

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(СИБСТРИН)

**Кафедра теоретической
механики**

**ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ.
УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА**

Методические указания и контрольные задания
для студентов всех направлений
и форм обучения

НОВОСИБИРСК 2013

Методические указания и контрольные задания разработаны
д-ром физ.-мат. наук, профессором В.А. Юдиным

Ответственный редактор – д-р физ.-мат. наук, профессор,
завкафедрой теоретической механики В.Я. Рудяк

Утверждены
методической комиссией строительного факультета
3 июня 2013 года

Рецензенты:

- С.М. Аульченко, д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотр.
ИТПМ СО РАН;
- А.Я. Ройтман, канд. физ.-мат. наук, доцент
НГАСУ (Сибстрин)

© Новосибирский государственный
архитектурно-строительный
университет (Сибстрин), 2013

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	2
1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ	
1.1. Принцип Даламбера–Лагранжа (общее уравнение динамики).....	4
1.2. ДУ движения системы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа II рода)	8
1.3. Рекомендации по решению задач на применение уравнений Л-П.....	11
1.4. Уравнения Л-П в случае консервативных систем	16
1.5. Заключение	21
1.6. Вопросы для самоконтроля	22
1.7. Задачи и упражнения.....	23
2. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ	
2.1. Варианты заданий на составление уравнений Лагранжа второго рода	24
2.2. Указания к выполнению заданий.....	30
2.3. Формулы для вычисления кинетической энергии и работы сил на возможном перемещении системы	31
2.4. Пример выполнения задания.....	33
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	36

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические указания относятся к наиболее сложному для понимания студентами разделу курса теоретической механики – аналитической механике. Традиционно в технических вузах, в частности, инженерно-строительных, этот раздел включает изучение принципов Лагранжа и Даламбера–Лагранжа.

Принцип Лагранжа (принцип возможных перемещений) применяется для исследования *равновесия* механических систем. С точки зрения практики использования для расчета равновесия строительных конструкций, он представляет альтернативный метод по сравнению с классическим, «ньютоновским», изучаемым в первом разделе курса – *статике*. Коренным отличием такого подхода является то, что условие равновесия полностью определяется лишь активными силами и не содержит реакций идеальных связей. Во многих случаях, а для сложных механических систем – в большинстве случаев такой подход оказывается проще классического.

Принцип Даламбера–Лагранжа (общее уравнение динамики и уравнения Лагранжа второго рода) является обобщением принципа Лагранжа на случай движущихся механических систем. Ему-то и посвящены настоящие методические указания.

Первая часть написана в виде лекции, в которой сначала выводится общее уравнение динамики, а затем на его основе получаются уравнения Лагранжа второго рода. Даются рекомендации по решению задач на применение этих уравнений и рассматриваются примеры. Рассматривается также частный случай консервативных механических систем. В конце лекции приводятся заключение, список вопросов и упражнения для самоконтроля.

Во второй части приведены 30 вариантов контрольных заданий на составление уравнений Лагранжа второго рода для двухсоставных конструкций. Даны указания и приведены основные формулы, необходимые для выполнения этих заданий. Заключает вторую часть методических указаний пример выполнения задания.

Обратим внимание на важность для инженера рассматриваемой темы. Уравнения Лагранжа второго рода являются основным инструментом для исследования сложных механических систем. Они играют ту же роль, что и второй закон Ньютона для динамики точки. Сложность же усвоения данной темы студентами связана не столько с ее сложностью, сколько с тем, что она требует знания предыдущих разделов курса. Поэтому, приступая к ее изучению, нужно вспомнить и принцип возможных перемещений (чтобы находить обобщенные силы), и способы вычисления кинетической энергии, и кинематические связи между скоростями точек тел при их движении.

Выражаю благодарность доценту Д.А. Иванову за выполнение рисунков и редактирование методических указаний, а также всем сотрудникам кафедры теоретической механики НГАСУ (Сибстрин) за полезные обсуждения при его написании.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1.1. Принцип Даламбера–Лагранжа (общее уравнение динамики)

Перейдем к движущимся механическим системам. Напомним, что задача наша состоит в том, чтобы найти принцип выбора действительного движения точек системы путем рассмотрения всех возможных, дозволяемых связями. В случае покоящейся системы таким принципом был принцип Лагранжа (принцип возможных перемещений). Вместе с тем, мы уже познакомились с принципом Даламбера, который позволяет задачу динамики решать методами статики с помощью введения сил инерции. Объединив теперь эти два принципа вместе, получим общий метод решения задач динамики, который и будет называться принципом Даламбера–Лагранжа. Ясно, что мы должны сделать: сначала к активным силам, действующим на движущуюся систему, добавить силы инерции F_k^{in} и воспользоваться принципом Даламбера, а затем уже применить принцип Лагранжа. Конечно, при этом условия его применимости должны выполняться, т.е. связи, действующие на нашу систему, должны быть двусторонними, голономными и идеальными. Что же касается стационарности связей, то это требование можно опустить, т.е. мы будем рассматривать как стационарные, так и нестационарные связи. Дело в том, что стационарность связей в принципе возможных перемещений требовалась лишь при доказательстве его достаточности (т.е. того, что, если уравнение работ выполняется, то система будет находиться в равновесии). Это нам сейчас не потребуется. В итоге мы получим уравнение работ в виде:

$$\delta A^{akt} + \delta A^{in} = \sum_k \vec{F}_k^{akt} \cdot \delta \vec{r}_k + \sum_k \vec{F}_k^{in} \cdot \delta \vec{r}_k = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) называется *общим уравнением динамики*. Таким образом, принцип Даламбера–Лагранжа заключается в следующем: *при движении механической системы с идеальными*

двусторонними и голономными связями сумма работ всех активных сил и сил инерции на любом ее возможном перемещении равна нулю.

Так же, как и принцип Лагранжа, мы можем применять принцип Даламбера–Лагранжа и для связей с трением, предварительно переведя все силы трения в разряд активных. Точно так же можем определить и силу реакции идеальной связи, отбросив ее и условно считая эту реакцию активной силой. Что же касается рекомендаций к решению задач на применение общего уравнения динамики, то они остаются теми же, что и для решения задач на применение принципа возможных перемещений, с той лишь разницей, что наряду с активными силами нужно рассматривать еще и силы инерции. Если при этом механическая система состоит из нескольких твердых тел, то силы инерции для каждого из них следует сначала привести к главному вектору и к главному моменту относительно точки приведения, как мы делали, применяя принцип Даламбера.

Задача 1. К системе невесомых идеальных блоков подвешены с помощью гибких нерастяжимых нитей грузы A и B с массами $m_A = 100$ г и $m_B = 80$ г (рис. 1). Определить ускорения грузов.

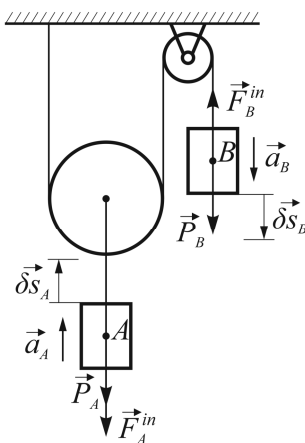


Рис. 1

Решение. В качестве механической системы рассмотрим всю конструкцию. По условию задачи, действующие на нее связи идеальные, голономные и удерживающие, поэтому принцип Даламбера–Лагранжа применять можно. Активными силами являются лишь силы тяжести грузов $\vec{P}_A = m_A \vec{g}$ и $\vec{P}_B = m_B \vec{g}$. Так как грузы движутся поступательно, то их силы инерции сводятся к равнодействующим $\vec{F}_A^{in} = -m_A \vec{a}_A$ и $\vec{F}_B^{in} = -m_B \vec{a}_B$, приложенным в центрах масс грузов и направленным противоположно их ускорениям. Дадим теперь грузу B возможное перемещение $\delta \vec{x}_B$, направленное, например, вниз. Тогда возможное перемещение $\delta \vec{x}_A$ груза A будет направлено вверх. Общее уравнение динамики (1) запишется в виде:

$$(\vec{P}_A + \vec{F}_A^{in}) \cdot \delta \vec{x}_A + (\vec{P}_B + \vec{F}_B^{in}) \cdot \delta \vec{x}_B = 0.$$

Раскрывая скалярные произведения и подставляя значения сил инерции, получим

$$-P_A \delta x_A - (P_A / g) a_A \delta x_A + P_B \delta x_B - (P_B / g) a_B \delta x_B = 0. \quad (2)$$

Так как нить нерастяжима и не скользит по блокам, то из кинематики $\delta x_B = 2\delta x_A$ и $a_B = 2a_A$ (покажите это самостоятельно). Подставляя теперь эти выражения в формулу (2) и учитывая, что $\delta x_A \neq 0$, получаем

$$a_A = g(2P_B - P_A)/(4P_B + P_A). \quad (3)$$

Следовательно, $a_A = 1.4 \text{ м/с}^2$, $a_B = 2.8 \text{ м/с}^2$.

