

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (СИБСТРИН)

Кафедра теоретической механики

ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Методические указания и индивидуальные задания
для студентов направления 270800.62 «Строительство»
всех форм обучения

НОВОСИБИРСК 2013

Методические указания и индивидуальные задания разработаны д-ром физ.-мат. наук, профессором С.М. Аульченко, канд. физ.-мат. наук Д.А. Ивановым, канд. физ.-мат. наук, доцентом А.Я. Ройтманом

*Ответственный редактор – д-р физ.-мат. наук, профессор,
завкафедрой теоретической механики В.Я. Рудяк*

Утверждены методической комиссией
строительного факультета
3 июня 2013 г.

Рецензенты:

- В.А. Юдин, д-р физ.-мат. наук, профессор
(НГАСУ (Сибстрин));
- В.В. Леманов, канд. техн. наук, ст. науч. сотр.
(Институт теплофизики СО РАН)

© Новосибирский государственный
архитектурно-строительный
университет (Сибстрин), 2013

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	2
1. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА.....	3
1.1. Уравнения плоского движения тела	3
1.2. Закон движения и траектории отдельных точек тела	4
1.3. Скорости точек твердого тела	4
1.4. Мгновенный центр скоростей (МЦС)	5
1.5. Ускорения точек твердого тела.....	7
1.6. План скоростей	9
1.7. План ускорений	10
Примеры	13
2. ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА	22
2.1. Варианты задания	22
2.2. Пример решения индивидуального задания	28
2.3. Дополнительное задание.....	33
3. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ	39
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	40

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания посвящены рассмотрению кинематики плоского движения твердого тела и призваны облегчить выполнение студентами кинематического расчета плоского механизма. Данная тема является одной из наиболее важных в разделе «Кинематика» курса теоретической механики.

При разработке методического указания авторы опирались на новые образовательные стандарты для бакалавров, теоретический материал, изложенный в рекомендуемых студентам учебниках, собственный опыт чтения лекций и проведения практических занятий по теоретической механике, ряд методических указаний и индивидуальных заданий, использовавшихся ранее, в частности, «Сборник индивидуальных заданий по теоретической механике. Кинематика», изданный НГАСУ (Сибстрин) в 2007 г. В настоящей постановке включенные в индивидуальное задание задачи в большей степени соответствуют строительным специальностям.

Целью методического указания является закрепление основных понятий кинематики плоского движения твердого тела и обучение студентов навыкам определения характеристик движения тела (угловых скоростей и угловых ускорений), скоростей и ускорений отдельных точек тела при его плоском движении.

Разработаны новые варианты схем плоских механизмов. При их выборе авторы стремились к тому, чтобы решение задачи не было перегружено графическими построениями и измерениями, а все расчеты можно было выполнить аналитически.

Все принципиальные моменты выполнения индивидуальных заданий подробно изложены в приведенном примере. Прежде чем приступить к выполнению задания, студенту следует ознакомиться с соответствующим теоретическим материалом и разобрать примеры решения задач, приведенные в методическом указании.

1. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

1.1. Уравнения плоского движения тела. Движение твердого тела называется *плоским (плоскопараллельным)*, если все точки тела движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости P (рис. 1.1). Все точки тела, лежащие на прямой, перпендикулярной плоскости P (например, точки A и

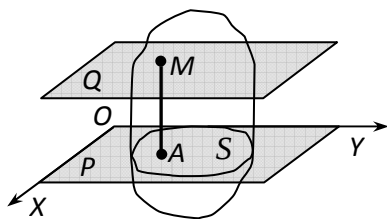


Рис. 1.1

M на рис. 1.1), движутся одинаково. Отсюда следует, что для описания движения всего тела достаточно рассмотреть движение плоской фигуры (сечения S тела) в ее плоскости. Другие сечения, параллельные сечению S , будут двигаться таким же образом.

Для описания движения сечения S относительно системы координат OXY , жестко связанной с плоскостью P , введем вспомогательную систему координат с началом в некоторой точке A (*полюсе*) тела и осями AX_1 , AY_1 , параллельными соответствующим осям неподвижной системы координат OXY (рис. 1.2). Система координат AX_1Y_1 будет тогда двигаться поступательно (со скоростью точки A) относительно системы OXY . Движение же сечения S относительно системы координат AX_1Y_1 – это вращательное движение. Таким образом, *плоское движение твердого тела* *слагается из поступательного движения вместе с полюсом A и вращательного вокруг этого полюса*. Оно будет однозначно определено заданием координат точки A и углом φ поворота какого-нибудь отрезка AB , жестко связанного с сечением S .

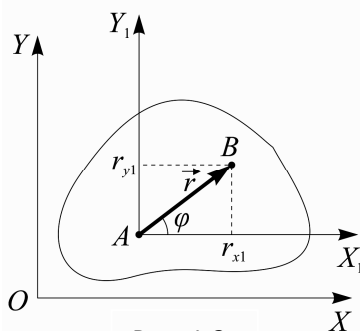


Рис. 1.2

$$x_A = x_A(t), \quad y_A = y_A(t), \quad \varphi = \varphi(t). \quad (1.1)$$

Уравнения (1.1) задают закон плоского движения твердого тела.

При этом за полюс может быть взята любая точка тела. Поэтому поступательная часть движения (два первых уравнения (1.1)), зависит от выбора полюса, вращательная же часть движения (третье уравнение) – от выбора полюса не зависит.

1.2. Закон движения и траектории отдельных точек тела. Пусть точка M расположена на расстоянии $\rho = AM$ от полюса A и $\angle MAB = \alpha$ (рис. 1.3).

Тогда

$$\vec{r}_M(t) = \vec{r}_A(t) + \vec{\rho}(t). \quad (1.2)$$

Проецируя это векторное равенство на оси OX и OY , получим закон движения точки M в координатной форме

$$x(t) = x_A(t) + \rho \cos(\alpha + \varphi(t)), \quad y(t) = y_A(t) + \rho \sin(\alpha + \varphi(t)). \quad (1.3)$$

Уравнения (1.3) одновременно являются и параметрическими уравнениями траектории точки M .

1.3. Скорости точек твердого тела. Скорость произвольной точки M получается дифференцированием по времени равенства (1.2)

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA}, \quad (1.4)$$

где $\vec{v}_A$ – скорость полюса A , а

$\vec{v}_{MA}$ – скорость вращательного движения точки M вокруг полюса A (скорость вращательного движения тела в системе координат AX_1Y_1). Вектор $\vec{v}_{MA}$ направлен перпендикулярно отрезку AM в сторону вращения, а его модуль $|\vec{v}_{MA}| = |\omega| \cdot AM$.

Таким образом, скорость произвольной точки твердого тела, совершающего плоское движение, геометрически складывается из скорости какой-нибудь другой точки A , принятой за полюс, и скорости этой точки в ее вращении вместе с телом вокруг полюса.

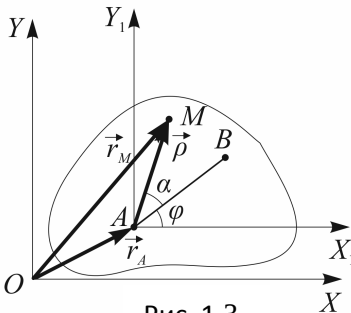


Рис. 1.3

Соотношение (1.4) дает два следствия:

Следствие 1. *Проекции скоростей двух точек тела на прямую, их соединяющую, равны (рис. 1.4).*

Следствие 2. *Если точки A , B и C сечения S лежат на одной прямой, то концы векторов скоростей этих точек, $\vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{v}_C$, тоже лежат на одной прямой, причем $ab/bc = AB/BC$ (рис. 1.5).*

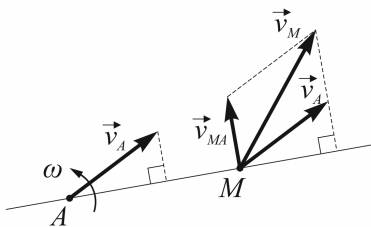


Рис. 1.4

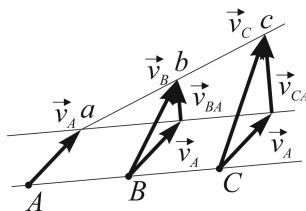


Рис. 1.5

1.4. Мгновенный центр скоростей (МЦС). *Мгновенным центром скоростей плоской фигуры называется точка, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Если угловая скорость тела в данный момент времени отлична от нуля, то МЦС существует и единственен. Для его определения необходимо знать направления скоростей каких-либо двух точек плоской фигуры. Если эти скорости не параллельны, то МЦС (точка P на рис. 1.6) находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из этих точек к их скоростям. Если же эти скорости параллельны, то для определения МЦС необходимо знать также и их модули. В этом случае способы построения МЦС показаны на рис. 1.7а, б. В случае, показанном на рис. 1.7в, движение плоской фигуры в данный момент времени является мгновенно поступательным, МЦС не существует (находится в бесконечности) и $\vec{v}_A = \vec{v}_B$.*

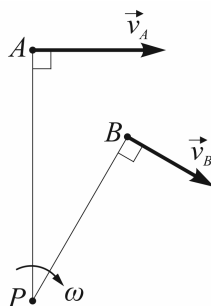


Рис. 1.6

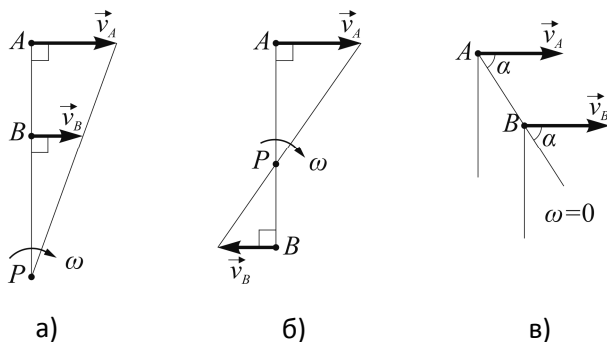


Рис. 1.7

Если в момент времени t , когда точка P является МЦС, взять ее за полюс, то скорость любой точки плоской фигуры будет равна ее скорости вращения вокруг МЦС

$$\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{v}_{AP} = \vec{v}_{AP} = \vec{\omega} \times \vec{AP}. \quad (1.5)$$

Аналогично, для любой другой точки фигуры $\vec{v}_B = \vec{v}_{BP} = \vec{\omega} \times \vec{BP}$. Но поскольку $v_A = \omega \cdot AP$, $v_B = \omega \cdot BP$, то

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{AP}{BP}, \quad \omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \dots \quad (1.6)$$

Поэтому, зная положение МЦС данной плоской фигуры и скорость какой-либо ее точки, можно определить скорость любой другой точки фигуры и ее угловую скорость.

