующий этап – чисто математический. Необходимо проинтегрировать полученную систему ДУ при заданных начальных условиях. Здесь можно пользоваться как определенными интегралами, находя пределы интегрирования по начальным условиям, так и неопределенными интегралами. В последнем случае нужно искать общее решение задачи, в которое войдут постоянные интегрирования, и выражать эти постоянные через начальные условия. Так или иначе, находится закон движения материальной точки – то единственное решение задачи, удовлетворяющее всем начальным условиям задачи.

Из закона движения материальной точки находятся и остальные неизвестные величины, требуемые в условии задачи.

Сформулируем еще раз, очень кратко, основные этапы решения задачи:

1) удачно выбрать систему координат;

2) изобразить все активные силы и силы реакции связей в произвольный момент времени;

3) написать уравнение Ньютона в векторном виде, спроецировать его на оси координат и выразить проекции сил через искомые величины;

4) сформулировать начальные условия задачи;

5) проинтегрировать полученную систему ДУ при заданных начальных условиях и найти искомые неизвестные.

1.5. Вопросы для самоконтроля

1. Что изучается в динамике?
2. Какие основные задачи динамики?
3. В чем суть закона инерции Галилея?
4. Какие системы отсчета называют инерциальными, а какие неинерциальными?
5. Как связаны между собой две инерциальные системы отсчета?
6. Почему систему отсчета, связанную с Землей, в большинстве случаев приближенно принимают за инерциальную?
7. Сформулируйте условия, при которых справедлив второй закон Ньютона.
8. В чем состоит принцип суперпозиции действия сил на точку?
9. Почему масса точки является мерой ее инерции?

10. Как применять второй закон Ньютона, если движение точки несвободно?
11. В чем состоит принцип относительности классической механики?
12. Для чего нужны дифференциальные уравнения движения точки?
13. Сформулируйте прямую и обратную задачи динамики точки. Все ли задачи динамики точки сводятся к этим двум?
14. Перечислите основные этапы решения обратной задачи динамики точки.
15. Для чего необходимо задавать начальные (дополнительные) условия при решении обратной задачи динамики точки? Сколько таких условий требуется задавать?

Тесты по теме «Уравнения динамики точки»

1.1. Материальная точка, на которую не действуют силы, сохраняет …

a) состояние покоя;
b) состояние покоя или равномерного прямолинейного движения;
c) состояние прямолинейного поступательного движения;
d) состояние покоя или равномерного поступательного движения.

1.2. Постоянные интегрирования при решении второй задачи динамики …

a) не зависят от начальных условий;
b) определяются начальными условиями и равны начальным координате и скорости;
c) определяются начальными условиями;
d) определяются начальными условиями и равны начальной силе и скорости.

1.3. Сила тяготения относится к силам …

a) зависящим от скорости;
b) зависящим от координаты;

c) постоянным;
d) постоянным и потенциальным.

1.4. Инерциальными системами отсчета (системами координат) называются системы …
a) в которых справедлив принцип инерции Галилея (первый закон Ньютона);
b) в которых справедлив второй закон Ньютона;
c) которые движутся поступательно относительно друг друга;
d) в которых справедливы закон всемирного тяготения и третий закон Ньютона.

1.5. Материальная точка массой $m = 3$ кг движется по оси Ox согласно уравнению $x = 0.04\,t^3$. Модуль силы, действующей на точку в момент времени $t = 6$ с, равен …
a) 0.72 Н;
b) 0.24 Н;
c) 4.32 Н;
d) 0.12 Н.

1.6. Материальная точка массой $m = 12$ кг движется по прямой со скоростью $v = e^{0.1t}$. Модуль силы, действующей на точку в момент времени $t = 10$ с, равен …
a) 6.82 Н;
b) 3.27 Н;
c) 17.8 Н;
d) 62 Н.

1.7. Материальная точка массой $m = 1.4$ кг движется прямолинейно по закону $x = 6t^2 + 6t + 3$. Модуль силы, действующей на точку, равен …
a) 15 Н;
b) 21 Н;
c) 16.8 Н;
d) 8.4 Н.

1.8. Материальная точка массой $m = 10$ кг движется по оси *Ox* согласно уравнению $x = 5\sin(\pi t/3)$. Модуль силы, действующей на точку в момент времени $t = 6$ с, равен …

a) 3.14 Н;
b) 50 Н;
c) 1.97 Н;
d) 0 Н.

1.9. Материальная точка массой m движется в плоскости *Oxy* согласно уравнениям $x = bt$, $y = ct$, где b и c – постоянные. Модуль силы, приложенной к точке, равен …

a) $\sqrt{c^2 + b^2}$ 0.72 Н;
b) $m\sqrt{c^2 + b^2}$ Н;
c) 0 Н;
d) *mbct* Н.

1.10. Материальная точка массой $m = 7$ кг движется в горизонтальной плоскости *Oxy* со скоростью $\vec{v} = 0.4t\vec{i} + 0.5t\vec{j}$. Модуль силы, действующей на точку, равен …

a) 1.4 Н;
b) 6.3 Н;
c) 4.48 Н;
d) 0 Н.

1.11. Движение материальной точки массой $m = 9$ кг в плоскости *Oxy* определяется радиусом-вектором $\vec{r} = 0.6t^2\vec{i} + 0.5t^2\vec{j}$. Модуль силы, действующей на точку, равен …

a) 3.35 Н;
b) 9.9 Н;
c) 14.1 Н;
d) 2.7 Н.

1.12. Движение материальной точки массой $m = 8$ кг в плоскости Oxy происходит согласно уравнениям $x = 0.05t^3$, $y = 0.3t^2$. Модуль силы, действующей на точку в момент времени $t = 4$ с, равен …

a) 1.35 Н;
b) 2.74 Н;
c) 10.7 Н;
d) 9.73 Н.

1.13. Материальная точка массой $m = 18$ кг движется по окружности радиуса $R = 8$ м согласно уравнению $s = e^{0.2t}$. Проекция силы, приложенной к точке, на касательную к траектории в момент времени $t = 10$ с, равна …

a) 144 Н;
b) 36 Н;
c) 5.36 Н;
d) 0.125 Н.

1.14. Материальная точка массой $m = 20$ кг движется по окружности радиуса $R = 6$ м согласно уравнению $s = \ln t$. Проекция силы, приложенной к точке, на нормаль к траектории в момент времени $t = 0.5$ с, равна …

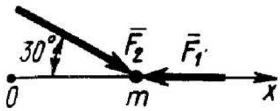
a) 3.66 Н;
b) 60 Н;
c) 13.3 Н;
d) 26.6 Н.

1.15. Материальная точка массой $m = 14$ кг движется по окружности радиуса $R = 7$ м с постоянным касательным ускорением $a_\tau = 0.5$ м/с^2. Модуль силы, действующей на точку в момент времени $t = 4$ с, если при $t_0 = 0$ скорость $v_0 = 0$, равен …

a) 59 Н;
b) 14.75 Н;
c) 10.6 Н;
d) 7 Н.

1.16. Материальная точка массой $m = 1$ кг движется по окружности радиуса $R = 2$ м со скоростью $v = 2t$. Модуль силы, действующей на точку в момент времени $t = 1$ с, равен …
a) 2 Н;
b) 11 Н;
c) 2.83 Н;
d) 5.61 Н.

1.17. Материальная точка массой $m = 5$ кг движется под действием сил $\vec{F}_1 = 3$ Н и $\vec{F}_2 = 10$ Н. Проекция ускорения точки на ось *Ox* равна …



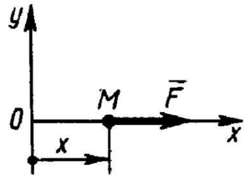
a) 0.6 м/с^2;
b) 2 м/с^2;
c) 1.13 м/с^2;
d) 0.55 м/с^2.

1.18. Тело движется вниз по наклонной шероховатой плоскости, которая образует с горизонтом угол 45°. Ускорение тела при коэффициенте трения скольжения $f = 0.3$ равно …
a) 3.1 м/с^2;
b) 1.2 м/с^2;
c) 4.9 м/с^2;
d) 9.8 м/с^2.

1.19. Материальная точка массой $m = 9$ кг движется в пространстве под действием силы $\vec{F} = 5\vec{i} + 6\vec{j} + 7\vec{k}$. Модуль ускорения точки равен …

a) 0.55 м/с^2;
b) 0.66 м/с^2;
c) 1.17 м/с^2;
d) 2 м/с^2.

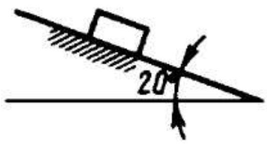
1.20. Материальная точка M массой m движется по горизонтальной оси Ox под действием силы $\vec{F} = 2m(x+1)$. Ускорение точки в момент, когда ее координата $x = 0.5$ м, равно …



a) 1.5 м/с^2;
b) $3m$ м/с^2;
c) 3 м/с^2;
d) 2.1 м/с^2.

1.21. Тело массой $m = 20$ кг падает по вертикали. Сила сопротивления воздуха $R = 0.04v^2$. Максимальная скорость падения тела равна …
a) 0.8 м/с;
b) 35 м/с;
c) 70 м/с;
d) 500 м/с.

1.22. По наклонной плоскости из состояния покоя начинает скользить тело массой $m = 1$ кг. Сила сопротивления движению $R = 0.08v$. Максимальная скорость тела равна …



a) 0.08 м/с;
b) 9.8 м/с;
c) 41.9 м/с;
d) 0.78 м/с.

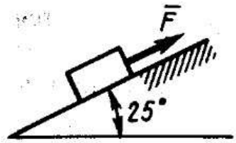
1.23. Тело массой $m = 1$ кг падает по вертикали. Сила сопротивления воздуха $R = 0.03v$. Максимальная скорость падения тела равна …

a) 33 м/с;
d) 660 м/с;
c) 327 м/с;
d) 19.6 м/с.

1.24. Тело весом $P = 500$ Н падает по вертикали из состояния покоя. Сила сопротивления воздуха $R = 0{,}05v^2$. Максимальная скорость падения тела равна …
a) 200 м/с;
b) 100 м/с;
c) 500 м/с;
d) 400 м/с.

1.25. На материальную точку массой $m = 2$ кг, которая находится на горизонтальной плоскости, действует вертикальная подъемная сила $F = 10t$. Время, через которое точка начнет двигаться, равно …
a) 2 с;
b) 30 с;
c) 14 с;
d) 7 с.

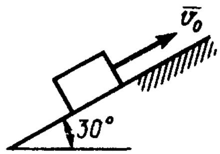
1.26. Тело массой $m = 200$ кг из состояния покоя движется вверх по гладкой наклонной плоскости под действием силы $F = 1$ кН. Время, через которое тело переместится на расстояние 8 м, равно …
a) 1.08 с;
b) 8.15 с;
c) 4.33 с;
d) 25 с.



1.27. Материальная точка массой $m = 100$ кг движется по горизонтальной прямой под действием силы $F = 10t$, направленной по той же прямой. Скорость точки увеличится от 5 до 25 м/с за …

a) 10 с;
b) 100 с;
c) 20 с;
d) 25 с.

1.28. Телу, которое скользит по гладким наклонным направляющим, сообщили начальную скорость v_0 = 4 м/с. Определить, через какое время тело достигнет максимальной высоты подъема (принять g = 10 м/с^2).



a) 0.4 с;
b) 0.8 с;
c) 1.6 м/с;
d) 2.4 м/с.

1.29. Материальная точка массой $m = 900$ кг движется по горизонтальной прямой под действием силы $F = 270t$, направленной по той же прямой. При $t_0 = 0$, $v_0 = 10$ м/с. Скорость точки в момент времени $t = 10$ с равна …
a) 10 м/с;
b) 12.5 м/с;
c) 25 м/с;
d) 180 м/с.

1.30. Материальная точка массой $m = 0.2$ кг движется вдоль оси Ox под действием силы $F_x = -0.4t$. Начальная скорость $v_0 = 6$ м/с. Скорость точки в момент времени $t = 2$ с равна …
a) 2 с;
b) 4 с;
c) 3 с;
d) 1 с.

1.31. Материальная точка массой $m = 7$ кг из состояния покоя движется по оси Ox под действием силы $F_x = 7e^t$. Скорость точки в момент времени $t = 2$ с равна …

a) 1 м/с;
b) 49 м/с;
c) 6.39 м/с;
d) 13 м/с.

1.32. Материальная точка массой $m = 2$ кг движется по горизонтальной оси Ox под действием силы $F_x = 5\cos 0.5t$. При $t_0 = 0$, $v_0 = 0$ м/с. Скорость точки в момент времени $t = 4$ с равна …

a) 9.1 м/с;
b) 2.2 м/с;
c) 4.55 м/с;
d) 2.5 м/с.

1.33. Материальная точка массой m движется по оси Ox под действием силы $F_x = 12mt^2$. В момент времени $t_0 = 0$ с – координата $x_0 = 3$ м, скорость $v_0 = 6$ м/с. Путь, пройденный точкой за время $t = 1$ с, равен …

a) 6 м;
b) 9 м;
c) 10 м;
d) 100 м.

1.34. Коэффициент трения скольжения между бруском и горизонтальной плоскостью равен 0.3. Какое расстояние пройдет брусок до остановки, если его начальная скорость была 6 м/с (считать g = 10 м/с^2)?

a) 2 м;
b) 12 м;
c) 16 м;
d) 6 м.

1.35. Материальная точка массой $m = 50$ кг из состояния покоя движется по гладкой горизонтальной направляющей под действием силы $F = 50$ Н, вектор которой образует угол $\alpha = 20°$ с направляющей. Путь, пройденный точкой за время $t = 20$ с, равен …

a) 100 м;
b) 1 м;
c) 188 м;
d) 200 м.