Заметим, что, если бы мы решали задачу в общем виде при произвольных массах грузов, то ускорение груза A мы также могли бы направить условно вверх и получили бы выражение (3). В случае $P_B > 0.5P_A$ мы бы угадали – груз A будет ускоренно подниматься, в случае $P_B < 0.5P_A$, как это следует из выражения (3), он будет ускоренно опускаться, в случае же $P_B = 0.5P_A$ груз A будет либо покоиться, либо двигаться равномерно вверх или вниз, в зависимости от начальных условий задачи.

Задача 2. Однородный цилиндр массы m_C обмотан нитью, перекинутой через блок и прикрепленной к грузу A массы m_A . Груз может скользить по горизонтальной плоскости с коэффи-

циентом трения f . Найти ускорение груза a_A и ускорение a_C центра масс цилиндра (рис. 2). Массами блока и нити пренебречь.

Решение. Силу трения $\vec{F}_f$ груза о плоскость переведем в разряд активных сил. Так как трением в блоке мы пренебрегаем, то связи можно считать идеальными и голономными. Горизонтальную поверхность считаем двусторонней, т.к. груз от нее, по смыслу задачи, не отрывается. Таким образом, условия для применения принципа Даламбера–Лагранжа выполнены.

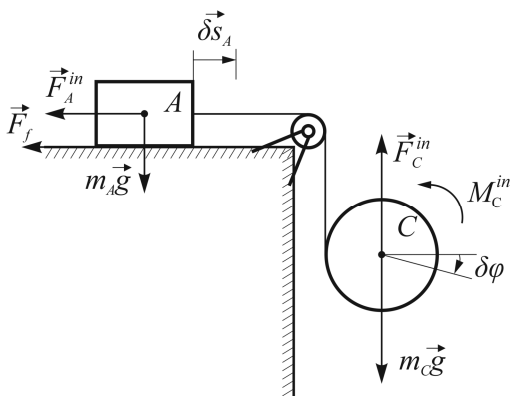


Рис. 2

Система активных сил и сил инерции груза и цилиндра показана на рис. 2. Силы инерции груза сводятся к равнодействующей $\vec{F}_A^{in} = -m_A \vec{a}_A$, а силы инерции цилиндра – к главному вектору $\vec{F}_C^{in} = -m_C \vec{a}_C$ и главному моменту $M_C^{in} = -J_C \varepsilon$ относительно центра масс цилиндра. Так как цилиндр однородный, то $J_C = m_C r^2 / 2$, где r – радиус цилиндра. Для углового ускорения цилиндра легко получить из кинематики выражение $\varepsilon = (a_C - a_A) / r$ (выведите его самостоятельно).

Рассматриваемая механическая система имеет две степени свободы. Движение груза определится полностью его перемещением s_A вдоль горизонтальной плоскости, а для задания дви-

жения цилиндра еще нужно знать угол его поворота φ . В качестве возможных перемещений системы возьмем следующие:

1. Пусть $\delta s_A \neq 0$, $\delta\varphi = 0$. Общее уравнение динамики, соответствующее такому возможному перемещению системы, будет иметь вид:

$$(-F_f - F_A^{in} + m_C g - F_C^{in})\delta s_A = 0, \text{ или} \\ F_f + F_A^{in} - m_C g + F_C^{in} = 0, \text{ где } F_f = fN = fQ. \quad (4)$$

2. Пусть теперь, наоборот, $\delta s_A = 0$, $\delta\varphi \neq 0$. В этом случае общее уравнение динамики сведется к следующему:

$$(m_C g - F_C^{in})r\delta\varphi - M_C^{in}\delta\varphi = 0, \text{ или } (m_C g - F_C^{in})r - M_C^{in} = 0. \quad (5)$$

Решая уравнения (4), (5) относительно искомых неизвестных a_A и a_C , найдем

$$a_A = (m_C - 3fm_A)g / (m_C + 3m_A); \\ a_C = (m_C + 2m_A - 2fm_A)g / (m_C + 3m_A). \quad (6)$$

Полученное решение показывает, что груз будет двигаться только при дополнительном условии к параметрам задачи: $m_C > 3fm_A$, или $f < m_C / 3m_A$. В противном случае груз находится в покое, система имеет одну степень свободы, цилиндр сматывается с нити с ускорением $a_C = 2g/3$.

1.2. ДУ движения системы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа II рода)

Запишем уравнение работ (1) в обобщенных координатах:

$$\delta A^{akt} + \delta A^{in} = \sum_j (Q_j + Q_j^{in})\delta q_j = 0. \quad (7)$$

Здесь $Q_j = \sum_k \vec{F}_k^{akt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}$, $j=1, \dots, s$ – обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам q_j , а через $Q_j^{in} = \sum_k \vec{F}_k^{in} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}$ обозначены величины, называемые *обобщенными силами инерции*. В силу независимости возможных перемещений $\delta q_1, \dots, \delta q_s$ обобщенных координат (напомним, мы

рассматриваем лишь голономные связи), из равенства (7) следуют соотношения

$$Q_j + Q_j^{in} = 0, \quad j=1, \dots, s. \quad (8)$$

Уравнениями (8) можно непосредственно пользоваться при решении задач динамики. Однако составление этих уравнений требует большого количества преобразований, которые есть смысл проделать один раз в общем виде, имея целью получить дифференциальные уравнения для обобщенных координат $q_1, q_2, \dots, q_s$. Для этого выразим обобщенные силы инерции Q_j^{in} через кинетическую энергию $T = \sum_k m_k v_k^2 / 2$ системы:

$$\begin{aligned} Q_j^{in} &= \sum_k \vec{F}_k^{in} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = -\sum_k m_k \vec{a}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = -\sum_k m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = \\ &= -\sum_k m_k \left[\frac{d}{dt} \left(\vec{v}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) - \vec{v}_k \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) \right] = \\ &= -\sum_k m_k \left[\frac{d}{dt} \left(\vec{v}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) - \vec{v}_k \cdot \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial q_j} \right] = \\ &= -\sum_k m_k \left[\frac{d}{dt} \left(\vec{v}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) - \frac{\partial (\vec{v}_k^2 / 2)}{\partial q_j} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Для осуществления дальнейших преобразований нужно еще разобраться с величинами $\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}$. Для этого запишем скорость $\vec{v}_k$

через производную от радиус-вектора $\vec{r}_k$ по времени, выраженного через обобщенные координаты $\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, \dots, q_s, t)$:

$$\vec{v}_k = \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_j. \quad (10)$$

Производные $\dot{q}_j$ обобщенных координат q_j называются *обобщенными скоростями*.