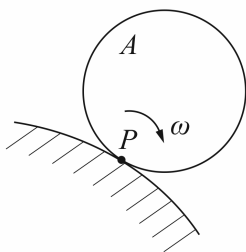


Рис. 1.8

Рассмотрим еще один случай определения МЦС. Пусть цилиндрическое тело A катится без скольжения по неподвижной поверхности L . Так как скольжения отсутствует, то точка соприкосновения тела с неподвижной поверхностью имеет скорость, равную нулю, и, следовательно, является МЦС (рис. 1.8).

В случае, если механизм состоит из нескольких твердых тел (звеньев), у каждого из тел (звеньев) свой МЦС. Если отрезки AP , BP и т.д. можно вычислить с помощью тригонометрических формул, то расчет скоростей можно провести аналитически с любой наперед заданной точностью. Если нет, то расчет производится с помощью измерений длин отрезков и его точность ограничена точностью построения чертежей.

1.5. Ускорения точек твердого тела. В соответствии с представлением о разложении плоского движения тела на поступательное движение вместе с полюсом A и вращательное движение тела вокруг оси, проходящей через полюс, ускорение любой точки B тела (плоской фигуры) представляется в виде суммы

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}, \quad (1.7)$$

где $\vec{a}_A$ – ускорение точки A ; $\vec{a}_{BA}$ – ускорение точки B во вращательном движении всей фигуры вокруг полюса (точки A).

Ускорение $\vec{a}_{BA}$ можно разложить на две составляющие: нормальное вращательное ускорение $\vec{a}_{BA}^n$, направленное к полюсу A , (рис. 1.9), и касательное вращательное ускорение $\vec{a}_{BA}^\tau$, направленное перпендикулярно к BA , в сторону дуговой стрелки углового ускорения ε тела.

$$\vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau. \quad (1.8)$$

Причем модули этих векторов равны $a_{BA}^\tau = |\varepsilon| \cdot AB$, $a_{BA}^n = \omega^2 \cdot AB$,

$a_{BA} = \sqrt{(a_{BA}^n)^2 + (a_{BA}^\tau)^2} = AB\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$, а тангенс угла наклона,

образуемый векторами $\vec{a}_{BA}^n$ и $\vec{a}_{BA}^\tau$, равен $\operatorname{tg} \mu = \frac{a_{BA}^\tau}{a_{BA}^n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$. Соот-

ношение (1.8) теперь можно записать так:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau. \quad (1.9)$$

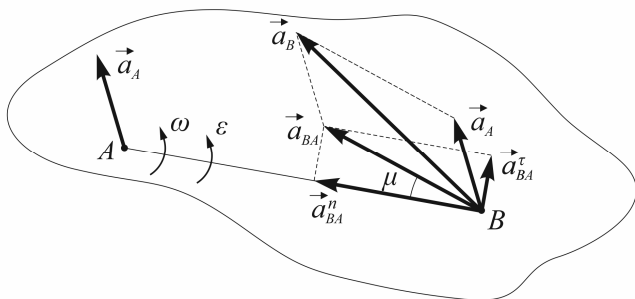


Рис. 1.9

Для ускорений, как и для скоростей, можно сформулировать два следствия:

Следствие 1. Проекции ускорений двух точек тела на прямую, их соединяющую, связаны соотношением $a_{Bx} \leq a_{Ax}$ (рис. 1.10).

Следствие 2. Если точки A , B и C лежат на одной прямой, то и концы векторов ускорений этих точек, $\vec{a}_A$, $\vec{a}_B$ и $\vec{a}_C$ лежат на одной прямой, причем $\frac{ab}{bc} = \frac{AB}{BC}$ (рис. 1.11).

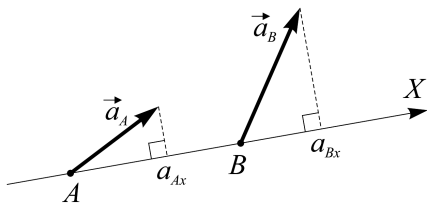


Рис. 1.10

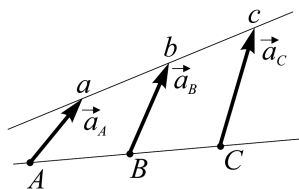


Рис. 1.11

Отметим, что существуют и другие способы определения кинематических характеристик плоского механизма. Речь идет о графических методах. И хотя при выполнении данного индивидуального задания не предусмотрено их использование, тем не менее, покажем порядок применения этих простых методов.

1.6. План скоростей. Полностью графическим является способ определения скоростей точек, называемый *планом скоростей* – построение диаграммы, на которой из некоторого центра в заданном масштабе отложены векторы скоростей точек тела. Для этого необходимо, чтобы скорость одной точки плоской фигуры была задана (и модуль, и направление), и известно направление скорости другой точки. Рассмотрим, например, плоскую фигуру S (рис. 1.12а). Пусть известны направление и величина скорости точки A и направление скорости точки B (вдоль BB'). Необходимо найти скорости точек B , C и D .

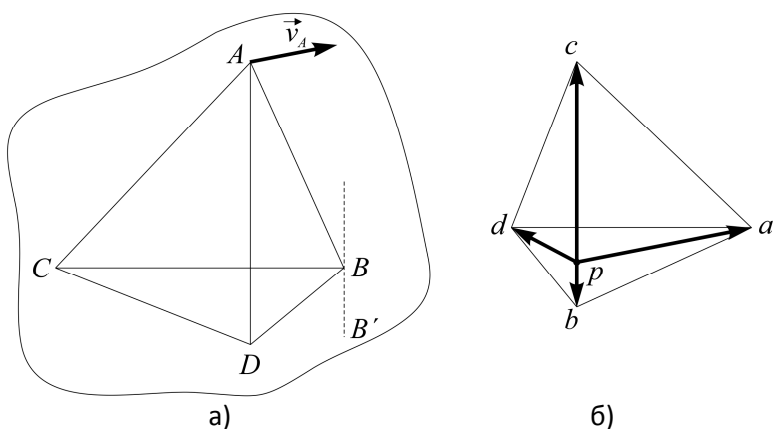


Рис. 1.12

Возьмем некоторую точку p за центр диаграммы и из нее в выбранном масштабе отложим вектор $\vec{pa} = \vec{v}_A$. Далее план скоростей продолжим строить для точки B . Из полюса p проведем линию pb вдоль направления скорости $\vec{v}_B$. В силу равенства (1.4) векторы $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ и $\vec{v}_{BA}$ образуют замкнутую фигуру – треугольник. Но, так как $\vec{v}_{BA} \perp AB$, то, опустив из точки a прямую, перпендикулярную AB , на ее пересечении с линией pb и полу-

чим точку b такую, что $\vec{pb} = \vec{v}_B$ (в заданном масштабе), а $\vec{ab} = \vec{v}_{BA}$.

Найдем теперь скорость точки C . Согласно (1.4) $\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{CA}$ и $\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB}$. Откуда $\vec{v}_A + \vec{v}_{CA} = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB}$, причем $\vec{v}_{CA} \perp CA$, $\vec{v}_{CB} \perp CB$. В соответствии с этим проведем из точки a (рис. 1.12б) прямую, перпендикулярную CA , а из точки b – прямую, перпендикулярную CB . Тогда точка c должна лежать одновременно на обоих этих перпендикулярах и, следовательно, лежит на их пересечении, а скорость $\vec{v}_C = \vec{pc}$.

Также находится и скорость $\vec{v}_D$, $\vec{v}_D = \vec{v}_C + \vec{v}_{DC}$, $\vec{v}_D = \vec{v}_A + \vec{v}_{DA}$. А значит $\vec{v}_C + \vec{v}_{DC} = \vec{v}_A + \vec{v}_{DA}$ и $\vec{v}_{DA} \perp AD$, $\vec{v}_{DC} \perp CD$. Проводя соответственно из точек c и a линии $cd \perp CD$ и $ad \perp AD$, на их пересечении получим точку d . В результате $\vec{v}_D = \vec{pd}$.

По плану скоростей можно определить угловую скорость рассматриваемой плоской фигуры. Действительно, так как $\vec{ab} = \vec{v}_{BA}$, $\vec{bc} = \vec{v}_{CB}$ и т.д., то

$$\omega = \frac{v_{BA}}{AB} = \frac{ab}{AB} = \frac{bc}{BC} = \frac{dc}{DC} = \frac{bd}{BD}. \quad (1.10)$$

План скоростей плоского механизма строится как совокупность планов скоростей отдельных его звеньев, причем все векторы скоростей строятся из общего центра.

1.7. План ускорений. По аналогии с планом скоростей, можно, используя равенство (1.9) и его следствия, определять ускорения графически с помощью *плана ускорений*. В качестве иллюстрации определим графически ускорения точек A , B , M и C для механизма, изображенного на рис. 1.13а, если угловая скорость кривошипа $\omega = \text{const}$ и $AM = MB$.

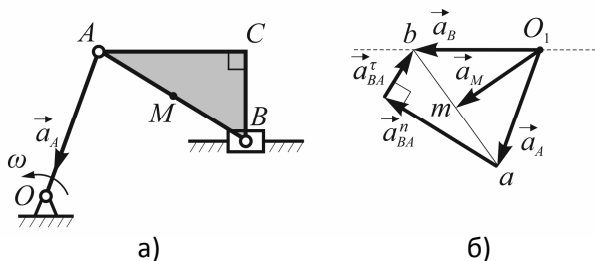


Рис. 1.13

Для построения плана ускорений сначала определим угловую скорость ω_{AB} звена ACB . Это можно сделать либо, построив план скоростей, либо с помощью МЦС. Далее, рассматривая точку A как точку стержня OA , построим ускорение $\vec{a}_A$ (рис. 1.13б). Так как стержень OA вращается равномерно, то его угловое ускорение $\varepsilon = \dot{\omega} = 0$ и $a_A^\tau = \varepsilon \cdot O_1A = 0$. Тогда $\vec{a}_A = \vec{a}_A^n$ и $a_A = \omega^2 \cdot O_1A$.