1.36. Материальная точка массой $m = 25$ кг начала движение из состояния покоя по горизонтальной прямой под действием силы $F = 20t$ Н, направленной по той же прямой. Путь, пройденный точкой за время $t = 4$ с, равен …

a) 4.2 м;
b) 11 м;
c) 8.53 м;
d) 3.2 м.

1.37. Точка движется по криволинейной траектории с постоянной скоростью $\vec{v}$. Сила, действующая на точку, направлена под углом …

a) $\angle(\vec{v}, \vec{F}) = 90°$;
b) $\angle(\vec{v}, \vec{F}) = 0°$;
c) $\angle(\vec{v}, \vec{F}) = 45°$;
d) $\angle(\vec{v}, \vec{F}) = 90°$, в сторону вогнутости траектории.

1.38 Материальная точка массой m движется согласно уравнениям $x = 2,\quad y = \ln 2t,\quad z = 0.$ Модуль силы, действующей на точку, равен …

a) mt;
b) mt^2;
c) m/t^2;
d) m/t.

1.39. Материальную точку бросают вертикально вниз со скоростью 5 м/с с высоты 10 м. Сопротивление воздуха не учитывать, считать g = 10 м/с^2. С какой скоростью она упадет на землю?

a) 15 м/с;
b) 30 м/с;
c) 10 м/с;
d) 4.45 м/с.

1.40. Материальная точка движется по криволинейной траектории под действием силы, касательная составляющая которой $F_\tau = 0.2t^2$, а нормальная составляющая $F_n = 8$ Н. Определить массу точки, если в момент времени $t = 10$ с ее ускорение $a = 0.7$ м/с^2.

a) 20.4 кг;
b) 30.8 кг;
c) 50 кг;
d) 40 кг.

1.41. Материальная точка массой $m = 5$ кг движется по криволинейной траектории под действием силы, проекции которой на касательную $F_\tau = 7$ Н, а на нормаль $F_n = 0.1t^2$. Определить модуль ускорения точки в момент времени $t = 12$ с.

a) 1.5 м/с^2;
b) 0.7 м/с^2;
c) 3.2 м/с^2;
d) 2.1 м/с^2.

1.42. Материальная точка движется по криволинейной траектории под действием силы $\vec{F} = 9\vec{\tau} + 8\vec{n}$. Определить массу точки, если ее ускорение $a = 0.5$ м/с^2.

a) 10.4 кг;
b) 24.1 кг;

c) 52.6 кг;
d) 70.2 кг.

1.43. Материальная точка массой $m = 2$ кг движется по криволинейной траектории под действием силы $\vec{F} = 3\vec{\tau} + 4\vec{n}$. Определить модуль ускорения точки.
a) 2.5 м/с^2;
b) 0.7 м/с^2;
c) 3.2 м/с^2;
d) 2.1 м/с^2.

1.44. Точка массой $m = 18$ кг движется в горизонтальной плоскости под действием силы $F = 25$ Н. Определить радиус кривизны траектории в момент времени, когда $v = 4$ м/с, а векторы скорости и силы образуют угол $55°$.
a) 92.3 м;
b) 1.4 м;
c) 38.8 м;
d) 14.1 м.

1.45. Точка массой $m = 11$ кг движется по кривой под действием силы $F = 20$ Н. Определить ее скорость в момент времени, когда радиус кривизны траектории $\rho = 15$ м и угол между силой и скоростью $35°$.
a) 4.0 м/с;
b) 30.2 м/с;
c) 10.4 м/с;
d) 9.4 м/с.

1.46. Точка массой $m = 2$ кг движется в плоскости Oxy под действием силы $F_x = 2\sin 0.5\pi t,\ F_y = 5\cos \pi t$. Определить модуль ускорения точки для $t = 1$.

a) 2.7 м/с^2;
b) 0.7 м/с^2;
c) 4.2 м/с^2;
d) 7.1 м/с^2.

1.47. Точка массой $m = 16$ кг движется в плоскости по криволинейной траектории под действием силы $F = 0.3t$. Определить ее скорость в момент времени $t = 20$ с, когда радиус кривизны $\rho = 12$ м и угол между силой и скоростью $50°$.
a) 4.0 м/с;
b) 1.9 м/с;
c) 10.4 м/с;
d) 9.4 м/с.

1.48. Точка массой $m = 14$ кг движется из состояния покоя по гладкой направляющей радиуса R, расположенной в горизонтальной плоскости. Определить путь, пройденный точкой за время $t = 5$ с, если на нее действует сила $F = 24$ Н, образующая постоянный угол $45°$ с направляющей.
a) 92.3 м;
b) для ответа нужно знать значение R;
c) 38.8 м;
d) 15.2 м.

1.49. Точка массой $m = 15$ кг движется из состояния покоя по гладкой направляющей радиуса R, расположенной в горизонтальной плоскости. Определить скорость точки в момент времени $t = 30$ с, если на нее действует сила $F = 0.5t$, образующая постоянный угол $50°$ с направляющей.
a) 4.0 м/с;
b) 9.6 м/с;
c) для ответа нужно знать значение R;
d) 39.2 м/с.

1.50. Точка массой $m = 12$ кг движется из состояния покоя по гладкой направляющей радиуса R, расположенной в горизонтальной плоскости. Определить скорость точки в момент времени $t = 4$ с, если на нее действует сила $F = 22$ Н, образующая постоянный угол $40°$ с касательной к траектории точки.

a) 5.6 м/с;
b) 9.6 м/с;
c) для ответа нужно знать значение R;
d) 39.2 м/с.

2. ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОЧКИ

В качестве примера применения второго закона Ньютона рассмотрим прямолинейные колебания груза на пружине. Примем груз за материальную точку массы m и пренебрежем весом пружины. Пусть на точку действует сила тяжести $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, сила упругости пружины $\mathbf{F}$, пропорциональная ее удлинению, $F = c \cdot \Delta l$, $\Delta l = l - l_0$, c – жесткость пружины, сила сопротивления среды $\mathbf{R}$, пропорциональная скорости $\mathbf{R} = -\mu\mathbf{v}$ и вынуждающая сила $\mathbf{Q}$, изменяющаяся по гармоническому закону $Q = Q_0 \sin pt$ с амплитудой Q_0 и частотой p (рис. 2.1).

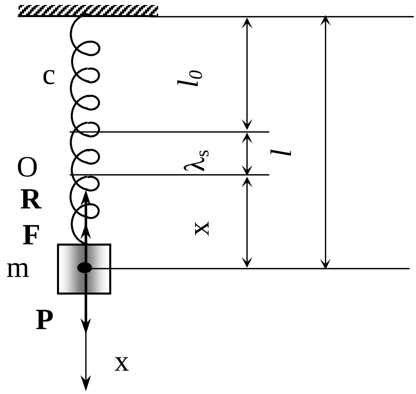


Рис. 2.1

Ось x направим в сторону удлинения пружины, а начало оси O возьмем в положении равновесия груза. В выбранной нами системе координат $\Delta l = x + \lambda_{ст}$, где $\lambda_{ст}$ – статическое удлинение пружины (см. рис. 2.1). Записывая второй закон Ньютона $m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F} + \mathbf{R} + \mathbf{Q}$ и проецируя его на ось x, получим, после несложных преобразований, ДУ движения точки (груза) в виде

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = p_0 \sin pt, \tag{2.1}$$

где $k = \sqrt{c/m}, \quad 2b = \mu/m, \quad p_0 = Q_0/m.$

Рассмотрим теперь частные случаи колебательного движения.

2.1. Свободные незатухающие колебания. Это случай, когда $\mathbf{R} = 0, \mathbf{Q} = 0$.

Уравнение (2.1) имеет вид $\ddot{x} + k^2 x = 0$, а его решение

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt \text{, или } x = A\sin(kt + \alpha), \qquad (2.2)$$

где C_1, C_2, или, соответственно, A, α – постоянные интегрирования. Такие движения материальной точки называется *гармоническими колебаниями*. График таких колебаний приведен на рис. 2.2.

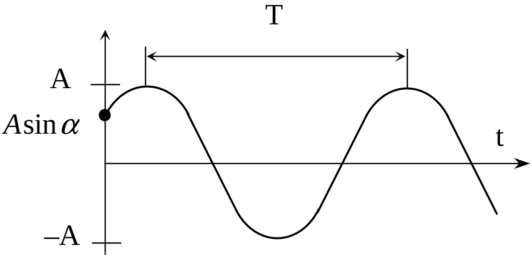


Рис. 2.2

Величина A, равная максимальному отклонению точки от положения равновесия, называется *амплитудой колебаний*. Величина $\varphi(t) = kt + \alpha$ называется *фазой колебаний*, при этом $\varphi(0) = \alpha$ – *начальной фазой колебаний*. Величину k называют *частотой колебаний*. Промежуток времени, $T = 2\pi / k$, в течение которого совершается одно полное колебание, называется *периодом колебаний*.

Значения постоянных A, α, или C_1, C_2 находятся из начальных условий: $x(0) = x_0, \mathrm{v}_0 = \dot{x}(0) = \mathrm{v}_0$, и имеют вид

$$C_1 = \mathrm{v}_0 / k, \quad C_2 = x_0, A = \sqrt{x_0^2 + \mathrm{v}_0^2 / k^2}, \mathrm{tg}\alpha = kx_0/\mathrm{v}_0. \quad (2.3)$$

2.2. Свободные затухающие колебания. В этом случае $\mathbf{R} \neq 0, \mathbf{Q} = 0$. Уравнение (2.1) имеет вид $\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = 0$.

Ограничимся здесь лишь случаем малого сопротивления среды $b < k$, для которого решение имеет вид

$$x = e^{-bt}(C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t)\text{, или}$$

$$x = Ae^{-bt}\sin(k_1 t + \alpha),\ k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}. \qquad (2.4)$$

Постоянные C_1, C_2, или A, α определяются из начальных условий:

$$C_1 = (\mathrm{v}_0 + bx_0)/k_1,\ C_2 = x_0,\ A = \sqrt{x_0^2 + (\mathrm{v}_0 + bx_0)^2/k_1^2},$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = x_0 k_1/(\mathrm{v}_0 + bx_0). \qquad (2.5)$$

Движение точки при $b < k$ носит колебательный характер с частотой $k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}$ и периодом $T_1 = 2\pi/k_1 = 2\pi/\sqrt{k^2 - b^2}$. При этом амплитуда колебаний $A_1 = Ae^{-bt}$ убывает со временем по экспоненциальному закону (рис. 2.3).

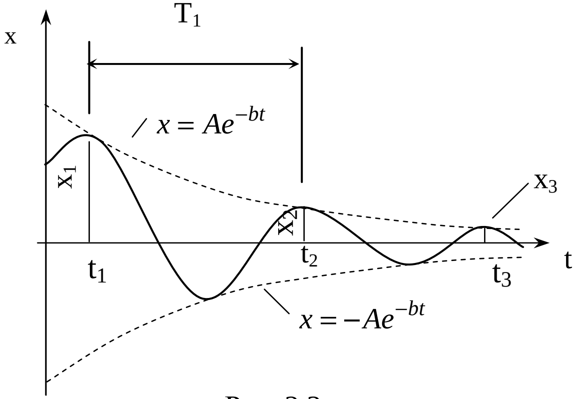


Рис. 2.3

За один период T_1 амплитуда уменьшается при этом в e^{-bT_1} раз. Величина $\lambda = e^{-bT_1}$ называется *декрементом затухания*.

2.3. Вынужденные колебания без учета сопротивления среды. Пусть теперь

$\mathbf{R} = 0, \mathbf{Q} \neq 0$. Уравнение (2.1) имеет вид $\ddot{x} + k^2 x = p_0 \sin pt$, а его решение для случая $p \neq k$ представимо в виде

$$x_2 = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt + (p_0 /(k^2 - p^2)) \sin pt, \qquad (2.6)$$

где C_1, C_2 – постоянные, которые находятся из начальных условий. Последнее слагаемое (2.6) носит название *вынужденных колебаний,* которые происходят с частотой p вынуждающей силы и постоянной амплитудой $B = p_0 /(k^2 - p^2)$. При $p \to k$ амплитуда B будет неограниченно возрастать при отсутствии сопротивления среды. Случай $p = k$ называют *резонансом*.

2.4. Вынужденные колебания при наличии сил сопротивления. В этом случае

$\mathbf{R} \neq 0, \mathbf{Q} \neq 0$. И уравнение (2.1) в случае $b < k$ имеет решение

$$x = e^{-bt}(C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t) + B \sin(pt - \beta), \qquad (2.7)$$

где $B = p_0 / \sqrt{(k^2 - p^2) + 4b^2 p^2}$, $\mathrm{tg}\beta = 2bp/(k^2 - p^2)$.

Второе слагаемое (2.7) называют *вынужденными колебаниями при наличии сопротивления среды*. Оно представляет собой незатухающие гармонические колебания с амплитудой B, частотой p и начальной фазой β, характеризующей сдвиг по фазе между вынужденными колебаниями и возмущающей силой. Введем еще важную характеристику вынужденных колебаний – *коэффициент динамичности*

$$\eta = B / B_{st}, \qquad (2.8)$$

где $B_{st} = p_0 / k^2 = Q_0 / c$ представляет собой статическое перемещение точки под действием постоянной силы Q_0. Коэффициент динамичности η показывает, во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний B под действием возмущающей силы $Q_0 \sin pt$ больше статического перемещения B_{st} при действии постоянной силы Q_0.

2.5. Решение задач на колебательное движение точки. Общие рекомендации для решения обратной задачи динамики материальной точки были даны в п. 1.4. Конкретизируем их применительно к решению задач на колебательное движение точки.