Дифференцируя обе части равенства (10) частным образом по обобщенной скорости, получим тождество

$$\frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}. \quad (11)$$

Продолжим теперь преобразования уравнений (8) с учетом этого тождества:

$$\begin{aligned} Q_j^{in} &= -\sum_k m_k \left[\frac{d}{dt} \left(\vec{v}_k \cdot \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (\vec{v}_k^2 / 2)}{\partial q_j} \right] = \\ &= -\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \sum_k m_k v_k^2 / 2 + \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_k m_k v_k^2 / 2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$Q_j^{in} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial T}{\partial q_j},$$

и уравнения (8) примут вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j=1, \dots, s. \quad (12)$$

Мы получили ДУ движения механической системы в обобщенных координатах, которые и называются *уравнениями Лагранжа второго рода* (кратко Л-П). Так как кинетическая энергия системы зависит от обобщенных скоростей (в общем случае $T = T(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$), то уравнения Л-П представляют собой систему из s дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат $q_1, \dots, q_s$.

Основная (обратная) задача динамики в обобщенных координатах состоит в том, чтобы по известным обобщенным силам $Q_1, \dots, Q_s$ и начальным условиям найти закон движения системы, т.е. определить зависимость обобщенных координат от времени $q_1 = q_1(t)$, $q_2 = q_2(t)$, ..., $q_s = q_s(t)$.

Если же, наоборот, задан закон движения системы (прямая задача), то уравнения (12) позволяют найти обобщенные силы, а по ним уже восстановить активные силы, действующие на механическую систему.

Обобщенные силы при этом полностью определяются активными силами, действующими на механическую систему,

и неидеальными реакциями связей. Достоинство уравнений Л-П заключается в том, что они позволяют исключить из рассмотрения все идеальные связи. Кроме того, их вид и число не зависят ни от количества тел в системе, ни от вида их движения. Для сложных механических систем эти уравнения являются основным инструментом исследования их движения и успешно применяются в инженерных расчетах. Их роль для движения механических систем можно сравнить с ролью уравнения Ньютона для динамики точки. При большом числе степеней свободы (в современных расчетах s может достигать значений нескольких тысяч, а то и миллионов!) система уравнений (12) решается численно на ЭВМ.

1.3. Рекомендации по решению задач на применение уравнений Л-П

Рекомендации по решению задач на применение уравнений Л-П во многом похожи на те, которые использовались при решении задач на применение принципа возможных перемещений.

Прежде чем решать задачу, нужно убедиться, что все связи, действующие на рассматриваемую механическую систему, являются удерживающими и голономными. Если связь неудерживающая (поверхность или линия), то уравнения Л-П можно применять, рассматривая лишь те возможные перемещения, которые удерживают точки на этой связи (поверхности или линии). При наличии связей с трением все силы трения нужно перевести в разряд активных сил.

Далее решение следует проводить, соблюдая последовательность:

1. *Изобразить все активные силы (и реакции неидеальных связей, если таковые имеются, условно считая их активными силами).*

2. *Определить число степеней свободы s и ввести обобщенные координаты $q_1, \dots, q_s$.*

3. *Вычислить кинетическую энергию системы, выразив ее через обобщенные координаты, обобщенные скорости и время, т.е. получить зависимость $T = T(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$.*

4. Найти обобщенные силы $Q_1, \dots, Q_s$. Для нахождения силы Q_j следует сообщить системе возможное перемещение, при котором изменяется только координата q_j , т. е. перемещение вида $\delta q_i = 0, i \neq j, \delta q_j \neq 0$. При этом точки k системы, в которых приложены активные силы $\vec{F}_k^{akt}$, получают возможные перемещения $\vec{\delta s}_k$. Затем следует составить сумму возможных работ всех активных сил $\delta A_j = \sum_k \vec{F}_k^{akt} \cdot \vec{\delta s}_k$ и выразить все $\vec{\delta s}_k$ через δq_i . Записывая возможную работу δA_j в виде $\delta A_j = \sum_k \vec{F}_k^{akt} \cdot \vec{\delta s}_k = Q_j \delta q_j$, получим обобщенную силу Q_j .

5. Написать начальные условия (НУ) задачи: $q_j(0) = q_{j0}, \dot{q}_j(0) = \dot{q}_{j0}$.

6. Составить уравнения Л-П и проинтегрировать их с учетом НУ.

Задача 3. Однородный цилиндр радиуса r и массой m катится без скольжения по внутренней поверхности неподвижного полуцилиндра радиуса R под действием только силы тяжести (рис. 3). Найти период малых колебаний цилиндра около его положения равновесия.

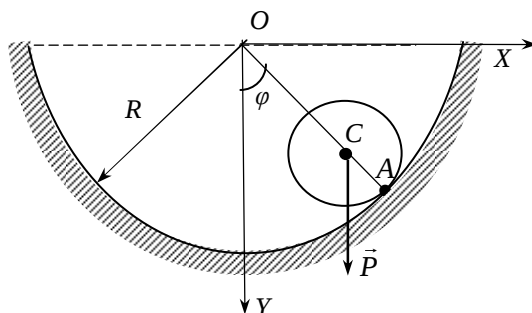


Рис. 3

Решение. Составим для решения задачи уравнение Л-П, рассматривая в качестве механической системы цилиндр. Так как он катится без проскальзывания, то связь – внутренняя поверхность полуцилиндра – является идеальной. Цилиндр не отрывается от полуцилиндра, поэтому эту связь можно считать удерживающей. Кроме того, она чисто геометрическая (голономная), а значит, удовлетворяет всем требованиям для применимости уравнений Л-П.

Единственной активной силой, действующей на цилиндр, является сила тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$. Движение цилиндра (качение без проскальзывания) полностью определяется углом φ между прямой OC и вертикальной осью OY (см. рис. 3), который мы и примем за обобщенную координату. То есть в нашей задаче $s = 1, q_1 = \varphi$.

Кинетическую энергию цилиндра посчитаем по формуле $T = J_A \omega^2 / 2$ (точка A – МЦС цилиндра). По теореме Гюйгенса $J_A = J_C + mr^2$, где $J_C = mr^2 / 2$ – его момент инерции относительно центра масс. Следовательно, $T = 3mr^2 \omega^2 / 4$. Связь ω с $\dot{\varphi}$ получим из кинематического соотношения $v_C = \dot{\varphi} OC = \dot{\varphi} (R - r)$. Поэтому $T = 3m(R - r)^2 \dot{\varphi}^2 / 4$.

Обобщенную силу Q_1 найдем, определив работу силы тяжести на возможном перемещении цилиндра, соответствующем возможному изменению $\delta\varphi$ угла φ . Эта работа равна $\delta A = P \delta y_C = P \delta[(R - r) \cos \varphi] = -P(R - r) \sin \varphi \delta\varphi$. Следовательно, $Q_1 = -P(R - r) \sin \varphi$.

Уравнение Лагранжа-II $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_1$ в нашем случае будет иметь вид: $3m(R - r)^2 \ddot{\varphi} = -mg(R - r) \sin \varphi$, или $\ddot{\varphi} + k^2 \sin \varphi = 0$, где $k^2 = 2g / 3(R - r)$.

В случае малых колебаний $\sin \varphi \approx \varphi$, и уравнение преобразуется:

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0.$$

Мы получили ДУ свободных колебаний с частотой k . Период этих колебаний равен $T = 2\pi / k = 2\pi\sqrt{3(R-r)/2g}$.

Заметим, что эту задачу мы бы могли решить, применяя общие теоремы динамики. Например, теорему о движении центра масс и теорему моментов относительно центра масс цилиндра. В этом случае, однако, мы должны были бы учесть реакцию шероховатого полуцилиндра (нормальную и силу трения). Сделайте это в качестве упражнения.

Задача 4. Два груза массами m_1 и m_2 , связанные между собой пружиной жесткости s , могут двигаться без трения по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом (рис. 4). Найти закон движения грузов, если в начальный момент времени их скорости равнялись нулю, а пружина имела длину $0.5l_0$, где l_0 – длина свободной пружины.