Построим теперь ускорение точки B , используя формулу (1.9). Нам известно направление ускорения этой точки $\vec{a}_B$ (эта точка движется вдоль горизонтальной направляющей). Кроме того, вектор $\vec{a}_{BA}^n$ направлен вдоль вектора $\vec{BA}$ и равен по модулю $a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot BA$. Вектор же $\vec{a}_{BA}^\tau$ перпендикулярен $\vec{BA}$. Этого достаточно для графического определения ускорения $\vec{a}_B$. Соответствующее построение приведено на рис. 1.13б.

Чтобы построить вектор $\vec{a}_M$, проще всего воспользоваться следствием 2 из п. 1.5. Так как $AM = MB$, то конец m вектора $\vec{a}_M$ лежит на середине отрезка ab (см. рис. 1.13б).

Вектор $\vec{a}_C$ можно построить так. Сначала, воспользовавшись соотношением $a_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB$, следует определить угловое ускорение ε_{AB} . Затем измерить длину вектора a_{BA}^n на рис. 1.13б и воспользоваться следующими формулами:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA}^n + \vec{a}_{CA}^\tau, \quad \vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^\tau. \quad (1.11)$$

Так как правые части этих формул уже полностью известны, то требуется только графически сложить три известных вектора.

Можно построить вектор $\vec{a}_C$ и без вычисления углового ускорения ε_{AB} . Для этого нужно графически строить вектор $\vec{a}_C$ «с двух сторон», исходя из формул (1.11).

В тех случаях, когда известны необходимые углы, ускорение можно определить аналитически, проецируя соответствующие векторные уравнения на оси координат, направление которых выбрано подходящим образом. Например, если для механизма на рис. 1.13 известны угол OAB и угол между отрезком AB и направлением вектора ускорения в точке B , то $\vec{a}_B$ можно найти, спроецировав уравнение (1.9) на ось, направленную вдоль отрезка AB . В полученном при этом уравнении не будет неизвестной величины $\vec{a}_{BA}^\tau$, так как этот вектор перпендикулярен к AB .

Именно таким аналитическим методом будут определяться ускорения точек плоского механизма при решении задач, включенных в настоящие индивидуальные задания.

ПРИМЕРЫ

Пример 1

Найти построением мгновенный центр скоростей P стержня AB в следующих случаях (рис. 1.14):

- а) стержень AB перемещается своими концами по сторонам угла ACB ;
- б) стержень AB является шатуном кривошипно-шатунного механизма;
- в) стержень AB является шатуном кривошипно-шатунного механизма, проходящим через качающуюся муфту B ;
- г) стержень AB является звеном шарнирного четырехзвенника $OABC$;
- д) стержень AB движется в плоскости так, что один конец его скользит по поверхности сферы, а сам стержень проходит через одну и ту же точку C .

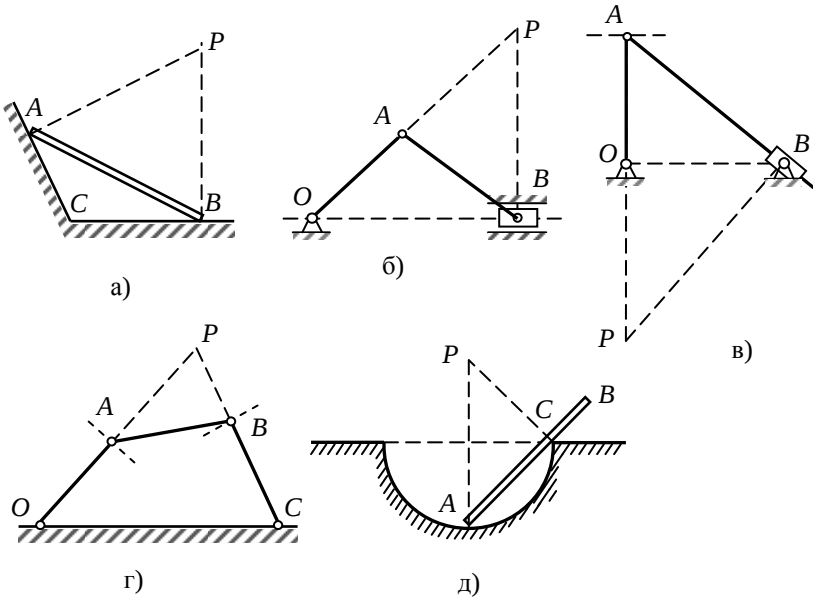


Рис. 1.14

Пояснения

- а) МЦС находится на пересечении перпендикуляров к прямым AC и CB , восстановленных из точек A и B (скорости этих точек направлены по сторонам AC и CB).
- б) МЦС находим на пересечении продолжения кривошипа OA (скорость точки A перпендикулярна OA) и перпендикуляра в точке B к горизонтальной направляющей.
- в) Скорость точки A перпендикулярна OA , скорость точки B направлена по AB .
- г) МЦС находится на пересечении продолжений кривошипов OA и CB (скорости точек A и B перпендикулярны соответственно OA и CB).
- д) Скорость точки A направлена по касательной к окружности, скорость точки C направлена по самому стержню.

Пример 2

Груз Q поднимается с помощью двухступенчатого барабана 1, угловая скорость которого $\omega_1 = 1 \text{ с}^{-1}$, $R_1 = 3r_1 = 15 \text{ см}$ (рис. 1.15). Ветви нити AE и BD вертикальны ($AE \parallel BD$) и при своем движении по блоку не проскальзывают. Найти скорость v_C оси подвижного блока 2 и его угловую скорость ω_2 .

Решение

Поскольку нить по блоку не проскальзывает, то скорости точек A и B равны по величине соответственно скоростям точек E и D . Найдем их, учитывая, что блок 1 совершает вращательное движение с известной угловой скоростью ω_1 :

$$v_A = v_E = \omega_1 \cdot R_1 = 15 \text{ см/с},$$

$$v_B = v_D = \omega_1 \cdot r_1 = 5 \text{ см/с}.$$

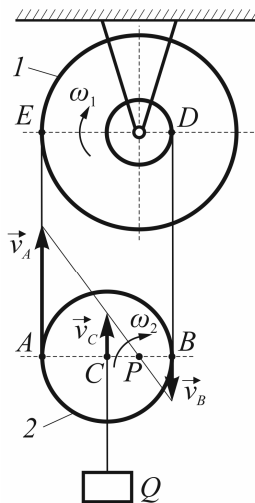


Рис. 1.15

Блок 2 совершает плоское движение. Зная скорости двух его точек A и B , соединим концы их скоростей и простым построением найдем положение мгновенного центра скоростей блока 2 – точку P , тогда из очевидных пропорций имеем:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{PA}{PB} = \frac{2r_2 - PB}{PB}, \text{ откуда } PB = \frac{2r_2 v_B}{v_A + v_B} = \frac{r_2}{2}.$$

Следовательно, $PC = PB = \frac{r_2}{2}$, а $r_2 = (R_1 + r_1) / 2 = 10$ см.

Тогда

$$\frac{v_C}{v_B} = \frac{PC}{PB} = 1 \Rightarrow v_C = v_B = 5 \text{ см/с.}$$

Угловая скорость подвижного блока $\omega_2 = v_C / PC = 1 \text{ с}^{-1}$.

Пример 3

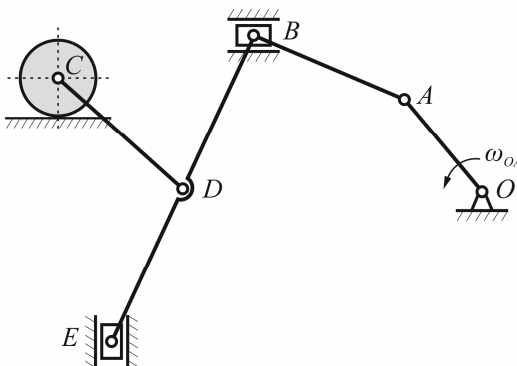


Рис. 1.16

В многосвязном плоском механизме, изображенном на рис. 1.16, стержень OA , вращающийся с постоянной угловой скоростью ω_{OA} , приводит в движение ползун B при помощи стержня AB . К ползуну B шарнирно прикреплен стержень BE с ползуном на другом конце. К стержню BE в точке D прикреплен

стержень DC , соединенный с осью колеса и приводящий в движение колесо в горизонтальном направлении. Считая, что расстояния между любыми поименованными точками известны, для данного положения механизма определить скорости точек A, B, E, D, C и угловые скорости всех звеньев: AB, BE, DC и колеса.

Решение

Расчет начинаем с того звена, движение которого задано. Определим скорость точки A , принадлежащей стержню OA , совершающему вращательное движение вокруг оси, проходящей через точку O :

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA.$$

Вектор $\vec{v}_A$ перпендикулярен стержню OA и направлен в соответствии с направлением круговой стрелки ω_{OA} (рис. 1.17).