1) Так как колебания прямолинейные, то достаточно ввести одну ось Ox. Направлять ее лучше в сторону удлинения пружины, а начало O оси взять в положении статического равновесия точки.

2) Силы удобнее изображать в момент времени, соответствующий растянутой пружине.

3) При составлении уравнений движения точки в проекции на ось x необходимо предварительно выразить деформацию пружины Δl, входящую в выражение для силы упругости, через координату x точки. Если решение этого вопроса вызывает затруднение, то сделать рисунок, на котором изобразить ось x, с началом в точке O, растянутую пружину с длиной l и свободную пружину с длиной l_0, а затем уже связать Δl с x.

4) Определить начальное положение $x(0)$ и начальную скорость $\mathrm{v}(0) = \dot{\mathrm{x}}(0)$ в выбранной, согласно п. 1, системе отсчета.

5) Полученные в п. 3 ДУ привести к стандартному виду $\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = p_0 \sin pt$ и написать уже готовое общее решение, которое мы получали в п. 2.1–2.4. Постоянные в этом решении определить из начальных условий задачи, согласно п. 4. По найденному закону движения определить требуемые величины.

2.6. Вопросы для самоконтроля

1. Куда направлена и чему равна по величине сила упругости пружины?
2. Какой вид имеют ДУ свободных колебаний материальной точки? Приведите вид его общего решения.
3. Чем определяются амплитуда и начальная фаза свободных колебаний точки?

4. Зависят ли частота и период свободных колебаний от начальных условий? Какими параметрами они полностью определяются?
5. Какой вид имеют ДУ свободных затухающих колебаний материальной точки? Приведите вид его общего решения.
6. Какой вид имеют зависимости от времени координаты материальной точки при свободных и затухающих колебаниях, а также при апериодическом движении?
7. Как определяется декремент затухающих колебаний и что он характеризует?
8. Как связаны между собой частоты (периоды) и амплитуды свободных колебаний точки без учета и с учетом сопротивления среды? Велико ли отличие для реальных сред (например, воздуха)?
9. Какой вид имеют ДУ вынужденных колебаний материальной точки без учета сопротивления среды? Приведите его общее решение вне резонанса и на резонансе.
10. Из каких составляющих складывается движение материальной точки под действием восстанавливающей и вынуждающей сил? Какую из этих составляющих называют вынужденными колебаниями точки?
11. Каковы период и частота вынужденных колебаний точки? От каких факторов зависит их амплитуда?
12. Как влияет сопротивление среды, пропорциональное скорости, на амплитуду, частоту и период вынужденных колебаний?
13. Как определяется и что характеризует коэффициент динамичности? Каков график его зависимости от отношения частот p/k (вынуждающей силы и свободных колебаний)?
14. Какова зависимость сдвига фазы колебаний от отношения частот p/k?
15. Как ведет себя коэффициент динамичности при $p >> k$? Где это используется в технике?
16. Каковы общие рекомендации к решению задач на колебательное движение точки?

Тесты по теме «Прямолинейные колебания точки»

2.1. Груз массой $m = 25$ кг подвешен к пружине жесткости $c = 800$ н/м и совершает колебательное движение. Модуль ускорения груза, когда он находится на расстоянии 5 см от положения равновесия, равен:

a) 0.4 м/с^2;
b) 0.9 м/с^2;
c) 1.6 м/с^2;
d) 2.4 м/с^2.

2.2. Три пружины, имеющие жесткости $c_1 = 2$ Н/см, $c_2 = 4$ Н/см, $c_3 = 6$ Н/см, соединены последовательно. Определить жесткость $c_э$ эквивалентной пружины.

a) 0.42 Н/см;
b) 0.89 Н/см;
c) 1.09 Н/см;
d) 2.43 Н/см.

2.3. Груз прикреплен к концу недеформированной пружины и отпущен с нулевой скоростью. Статическая деформация пружины 2 см. Максимальное удлинение пружины равно:

a) 4 см;
b) 2 см;
c) 6 см;
d) 3 см.

2.4. Определить период свободных колебаний груза массой $m = 80$ кг на пружине жесткости $c = 2$ кН/м.

a) 0.87 с;
b) 1.26 с;
c) 2.51 с;
d) 3.05 с.

2.5. Определить период свободных колебаний груза, если для этого груза статическая деформация пружины $\lambda = 20$ см.

a) 0.23 с;
b) 1.26 с;
c) 2.51 с;
d) 0.9 с.

2.6. Период свободных колебаний груза равен 0.5 с, жесткость пружины $c = 200$ Н/м. Масса груза равна:

a) 0.73 кг;
b) 1.27 кг;
c) 2.31 кг;
d) 3.92 кг.

2.7. Колебание точки задано уравнением $x = 20\cos 4t + 30\sin 4t$ (см). Амплитуда колебаний равна:

a) 31.6 см;
b) 24.8 см;
c) 46.1 см;
d) 9.8 см.

2.8. Жесткость пружины $c = 700$ Н/м, амплитуда свободных колебаний $0,2$ м. Определить массу груза, если колебания начались из положения равновесия с начальной скоростью 4 м/с.

a) 0.43 кг;
b) 1.07 кг;
c) 1.75 кг;
d) 3.22 кг.

2.9. Масса груза $m = 9$ кг, жесткость пружины $c = 90$ Н/м, амплитуда свободных колебаний 0.1 м. Определить начальную скорость груза, если колебания начались из положения равновесия.

a) 0.11 м/с;
b) 0.32 м/с;
c) 1.05 м/с;
d) 3.28 м/с.

2.10. Масса груза $m = 0.3$ кг, амплитуда свободных колебаний 0.4 м. Определить коэффициент жесткости пружины, если колебания начались из положения равновесия с начальной скоростью 3 м/с.
a) 16.9 Н/см;
b) 0.8 Н/см;
c) 1.99 Н/см;
d) 2.43 Н/см.

2.11. ДУ свободных колебаний имеет вид $\ddot{y} + 9y = 0$. Определить угловую частоту колебаний.
a) 9.0 1/с;
b) 0.8 1/с;
c) 3.0 1/с;
d) 2.43 1/с.

2.12. На груз, совершающий вертикальные колебания вдоль оси x, действуют сила тяжести $m\mathbf{g}$, сила упругости пружины $\mathbf{F}_y$, сила сопротивления среды $\mathbf{R}$ и вынуждающая сила $\mathbf{Q}$. Какое ДУ соответствует случаю $\mathbf{R} = 0, \mathbf{Q} \neq 0$?
a) $\ddot{x} + k^2 x = 0$;
b) $\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = 0$;
c) $\ddot{x} + k^2 x = h \sin pt$;
d) $\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = h \sin pt$.

2.13. На груз, совершающий вертикальные колебания вдоль оси x, действуют сила тяжести $m\mathbf{g}$, сила упругости пружины $\mathbf{F}_y$, сила сопротивления среды $\mathbf{R}$ и вынуждающая сила $\mathbf{Q}$. Какое ДУ соответствует случаю $\mathbf{R} \neq 0, \mathbf{Q} \neq 0$?

a) $\ddot{x} + k^2 x = 0$;

b) $\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = 0$;

c) $\ddot{x} + k^2 x = h \sin pt$;

d) $\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = h \sin pt$.

2.14. На груз, совершающий вертикальные колебания вдоль оси x, действуют сила тяжести $m\mathbf{g}$, сила упругости пружины $\mathbf{F}_y$, сила сопротивления среды $\mathbf{R}$ и вынуждающая сила $\mathbf{Q}$. Какое ДУ соответствует случаю $\mathbf{R} \neq 0, \mathbf{Q} = 0$?

a) $\ddot{x} + k^2 x = 0$;

b) $\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = 0$;

c) $\ddot{x} + k^2 x = h \sin pt$;

d) $\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = h \sin pt$.

2.15. На груз, совершающий вертикальные колебания вдоль оси x, действуют сила тяжести $m\mathbf{g}$, сила упругости пружины $\mathbf{F}_y$, сила сопротивления среды $\mathbf{R}$ и вынуждающая сила $\mathbf{Q}$. Какое ДУ соответствует случаю $\mathbf{R} = 0, \mathbf{Q} = 0$?

a) $\ddot{x} + k^2 x = 0$;

b) $\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = 0$;

c) $\ddot{x} + k^2 x = h \sin pt$;

d) $\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = h \sin pt$.

2.16. На груз, совершающий вертикальные колебания вдоль оси x, действуют сила тяжести $m\mathbf{g}$, сила упругости пружины $\mathbf{F}_y$, сила сопротивления среды $\mathbf{R}$ и вынуждающая сила $\mathbf{Q}$. Какое ДУ соответствует случаю $\mathbf{R} = 0, \mathbf{Q} \neq 0$?

a) $\ddot{x}+k^2x=0$;

b) $\ddot{x}+2b\dot{x}+k^2x=0$;

c) $\ddot{x}+k^2x=h\sin pt$;

d) $\ddot{x}+2b\dot{x}+k^2x=h\sin pt$.

2.17. Как связаны период T свободных колебаний без учета сопротивления среды и период T_1 свободных колебаний с учетом сопротивления среды?

a) $T_1>T$;

b) $T_1<T$;

c) $T_1\geq T$;

d) $T_1\leq T$.

2.18. Решение ДУ затухающих колебаний имеет вид $x=e^{-0.2t}(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t)$. Определить постоянную C_1, если $x(0)=0.2$.

a) 0.1;
b) 0.2;
c) 1.0;
d) 3.3.

2.19. Решение ДУ затухающих колебаний имеет вид $x=e^{-0.5t}(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t)$. Определить постоянную C_2, если $C_1=1.5$, $\mathrm{v}(0)=0$.

a) 0.1;
b) 0.4;
c) 1.2;
d) 0.25.

2.20. ДУ движения точки имеет вид $m\ddot{x}+4\dot{x}+2x=0$. Найти максимальное значение массы точки, при котором движение будет апериодическим.

a) 0.5 кг;
b) 1.7 кг;
c) 2.0 кг;
d) 3.2 кг.

2.21. Уравнение затухающих колебаний груза $x = Ae^{-0.9t}\sin(5t + \alpha)$. Найти его массу, если жесткость пружины $c = 200$ Н/м.
a) 0.58 кг;
b) 2.76 кг;
c) 4.0 кг;
d) 7.75 кг.

2.22. На точку массой $m = 6$ кг действует сила сопротивления $\mathbf{R} = -\mu\mathbf{V}$. Определить μ, если закон движения точки имеет вид $x = Ae^{-0.1t}\sin(7t + \alpha)$.
a) 0.1;
b) 1.2;
c) 3.1;
d) 0.25.

2.23. Груз массой $m = 2$ кг подвешен к пружине жесткости $c = 30$ Н/м. Определить угловую частоту затухающих колебаний, если сила сопротивления $\mathbf{R} = -4\mathbf{V}$.
a) 9.0 1/с;
b) 0.8 1/с;
c) 3.74 1/с;
d) 2.43 1/с.

2.24. ДУ затухающих колебаний имеет вид $\ddot{x} + 6\dot{x} + 50x = 0$. Определить период колебаний.
a) 0.98 с;
b) 1.46 с;
c) 2.51 с;
d) 3.05 с.

2.25. Движение точки задано уравнением $x = 0.7e^{-0.4t}\sin(1.5t + 0.6)$. Определить период свободных колебаний точки при отсутствии силы сопротивления среды.
a) 0.91 с;
b) 4.05 с;
c) 2.89 с;
d) 4.05 с.

2.26. ДУ затухающих колебаний точки имеет вид $\ddot{x} + 0.6\dot{x} + 16x = 0$. Определить декремент колебаний.
a) 0.41;
b) 1.2;
c) 3.1;
d) 0.62.

2.27. Уравнение затухающих колебаний имеет вид $x = 0.12e^{-0.1t}\sin(18t + 0.2)$. Определить декремент колебаний.
a) 0.41;
b) 1.2;
c) 3.1;
d) 0.62.

2.28. ДУ движения точки имеет вид $3\ddot{x} + \mu\dot{x} + 48x = 0$. Найти наименьшее значение μ, при котором движение будет апериодическим.
a) 24;
b) 12;
c) 3.1;
d) 0.6.

2.29. Затухающие колебания описываются уравнением $x = Ae^{-0.2t}\sin(0.5t + \alpha)$. Определить угловую частоту свободных колебаний при отсутствии силы сопротивления среды.

a) 12;
b) 4.2;
c) 2.13;
d) 0.54.

2.30. ДУ колебательного движения точки определяется уравнением $\ddot{x}+10x=1.5\sin(5t+0.4)$. Определить массу точки, если максимальное значение вынуждающей силы $Q_0=60$ Н.
a) 0.5 кг;
b) 17 кг;
c) 20 кг;
d) 40 кг.

2.31. На тело массой $m=50$ кг, подвешенное к пружине, действует вынуждающая сила $Q=200\sin 10t$. Амплитуда вынужденных колебаний равна 0.04 м. Определить коэффициент жесткости пружины.
a) 10 кН/м;
b) 20 кН/м;
c) 5.1 кН/м;
d) 0.22 кН/м.

2.32. ДУ движения точки определяется уравнением $\ddot{x}+16x=20\sin(6t+0.7)$. Максимальное значение вынуждающей силы $Q_0=80\ H$. Определить коэффициент жесткости пружины.
a) 10 Н/м;
b) 20 Н/м;
c) 64 Н/м;
d) 120 Н/м.

2.33. На груз, подвешенный к пружине жесткости $c = 600$ Н/м, действует вынуждающая сила $Q = 25\sin pt$. При каком p амплитуда вынужденных колебаний груза будет равна 0.05 м?

a) 14.1 1/с;
b) 0.92 1/с;
c) 3.0 1/с;
d) 8.43 1/с.