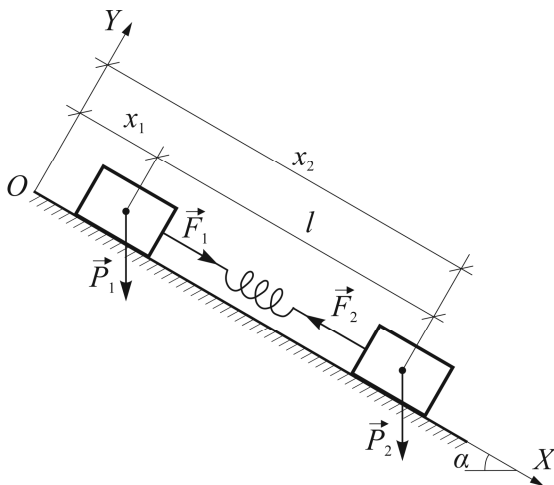


Рис. 4

Решение. В качестве механической системы рассмотрим грузы с пружиной. Тогда гладкая наклонная плоскость для нее будет идеальной голономной связью. Считая, что грузы от

плоскости не отрываются, можем считать эту связь двусторонней и применять уравнения Л-П.

К активным силам относятся силы тяжести грузов $\vec{P}_1 = m_1 \vec{g}$ и $\vec{P}_2 = m_2 \vec{g}$ и силы упругости пружины $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (см. рис. 4). Причем $F_1 = F_2 = c\lambda$, где $\lambda = l - l_0$ – удлинение пружины.

Система имеет две степени свободы, $s = 2$. В качестве обобщенных координат возьмем координаты грузов x_1 и x_2 в системе координат OXY . Точку O выберем так, чтобы в начальный момент времени $t = 0$, $x_1(0) = 0$. Тогда $x_2(0) = 0.5l_0$, а $\lambda = x_2 - x_1 - l_0$.

Кинетическая энергия системы равна $T = m_1 v_1^2 / 2 + m_2 v_2^2 / 2 = m_1 \dot{x}_1^2 / 2 + m_2 \dot{x}_2^2 / 2$. Для нахождения обобщенных сил Q_1 и Q_2 дадим системе возможное перемещение, соответствующее возможным перемещениям грузов δx_1 и δx_2 . Тогда возможная работа активных сил на этих перемещениях будет равна

$$\begin{aligned} \delta A^{akt} &= (P_1 \sin \alpha + F_1) \delta x_1 + (P_2 \sin \alpha - F_2) \delta x_2 = \\ &= (P_1 \sin \alpha + c\lambda) \delta x_1 + (P_2 \sin \alpha - c\lambda) \delta x_2. \end{aligned}$$

Следовательно, $Q_1 = P_1 \sin \alpha + c\lambda$, $Q_2 = P_2 \sin \alpha - c\lambda$.

Теперь составим уравнения Лагранжа второго рода (12):

$$m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g \sin \alpha + c\lambda; \quad m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g \sin \alpha - c\lambda. \quad (13)$$

Конечно, эти уравнения значительно проще получить из второго закона Ньютона, применив его к каждому из грузов в отдельности. Получилось, как говорят, «из пушки – по воробьям», зато мы еще раз продемонстрировали, как заряжается «пушка».

Теперь осталось проинтегрировать уравнения (13) при начальных данных $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0.5l_0$, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$. Для этого умножим первое из уравнений на $-m_2$, а второе – на m_1 и сложим их. Получим уравнение $m_1 m_2 (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -c(m_1 + m_2)\lambda$. Используя равенство $\lambda = x_2 - x_1 - l_0$, перепишем его в виде $\ddot{\lambda} + k^2 \lambda = 0$, где $k^2 = c(m_1 + m_2) / m_1 m_2$. Его решение мы знаем:

$\lambda = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt$. Из начальных условий находим: $C_1 = 0$, $C_2 = -0.5l_0$. Следовательно, мы получили

$$x_2 - x_1 = l_0 - 0.5l_0 \cos kt. \quad (14)$$

Второе соотношение для x_1 и x_2 получим, сложив уравнения (13): $m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = (m_1 + m_2)g \sin \alpha$. Перепишем последнее равенство в виде $\frac{d^2}{dt^2}(m_1 x_1 + m_2 x_2) = (m_1 + m_2)g \sin \alpha$ и дважды

проинтегрируем с учетом начальных данных. Тогда получим

$$(m_1 x_1 + m_2 x_2) = (m_1 + m_2)g \sin \alpha \cdot t^2 / 2 + m_2 l_0 / 2. \quad (15)$$

Из уравнений (14) и (15) находим закон движения грузов:

$$x_1 = g \sin \alpha \cdot t^2 / 2 - 0.5m_2 l_0 [1 - \cos kt] / (m_1 + m_2);$$

$$x_2 = g \sin \alpha \cdot t^2 / 2 + 0.5m_1 l_0 [1 - \cos kt] / (m_1 + m_2) + 0.5l_0.$$

Видим, что движение грузов складывается из двух движений – равномерно ускоренного движения с ускорением $g \sin \alpha$, обусловленного силой тяжести, и гармонического колебания с частотой k , обусловленного действием пружины.

1.4. Уравнения Л-П в случае консервативных систем

Напомним, что под консервативной системой мы понимаем механическую систему, в которой все действующие на нее силы $\vec{F}_k$ консервативны, т.е. имеют потенциал. Напомним еще, что связь между $\vec{F}_k$ и потенциальной энергией Π системы дается формулами

$$F_{kx} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_k}; \quad F_{ky} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_k}; \quad F_{kz} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_k}. \quad (16)$$

Покажем, что в этом случае обобщенные силы Q_j ($j = 1, \dots, s$) связаны с потенциальной энергией системы формулами

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, s. \quad (17)$$

То есть в случае консервативной системы обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_j , равна взятой

со знаком минус частной производной от потенциальной энергии механической системы по этой координате.

Действительно,

$$Q_j = \sum_k \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = \sum_k \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right) =$$

$$= - \sum_k \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_k} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right)$$

Но, так как потенциальная энергия системы является функцией декартовых координат точек системы ($\Pi = \Pi(x_k, y_k, z_k)$), а последние, в свою очередь, являются функциями ее обобщенных координат ($x_k = x_k(q_1, \dots, q_s, t)$, $y_k = y_k(q_1, \dots, q_s, t)$, $z_k = z_k(q_1, \dots, q_s, t)$), то, по правилам дифференцирования сложной функции, $\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = \sum_k \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_k} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right)$, откуда и следует формула (17).

Уравнения Л-П для консервативных систем тогда принимают вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, s. \quad (18)$$

Если мы введем функцию Лагранжа $L = T - \Pi$ и учтем, что потенциальная энергия Π не зависит от обобщенных скоростей, то уравнения (18) можно переписать в виде:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, s. \quad (19)$$

Уравнения (19) называются *уравнениями Лагранжа второго рода для консервативных систем*. Они широко используются, в частности, при изучении свободных колебаний механических систем с одной или несколькими степенями свободы.

Задача 5. Определить период свободных колебаний груза массой m , лежащего на двухопорной балке АВ (рис. 5). Расстояния груза от опор балки равны a и b . Модуль упругости мате-

риала балки равен E , момент инерции поперечного сечения J . Весом балки пренебречь.

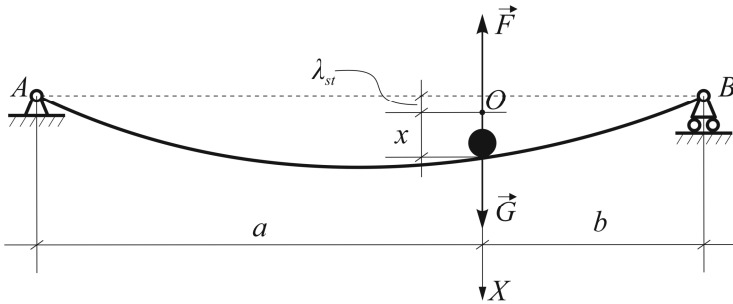


Рис. 5

Решение. В качестве механической системы рассмотрим груз вместе с балкой. Связями для нее будут неподвижный шарнир A и подвижный шарнир B . Пренебрегая трением в шарнирах и считая шарнир B удерживающим, видим, что все условия для применимости уравнений Л-П выполнены.