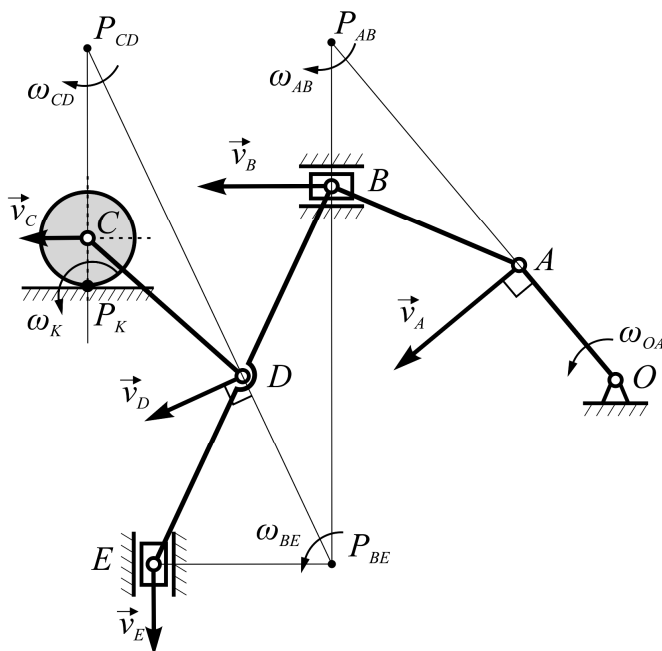


Рис. 1.17

Для определения скорости точки B , принадлежащей стержню AB , совершающему плоское движение, находим положение МЦС звена AB , как точку пересечения перпендикуляров к направлениям скоростей точек A и B . Это точка P_{AB} . В данный момент времени в данном положении механизма звено AB совершает мгновенно вращательное движение вокруг оси, проходящей через точку P_{AB} перпендикулярно плоскости движения. Следовательно, угловая скорость звена AB :

$$\omega_{AB} = v_A / AP_{AB},$$

а скорость точки B :

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BP_{AB}.$$

Направление ω_{AB} определяем в соответствии с направлением скорости v_A . В свою очередь, в соответствии с направлением ω_{AB} определим направление скорости точки B и покажем ω_{AB} и v_B на рис. 1.17.

Переходя к звену BE , находим его мгновенный центр скоростей, точку P_{BE} , пересечением перпендикуляров к направлениям в точках B и E .

Тогда

$$\omega_{BE} = v_B / BP_{BE}, \quad v_E = \omega_{BE} \cdot EP_{BE}, \quad v_D = \omega_{BE} \cdot DP_{BE}.$$

Далее, зная направления скоростей точек D и C (скорость точки C направлена по горизонтали), находим мгновенный центр скоростей звена DC – точку P_{DC} . И, соответственно,

$$\omega_{DC} = v_D / DP_{DC}, \quad v_C = \omega_{DC} \cdot CP_{DC}.$$

Колесо совершает плоское движение. Точка касания его с горизонтальной плоскостью P_K является мгновенным центром скоростей колеса. Зная скорость точки C , определим по величине мгновенную угловую скорость колеса

$$\omega_K = v_C / CP_K$$

и покажем круговой стрелкой на рисунке ее направление (см. рис. 1.17).

Пример 4

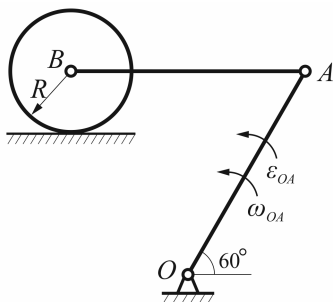


Рис. 1.18

В плоском механизме, изображенном на рис. 1.18, кривошип OA вращается с угловой скоростью $\omega_{OA} = 1 \text{ с}^{-1}$ и угловым ускорением $\epsilon_{OA} = 4 \text{ с}^{-2}$, колесо катится без скольжения. $OA = AB = 4R = 4 \text{ м}$. Определить $v_A, v_B, \omega_{AB}, \omega_K, a_A, a_B, \epsilon_{AB}, \epsilon_K$.

Решение

Определение скоростей

Определим скорость точки A , принадлежащей звену OA , совершающему вращательное движение вокруг неподвижной оси

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 4 \text{ м/с}.$$

Вектор $\vec{v}_A$ перпендикулярен кривошипу OA и направлен в соответствии с заданным направлением ω_{OA} (рис. 1.19). Зная направления скоростей точек A и B (скорость точки B горизонтальна) и проведя перпендикуляры к ним, найдем положение МЦС звена AB – точку P_{AB} , а зная положение МЦС, найдем угловую скорость звена AB и скорость точки B

$$\omega_{AB} = v_A / AP_{AB} = 0.5 \text{ с}^{-1}, \quad v_B = \omega_{AB} \cdot BP_{AB} = 3.46 \text{ м/с}.$$

Колесо совершает плоское движение. МЦС колеса – точка P_K его касания с плоскостью, следовательно, угловая скорость колеса:

$$\omega_K = v_B / BP_K = v_B / R = 3.46 \text{ с}^{-1}.$$

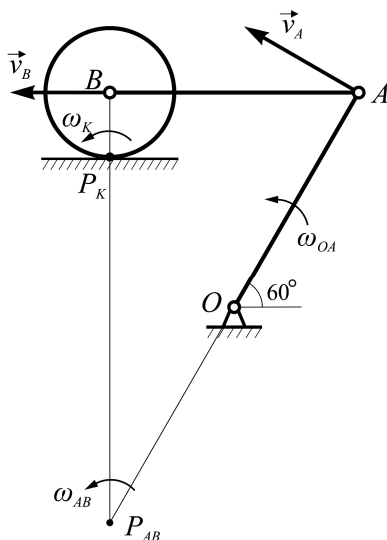


Рис. 1.19

Определение ускорений

Сначала определим ускорение точки A , принадлежащей стержню OA , вращающемуся вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O . Оно является векторной суммой двух составляющих

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n,$$

причем касательная и нормальная составляющие ускорения точки A соответственно равны:

$$a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 16 \text{ м/с}^2, \quad a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 4 \text{ м/с}^2.$$

Направления этих составляющих показаны на рис. 1.20.

Полное ускорение точки A :

$$a_A = \sqrt{(a_A^\tau)^2 + (a_A^n)^2} = 16.48 \text{ м/с}^2.$$

Переходя к точке B , учтем, что она принадлежит стержню AB , совершающему плоское движение, и, следовательно,

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$$

или

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n, \quad (1.12)$$

где $a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 1 \text{ м/с}^2$ – нормальная составляющая ускорения точки B во вращательном движении звена AB вокруг полюса A , направленная от точки B к точке A . Направление вектора касательной составляющей a_{BA}^τ , перпендикулярной AB , выбираем в произвольную сторону, так как истинное направление ε_{AB} пока нам не известно.

С другой стороны, известно направление ускорения a_B точки B , так как она также принадлежит колесу и, являясь его центром, движется по горизонтали.

Проецируя уравнение (1.12) на две взаимно перпендикулярные оси, из которых одна направлена вдоль стержня AB , найдем эти величины.

Проекция равенства (1.12) на направление стержня AB (ось X на рис. 1.20) дает:

$$a_B = a_A^n \cos(60^\circ) + a_A^\tau \cos(30^\circ) - a_{BA}^n,$$

откуда находим

$$a_B = 14.84 \text{ м/с}^2.$$

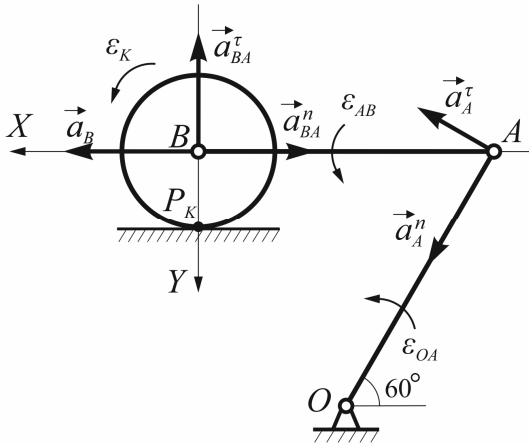


Рис. 1.20

Проекция равенства (1.12) на направление, перпендикулярное стержню AB (ось Y на рис. 1.20):

$$0 = a_A^n \sin(60^\circ) - a_A^\tau \sin(30^\circ) - a_{BA}^\tau,$$

откуда имеем

$$a_{BA}^\tau = -4.54 \text{ м/с}^2.$$

Знак минус означает, что истинное направление вектора a_{BA}^τ противоположно показанному на рис. 1.20. Учитывая, что $a_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB$, определим угловое ускорение ε_{AB} по величине

$$\varepsilon_{AB} = |a_{BA}^\tau| / AB = 1.14 \text{ с}^{-2}.$$

Направление ε_{AB} определим в соответствии с истинным направлением вектора $\vec{a}_{BA}^\tau$ относительно точки A и покажем его на рис. 1.20.

Угловое ускорение колеса ε_K в данном случае можно определить дифференцированием угловой скорости. Учитывая, что $\omega_K = v_B / BP_K$, причем, расстояние BP_K от точки B до МЦС колеса P_K остается постоянным во все время движения механизма, получим

$$\varepsilon_K = \frac{d\omega_K}{dt} = \frac{1}{BP_K} \frac{dv_K}{dt} = \frac{a_B}{BP_K} = 14.84 \text{ с}^{-2}.$$

Направление круговой стрелки ε_K определяется направлением вектора a_B относительно точки P_K (в данном случае – против хода часовой стрелки).

2. ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА

На основе установленных соотношений для скоростей и ускорений плоских фигур можно проводить кинематический расчет движения многозвенных плоских механизмов. Обычно в таком механизме движение одного звена задано, а требуется определить характеристики движения остальных звеньев, т.е. определить скорости и ускорения отдельных точек механизма, угловые скорости и угловые ускорения его звеньев. Расчет такого механизма проводят, последовательно переходя от одного звена к другому.

2.1. Варианты задания

На рис. 2.1–2.5 изображены схемы механизмов, совершающих плоское движение. Для всех вариантов длины звеньев равны $OA = 1$ м, $AB = 3$ м, $AC = CB$. Длина стержня, закрепленного шарнирно в точке O_1 , равна 0.9 м (речь идет о стержнях O_1B , O_1C , O_1D в зависимости от варианта). В треугольной пластине размер гипотенузы равен 1.2 м (сторона BD или CD в зависимости от варианта). Для всех вариантов угловая скорость звена OA $\omega_{OA} = 2$ с⁻¹ (направлена против хода часовой стрелки), угловое ускорение $\varepsilon_{OA} = 5$ с⁻² (направлено по ходу часовой стрелки).

Задание состоит из двух частей.

Часть 1. Определить скорости поименованных точек и угловые скорости звеньев механизма с помощью МЦС.

Часть 2. Определить ускорение точки B и угловое ускорение звена AB .

Для выполнения второй части задания необходимо:

1. Начертить в заданном положении звенья механизма, которым принадлежат точки A , B и C .

2. Определить аналитически ускорение точки B и угловое ускорение звена AB .