2.34. ДУ движения точки определяется уравнением $\ddot{x} + 6\dot{x} + 30x = 4\sin 2t$. Определить амплитуду вынужденных колебаний.

a) 1.2;
b) 4.2;
c) 2.87;
d) 0.14.

2.35. Жесткость пружины увеличили в восемь раз, а массу груза в два раза. Как изменится период свободных колебаний?

a) останется тем же;
b) уменьшится в два раза;
c) увеличится в два раза;
d) уменьшится в четыре раза.

2.36. Как изменится период свободных колебаний, если начальное отклонение x_0 груза от положения равновесия увеличить в два раза, а жесткость пружины – в четыре раза.

a) останется тем же;
b) увеличится в два раза;
c) уменьшится в два раза;
d) уменьшится в четыре раза.

2.37. Амплитуда вынужденных колебаний зависит от …

a) частоты возмущающей силы;
b) частоты свободных колебаний;

c) частоты возмущающей силы и частоты свободных колебаний;
d) частоты свободных колебаний и начальной скорости.

2.38. Явление резонанса возникает …
a) при стремлении частоты вынуждающей силы к нулю;
b) при стремлении частоты вынуждающей силы к частоте собственных колебаний;
c) когда отношение частоты вынуждающей силы к частоте собственных колебаний кратно π;
d) при стремлении частоты свободных колебаний к нулю.

2.39. Точка совершает вынужденные колебания под действием вынуждающей силы $Q = Q_0 \sin pt$. Коэффициент динамичности – это отношение …
a) амплитуды вынужденных и частоты свободных колебаний;
b) амплитуды вынужденных колебаний и статического удлинения пружины при действии постоянной силы Q_0;
c) амплитуды и фазы вынужденных колебаний;
d) коэффициента сопротивления и частоты вынужденных колебаний.

2.40. Если частота вынуждающей силы значительно больше частоты свободных колебаний, то коэффициент динамичности стремится к …
a) бесконечности;
b) единице;
c) нулю;
d) нет предела.

3. ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ В НЕИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

3.1. Основной закон динамики в неинерциальной системе отсчета. Второй закон Ньютона $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ справедлив в инерциальной системе отсчета. Часто, однако, возникает необходимость изучать движение в неинерциальной системе отсчета.

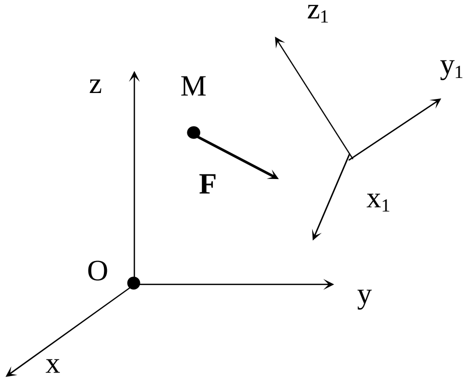


Рис. 3.1

Рассмотрим неинерциальную систему координат $O_1x_1y_1z_1$, которая движется относительно инерциальной системы координат $Oxyz$ (рис. 3.1). Пусть $\mathbf{F}$ – равнодействующая всех сил (активных и реакций связей, если они имеются), действующих на точку. Так как система координат $Oxyz$ инерциальная, то в ней второй закон Ньютона $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ (3.1) выполняется. Представим теперь движение точки как сложное. А именно, инерциальную систему отсчета $Oxyz$ примем за неподвижную и тогда движение по отношению к ней будет абсолютным («a»). Неинерциальную систему отсчета $O_1x_1y_1z_1$ считаем подвижной, тогда движение по отношению к ней будет относительным («r»). Само движение неинерциальной системы $O_1x_1y_1z_1$ относительно инерциальной системы $Oxyz$ тогда будет переносным («e»). Воспользуемся теперь теоремой Кориолиса о сложении ускорений

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c, \quad \mathbf{a}_c = 2\omega_e \times \mathbf{v}_r. \qquad (3.2)$$

Учитывая, что $\mathbf{a} = \mathbf{a}_a$ и подставляя (3.2) в (3.1), получим $m\mathbf{a}_r + m\mathbf{a}_e + m\mathbf{a}_c = \mathbf{F}$, или

$$m\mathbf{a}_r = \mathbf{F} + \mathbf{F}_e^{in} + \mathbf{F}_c^{in}, \qquad (3.3)$$

где введены обозначения $\mathbf{F}_e^{in} = -m\mathbf{a}_e$, $\mathbf{F}_c^{in} = -m\mathbf{a}_c$. Заметим, что величины $\mathbf{F}_e^{in}$ и $\mathbf{F}_c^{in}$ имеют размерность силы. Их называют *переносной и кориолисовой силами инерции*, а уравнение (3.3) – *основным уравнением динамики для неинерциальных систем.*

3.2. Решение задач в неинерциальной системе. Обратимся теперь к решению задач на применение основного закона динамики в неинерциальной системе координат. Рекомендации к их решению остаются теми же, что и для решения задач на применение второго закона Ньютона в инерциальной системе координат (см. п. 1.5), с той лишь разницей, что наряду с обычными силами следует еще изображать на чертеже и учитывать при составлении ДУ переносную и кориолисову силы инерции. Для вычисления этих сил необходимо определить переносное и кориолисово ускорения точки, используя рекомендации к решению задач кинематики на сложное движение точки (см. «Лекции по теоретической механике», Рудяк В.Я., Юдин В.А., ч. 1, лекция 11, п. 11.4).

3.3. Покой в неинерциальной системе отсчета. Рассмотрим случай, когда материальная точка под действием приложенных к ней сил находится в покое в неинерциальной системе координат $O_1x_1y_1z_1$ (см. рис. 3.1). При отсутствии относительного движения $\mathbf{a}_r = \mathbf{v}_r = 0$ и, следовательно, $\mathbf{F}_c^{in} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r = 0$. Тогда уравнение (3.3) принимает вид

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_e^{in} = 0. \qquad (3.4)$$

Таким образом, если материальная точка находится в покое по отношению к неинерциальной системе отсчета, то сумма всех сил, приложенных к ней, и переносной силы инерции равна нулю.

В случае покоя относительно Земли уравнение (3.4) имеет вид

$$\mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_e^{in} = 0, \tag{3.5}$$

где $\mathbf{P}$ – сила притяжения Земли, направленная к ее центру, $\mathbf{N}$ – реакция Земли, $\mathbf{F}_e^{in}$ – переносная сила инерции, которая вследствие равномерного вращения Земли представляет собой центробежную силу (рис. 3.2). Ее модуль $F_e^{in} = mh\omega^2$, где h – расстояние от тела до оси вращения Земли, $\omega = 2\pi / 24 \cdot 3600$ 1/с – угловая скорость вращения Земли.

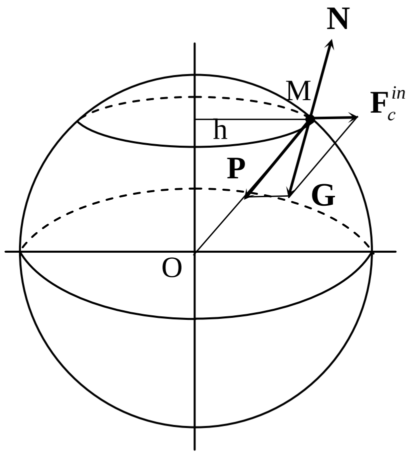


Рис. 3.2

Силу $\mathbf{G} = \mathbf{P} + \mathbf{F}_e^{in}$, представляющую собой равнодействующую силы притяжения Земли и переносной силы инерции, называют *силой тяжести*. В соответствии с (3.5) для покоящегося на Земле тела сила тяжести $\mathbf{G} = -\mathbf{N}$, т.е. совпадает с весом тела (напомним, что под весом понимается сила, с которой тело действует на опору или на точку подвеса).

3.4. Вопросы для самоконтроля

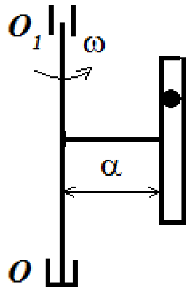
1. В чем различие между ДУ движения точки в инерциальной и неинерциальной системах отсчета?
2. Как определяются переносная и кориолисова силы инерции?
3. Ощущаем ли мы на себе действие переносной и кориолисовой сил инерции, находясь в неинерциальной системе отсчета? Приведите примеры их действия.
4. В чем схожесть и в чем отличие сил инерции от обычных сил?
5. Могут ли отличаться ДУ движения точки в двух неинерциальных системах отсчета? А в двух инерциальных?
6. Каково условие относительного покоя материальной точки?
7. Как определяется сила тяжести? Чем она отличается от силы притяжения к Земле? Зависит ли ее величина от места на Земле?
8. Как определить, можно или нет данную систему отсчета приближенно считать инерциальной при решении конкретной задачи?
9. Почему для решения большинства задач систему координат, жестко связанную с Землей, можно приближенно считать инерциальной? Приведите примеры, когда этого делать нельзя.
10. Почему у рек, текущих на север, западные берега положе восточных?
11. Чем объясняется отклонение падающих тел к востоку?
12. В какой системе отсчета должен находиться человек, чтобы испытывать ощущение невесомости? Почему?
13. Чем отличаются основные этапы решения задач динамики точки в инерциальной и в неинерциальной системах отсчета?

Тесты по теме «Движение точки в неинерциальной системе отсчета»

3.1. Какое из следующих понятий не существует?

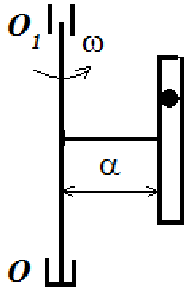
a) относительное ускорение;
b) относительная сила инерции;
c) кориолисово ускорение;
d) кориолисова сила инерции.

3.2. Шарик массой m = 0.05 кг падает внутри гладкой трубки, вращающейся вокруг вертикальной оси OO_1. Расстояние от оси OO_1 до трубки a = 0.4 м. Закон вращения трубки имеет вид $\varphi = 2t^3$ рад. Начальная скорость падения шарика равна нулю. Найти силу давления со стороны шарика на стенку трубки в момент времени t_1 = 1 с.



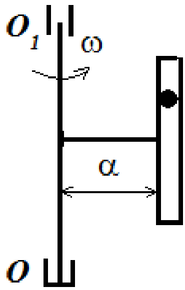
a) 0.24 Н;
b) 0.5 Н;
c) 0.72 Н;
d) 0.76 Н.

3.3. Найти значение переносной силы инерции, действующей на шарик массой m = 0.05 кг, падающий внутри гладкой трубки, вращающейся вокруг вертикальной оси OO_1, в момент времени t_1 = 2 с, если угловая скорость вращения трубки $\omega = 0.5t^2$ рад/с. Расстояние от оси OO_1 до трубки a = 0.4 м. Начальная скорость падения шарика равна нулю.



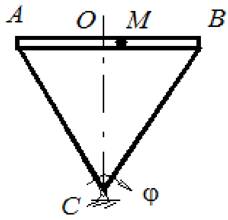
a) 0 Н;
b) 0.04 Н;
c) 0.08 Н;
d) 0.09 Н.

3.4. Куда направлен вектор переносной силы инерции, действующей на шарик массой m = 0.05 кг, падающий внутри трубки, вращающейся вокруг вертикальной оси OO_1 с постоянной угловой скоростью ω = 2 рад/с? Расстояние от оси OO_1 до трубки a = 0.4 м.



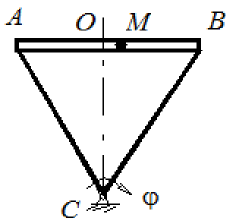
a) к нам (перпендикулярно плоскости рисунка);
b) от оси вращения;
c) от нас (перпендикулярно плоскости рисунка);
d) к оси вращения.

3.5. Шарик M массой $m = 0.5$ кг движется по горизонтальной стороне AB треугольника ABC по закону $OM = 0.4t$ м в сторону точки B. Треугольник ABC вращается в плоскости чертежа. Закон вращения треугольника имеет вид $\varphi = 0.5t^3$ рад. $OC = 0.8$ м. Чему равна кориолисова сила инерции, действующая на шарик M в момент времени $t_1 = 2$ с?



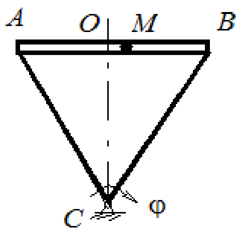
a) 1.2 Н;
b) 2.4 Н;
c) 0 Н;
d) 7.2 Н.

3.6. Шарик M массой $m = 0.05$ кг движется по горизонтальной стороне AB треугольника ABC по закону $OM = 0.4t$ м в сторону точки B. Треугольник ABC вращается в плоскости чертежа. Закон вращения треугольника имеет вид $\varphi = 0.5t$ рад. Положительное направление угла поворота показано на рисунке. $OC = 0.8$ м. Куда направлена кориолисова сила инерции, действующая на шарик M в момент времени $t_0 = 0$ с?



a) вправо;
b) влево;
c) вверх;
d) вниз.

3.7. Шарик M массой $m = 0.5$ кг движется по горизонтальной стороне AB треугольника ABC по закону $OM = 0.4t$ м в сторону точки B. Треугольник ABC вращается в плоскости чертежа по закону $\varphi = 0{,}5t$ рад. Положительное направление угла поворота показано на рисунке. $OC = 0.8$ м. Чему равна переносная сила инерции, действующая на шарик M в момент времени $t_1 = 2$ с?