Активными силами, действующими на систему, будут сила тяжести груза $\vec{G} = m\vec{g}$ и сила упругости балки $\vec{F}$. Обе силы являются консервативными, поэтому уравнение (19) применимо.

Система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату примем перемещение груза x , отсчитываемое от положения его равновесия.

Кинетическая энергия системы будет равна кинетической энергии груза (весом балки пренебрегаем) $T = mv^2 / 2 = m\dot{x}^2 / 2$, $m = G / g$. Потенциальная энергия определяется как сумма потенциальной энергии силы тяжести груза и потенциальной энергии силы упругости балки:

$$\Pi = -Gx + [c(\lambda_{st} + x)^2 / 2 - c\lambda_{st}^2 / 2], \quad (20)$$

где c – жесткость балки, а λ_{st} – ее статический прогиб. Так как в состоянии покоя $G = c\lambda_{st}$, то из уравнения (19) следует, что $\Pi = cx^2 / 2$. Тогда функция Лагранжа $L = T - \Pi = m\dot{x}^2 / 2 - cx^2 / 2$ и уравнение (19) преобразуется к виду:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \quad (21)$$

где $k^2 = c/m$. Уравнение (21) нам хорошо знакомо и представляет ДУ свободных колебаний груза с частотой k . Период этих колебаний $T_G = 2\pi/k$. Воспользовавшись еще формулой $c = 3EJ(a+b)/a^2b^2$, известной из курса сопротивления материалов, получим, что $T_G = 2\pi ab\sqrt{G/3EJg(a+b)}$.

Задача 6 (колебания эллиптического маятника). Ползун A массой m_A может перемещаться вдоль гладких горизонтальных направляющих (рис. 6). Маятник B имеет массу m_B , момент инерции J относительно точки подвеса O_1 и расстояние $O_1O_2 = h$ от точки подвеса до своего центра масс O_2 . Составить ДУ движения системы и определить закон движения каждого из тел в случае малых углов отклонения маятника от вертикали, если начальные скорости равны нулю.

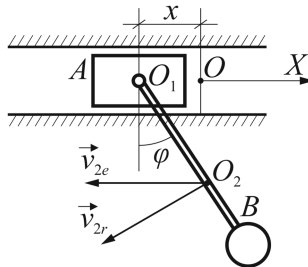


Рис. 6

Решение. В качестве механической системы рассмотрим оба тела вместе: ползун и маятник. Она будет подчинена действию двух связей – внешней связью для нее будут гладкие направляющие, а внутренней – идеальный шарнир O_1 . Обе связи таковы, что применять уравнения Л-II можно.

Система имеет две степени свободы, $s = 2$. В качестве обобщенных координат возьмем перемещение x ползуна и угол φ маятника с вертикалью.

Ползун движется поступательно, поэтому его кинетическая энергия равна $T_A = m_A v_A^2 / 2 = m_A \dot{x}^2 / 2$. Маятник совершает плос-

кое движение, и для вычисления его кинетической энергии воспользуемся теоремой Кенига: $T_B = m_B v_2^2 / 2 + J_2 \omega^2 / 2$. Здесь $\omega = \dot{\varphi}$, v_2 – скорость центра масс O_2 маятника, а J_2 – его момент инерции относительно центра масс O_2 . Воспользуемся еще кинематической формулой $\vec{v}_2 = \vec{v}_{2r} + \vec{v}_{2e} = \vec{v}_{2r} + \vec{v}_A$. Тогда $v_2^2 = (v_A + \omega h \cos \varphi)^2 + (\omega h \sin \varphi)^2$. Учитывая теперь формулу Гюйгенса $J = J_2 + m_B h^2$, получим, что

$$T_B = m_B \dot{x}^2 / 2 + m_B h \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + J \dot{\varphi}^2 / 2. \text{ Следовательно,}$$

$$T = T_A + T_B = (m_A + m_B) \dot{x}^2 / 2 + m_B h \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + J \dot{\varphi}^2 / 2.$$

Так как сила тяжести ползуна при его горизонтальном перемещении работы не совершает, то потенциальная энергия системы будет равна потенциальной энергии силы тяжести маятника, т.е.

$$\Pi = -m_B g h \cos \varphi.$$

Уравнения (19) для нашей задачи примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[(m_A + m_B) \dot{x} + m_B h \dot{\varphi} \cos \varphi] &= 0; \\ J \ddot{\varphi} + m_B h \ddot{x} \cos \varphi + m_B h g \sin \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Заметим, что первое из уравнений (22) мы могли бы получить, воспользовавшись теоремой о движении центра масс системы в направлении оси x . Интегрируя его, найдем, с учетом начальных условий $\dot{x}(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$, что $(m_A + m_B) \dot{x} + m_B \dot{\varphi} \cos \varphi = 0$,

или $\frac{d}{dt}[(m_A + m_B)x + m_B h \sin \varphi] = 0$. Следовательно,

$$(m_A + m_B)x + m_B h \sin \varphi = C.$$

Пусть при $t = 0$ маятник отклонен на угол $\varphi(0) = \varphi_0$. Воспользуемся произвольностью выбора начала O оси x так, чтобы $(m_A + m_B)x(0) + m_B h \sin \varphi_0 = 0$. Тогда $C = 0$, и мы получаем связь между величинами x и φ :

$$(m_A + m_B)x + m_B h \sin \varphi = 0. \quad (23)$$

Второе дифференциальное уравнение (22) рассмотрим с учетом малости угла отклонения маятника от вертикали:

$\varphi \ll 1$, $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \approx 1$. Тогда из уравнения (23) $x = -m_B h \sin \varphi / (m_A + m_B)$. Дифференцируя это выражение дважды по времени и подставляя значение $\ddot{x}$ во второе уравнение (22), получим, с учетом малости угла φ ,

$$(J - h^2 m_B^2 / (m_A + m_B)) \ddot{\varphi} + m_B h g \varphi = 0. \quad (24)$$

Так как

$$\begin{aligned} J - h^2 m_B^2 / (m_A + m_B) &= J_2 + m_B h^2 - h^2 m_B^2 / (m_A + m_B) = \\ &= J_2 + m_A m_B h^2 / (m_A + m_B) > 0, \end{aligned}$$

то уравнение (24) описывает гармонические колебания $\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0$ с частотой $k = m_B h g / (J - h^2 m_B^2 / (m_A + m_B))$. Его решение при начальных данных $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$ имеет вид $\varphi = \varphi_0 \cos kt$.

При движении системы центр тяжести маятника $O_2(x_2, y_2)$ движется по эллипсу:

$$x_2 = x + h \sin \varphi = (m_A / (m_A + m_B)) h \sin \varphi; \quad y_2 = -h \cos \varphi,$$

поэтому маятник называют эллиптическим.

1.5. Заключение

Подведем итоги.

1. Для движущихся механических систем с идеальными двусторонними и голономными связями справедлив принцип Даламбера–Лагранжа:

$$\delta A^{akt} + \delta A^{in} = \sum_k \vec{F}_k^{akt} \cdot \delta \vec{s}_k + \sum_k \vec{F}_k^{in} \cdot \delta \vec{s}_k = 0,$$

т.е. сумма работ всех активных сил и сил инерции на любом возможном перемещении системы равна нулю.

2. В обобщенных координатах принцип Даламбера–Лагранжа принимает вид *уравнений Лагранжа второго рода (Л-II)*:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j=1, \dots, s.$$

3. Уравнения Л-П представляют собой систему из s дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат $q_1, \dots, q_s$ (s – число степеней свободы; $T = T(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$ – кинетическая энергия системы; $Q_j, j = 1, \dots, s$ – обобщенные силы).

4. Для сложных механических систем уравнения Л-П являются основным инструментом исследования их движения.