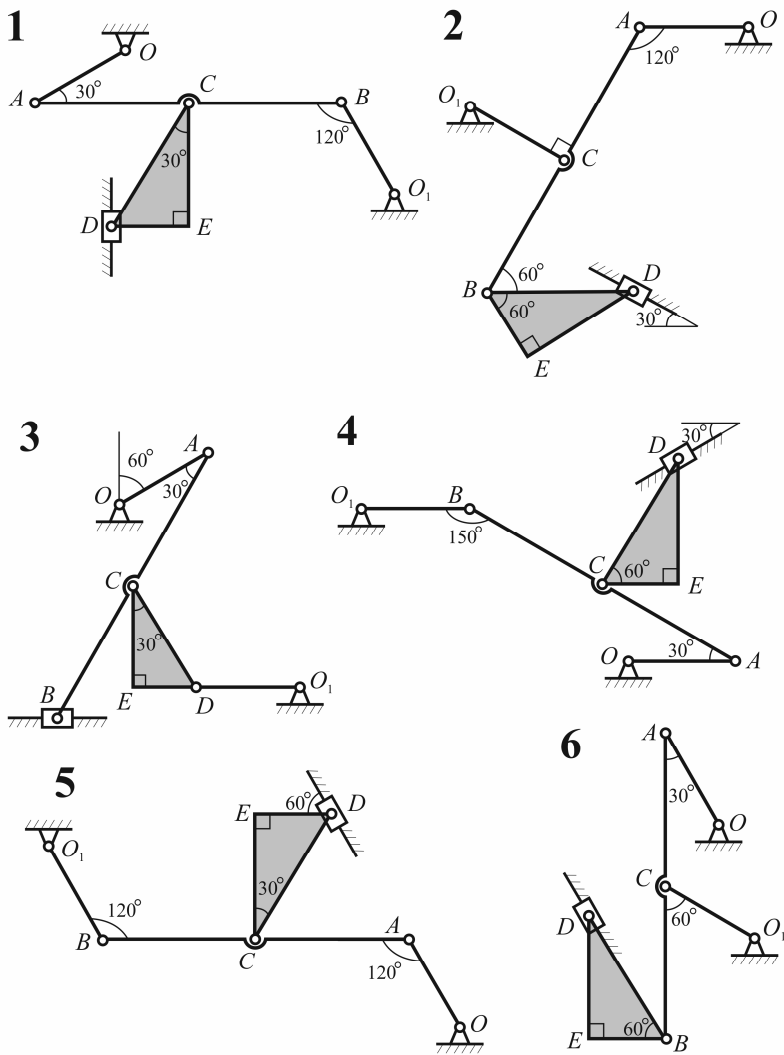


Рис. 2.1

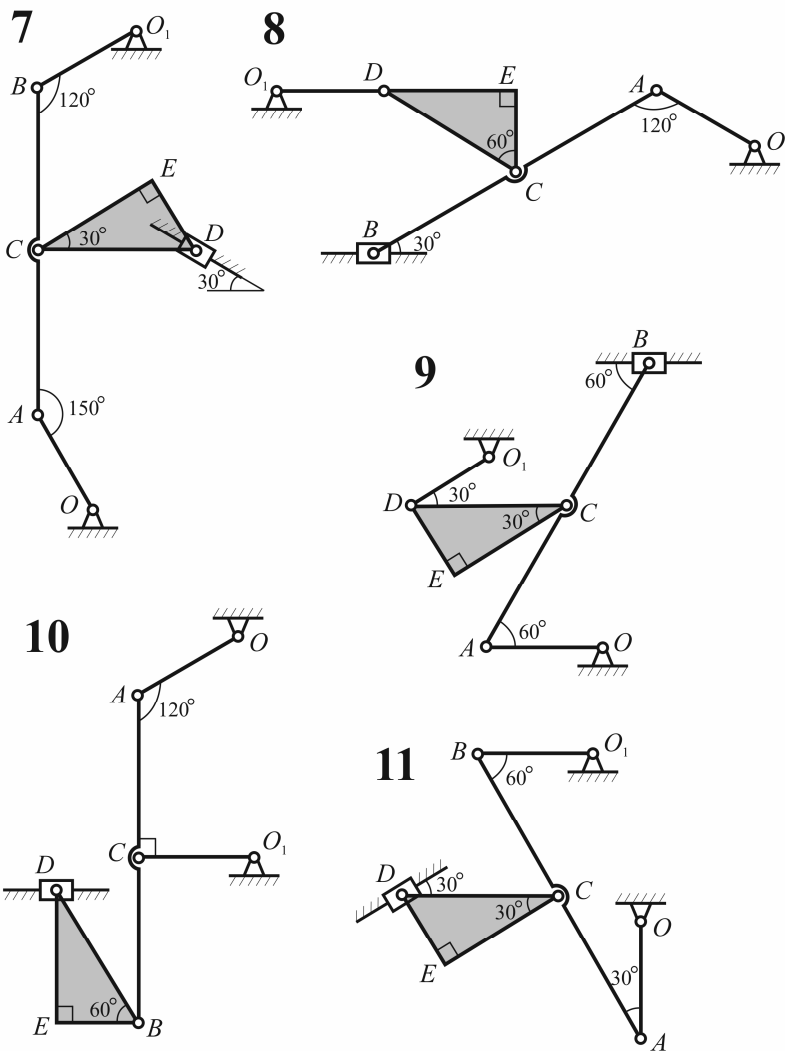


Рис. 2.2

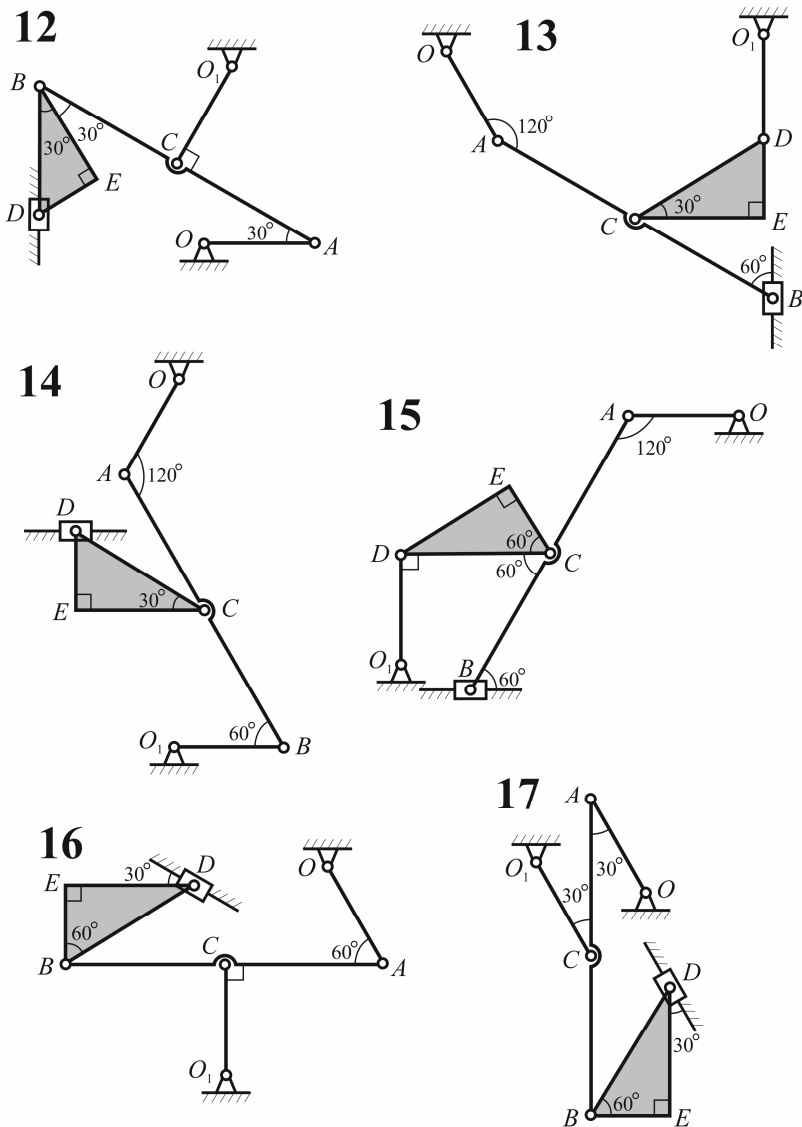


Рис. 2.3

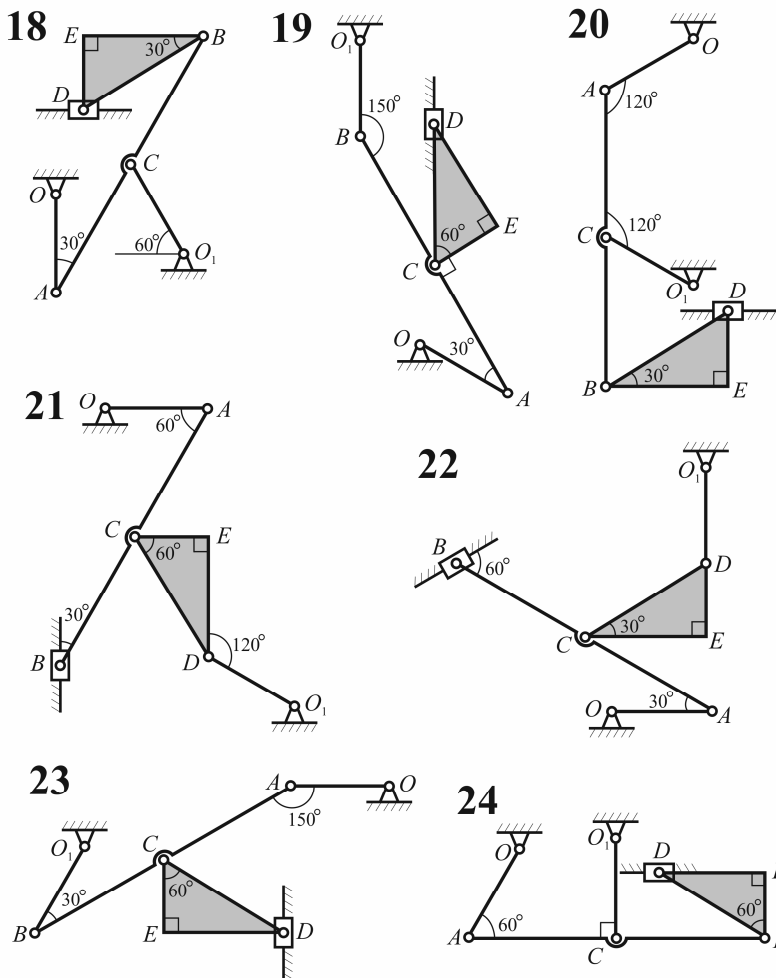


Рис. 2.4

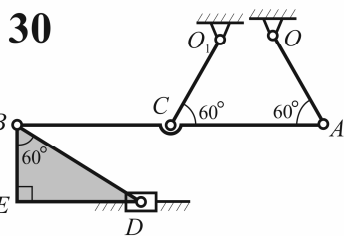
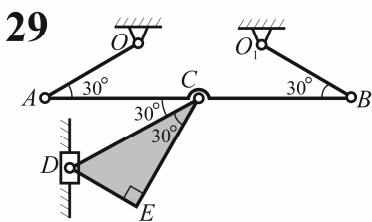
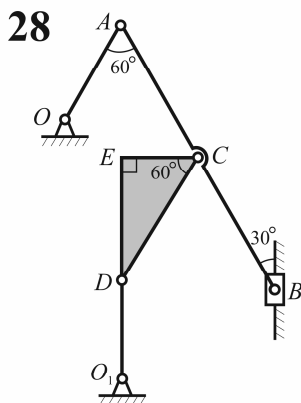
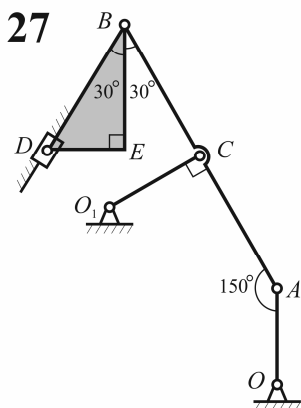
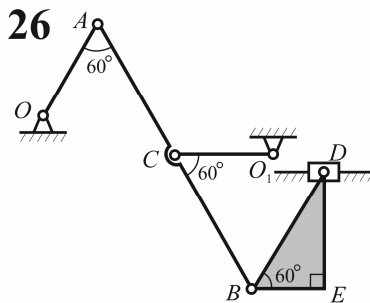
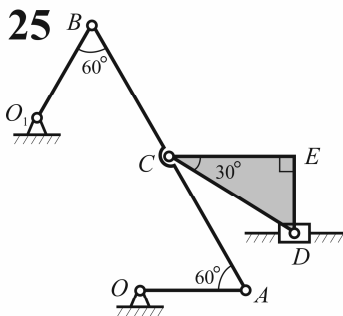


Рис. 2.5

2.2. Пример решения индивидуального задания

Плоский механизм состоит из стержней OA , O_1B , AB , треугольной пластины CDE и ползуна D , шарнирно соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O и O_1 (рис. 2.6). Даны длины стержней $OA = 0.4$ м, $O_1B = 0.5$ м, $AB = 1$ м, и длина стороны $CD = 0.4$ м треугольной пластины CDE . $AC = BC$. Угловая скорость и угловое ускорение стержня OA равны $\omega_{OA} = 1 \text{ с}^{-1}$, $\varepsilon_{OA} = 1 \text{ с}^{-2}$ (направлены против хода часовой стрелки).

Определить линейные скорости точек A , B , C , D , E , угловые скорости стержней OA , AB , O_1B и пластины CDE , ускорение точки B и угловое ускорение стержня AB .

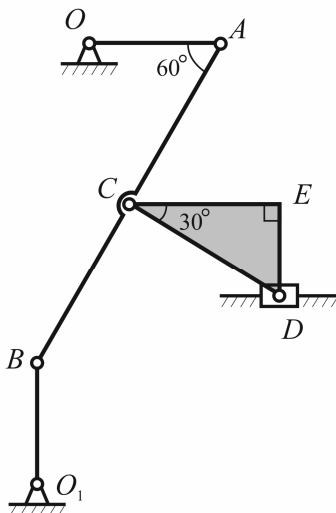


Рис. 2.6

Решение

Определение скоростей

Стержень OA , движение которого в задании задано, совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости движения. Найдем скорость принадлежащей ему точки A :

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 0.4 \text{ м/с.}$$

Вектор $\vec{v}_A$ перпендикулярен стержню OA и направлен в сторону его вращения (в соответствии с направлением круговой стрелки ω_{OA}) (рис. 2.7).

Так как стержень AB совершает плоское движение, то для определения скоростей его точек строим мгновенный центр

скоростей этого звена – точку P_{AB} . Она лежит на пересечении перпендикуляров к известным направлениям векторов скоростей точек A и B (вектор $\vec{v}_B$ перпендикулярен стержню O_1B , так как стержень O_1B вращается вокруг точки O_1).

Стержень AB в данный момент времени совершает вращательное движение вокруг точки P_{AB} . Поэтому его угловую скорость найдем из выражения

$$\omega_{AB} = v_A / AP_{AB},$$

где $AP_{AB} = AB \cdot \cos(60^\circ) = 0.5$ м (так как треугольник ABP_{AB} – прямоугольный), и $\omega_{AB} = 0.8 \text{ с}^{-1}$.

Покажем на рисунке круговую стрелку ω_{AB} , направление которой определим в соответствии с направлением скорости $\vec{v}_A$. В свою очередь, зная ω_{AB} , определим скорости точек B и C , принадлежащих звену AB :