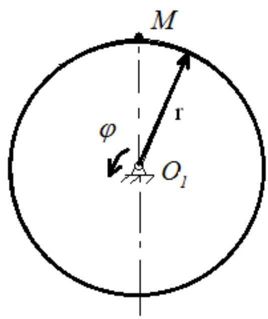


a) 0.14 Н;
b) 0.2 Н;
c) 0.1 Н;
d) 5 Н.

3.8. Направление вектора переносной силы инерции:
a) такое же, как у вектора переносного ускорения;
b) противоположно вектору переносного ускорения;
c) зависит от направления оси вращения и относительной скорости;
d) никак не связано с направлением вектора переносного ускорения.

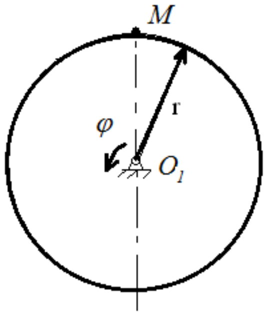
3.9. Вектор кориолисовой силы инерции (отметить неверный ответ):
a) направлен перпендикулярно относительной скорости точки;
b) направлен так же, как вектор кориолисова ускорения;
c) отсутствует при поступательном переносном движении;
d) направлен перпендикулярно оси вращения при вращательном переносном движении.

3.10. Точка М массы $m = 0.5$ кг движется по часовой стрелке по ободу диска радиуса $r = 0.8$ м по закону $s = 3t^2$ м. Диск вращается в плоскости рисунка вокруг оси O_1 по закону $\varphi = 2t$ рад. Чему равна кориолисова сила инерции, действующая на точку M в момент времени $t_1 = 2$ с?



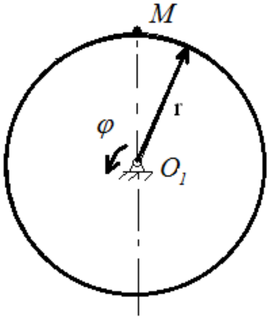
a) 0 Н;
b) 6 Н;
c) 12 Н;
d) 24 Н.

3.11. Точка M движется по часовой стрелке по ободу диска радиуса $r = 0.8$ м по закону $s = 3t^2$ м. Диск вращается в плоскости рисунка вокруг оси O_1 по закону $\varphi = 2t$ рад. Какие не равные нулю силы инерции действуют на точку M в момент времени $t_1 = 2$ с?



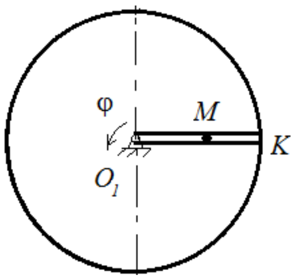
a) переносная;
b) кориолисова;
c) переносная и кориолисова;
d) в данный момент времени на т. M не действуют силы инерции.

3.12. Точка M массой $m = 0.5$ кг движется по часовой стрелке по ободу диска радиуса $r = 0.8$ м по закону $s = 3t^2$ м. Диск вращается в плоскости рисунка вокруг оси O_1 по закону $\varphi = 2t^3$ рад. Чему равна переносная сила инерции, действующая на точку M в момент времени $t_1 = 2$ с?



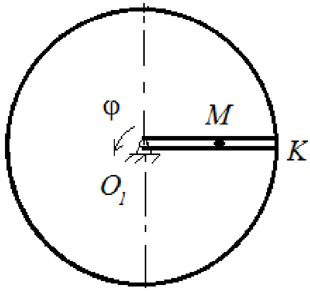
a) 230 Н;
b) 48 Н;
c) 230.6 Н;
d) 9.6 Н.

3.13. Маленький шарик M массой $m = 0.2$ кг движется по желобу O_1K диска по закону $O_1M = 0.5t^3$ м. Диск вращается вокруг вертикальной оси O_1 по закону $\varphi = 20t$ рад. Чему равна сила давления шарика M на боковую стенку желоба в момент времени $t_1 = 1$ с?



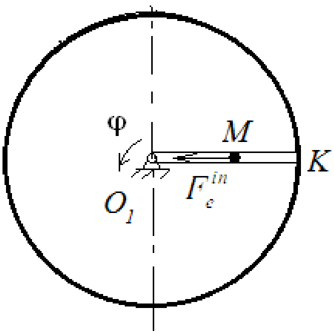
a) 12 Н;
b) 0 Н;
c) 6 Н;
d) 18 Н.

3.14. Маленький шарик М массой m = 0.2 кг движется по желобу O_1K диска по закону $O_1M = 0.5t$ м. Диск вращается вокруг вертикальной оси O_1 по закону $\varphi = 20t^2$ рад. Чему равна сила давления шарика M на боковую стенку желоба в момент времени t_1 = 1 с?

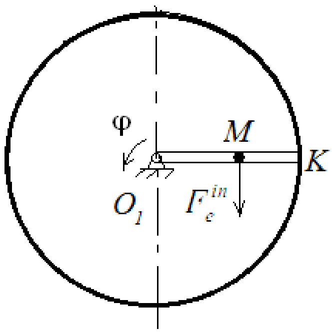


a) 4 Н;
b) 8 Н;
c) 12 Н;
d) 0 Н.

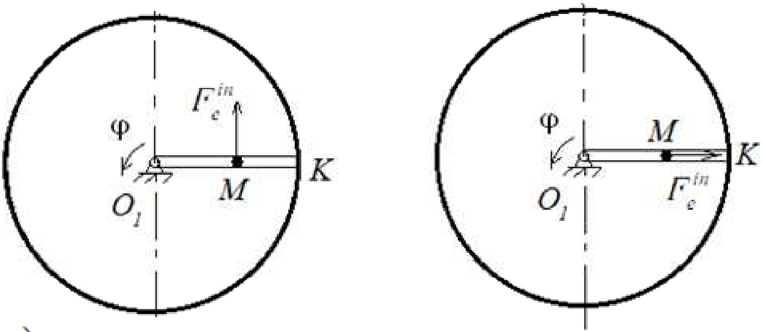
3.15. Маленький шарик M массой m = 0.2 кг движется по желобу O_1K диска по закону $O_1M = 0.5t^3$ м. Диск вращается вокруг оси O_1 по закону $\varphi = 20t$ рад. На каком из рисунков направление переносной силы инерции F_e^{in}, действующая на шарик M в момент времени t_1 = 1 с, изображено верно?



a)

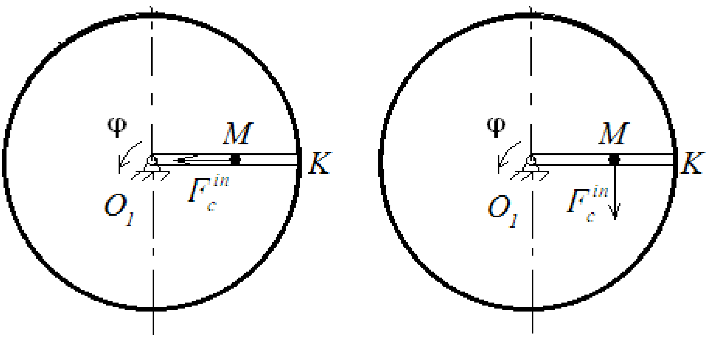


b)

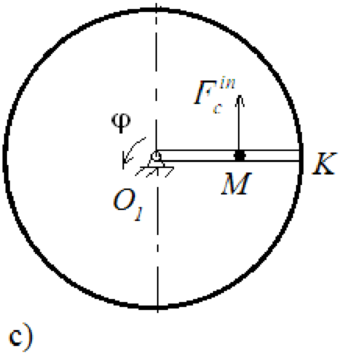


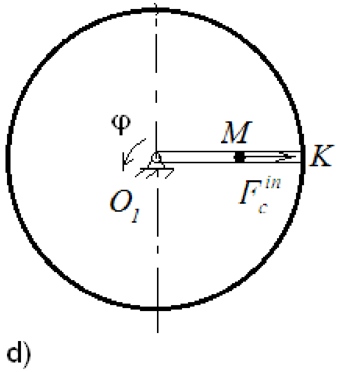
c) d)

3.16. Маленький шарик M массой m = 0.2 кг движется по желобу O_1K диска по закону $O_1M = 0.5t^3$ м. Диск вращается вокруг оси O_1 по закону $\varphi = 20t$ рад. На каком из рисунков направление кориолисовой силы инерции F_c^{in}, действующей на шарик M в момент времени t_1 = 1 с, изображено верно?



a) b)





3.17. Поезд массой $m = 8 \cdot 10^4$ кг движется по экватору с востока на запад со скоростью 20 м/с. Считать угловую скорость Земли $\omega = 0.73 \cdot 10^{-4}$ рад/с, радиус Земли $R = 637 \cdot 10^4$ м. Поезд принять за материальную точку. Определить модуль кориолисовой силы инерции.

a) 0 Н;
b) 117 Н;
c) 234 Н;
d) 2716 Н.

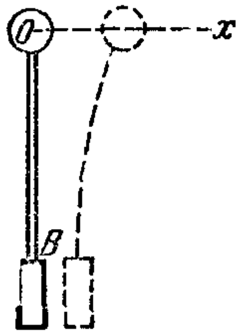
3.18. Поезд массой $m = 8 \cdot 10^4$ кг движется по экватору с востока на запад со скоростью 20 м/с. Считать угловую скорость Земли равной $\omega = 0.73 \cdot 10^{-4}$ рад/с, радиус Земли $R = 637 \cdot 10^4$ м. Поезд принять за материальную точку. Определить модуль переносной силы инерции.

a) $372 \cdot 10^5$ Н;
b) 117 Н;
c) 234 Н;
d) 2716 Н.

3.19. Поезд массой $m = 8 \cdot 10^4$ кг движется по экватору с востока на запад со скоростью 20 м/с. Считать угловую ско-

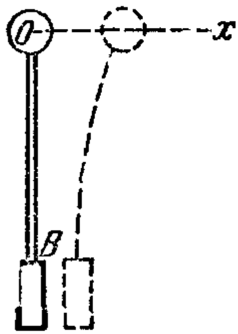
рость Земли равной $\omega = 0.73 \cdot 10^{-4}$ рад/с, радиус Земли $R = 637 \cdot 10^4$ м. Поезд принять за материальную точку. Определить угол между кориолисовой и переносной силами инерции.
a) 0 град;
b) 180 град;
c) 90 град;
d) 120 град.

3.20. К концу O вертикального упругого стержня OB прикреплен груз массой m = 0.5 кг. Груз совершает гармонические колебания под влиянием силы упругости стержня, такой, что для отклонения его конца O на 1 см нужно приложить силу 2 Н. Найти амплитуду действующей на груз переносной силы инерции в том случае, когда точка закрепления стержня B совершает по горизонтальной прямой гармонические колебания амплитуды 2 мм и периода 0.1 с.



a) 2 Н;
b) 3.95 Н;
c) 0.4 Н;
d) 4.52 Н.

3.21. К концу O вертикального упругого стержня OB прикреплен груз массой m = 0.5 кг. Груз совершает гармонические колебания под влиянием силы упругости стержня, такой, что для отклонения его конца O на 1 см нужно приложить силу 2 Н. Найти амплитуду вынужденных колебаний груза в том случае, когда точка закрепления стержня B со-



вершает по горизонтальной прямой гармонические колебания амплитуды 2 мм и периода 0.1 с.

a) 2.13 мм;
b) 2 мм;
c) 2.23 мм;
d) 2.5 мм.

3.22. Точка подвеса математического маятника длиной l = 0.9 м и массой $m = 0.5$ кг движется по вертикали по закону $y(t) = 0.5t^2 + 3t + 2$ (м), ось y направлена вверх. Определить величину и направление переносной силы инерции, действующей на маятник. Ускорение свободного падения g считать равным 10 м/с^2.

a) 5.5 Н, вниз;
b) 0.25 Н, вверх;
c) 0.5 Н, вниз;
d) 5 Н, вниз.

3.23. Точка подвеса математического маятника длиной l = 0.9 м массой m = 0.5 кг движется по вертикали вверх с постоянным ускорением a = 1 м/с^2. Определить круговую частоту ω малых колебаний маятника. Ускорение свободного падения g считать равным 10 м/с^2.

a) 0.9 рад/с;
b) 3.33 рад/с;
c) 3.50 рад/с;
d) 3.16 рад/с.

3.24. Точка подвеса математического маятника длиной l = 1.2 м и массой $m = 0.3$ кг движется горизонтально по закону $x(t) = -t^2 + 8t + 2$ (м), ось x направлена вправо от наблюдателя. Определить величину и направление переносной силы инерции, действующей на маятник. Ускорение свободного падения g считать равным 10 м/с^2.

a) 0.6 Н, вправо;
b) 0.6 Н, влево;

c) 3 Н, вверх;
d) 3 Н, вниз.

3.25. Точка подвеса математического маятника длиной $l = 1.2$ м и массой $m = 0.3$ кг движется по вертикали вниз с постоянным ускорением $a = 2$ м/с^2. Определить период T малых колебаний маятника. Ускорение свободного падения g считать равным 10 м/с^2.
a) 1.99 с;
b) 2.18 с;
c) 2.43 с;
d) 3.4 с.

3.26. Точка подвеса математического маятника длиной $l = 10$ м массой $m = 0.3$ кг движется горизонтально с постоянным ускорением $a = 4$ м/с^2. Определить равновесный угол отклонения маятника от вертикали. Ускорение свободного падения g считать равным 10 м/с^2.
a) 0°;
b) 21.8°;
c) 23.6°;
d) 42.2°.

3.27. Точка подвеса математического маятника длиной $l = 10$ м массой $m = 0.3$ кг движется горизонтально с постоянным ускорением $a = 4$ м/с^2. Определить период T малых колебаний маятника. Ускорение свободного падения g считать равным 10 м/с^2.
a) 5.31 с;
b) 6.05 с;
c) 6.28 с;
d) 8.11 с.