5. Для консервативных систем уравнения Л-П имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, s,$$

где $\Pi(t, q_1, \dots, q_s)$ – потенциальная энергия системы.

1.6. Вопросы для самоконтроля

1. Какое уравнение называют общим уравнением динамики?
2. В чем состоит принцип Даламбера–Лагранжа? Почему его так называют?
3. При каких связях, действующих на механическую систему, можно применять принцип Даламбера–Лагранжа?
4. Как можно применять принцип Даламбера–Лагранжа, если среди связей есть связи с трением? Как его применять для определения реакции идеальной связи?
5. Можно ли применять принцип Даламбера–Лагранжа, если среди связей есть неудерживающие?
6. Какие величины называют обобщенными силами инерции?
7. Как записывается общее уравнение динамики в обобщенных координатах?
8. Какие уравнения называют уравнениями Лагранжа второго рода (кратко Л-П)? Какие – уравнениями Лагранжа первого рода?
9. В чем состоит основная (обратная) задача динамики механической системы, движение которой описывается обобщенными координатами?

10. Чему равно число уравнений Л-П для конкретной механической системы?
11. Для каких механических систем применять уравнения Л-П предпочтительнее, по сравнению с применением общих теорем динамики? В чем состоят их преимущества?
12. Функцией каких аргументов нужно представить кинетическую энергию системы при составлении уравнений Л-П?
13. В какой последовательности вы будете решать задачи на применение уравнений Л-П?
14. Как преобразуются уравнения Л-П в случае консервативных систем? Какую функцию называют функцией Лагранжа?

1.7. Задачи и упражнения

У.1. Применяя принцип Даламбера–Лагранжа, определить ускорение кузова тележки, если к ней приложена горизонтальная сила $\vec{F}$. Масса кузова тележки m_1 , масса каждого из ее четырех колес m_2 , колеса считать сплошными однородными дисками радиуса r , катящимися без проскальзывания по горизонтальным рельсам.

У.2. Составить уравнение Л-П движения маятника, состоящего из груза A массы m , подвешенного на нити, накрученной на неподвижный барабан радиуса R . Длина свисающей в положении равновесия части нити равна l . За обобщенную координату принять угол φ отклонения маятника от вертикали.

У.3. Груз A массы m скользит по гладкой боковой грани призмы B массы M , образующей угол α с гладкой горизонтальной плоскостью. Определить ускорение призмы B . Решите эту задачу двумя способами – используя уравнения Л-П и методы классической механики.

2. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

2.1. Варианты заданий на составление уравнений Лагранжа второго рода

Варианты 1–6 (схема 1)

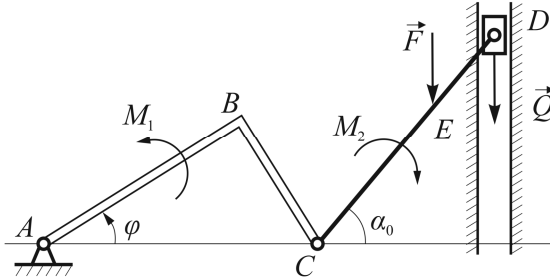


Схема 1

Двухсоставная конструкция расположена в горизонтальной плоскости и состоит из угольника ABC ($\angle ABC = 90^\circ$) и стержня CD , соединенных идеальным шарниром. Точка A закреплена идеальным шарниром, а точка D может скользить по гладким направляющим. На схеме 1 показано начальное положение конструкции (при $t = 0$), определяемое углом α_0 . В дальнейшем, при $t > 0$, ее движение определяется действием постоянных сил $\vec{Q}$ и $\vec{F}$ ($\vec{Q}$ и $\vec{F}$ параллельны) и постоянных пар сил с моментами M_1 и M_2 таких, что угол $\varphi(t)$ возрастает со временем. Массы $m_{AB} = m_1$, $m_{BC} = m_2$, $m_{CD} = 0$, длины $AB = l_1$, $BC = l_2$, $CD = l_3$, $DE = l_3/4$. Размерами и массами остальных частей конструкции пренебречь. Стержни AB , BC считать однородными. Взяв за обобщенную координату угол φ , составить уравнение Лагранжа второго рода для моментов времени, пока $\angle ACD < \pi$.

Вариант 1. $M_1 \neq 0$, $M_2 = 0$, $Q = 0$, $F \neq 0$.

Вариант 2. $M_1 = 0$, $M_2 \neq 0$, $Q = 0$, $F \neq 0$.

Вариант 3. $M_1 = 0$, $M_2 = 0$, $Q \neq 0$, $F \neq 0$.

Вариант 4. $M_1 \neq 0, M_2 = 0, Q \neq 0, F = 0$.

Вариант 5. $M_1 = 0, M_2 \neq 0, Q \neq 0, F = 0$.

Вариант 6. $M_1 \neq 0, M_2 \neq 0, Q = 0, F = 0$.

Варианты 7–12 (схема 2)

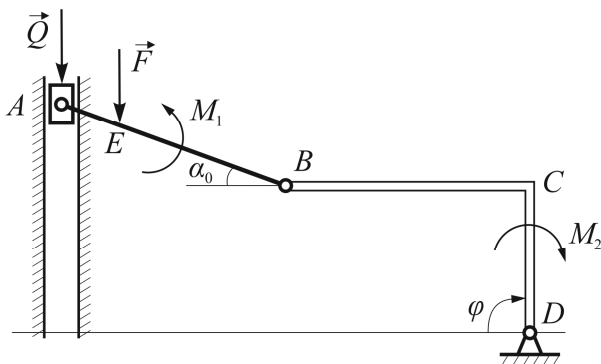


Схема 2

Двухсоставная конструкция расположена в горизонтальной плоскости и состоит из стержня AB и угольника BCD ($\angle BCD = 90^\circ$), соединённых идеальным шарниром. Точка D закреплена идеальным шарниром, а точка A может скользить по гладким направляющим. На схеме 2 показано начальное положение конструкции (при $t = 0$), определяемое углом α_0 . В дальнейшем, при $t > 0$, её движение определяется действием постоянных сил $\vec{Q}$ и $\vec{F}$ ($\vec{Q}$ и $\vec{F}$ параллельны) и постоянных пар сил с моментами M_1 и M_2 таких, что угол $\varphi(t)$ возрастает со временем. Массы $m_{AB} = 0$, $m_{BC} = m_2$, $m_{CD} = m_3$, длины $AB = l_1$, $AE = l_1/4$, $BC = l_2$, $CD = l_3$. Размерами и массами остальных частей конструкции пренебречь. Стержни BC , CD считать однородными, а угол $\alpha_0 < \arctg(l_3/l_2)$. Взяв за обобщённую координату угол φ , составить уравнение Лагранжа второго рода для следующих вариантов:

Вариант 7. $M_1 \neq 0, M_2 = 0, Q = 0, F \neq 0$.

Вариант 8. $M_1 = 0, M_2 \neq 0, Q = 0, F \neq 0$.

Вариант 9. $M_1 = 0, M_2 = 0, Q \neq 0, F \neq 0$.

Вариант 10. $M_1 \neq 0, M_2 \neq 0, Q = 0, F = 0$.

Вариант 11. $M_1 = 0, M_2 \neq 0, Q \neq 0, F = 0$.

Вариант 12. $M_1 \neq 0, M_2 = 0, Q \neq 0, F = 0$.