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BP_{AB} \text{ и } v_C = \omega_{AB} \cdot CP_{AB}.$$

Из геометрии имеем:

$$BP_{AB} = AB \cdot \sin(60^\circ) = 0.87 \text{ м},$$

$$CP_{AB} = P_{AB}A = 0.5 \text{ м}$$

(так как треугольник ACP_{AB} – равносторонний). В итоге получаем $v_B = 0.7 \text{ м/с}$, $v_C = 0.4 \text{ м/с}$.

Полученные скорости точек B и C изображаем на рисунке перпендикулярно отрезкам, соединяющим эти точки с МЦС звена AB ($\vec{v}_B \perp BP_{AB}$, $\vec{v}_C \perp CP_{AB}$). Направления векторов скоростей v_B и v_C определяем с учетом направления круговой стрелки ω_{AB} .

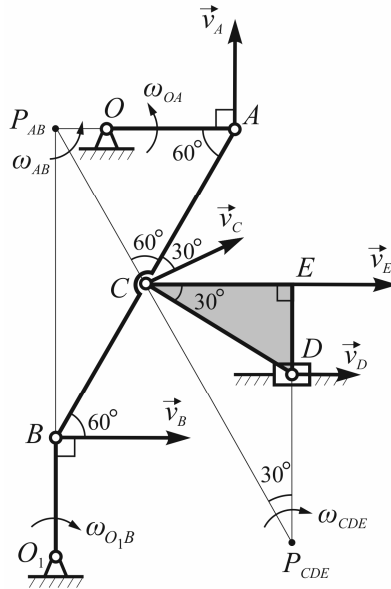


Рис. 2.7

Величины v_B и v_C можно определить также непосредственно из пропорций $v_A / AP_{AB} = v_B / BP_{AB} = v_C / CP_{AB}$, которые следуют из приведенных выше формул.

Угловую скорость стержня O_1B , совершающего вращательное движение вокруг неподвижной оси, находим по формуле $\omega_{O_1B} = v_B / O_1B = 1.4 \text{ с}^{-1}$. Направление $\vec{v}_B$ указывает на то, что вращение стержня O_1B происходит по ходу часовой стрелки.

Аналогично, для определения скоростей точек D и E строим мгновенный центр скоростей для пластины CDE – точку P_{CDE} . Она лежит на пересечении перпендикуляров к известным направлениям векторов скоростей в точках C и D (вектор $\vec{v}_C$ нами уже найден, а вектор $\vec{v}_D$ направлен вдоль линии движения ползуна D).

Из рис. 2.7 видно, что треугольник CEP_{CDE} – прямоугольный и $CP_{CDE} = CE / \sin(30^\circ) = CD \cdot \cos(30^\circ) / \sin(30^\circ) = 0.69 \text{ м}$. Находим угловую скорость звена CDE из соотношения

$$\omega_{CDE} = v_C / CP_{CDE} = 0.58 \text{ с}^{-1}.$$

По направлению скорости $\vec{v}_C$ определяем, что тело CDE в данный момент вращается вокруг своего МЦС P_{CDE} по ходу часовой стрелки. Величины v_D и v_E найдем из выражений:

$$v_D = \omega_{CDE} \cdot DP_{CDE}, \quad v_E = \omega_{CDE} \cdot EP_{CDE}.$$

Расстояния DP_{CDE} и EP_{CDE} равны: $EP_{CDE} = CP_{CDE} \cdot \cos(30^\circ) = 0.6 \text{ м}$, $DP_{CDE} = CD = 0.4 \text{ м}$ (так как треугольник CDP_{CDE} – равнобедренный). Тогда $v_D = 0.23 \text{ м/с}$, $v_E = 0.35 \text{ м/с}$. Вектор $\vec{v}_D$ изображаем по линии движения ползуна D . Вектор $\vec{v}_E$ перпендикулярен отрезку EP_{CDE} . Оба вектора направляем в сторону, соответствующую вращению пластины CDE в данный момент времени вокруг ее мгновенного центра скоростей P_{CDE} .