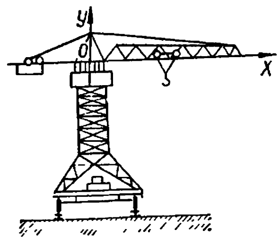
3.28. Тележка мостового крана движется в горизонтальном направлении с постоянным ускорением $a = 10/\sqrt{3}$ м/с^2. Определить угол α отклонения троса от вертикали в положении относительного равновесия груза. Ускорение свободного падения g считать равным 10 м/с^2.

a) 0°;
b) 30°;
c) 35°;
d) 55°.

3.29. Два одинаковых шарика массой $m = 0.05$ кг прикреплены к концам горизонтального стержня CD длиной 0.4 м невесомыми нерастяжимыми нитями длиной $l = 1$ м каждая. С какой угловой скоростью ω должен вращаться стержень CD вокруг центральной вертикальной оси, чтобы нити отклонились на угол $\alpha = 2°$ от вертикали? Ускорение свободного падения g считать равным 10 м/с^2.

a) 0 рад/с;
b) 1.22 рад/с;
c) 1.32 рад/с;
d) 5 рад/с.

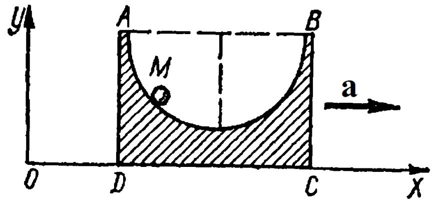
3.30. Стрела башенного крана поворачивается вокруг вертикальной оси y с угловой скоростью $\omega = 0.5$ рад/с. Тележка массой $m = 2000$ кг движется по стреле вдоль оси x со скоростью $v = 2$ м/с. Определить силу бокового давления тележки на рельсы стрелы.



a) 0 Н;
b) 2000 Н;
c) 4000 Н;
d) 20.000 Н.

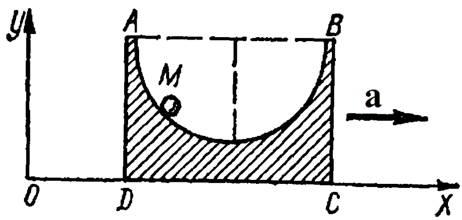
3.31. Шарик M массой $m = 0.05$ кг скользит вдоль гладкой полуокружности AMB радиуса $R = 0.5$ м, ограничивающей сверху вертикальную пластинку $ABCD$, движущуюся вдоль горизонтальной оси Ox с постоянным ускорением $a = 2$ м/с^2. Определить относительную скорость шарика M

в низшем положении, если в положении *A* его относительная скорость была равна нулю. Ускорение свободного падения g считать равным 10 м/с^2.



a) 1.4 м/с;
b) 2.8 м/с;
c) 3.2 м/с;
d) 3.5 м/с.

3.32. Шарик *M* массой $m = 0.05$ кг скользит вдоль гладкой полуокружности *AMB* радиуса $R = 0.5$ м, ограничивающей сверху вертикальную пластинку *ABCD*, движущуюся вдоль горизонтальной оси *Ox* с постоянным ускорением $a = 2$ м/с^2. Определить нормальное давление на пластинку шарика *M* в низшем положении, если в положении *A* его относительная скорость была равна нулю. Ускорение свободного падения g считать равным 10 м/с^2.



a) 0.5 Н;
b) 0.8 Н;
c) 1.3 Н;
d) 1.5 Н.

3.33. Невесомый стержень *AB* длиной $l = 0.8$ м прикреплен цилиндрическим шарниром *A* к тонкому вертикальному валу, вращающемуся с постоянной угловой скоростью $\omega = 4$ рад/с. К концу стержня *B* прикреплен шарик массой $m = 0.2$ кг. Определить угол отклонения стержня от вертикали. Ускорение свободного падения g считать равным 10 м/с^2.

a) 0°;
b) 39°;
c) 45°;
d) 52°.

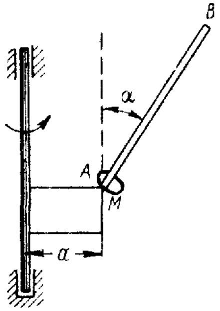
3.34. Невесомый стержень AB длиной l = 0.8 м прикреплен цилиндрическим шарниром A к тонкому вертикальному валу, вращающемуся с постоянной угловой скоростью ω = 4 рад/с. К концу стержня B прикреплен шарик массой m = 0.2 кг. Определить период малых колебаний шарика около положения относительного равновесия, пренебрегая его размерами. Ускорение свободного падения g считать равным 10 м/с^2.

a) 1.24 с;
b) 1.57 с;
c) 1.78 с;
d) 2.52 с.

3.35. На шероховатую горизонтальную плоскость, вращающуюся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω = 0.5 рад/с, помещена тяжелая точка массой m = 0.05 кг. На каком расстоянии от оси может находиться эта точка в положении относительного равновесия, если коэффициент трения равен f = 0.2? Ускорение свободного падения g считать равным 10 м/с^2. Выбрать один наиболее полный ответ.

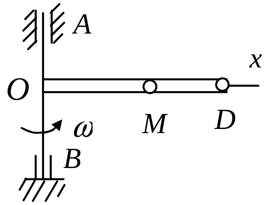
a) в пределах круга радиуса R = 2 м с центром на оси вращения;
b) на окружности радиуса R = 2 м с центром на оси вращения;
c) в пределах круга радиуса R = 8 м с центром на оси вращения;
d) за пределами круга радиуса R = 8 м с центром на оси вращения.

3.36. Гладкий стержень AB равномерно вращается вокруг вертикальной оси, составляя с ней неизменный угол α = 30°. Определить наибольшую величину угловой скорости стержня ω, при которой колечко M, надетое на стержень, будет находиться в относительном равновесии в низшем положении A, если расстояние от точки A до оси вращения равно $a = 0.3$ м. Ускорение свободного падения g считать равным 10 м/с^2.



a) 5.37 рад/с;
b) 5.77 рад/с;
c) 7.6 рад/с;
d) 8.16 рад/с.

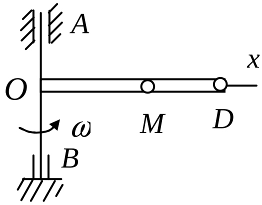
3.37. Горизонтальная трубка OD вращается вокруг вертикальной оси AB с угловой скоростью $\omega(t) = 0.5t^2 + 3t + 2$ (рад/с). Внутри трубки находится маленький шарик M, имеющий массу $m = 0.4$ кг. Ось Ox направлена вдоль трубки OD. Ускорение свободного падения g принять равным 10 м/с^2. Определить проекцию на ось Ox переносной силы инерции, действующей на шарик в момент времени $t_1 = 2$ с, когда расстояние $OM = 0.3$ м, а скорость шарика относительно трубки $v_x = 2$ м/с.



a) 4 Н;
b) –4 Н;
c) 12 Н;
d) –12 Н.

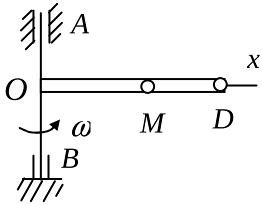
3.38. Горизонтальная трубка OD вращается вокруг вертикальной оси AB с угловой скоростью $\omega(t) = 0.5t^2 + 3t + 2$ (рад/с). Внутри трубки находится маленький шарик M, имеющий массу $m = 0.4$ кг. Ось Ox направлена вдоль трубки OD. Ускорение свободного падения g принять равным 10 м/с^2. Определить силу нормального давления шарика на стенку трубки в момент времени $t_1 = 2$ с, когда расстояние $OM = 0.3$ м, а скорость шарика относительно трубки $v_x = 2$ м/с.

a) 0.6 Н;
b) 16 Н;
c) 16.6 Н;
d) 17.1 Н.



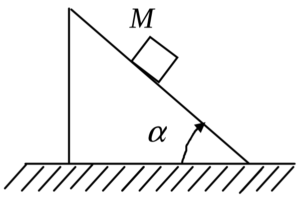
3.39. Горизонтальная трубка $OD = 0.5$ м вращается вокруг вертикальной оси AB с постоянной угловой скоростью $\omega = 2$ рад/с. Внутри трубки находится маленький шарик M, имеющий массу $m = 0.4$ кг. Ось Ox направлена вдоль трубки OD. Ускорение свободного падения g считать равным 10 м/с^2. В начальный момент времени $t_0 = 0$ координата шарика $x_0 = 0.1$ м, скорость шарика относительно трубки равна нулю. Найти относительную скорость шарика, когда он достигнет координаты $x_2 = 0.2$ м.

a) 0.1 м/с;
b) 0.12 м/с;
c) 0.2 м/с;
d) 0.35 м/с.

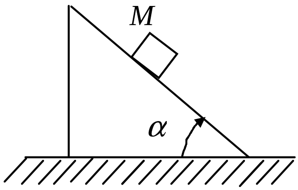


3.40. Тело M массой $m = 50$ кг положено на гладкую грань призмы. Призма движется вдоль горизонтальной плоскости вправо по закону $x(t) = 3t^2 + 8t + 2$ (м). Ускорение свободного падения g считать равным 10 м/с^2, $\alpha = 30°$. Определить величину и направление переносной силы инерции, действующей на тело M в момент времени $t_1 = 2$ с. В начальный момент времени $t_0 = 0$ тело M покоилось относительно призмы.

a) 500 Н вверх;
b) 500 Н вниз;
c) 300 Н вправо;
d) 300 Н влево.

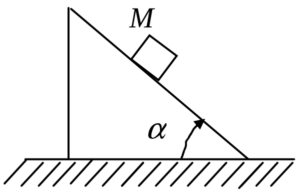


3.41. Тело M массой $m = 50$ кг положено на гладкую грань призмы. Призма движется вдоль горизонтальной плоскости вправо по закону $x(t) = t^2 + 8t + 2$ (м). Ускорение свободного падения g считать равным 10 м/с^2, $\alpha = 30°$. Определить, какое нормальное давление оказывает тело на призму в момент времени $t_1 = 2$ с. В начальный момент времени $t_0 = 0$ тело M покоилось относительно призмы.



a) 50 Н;
b) 433 Н;
c) 483 Н;
d) 500 Н.

3.42. Тело M массой $m = 50$ кг положено на гладкую грань призмы. Призма движется горизонтально вправо по закону $x(t) = 3t^2 + 8t + 2$ (м). Ускорение свободного падения g считать равным 10 м/с^2, $\alpha = 30°$. Определить величину и направление скорости тела M относительно призмы в момент времени $t_1 = 2$ с. В начальный момент времени $t_0 = 0$ тело M покоилось относительно призмы.



a) 10.4 м/с влево вверх;
b) 0.4 м/с влево вверх;
c) 10 м/с вправо вниз;
d) 20 м/с вправо вниз.

3.43. Поезд массой $m = 8 \cdot 10^4$ кг движется по экватору с востока на запад со скоростью 20 м/с. Считать угловую скорость Земли $\omega = 0.73 \cdot 10^{-4}$ рад/с, радиус Земли $R = 637 \cdot 10^4$ м. Поезд принять за материальную точку. Определить направление кориолисовой силы инерции.

a) на север;
b) на юг;
c) от центра Земли;
d) к центру Земли.

3.44. Поезд массой $m = 8 \cdot 10^4$ кг движется по экватору с востока на запад со скоростью 20 м/с. Считать угловую скорость Земли равной $\omega = 0.73 \cdot 10^{-4}$ рад/с, радиус Земли $R = 637 \cdot 10^4$ м. Поезд принять за материальную точку. Определить направление переносной силы инерции.
a) на север;
b) на юг;
c) от центра Земли;
d) к центру Земли.

4. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

Для решения многих задач динамики точки вместо непосредственного интегрирования дифференциальных уравнений оказывается более эффективным пользоваться так называемыми общими теоремами, являющимися следствиями второго закона Ньютона. Сами общие теоремы выражают собой зависимости поведения от времени некоторых динамических характеристик. В случае движения точки в качестве таких характеристик выступают количество движения (импульс), момент количества движения (момент импульса) и кинетическая энергия.

4.1. Теорема об изменении количества движения (импульса) точки. *Количеством движения (импульсом) точки* будем называть вектор $\mathbf{Q}$, равный произведению ее массы на скорость

$$\mathbf{Q} = m\mathbf{v}. \tag{4.1}$$

Вектор $\mathbf{Q}$ может быть задан своими проекциями

$$Q_x = m\mathrm{v}_\mathrm{x}, \quad Q_y = m\mathrm{v}_\mathrm{y}, \quad Q_z = m\mathrm{v}_\mathrm{z}. \tag{4.2}$$

Дифференцируя равенство (4.1) по времени, получим

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}.$$

Согласно второму закону Ньютона $m\mathbf{a} = \sum_k \mathbf{F}_k$, следовательно,

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \sum_k \mathbf{F}_k. \tag{4.3}$$

Равенство (4.3) выражает собой теорему об изменении количества движения (импульса) точки в дифференциальной форме. *Производная по времени от количества движения точки равна сумме действующих на нее сил.*

В дифференциальной форме эта теорема практически совпадает со вторым законом Ньютона. Поэтому чаще она используется в интегральной форме. Для получения ее проинтегрируем равенство (4.3) по времени в пределах от t_1 до t_2

$$\mathbf{Q}(t_2)-\mathbf{Q}(t_1)=\sum_k \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_k(t)dt=\sum_k \mathbf{S}_k. \tag{4.4}$$

Величина $\mathbf{S}_k = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_k(t)dt$ называется *импульсом силы* $\mathbf{F}_k$ за промежуток времени $t_2 - t_1$.