Варианты 13–18 (схема 3)

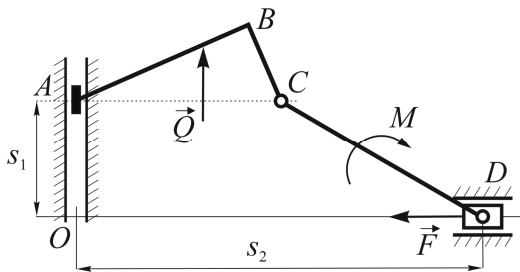


Схема 3

Двухсоставная конструкция расположена в горизонтальной плоскости и состоит из угольника ABC ($\angle ABC = 90^\circ$) и стержня CD , соединенных идеальным шарниром. Точки A и D могут скользить по гладким направляющим. На схеме 3 показано начальное положение конструкции (при $t = 0$), определяемое расстояниями $s_1(0) = s_{10}$, $s_2(0) = s_{20}$. В дальнейшем, при $t > 0$, ее движение определяется действием постоянных сил $\vec{Q}$ и $\vec{F}$ и постоянной пары сил с моментом M таких, что расстояние $s_1(t)$ возрастает со временем. Массы $m_{AB} = m_1$, $m_{BC} = m_2$, $m_{CD} = m_3$, длины $AB = l_1$, $BC = l_2$, $CD = l_3$. Размерами и массами остальных частей конструкции пренебречь. Стержни AB , BC , CD считать однородными.

Вариант 13. Полагая $M \neq 0, Q = 0, F = 0$, составить уравнение Лагранжа второго рода, взяв за обобщенную координату расстояние s_1 .

Вариант 14. Полагая $M = 0, Q \neq 0, F = 0$, составить уравнение Лагранжа второго рода, взяв за обобщенную координату расстояние s_1 .

Вариант 15. Полагая $M = 0, Q = 0, F \neq 0$, составить уравнение Лагранжа второго рода, взяв за обобщенную координату расстояние s_1 .

Вариант 16. Полагая $M \neq 0, Q = 0, F = 0$, составить уравнение Лагранжа второго рода, взяв за обобщенную координату расстояние s_2 .

Вариант 17. Полагая $M = 0, Q \neq 0, F = 0$, составить уравнение Лагранжа второго рода, взяв за обобщенную координату расстояние s_2 .

Вариант 18. Полагая $M = 0, Q = 0, F \neq 0$, составить уравнение Лагранжа второго рода, взяв за обобщенную координату расстояние s_2 .

Варианты 19–24 (схема 4)

Двухсоставная конструкция расположена в горизонтальной плоскости и состоит из стержня AB и угольника BCD ($\angle BCD = 90^\circ$), соединенных идеальным шарниром. Точки A и D могут скользить по гладким направляющим. На схеме 4 показано начальное положение конструкции (при $t = 0$), определяемое расстояниями $s_1(0) = s_{10}$, $s_2(0) = s_{20}$. В дальнейшем, при $t > 0$, ее движение определяется действием постоянных сил $\vec{Q}$ и $\vec{F}$ и постоянной пары сил с моментом M таких, что расстояние $s_1(t)$

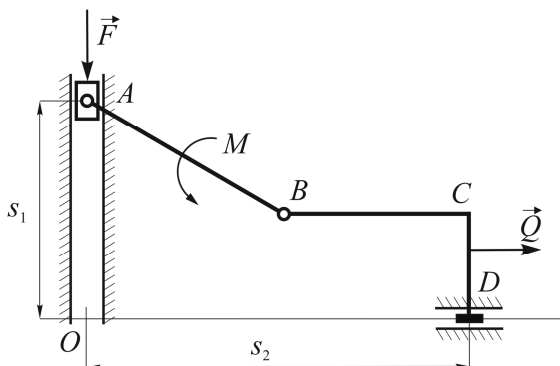


Схема 4

убывает со временем. Массы $m_{AB} = m_1$, $m_{BC} = m_2$, $m_{CD} = m_3$, длины $AB = l_1$, $BC = l_2$, $CD = l_3$. Размерами и массами остальных частей конструкции пренебречь. Стержни AB , BC , CD считать однородными.

Вариант 19. Полагая $M \neq 0$, $Q = 0$, $F = 0$, составить уравнение Лагранжа второго рода, взяв за обобщенную координату расстояние s_1 .

Вариант 20. Полагая $M = 0$, $Q \neq 0$, $F = 0$, составить уравнение Лагранжа второго рода, взяв за обобщенную координату расстояние s_1 .

Вариант 21. Полагая $M = 0$, $Q = 0$, $F \neq 0$, составить уравнение Лагранжа второго рода, взяв за обобщенную координату расстояние s_1 .

Вариант 22. Полагая $M \neq 0$, $Q = 0$, $F = 0$, составить уравнение Лагранжа второго рода, взяв за обобщенную координату расстояние s_2 .

Вариант 23. Полагая $M = 0$, $Q \neq 0$, $F = 0$, составить уравнение Лагранжа второго рода, взяв за обобщенную координату расстояние s_2 .

Вариант 24. Полагая $M = 0, Q = 0, F \neq 0$, составить уравнение Лагранжа второго рода, взяв за обобщенную координату расстояние s_2 .

Варианты 25–30 (схема 5)

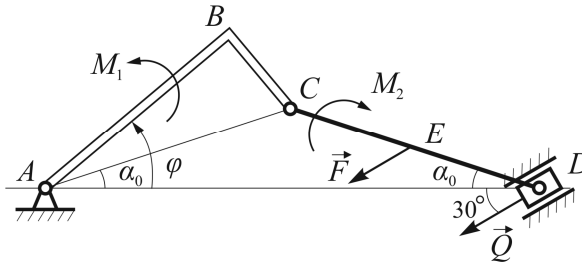


Схема 5

Двухсоставная конструкция расположена в горизонтальной плоскости и состоит из угольника ABC ($\angle ABC = 90^\circ$) и стержня CD , соединенных идеальным шарниром. Точка A закреплена идеальным шарниром, а точка D может скользить по гладким направляющим. На схеме 5 показано начальное положение конструкции (при $t = 0$), определяемое углом α_0 . В дальнейшем, при $t > 0$, ее движение определяется действием постоянных сил $\vec{Q}$ и $\vec{F}$ ($\vec{Q}$ и $\vec{F}$ параллельны) и постоянных пар сил с моментами M_1 и M_2 таких, что угол $\varphi(t)$ возрастает со временем. Массы $m_{AB} = m_1$, $m_{BC} = m_2$, $m_{CD} = 0$, длины $AB = l_1$, $BC = l_2$, $CE = DE$. Размерами и массами остальных частей конструкции пренебречь. Стержни AB , BC считать однородными. Взяв за обобщенную координату угол φ , составить уравнение Лагранжа второго рода для следующих вариантов:

Вариант 25. $M_1 \neq 0, M_2 = 0, Q = 0, F \neq 0$.

Вариант 26. $M_1 = 0, M_2 \neq 0, Q = 0, F \neq 0$.

Вариант 27. $M_1 = 0, M_2 = 0, Q \neq 0, F \neq 0$.

Вариант 28. $M_1 \neq 0, M_2 = 0, Q \neq 0, F = 0$.

Вариант 29. $M_1 = 0, M_2 \neq 0, Q \neq 0, F = 0$.

Вариант 30. $M_1 \neq 0, M_2 \neq 0, Q = 0, F = 0$.

2.2. Указания к выполнению заданий

Для выполнения задания следует воспользоваться рекомендациями, изложенными в п. 1.3. В качестве механической системы во всех вариантах задания выбрать всю конструкцию, изображенную на схемах. Прежде чем приступить к решению, убедиться, что все связи, действующие на рассматриваемую конструкцию, являются идеальными, удерживающими и голономными. Далее нужно нарисовать схему конструкции для произвольного момента времени $t > 0$. Теперь можно приступить к выполнению самого задания в следующей последовательности:

1. Изобразить все активные силы, действующие на конструкцию.

2. Ввести обобщенную координату. Так как число степеней свободы в каждом из заданий $s = 1$, то обобщенная координата q будет тоже одна (либо φ , либо s_1 , либо s_2 – в зависимости от варианта).

3. Вычислить кинетическую энергию системы как функцию обобщенной координаты, обобщенной скорости и времени, т.е. получить зависимость $T = T(q, \dot{q}, t)$.