Определение ускорений

Изобразим часть исходного механизма, включающую точки O, A, B, O_1 (рис. 2.8). Определение ускорений начнем с точки A , принадлежащей стержню OA , который совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O . При этом

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n, \quad (2.1)$$

где касательная и нормальная составляющие ускорения точки A соответственно равны

$$a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 0.4 \text{ м/с}^2,$$

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 0.4 \text{ м/с}^2.$$

(Вектор $\vec{a}_A^\tau$ направлен перпендикулярно стержню OA в соответствии с направлением ε_{OA} , вектор $\vec{a}_A^n$ направлен вдоль стержня от точки A к точке O .) Полное ускорение точки A :

$$a_A = \sqrt{(a_A^\tau)^2 + (a_A^n)^2} = 0.56 \text{ м/с}^2.$$

Переходя к рассмотрению движения точки B , учтем, что она одновременно принадлежит стержню AB , совершающему плоское движение, и стержню O_1B , вращающемуся вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O_1 . Это дает нам право записать, с одной стороны,

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}, \quad (2.2)$$

а, с другой –

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^\tau + \vec{a}_B^n \quad (2.3)$$

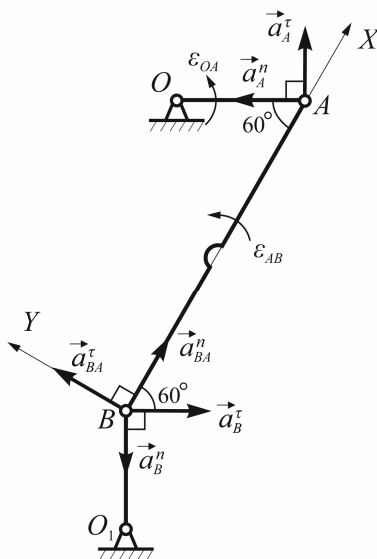


Рис. 2.8

или

$$\vec{a}_B^r + \vec{a}_B^n = \vec{a}_A^r + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^r + \vec{a}_{BA}^n. \quad (2.4)$$

В последнем выражении учтено, что ускорение точки B во вращательном движении всей фигуры вокруг полюса

$$\vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^r + \vec{a}_{BA}^n. \quad (2.5)$$

где $a_{BA}^r = \varepsilon_{AB} \cdot AB$, $a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB$. Значение ω_{AB} известно из первой части решения, поэтому находим величину вектора $a_{BA}^n = 0.64 \text{ м/с}^2$ и изображаем его на рисунке направленным вдоль стержня AB от точки B к точке A . Значение и направление ε_{AB} неизвестно, поэтому пока не можем определить величину вектора a_{BA}^r , но знаем, что он перпендикулярен вектору a_{BA}^n . Изображаем его на рисунке в произвольно выбранном направлении перпендикулярно AB . Знак результата укажет истинное направление вектора a_{BA}^r .

С другой стороны, рассматривая вращательное движение стержня O_1B , имеем: $a_B^r = \varepsilon_{O_1B} \cdot O_1B$, $a_B^n = \omega_{O_1B}^2 \cdot O_1B$. Угловая скорость ω_{O_1B} стержня O_1B известна, поэтому находим ускорение $a_B^n = 0.98 \text{ м/с}^2$ и изображаем на рисунке вектор $\vec{a}_B^n$, направленный вдоль стержня O_1B от точки B к точке O_1 . Ускорение $\vec{a}_B^r$ изображаем на рисунке перпендикулярно O_1B в произвольно выбранном направлении, так как пока неизвестно угловое ускорение ε_{O_1B} .

Итак, в уравнении (2.4) неизвестны $\vec{a}_B^r$ и $\vec{a}_{BA}^r$. Проецируя уравнение (2.4) на две взаимно перпендикулярные оси, из которых одна направлена вдоль стержня AB , сможем найти эти величины. Из проекции равенства (2.4) на направление стержня AB (ось X на рис. 2.8):

$$a_B^r \cos(60^\circ) - a_B^n \cos(30^\circ) = a_A^r \cos(30^\circ) - a_A^n \cos(60^\circ) + a_{BA}^n$$

находим $a_B^r = 3.27 \text{ м/с}^2$.

$$\text{Тогда } a_B = \sqrt{(a_B^\tau)^2 + (a_B^n)^2} = 3.41 \text{ м/с}^2.$$

Из проекции равенства (2.4) на ось Y

$$-a_B^\tau \sin(60^\circ) - a_B^n \sin(30^\circ) = a_A^\tau \sin(30^\circ) + a_A^n \sin(60^\circ) + a_{BA}^\tau$$

находим $a_{BA}^\tau = -3.87 \text{ м/с}^2$. Знак минус указывает на то, что на самом деле вектор $\vec{a}_{BA}^\tau$ направлен противоположно выбранному ранее и показанному на рис. 2.8. направлению. Величину углового ускорения стержня AB определим из выражения $\varepsilon_{AB} = |a_{BA}^\tau| / AB = 3.87 \text{ с}^{-2}$. Его направление определяется в соответствии с истинным направлением вектора $\vec{a}_{BA}^\tau$ относительно точки A . В данной задаче угловое ускорение ε_{AB} звена AB направлено против хода часовой стрелки, что и показано на рис. 2.8.

2.3. Дополнительное задание

Кинематический расчет представленных выше плоских механизмов является обязательным для студентов, выполняющих индивидуальное задание. На рис. 2.9–2.13 изображены модифицированные схемы плоских механизмов, которые вместо ползуна, совершающего поступательное движение в направляющих, включают колесо, совершающее плоское движение. К данным, которые для всех вариантов остаются теми же, что и для основного задания, добавляется радиус колеса $R = 0.3 \text{ м}$.

Задание состоит из двух частей.

Часть 1. Определить скорости точек A, B, C, D, E, F и угловые скорости всех звеньев механизма с помощью МЦС.

Часть 2. Определить ускорения точек A, B, C, D, E, F и угловые ускорения звеньев механизма.

Задание является дополнительным и по согласованию с преподавателем может выполняться вместо основного задания.