Мы получили, что *изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов действующих на нее сил за тот же промежуток времени.*

В проекциях на координатные оси равенство (4.4) перепишется в виде

$$Q_{2x}-Q_{1x}=\sum_k S_{kx}, Q_{2y}-Q_{1y}=\sum_k S_{ky}, Q_{2z}-Q_{1z}=\sum_k S_{kz}. \tag{4.5}$$

4.1.1. Законы сохранения количества движения (импульса). Рассмотрим теперь случаи, когда сохраняется со временем количество движения системы.

1. Пусть сумма сил, действующих на систему, равна нулю $\sum_k \mathbf{F}_k = 0$. Тогда из уравнения (4.3) следует, что $\mathbf{Q} = \mathbf{const}$. Таким образом, *если сумма сил, действующих на точку, равна нулю, то вектор количества движения сохраняется во все время движения.*

Если же за некоторый промежуток времени от t_1 до t_2 сумма импульсов внешних сил, действующих на систему, равна нулю, т.е. $\sum_k \mathbf{S}_k = \sum_k \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_k(t)dt = 0$, то, как следует из (4.4), не меняется и количество движения за этот промежуток времени $\mathbf{Q}(t_2) = \mathbf{Q}(t_1)$.

2. Пусть силы таковы, что $\sum_k F_{kx} = 0$. Тогда постоянным во все время движения остается Q_x. То есть *если сумма проекций*

всех действующих на точку сил на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция количества движения на эту ось сохраняется во времени.

Если же равна нулю проекция суммы импульсов сил за промежуток времени от t_1 до t_2, $S_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x(t)dt = 0,$ то $Q_x(t_2) = Q_x(t_1)$.

4.2. Теорема об изменении момента количества движения точки. В некоторых задачах в качестве динамической характеристики движения точки удобнее использовать не вектор количества движения $\mathbf{Q} = m\mathbf{v}$, а его момент относительно точки или оси. Эти моменты определяются аналогично моментам силы.

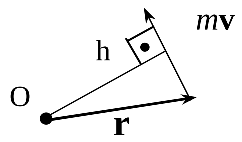


Рис. 4.1

Момент количества движения (момент импульса) материальной точки относительно некоторого центра O определим равенством (рис. 4.1)

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}. \tag{4.6}$$

То есть точно так же, как в статике, мы определяли момент силы относительно центра O, только роль силы играет вектор количества движения $m\mathbf{v}$. При этом $\mathbf{K}_0$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через вектор $m\mathbf{v}$ и точку O (в ту сторону, откуда вращение, производимое вектором $m\mathbf{v}$, видно происходящим против часовой стрелки), а его модуль равен $K_0 = m\mathrm{v}h$ (рис. 4.1).

Как всякий вектор, момент количества движения $\mathbf{K}_0$ может быть задан своими проекциями (моментами количества движения относительно координатных осей)

$$K_x = m(y\text{v}_z - z\text{v}_y),\ \ K_y = m(z\text{v}_x - x\text{v}_z),$$
$$K_z = m(x\text{v}_y - y\text{v}_x), \qquad (4.7)$$

где x, y, z – координаты точки M .

Рассмотрим теперь, как изменяется момент количества движения $\mathbf{K}_0$ точки со временем. Обратимся ко второму закону Ньютона, записанному в виде $m\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$, и умножим обе части этих уравнений векторно слева на $\mathbf{r}$. Получим, что

$$\mathbf{r}\times(m\frac{d\mathbf{v}}{dt}) = \mathbf{r}\times\mathbf{F}\,.$$

Заметим далее, что $\mathbf{r}\times(m\dfrac{d\mathbf{v}}{dt})$ можно представить в виде $\mathbf{r}\times(m\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}) = \dfrac{d}{dt}(\mathbf{r}\times m\mathbf{v}) - \mathbf{v}\times m\mathbf{v}$. Так как векторы $\mathbf{v}$ и $m\mathbf{v}$ параллельны, то $\mathbf{v}\times m\mathbf{v} = 0$, и мы получаем

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times m\mathbf{v}) = \mathbf{r}\times\mathbf{F}\,.$$

Учитывая, что $\mathbf{F} = \sum\limits_k \mathbf{F}_k$ – равнодействующая всех сил, действующих на точку, получим

$$\frac{d\mathbf{K}_0}{dt} = \sum_k \mathbf{M}_0(\mathbf{F}_k^e). \qquad (4.8)$$

Уравнение (4.8) выражает *теорему моментов: производная по времени от момента количества движения точки относительно некоторого неподвижного центра О равна сумме моментов всех сил, действующих на эту точку относительно того же центра О.*

Часто при решении задач теорема моментов применяется в проекции на какую-нибудь ось (ось z):

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_k M_z(\mathbf{F}_k). \tag{4.9}$$

4.2.1. Законы сохранения момента количества движения. Рассмотрим частные случаи, когда момент количества движения сохраняется.

1. Если сумма моментов относительно точки O всех сил, действующих на точку, равна нулю $\sum_k \mathbf{M}_0(\mathbf{F}_k) = 0$, то момент количества движения относительно этой же точки O сохраняется по величине и направлению $\mathbf{K}_0 = \mathbf{const}$.

2. Если сумма моментов всех внешних сил, действующих на точку относительно некоторой оси z, равна нулю $\sum_k M_z(\mathbf{F}_k) = 0$, то момент количества движения относительно этой оси сохраняется $K_z = \text{const}$.

Эти результаты непосредственно вытекают из уравнений (4.8) и (4.9) и выражают собой *законы сохранения момента количества движения*.

4.3. Кинетическая энергия точки. Введем еще одну динамическую характеристику движения точки – *кинетическую энергию* $T = m\mathrm{v}^2/2$.

Перейдем теперь к понятию работы сил, с помощью которой мы получим теорему об изменении кинетической энергии.

4.3.1. Работа силы. Если сила $\mathbf{F}$ постоянна, а точка M движется прямолинейно, то работа A_{12} силы $\mathbf{F}$ на этом перемещении $M_2M_1 = s$ определяется формулой

$$A_{12} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = Fs\cos\alpha, \tag{4.10}$$

где α – угол между вектором силы $\mathbf{F}$ и перемещением точки (рис. 4.2).

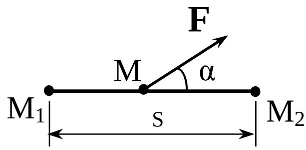


Рис. 4.2

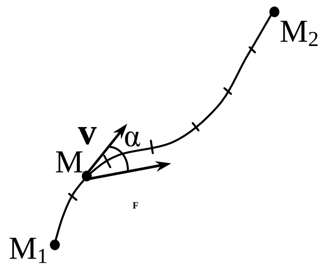


Рис. 4.3

Для произвольной силы $\mathbf{F}$ и произвольного перемещения точки работа определится интегралом

$$A_{12} = \int\limits_{M_1M_2} \mathbf{F}(s)\cdot d\mathbf{s} = \int\limits_{M_1M_2} (F_x dx + F_y dy + F_z)dz = \\ = \int\limits_{M_1M_2} F(s)\cos\alpha(s)ds = \int\limits_{M_1M_2} F_\tau(s)ds, \quad (4.11)$$

где F_τ – проекция силы $\mathbf{F}$ на направление перемещения точки M, а интегрирование ведется вдоль траектории точки M (рис. 4.3). Величина

$$\delta A = \mathbf{F}(s)\cdot d\mathbf{s} = F(s)\cos\alpha(s)ds = F_\tau(s)ds \quad (4.12)$$

называется *элементарной работой*. Формула (4.11) тогда означает, что *работа силы на перемещении равна интегралу от элементарной работы, взятому вдоль этого перемещения*.

Если сила $\mathbf{F}$ известна как функция времени, то формулу (4.11) удобно преобразовать, используя равенство $d\mathbf{s} = \mathbf{v}dt$, к виду

$$A_{12} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)\cdot \mathbf{v}(\mathrm{t})dt. \quad (4.13)$$

4.3.2. Теорема об изменении кинетической энергии. Установим теперь зависимость между кинетической энергией точки и действующими на нее силами. Для этого перепишем второй закон Ньютона в виде $m\mathbf{v}d\mathbf{v} = \mathbf{F}ds$. Учитывая, что $m\mathbf{v}d\mathbf{v} = d(m\mathrm{v}^2/2)$, получим $\mathrm{d}(\mathrm{mv}^2/2) = \delta A$, или

$$dT = \delta A\,. \qquad (4.14)$$

Равенство (4.14) выражает *теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме.* Интегрируя теперь это равенство по времени в пределах от t_1 до t_2, получим

$$T_2 - T_1 = A_{12}\,. \qquad (4.15)$$

Мы получили теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме: *изменение кинетической энергии точки равно сумме работ всех действующих на нее сил.*

4.3.3. Закон сохранения полной механической энергии. *Силу* $\mathbf{F}$ *назовем потенциальной (или консервативной), если работа этой силы на любом перемещении не зависит от формы траектории* (см. траектории 1, 2, 3 на рис. 4.4), *по которой оно совершается.*

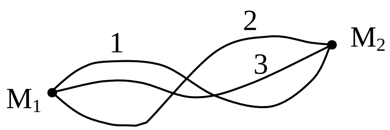


Рис. 4.4

Если же этот интеграл зависит от формы траектории, то сила, соответственно, называется *непотенциальной (неконсервативной*). Примерами потенциальных сил являются сила тяжести, сила упругости, сила ньтоновского притяжения тел. Примерами непотенциальных сил являются все силы трения.

Для потенциальной силы $\mathbf{F}$ можно ввести понятие потенциальной энергии этой силы. А именно: *потенциальная энергия силы* $\mathbf{F}$ *в точке* $M(x, y, z)$ *– это работа, которую производит эта сила при перемещении из положения* $M(x, y, z)$ *в положение* $O(0,0,0)$

$$\Pi(x,y,z) = A_{MO} = \int_{MO} \mathbf{F}(s)d\mathbf{s}. \tag{4.16}$$

Из формулы (4.16) непосредственно следует, что для потенциальной силы

$$A_{M_1M_2} = \Pi_1 - \Pi_2, \tag{4.17}$$

где Π_1 и Π_2 – соответственно, значение потенциальной энергии в точках M_1 и M_2.

Если все силы $\mathbf{F}_k$ потенциальны, то согласно теореме об изменении кинетической энергии $T_2 - T_1 = \sum_k A_{12} = = \sum_k (\Pi_{1k} - \Pi_{2k}) = \Pi_1 - \Pi_2$ и, следовательно, $T_2 + \Pi_2 = T_1 + \Pi_1$.

Таким образом, если все силы потенциальны, то *полная механическая энергия сохраняется*

$$T + \Pi = \text{const}.$$

4.4. Момент инерции точки относительно оси. Моментом инерции точки относительно оси называется произведение массы точки на квадрат расстояния до этой оси.

4.5. Вопросы для самоконтроля

1. Что называется количеством движения (импульсом) точки? Это вектор или скаляр?
2. Что такое импульс силы?
3. Если импульсы сил одинаковы, то сами силы одинаковы?
4. Сформулируйте теорему об изменении импульса точки.
5. В каком случае импульс точки сохраняется? А в каком случае сохраняется проекция импульса на данную ось?
6. Как определяется момент импульса (количества движения) относительно данной точки? А относительно данной оси?
7. Сформулируйте теорему моментов (теорему об изменении момента количества движения).

8. В каком случае момент импульса относительно данной точки сохраняется? А в каком случае сохраняется момент импульса относительно данной оси?
9. Как определяется кинетическая энергия точки? Это вектор или скаляр?
10. Что такое работа силы на перемещении? В каких случаях она равняется нулю?
11. Как связаны кинетическая энергия и работа сил?
12. Какие силы называют консервативными (потенциальными)?
13. Как определяется потенциальная энергия?
14. Что называют полной механической энергией?
15. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии для случая, когда все силы консервативны.

Тесты по теме «Общие теоремы динамики точки»

4.1. Чему равна производная по времени от импульса материальной точки?
   a) Сумме работ всех сил, действующих на точку;
   b) постоянной величине;
   c) сумме сил, действующих на точку;
   d) сумме моментов сил, приложенных к точке.

4.2. Импульс материальной точки не меняется, если …
   a) сумма приложенных сил равна нулю;
   b) сумма работ внешних сил равна нулю;
   c) никаких если. Не меняется никогда;
   d) сумма моментов приложенных сил равна нулю.

4.3. Изменение кинетической энергии точки равно …
   a) сумме работ всех сил, приложенных к точке;
   b) изменению потенциальной энергии;
   c) сумме работ реакций связей;
   d) изменению потенциальной энергии с обратным знаком.

4.4. Кинетическая энергия тела массой $m = 4$ кг, летящего со скоростью $v = 2$ м/с на высоте $h = 8$ м, равна …

a) 313.6 Дж;
b) 128 Дж;
c) 64 Дж;
d) 16 Дж.

4.5. Какой скоростью будет обладать тело, соскальзывающее без трения с наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30^{\circ}$, когда пройдет расстояние $l = 10$ м? В начальный момент времени тело было неподвижно.
a) 20 м/с;
b) 16.4 м/с;
c) 10 м/с;
d) 14.1 м/с.

4.6. Ящик массой $m = 2$ кг движется по шероховатой горизонтальной плоскости под действием силы $F = 20$ Н, направленной под углом $\alpha = 30^{\circ}$ к вертикали. Какую скорость будет иметь ящик, когда пройдет расстояние $l = 10$ м? Коэффициент трения $\mu = 0.1$, в начале пути скорость ящика была равна нулю.
a) 14.5 м/с;
b) 26.1 м/с;
c) 9.9 м/с;
d) 4.7 м/с.

4.7. Работа, совершаемая силой, отрицательна, если …
a) проекции этой силы на оси координат отрицательны;
b) угол между направлением перемещения и силой тупой;
c) ускорение точки противоположно направлению силы;
d) скалярное произведение силы и вектора ускорения отрицательное.

4.8. На какую максимальную высоту поднимется материальная точка, скользящая вверх по наклонной плоскости, если ее начальная скорость равна $v_0 = 10$ м/с.

a) 5 м;
b) чтобы ответить на этот вопрос, нужно знать ее массу;
c) чтобы ответить на этот вопрос, нужно знать угол наклона плоскости;
d) чтобы ответить на этот вопрос, нужно знать ее массу и угол наклона плоскости.

4.9. Материальной точке массой m = 3 кг сообщили начальную скорость равную v = 2 м/с вдоль горизонтальной плоскости, на которой она находится. Какое расстояние она пройдет до полной остановки, если коэффициент трения μ = 0.1?
a) 1 м;
b) м;
c) м;
d) 6 м.

4.10. Какую работу надо совершить, чтобы остановить груз массой m = 2 кг, скользящий по горизонтальной плоскости без трения, если в начальный момент времени его скорость была равна v = 2 м/с?
a) Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо знать путь, пройденный до остановки;
b) 4 Дж;
c) чтобы ответить на этот вопрос, необходимо знать значение силы;
d) чтобы ответить на этот вопрос, необходимо знать значение и направление силы.

4.11. Телу массой m = 2 кг сообщили начальную скорость v = 3 м/с, направленную вверх по наклонной плоскости. В результате тело поднимается вверх по наклонной плоскости, а затем соскальзывает обратно вниз под действием силы тяжести. Какую работу совершит сила трения, действующая на тело, к тому моменту как оно вернется в точку старта? Коэффициент трения $\mu = 0.5$, угол наклона плоскости к горизонтали $\alpha = 45^o$.

a) 0 Дж;
b) 6 Дж;
c) 1.5 Дж;
d) 4 Дж.

4.12. Телу массой $m = 2$ кг сообщили начальную скорость $v = 2$ м/с, направленную вверх по наклонной плоскости. В результате тело поднимается вверх по наклонной плоскости, а затем соскальзывает обратно вниз под действием силы тяжести. Какую работу совершит сила тяжести, действующая на тело, к тому моменту как оно вернется в точку старта? Коэффициент трения $\mu = 0.1$, угол наклона плоскости к горизонтали $\alpha = 30^o$.

a) 0 Дж;
b) 3 Дж;
c) 1.5 Дж;
d) 4 Дж.

4.13. Кинетическая энергия точки не изменяется, если …

a) и только если равнодействующая всех сил равна нулю;
b) точка движется по замкнутой траектории;
c) равнодействующая сил, приложенных к материальной точке, перпендикулярна скорости;
d) точка движется по замкнутой траектории, а все приложенные силы потенциальны.

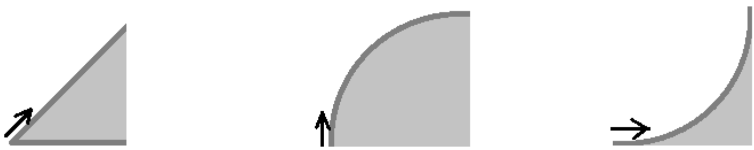
4.14. Маятник массой m закреплен на невесомом стержне длины l. Какую минимальную скорость необходимо сообщить маятнику в нижней точке, чтобы он совершил полный оборот по окружности вокруг своей оси?

a) $v = 2(gl)^{0.5}$;
b) $v = (2gl)^{0.5}$;
c) $v = (5gl)^{0.5}$;
d) $v = (3gl)^{0.5}$.

4.15. Маятник закреплен на невесомой нити длины l. Какую минимальную скорость необходимо сообщить маятнику в нижней точке, чтобы он совершил полный оборот по окружности вокруг своей оси?

a) $v = 2(gl)^{0.5}$;
b) $v = (2gl)^{0.5}$;
c) $v = (5gl)^{0.5}$;
d) $v = (3gl)^{0.5}$.

4.16. Материальная точка может скользить без отрыва по гладким поверхностям, профили которых изображены на рисунке. В каком случае она поднимется на наибольшую высоту, если ей сообщить небольшую начальную скорость, недостаточную для достижения наивысшей точки профиля?



a) В первом;
b) во втором;
c) в третьем;
d) во всех случаях поднимется на одинаковую высоту.

4.17. Материальная точка скользит по горизонтальной шероховатой поверхности. Какую работу совершит сила сопротивления, если кинетическая энергия точки уменьшилась с 200 Дж до 100 Дж?

a) 100 Дж;
b) –100 Дж;
c) 200 Дж;
d) –200 Дж.

4.18. Импульс материальной точки массой m, движущейся со скоростью v, равен …
a) $mv^2/2$;
b) $mv/2$;
c) mv;
d) mv^2.

4.19. Кинетическая энергия материальной точки массой m, движущейся со скоростью v, равна …
a) $mv^2/2$;
b) $mv/2$;
c) mv;
d) mv^2.

4.20. Две точки разной массы обладают одинаковым импульсом. Что можно сказать об их кинетической энергии?
a) Кинетическая энергия обоих тел одинакова;
b) кинетическая энергия тела с большей массой выше;
c) кинетическая энергия тела с меньшей массой выше;
d) ничего нельзя сказать про кинетическую энергию.

4.21. Момент импульса точки относительно оси это …
a) произведение момента инерции относительно этой оси на угловую скорость вращения;
b) произведение момента инерции относительно этой оси и вектора скорости;
c) произведение массы точки на угловую скорость;
d) произведение массы точки и вектора скорости.

4.22. Момент импульса точки относительно оси не изменяется, если и только если …
a) сумма всех действующих на точку сил равна нулю;
b) сумма работ всех действующих на точку сил равна нулю;
c) сумма моментов всех действующих на точку сил относительно этой оси равна нулю;
d) кинетическая энергия точки остается неизменной.

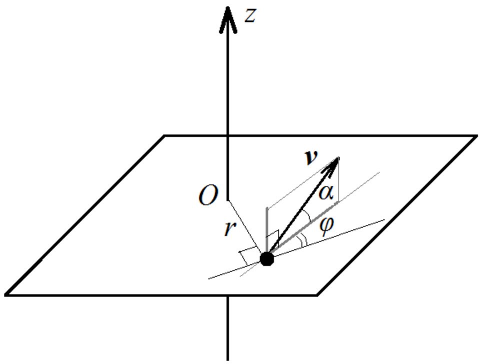
4.23. Момент импульса точки относительно оси не будет изменяться, если …
a) не изменяется угловая скорость точки;
b) не изменяется расстояние до оси вращения;
c) тангенциальное ускорение точки равно нулю;
d) точка движется параллельно оси.

4.24. Момент инерции точки относительно оси – это …
a) произведение массы на расстояние до оси;
b) произведение массы на квадрат расстояния до оси;
c) произведение массы на угловую скорость относительно оси;
d) произведение массы на квадрат угловой скорости относительно оси.

4.25. Материальная точка вращается относительно неподвижной оси. Как будет меняться ее угловая скорость при увеличении расстояния до оси вращения, если сумма моментов всех действующих на нее сил относительно оси равна нулю?
a) Возрастать;
b) убывать;
c) не изменится;
d) чтобы ответить на этот вопрос, нужно еще точно знать направление сил.

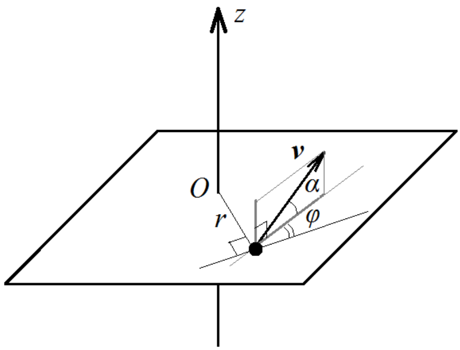
4.26. Материальная точка вращается относительно неподвижной оси. Одновременно с этим расстояние до оси вращения сокращается. Как при этом изменяется ее момент импульса?
a) Возрастает;
b) убывает;
c) не изменяется;
d) приведенных данных недостаточно, чтобы ответить на этот вопрос.

4.27. Материальная точка массы m движется относительно неподвижной оси Oz со скоростью v, как показано на рисунке. Чему равен ее момент импульса относительно оси?



a) $mr^2 v \cos\alpha$;
b) $mr^2 v \cos\alpha \sin\varphi$;
c) $mr^2 v$;
d) $mr^2 v \cos\alpha \cos\varphi$.

4.28. Материальная точка массы m движется относительно неподвижной оси Oz со скоростью v, как показано на рисунке. Чему равен ее момент инерции относительно оси?



a) $mr^2 \cos\alpha$;
b) $mr^2 \cos\alpha \sin\varphi$;
c) mr^2;
d) $mr^2 \cos\alpha \cos\varphi$.

4.29. Работа какой из перечисленных сил при перемещении точки по замкнутой траектории не равна нулю?

a) Силы трения;
b) силы тяжести;
c) силы нормальной реакции поверхности;
d) силы упругости.

4.30. Прикрепленный к пружине жесткостью k груз массы m совершает колебательное движение по гладкой горизонтальной плоскости. Чему равна максимальная скорость груза, если амплитуда колебаний l?

a) $l(k/m)^{0.5}/2$;
b) $l(k/m)^{0.5}$;
c) $(l^2\,k/4m + mgl)^{0.5}$;
d) $(l^2\,k/m + 2mgl)^{0.5}$.

4.31. Если кинетическая энергия материальной точки не изменяется, значит …

a) на материальную точку не действуют силы;
b) сумма действующих на точку сил равна нулю;
c) сумма работ всех сил, действующих на материальную точку, равна нулю;
d) работа каждой из сил, действующих на материальную точку, равна нулю.

4.32. Какую скорость будет иметь точка массы m у поверхности земли, если она падает без начальной скорости с высоты h (силой сопротивления воздуха пренебречь)?

a) $v = (gh/2)^{0.5}$;
b) $v = 2(gh)^{0.5}$;
c) $v = (gh)^{0.5}$;
d) $v = (2gh)^{0.5}$.

4.33. Точка массы m движется по гладкой горизонтальной плоскости со скоростью v и налетает на пружину жесткостью k. На какую величину сожмется пружина?

a) $v(m/k)^{0.5}$;
b) $v(2m/k)^{0.5}$;
c) $2v(m/k)^{0.5}$;
d) $v(m/2k)^{0.5}$.

4.34. Точка массы m имела скорость v. В течение какого времени должна действовать сила величины F, направленная в противоположную скорости сторону, чтобы импульс точки стал равен нулю?
a) $t = mF/v$;
b) $t = vF/m$;
c) $t = F/mv$;
d) $t = mv/F$.

4.35. Точка массы m имела скорость v. Какую постоянную силу F, направленную в противоположную сторону, нужно приложить, чтобы под ее действием в течение времени t кинетическая энергия выросла в два раза?
a) $F = (1 + 2^{0.5})mv/t$;
b) $F = (2^{0.5} – 1)mv/t$;
c) $F = mv/t$;
d) $F = 3mv/t$.

4.36. Материальная точка массы m движется вдоль оси Ox со скоростью v. В каком направлении должна действовать сила величины F, чтобы за наименьшее время развернуть точку и направить ее в противоположном направлении с той же по модулю скоростью?
a) Противоположно изначальному направлению движения точки;
b) переменное направление силы в плоскости XY должно быть перпендикулярно вектору скорости в каждый момент времени;

c) в перечисленных выше случаях время разворота будет одинаковым;
d) постоянное направление силы в плоскости *XY* должно быть перпендикулярно вектору скорости в начальный момент времени.

4.37. Материальная точка массы m имеет скорость v. Какую минимальную по модулю работу нужно совершить, чтобы изменить направление скорости на противоположное?
a) $mv^2/2$;
b) mv^2;
c) mv^2;
d) 0.

4.38. Два спутника вращаются по круговым орбитам вокруг земли. Известно, что оба обладают одинаковой кинетической энергией, но высота орбит у них разная. Считать, что высоты орбит не сказываются на величине ускорения спутников. У какого спутника момент импульса относительно центра земли больше?
a) Того, который находится на более высокой орбите;
b) того, который находится на более низкой орбите;
c) их моменты импульса одинаковы;
d) для однозначного ответа на вопрос нужно знать, как соотносятся их массы.

4.39. Две материальных точки вращаются по кругу вокруг оси. Известно, что обе обладают одинаковой кинетической энергией, но расстояние до оси у них разное. Момент импульса какой материальной точки больше?
a) Той, что находится дальше от оси;
b) той, что находится ближе к оси;
c) их моменты импульса одинаковы;
d) для однозначного ответа на вопрос нужно знать, как соотносятся их массы.

Учебное издание

Краснолуцкий Сергей Леонидович
Леманов Вадим Владимирович
Подрябинкин Евгений Викторович
Юдин Владимир Алексеевич

СБОРНИК ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ
Динамика точки

Учебное пособие

ISBN 978-5-7795-0748-6

Темплан 2015 г.

Редактор Н.Б. Литвинова

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 54.НС.05.953.П.006252.06.06 от 26.06.2006 г.
Подписано к печати 22.10.2015. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$ д.л.
Гарнитура Таймс. Бумага офсетная. Ризография.
Объем 5,22 уч.-изд.л.; 5,75 п.л. Тираж 300 экз. Заказ №

Новосибирский государственный архитектурно-строительный
университет (Сибстрин)
630008, Новосибирск, ул. Ленинградская, 113

Отпечатано мастерской оперативной полиграфии
НГАСУ (Сибстрин)