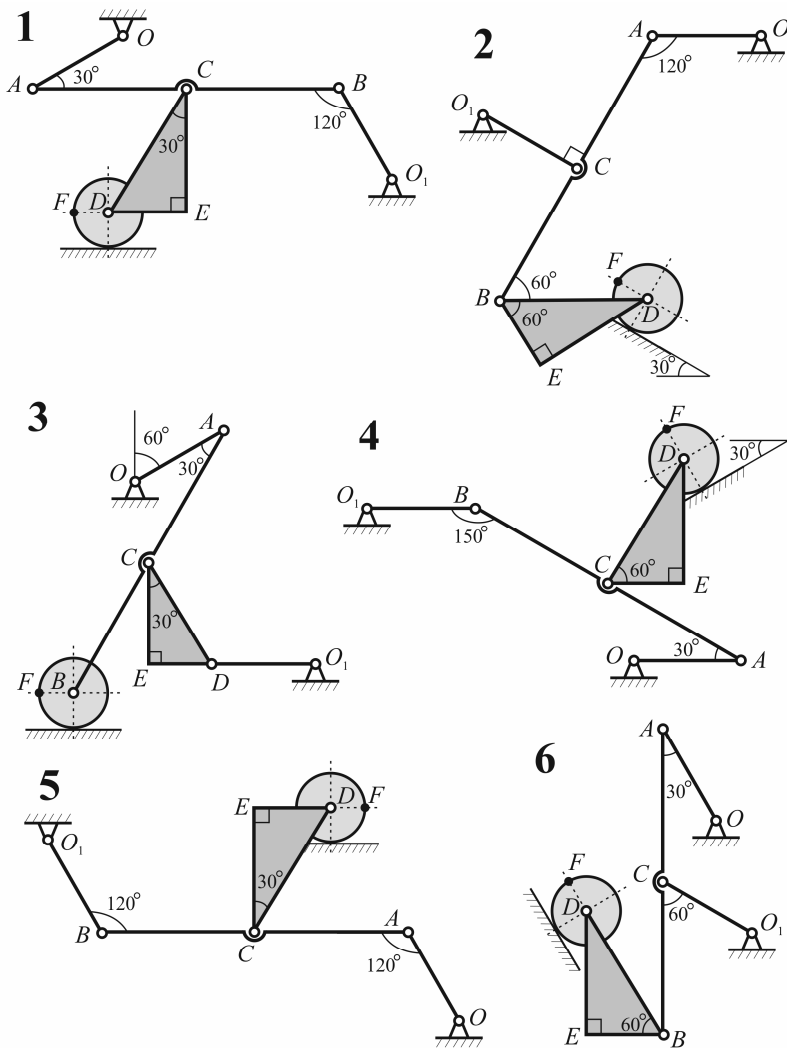


Рис. 2.9

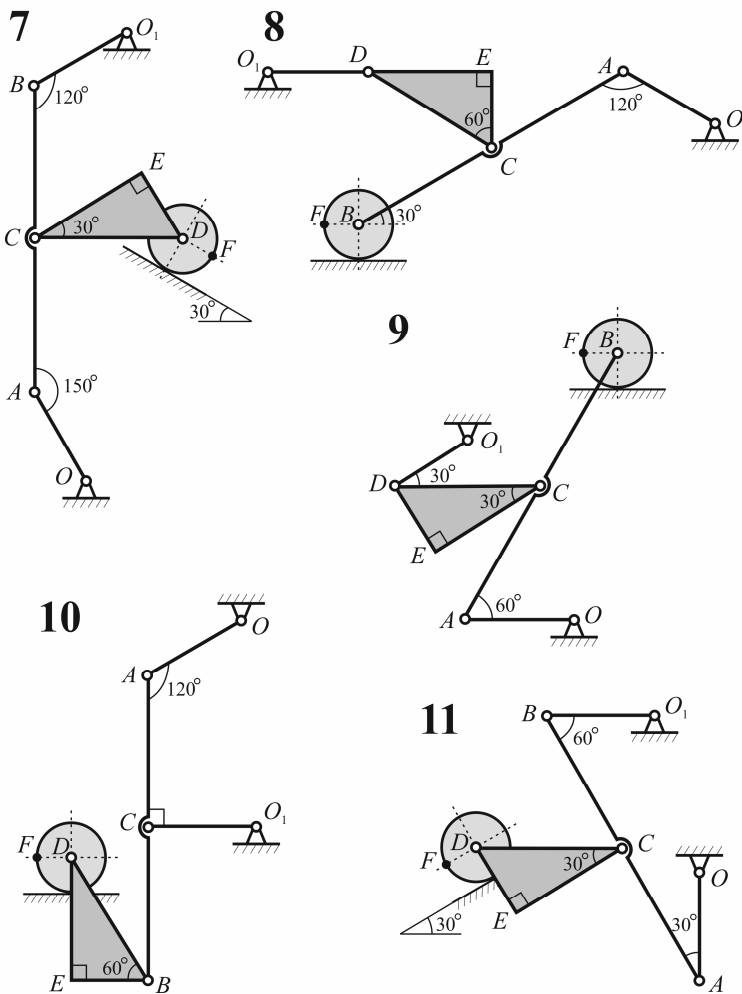


Рис. 2.10

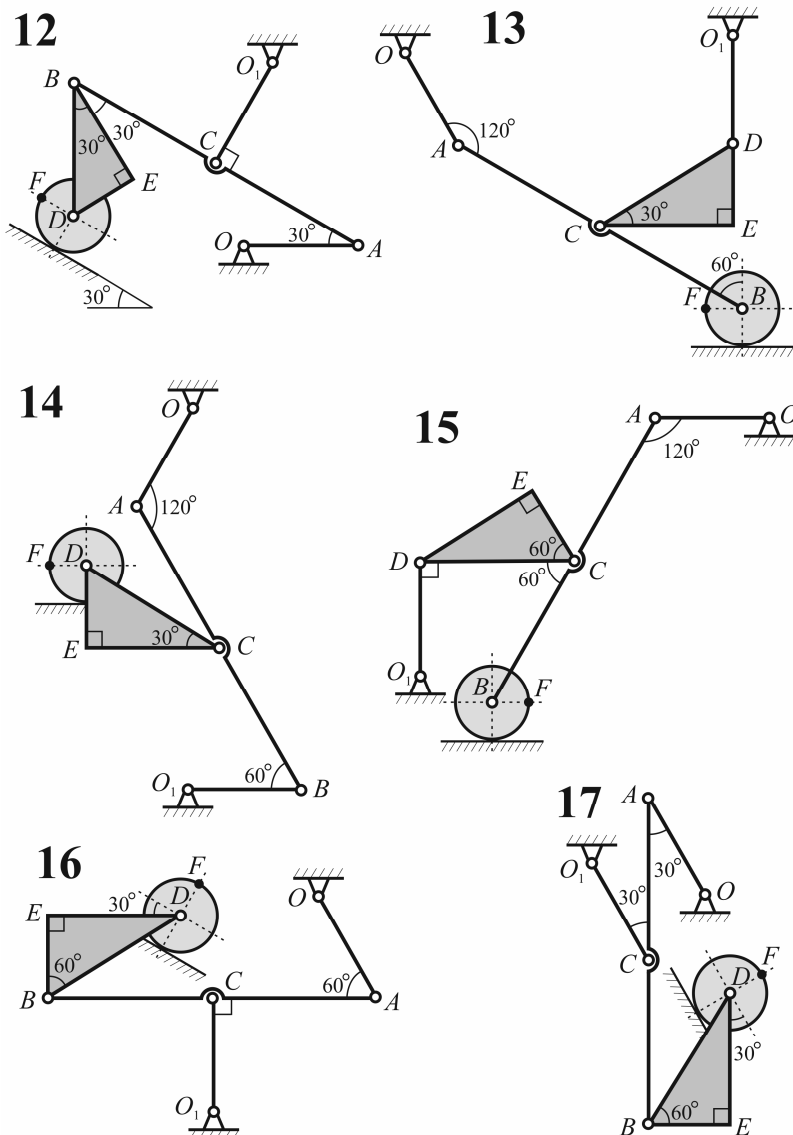
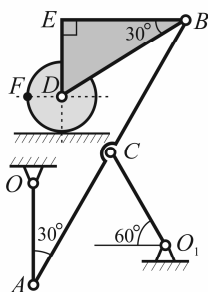
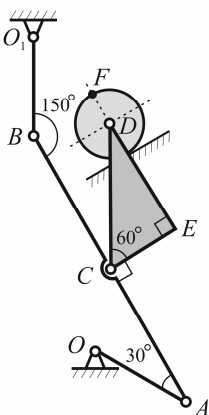


Рис. 2.11

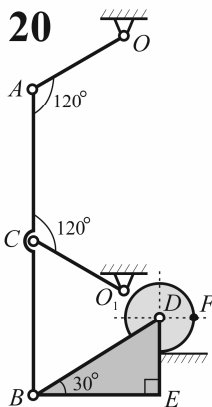
18



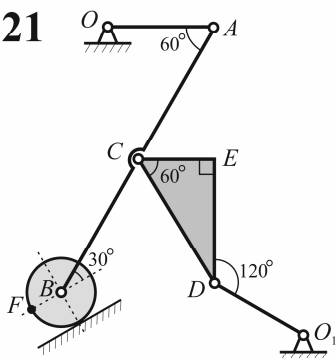
19



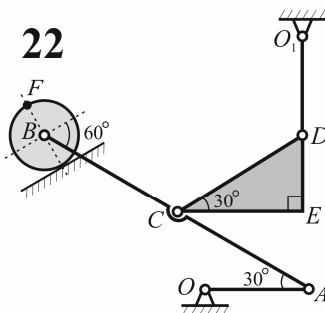
20



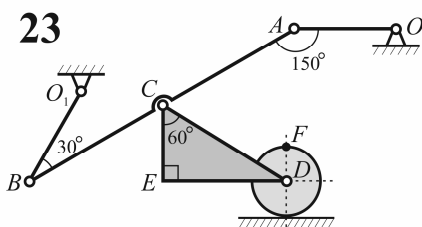
21



22



23



24

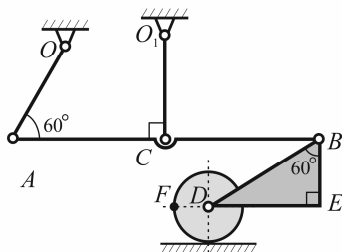


Рис. 2.12

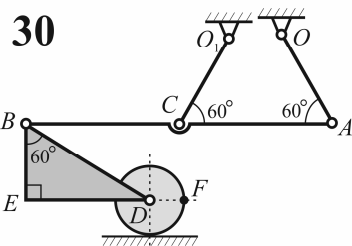
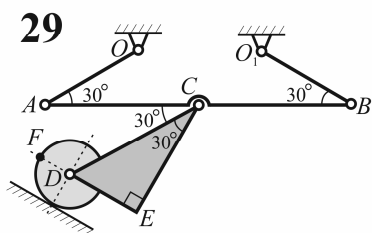
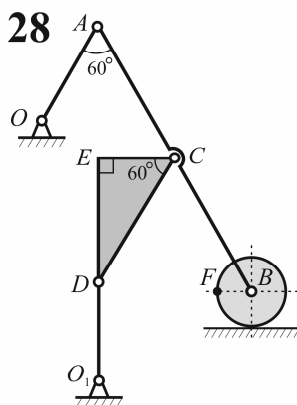
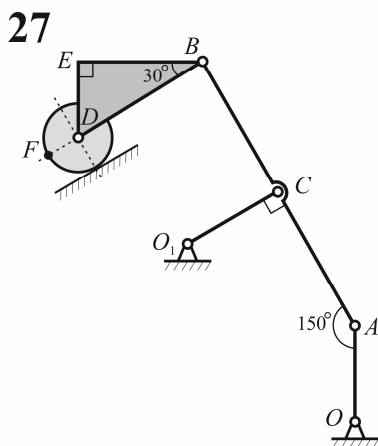
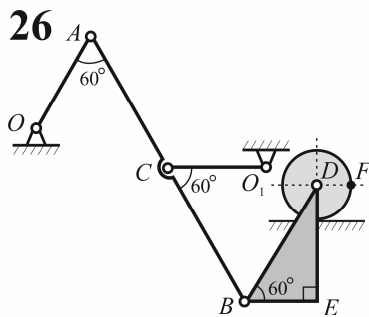
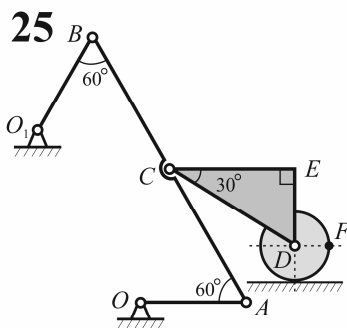


Рис. 2.13

3. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Какое движение твердого тела называется плоским?
2. Почему изучение плоского движения твердого тела сводится к изучению движения плоской фигуры (указать какой) в ее плоскости?
3. Записать уравнения движения плоской фигуры.
4. Как определяется скорость любой точки плоской фигуры при ее плоском движении?
5. Какую точку называют мгновенным центром скоростей?
6. Пусть P – МЦС плоской фигуры. Как выглядит распределение скоростей ее точек?
7. Способы определения положения МЦС.
8. Как определяется ускорение любой точки плоской фигуры при ее плоском движении?
9. Одинаковы или различны понятия: касательное ускорение точки и касательное ускорение точки в движении относительно полюса?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутенин Н. В. Курс теоретической механики / Н. В. Бутенин, Я. Р. Лунц, Д. Р. Меркин. – М. : Высшая школа, 1985. – Т. 1. – 240 с.
2. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики / С. М. Тарг. – М. : Высшая школа, 1968. – 480 с.
3. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / под ред. А. А. Яблонского. – М. : Высшая школа, 1998. – 368 с.
4. Сборник индивидуальных заданий по теоретической механике. Кинематика : учеб.-метод. пособие / А. А. Белкин [и др.] ; под ред. В. А. Юдина, В. В. Леманова ; Новосиб. гос. архитектур.-строит. ун-т (Сибстрин). – Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2007. – 68 с.

Составители

Сергей Михайлович Аульченко
Денис Александрович Иванов
Анатолий Яковлевич Ройтман

ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Методические указания и индивидуальные задания
для студентов направления 270800.62 «Строительство»
всех форм обучения

Редактор Г.К. Найденова

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 54.НС.05.953.П.006252.06.06 от 26.06.2006 г.
Подписано к печати 02.07.2013. Формат 60х84 1/16 д.л.
Гарнитура Таймс.
Бумага офсетная. Ризография.
Объем 2,75 п.л. Тираж 254 экз. Заказ №

Новосибирский государственный архитектурно-строительный
университет (Сибстрин)
630008, Новосибирск, ул. Ленинградская, 113

Отпечатано мастерской оперативной полиграфии
НГАСУ (Сибстрин)