4. Найти обобщенную силу Q_q . Для этого нужно сообщить конструкции возможное перемещение δq , составить сумму возможных работ всех активных сил $\delta A = \sum_k \vec{F}_k^{akt} \cdot \vec{\delta}_k$ и выразить

все $\vec{\delta}_k$ через δq . Записывая возможную работу δA_j в виде $\delta A = \sum_k \vec{F}_k^{akt} \cdot \vec{\delta}_k = Q_q \delta q$, получить обобщенную силу Q_q .

5. Составить уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q_q.$$

2.3. Формулы для вычисления кинетической энергии и работы сил на возможном перемещении системы

Приведем формулы для вычисления кинетической энергии и работы сил на возможном перемещении, которые могут понадобиться при выполнении контрольных заданий.

Формулы для вычисления кинетической энергии:

– для поступательного движения твердого тела

$T = Mv^2 / 2$, где M – масса тела; v – его скорость;

– для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, $T = J\omega^2 / 2$, где J – момент инерции тела относительно оси вращения; ω – его угловая скорость;

– для плоского движения твердого тела

$T = Mv_C^2 / 2 + J_C\omega^2 / 2$, где M – масса тела; v_C – скорость его центра масс; J_C – момент инерции тела относительно центра масс C ; ω – угловая скорость тела. Если точка P – мгновенный центр скоростей тела, то кинетическую энергию можно вычислять по формуле $T = J_P\omega^2 / 2$, где J_P – момент инерции тела относительно точки P . При этом $J_P = J_C + M \cdot (PC)^2$.

Формулы для вычисления работы сил на возможном перемещении системы

Работа силы $\vec{F}$ на возможном перемещении $\delta\vec{s}$ точки приложения этой силы равна $\delta A = \vec{F} \cdot \delta\vec{s}$. Расписывая скалярное произведение, получим:

$$\delta A = F \cdot \delta s \cdot \cos \alpha, \text{ или } \delta A = F_x \cdot \delta x + F_y \cdot \delta y + F_z \cdot \delta z,$$

где $\delta\vec{s} = (\delta x, \delta y, \delta z)$; $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$; α – угол между векторами $\vec{F}$ и $\delta\vec{s}$ (рис. 7).

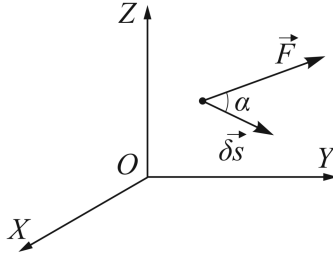


Рис. 7

При вращательном движении твердого тела работа пары сил с моментом M равна $\delta A = M \cdot \delta \varphi$, где $\delta \varphi$ – возможный поворот тела относительно его оси вращения. Работа силы $\vec{F}$ на возможном перемещении $\vec{\delta s}$ равна $\delta A = \vec{F} \cdot \vec{\delta s} = M_z(\vec{F}) \cdot \delta \varphi$, где $M_z(\vec{F})$ – момент силы $\vec{F}$ относительно оси z вращения тела.

При плоском движении твердого тела работа пары сил с моментом M равна $\delta A = M \cdot \delta \varphi_P$, где $\delta \varphi_P$ – возможный поворот тела относительно оси, проходящей через мгновенный центр скоростей тела (точку P). Работа силы $\vec{F}$ на возможном перемещении $\vec{\delta s}$ равна $\delta A = \vec{F} \cdot \vec{\delta s} = M_P(\vec{F}) \cdot \delta \varphi_P$, где $M_P(\vec{F})$ – момент силы $\vec{F}$ относительно оси, проходящей через мгновенный центр скоростей тела (точку P).

Напомним еще, что *мгновенный центр скоростей* – это точка (точка P на рис. 8), скорость которой в данный момент времени равна нулю. Находится эта точка на пересечении перпендикуляров, проведенных к скоростям точек (см. рис. 8). Для точки P справедливо соотношение $\omega = v_A / AP$ для любой точки A тела, причем вектор скорости $\vec{v}_A$ перпендикулярен отрезку AP .

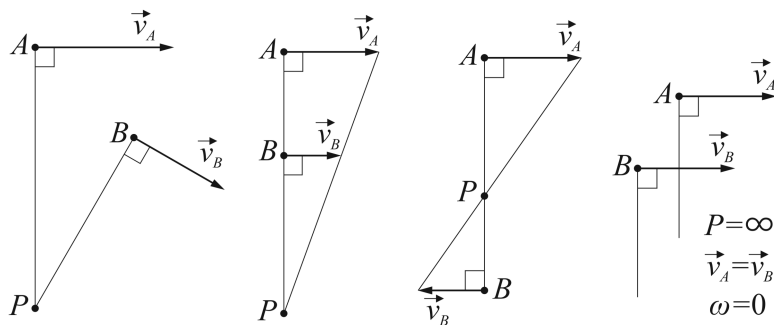


Рис. 8

2.4. Пример выполнения задания

Пример. На схеме 6а изображена двухсоставная рама $ABCDE$ в начальный момент времени $t = 0$. Рама расположена в горизонтальной плоскости. Размеры и массы ее составных частей равны $AB = DE = l$, $BC = CD = l_1$, $m_{AB} = m$, $m_{BC} = m_1$, $m_{CD} = m_{DE} = 0$. Действующие на раму постоянные пары сил с моментами M_1 , M_2 и постоянная сила Q таковы, что $\varphi(t)$ возрастает со временем. Трением в неподвижных A , C и подвижном E шарнирах пренебречь. Составить уравнение Лагранжа второго рода, взяв за обобщенную координату угол φ .

Решение. Решим пример в соответствии с изложенными выше указаниями.

В качестве механической системы рассмотрим всю раму $ABCDE$. Все связи – неподвижные шарниры A , C и подвижный шарнир E – по условию задачи идеальные (трением в шарнирах пренебречь), голономные и удерживающие. Значит, принцип Даламбера–Лагранжа применим.

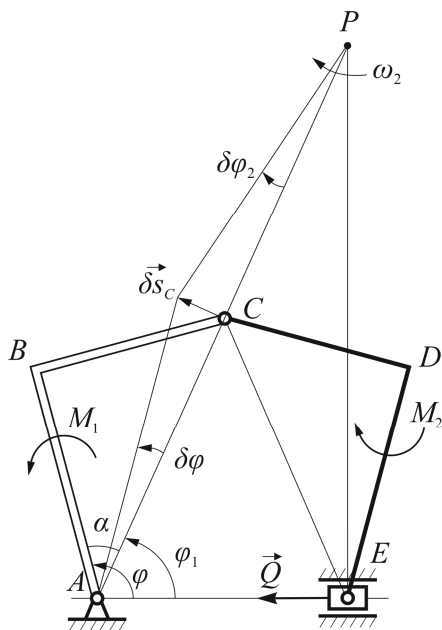
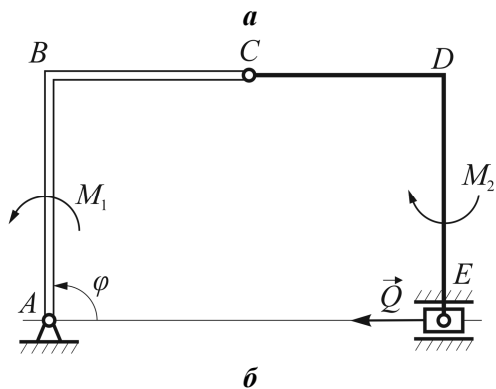


Схема 6

Изобразим раму в произвольный момент времени t (схема бб) и начнем решение задачи.

1. Активными силами, действующими на раму, являются два момента M_1, M_2 , сила $\vec{Q}$, а также две силы тяжести $\vec{P}_{AB}$ и $\vec{P}_{BC}$. Так как рама находится в горизонтальной плоскости, то $\vec{P}_{AB}$ и $\vec{P}_{BC}$ направлены перпендикулярно плоскости чертежа (на схеме бб они не показаны).

2. Число степеней свободы рамы $s = 1$, в качестве обобщенной координаты берем $q_1 = \varphi$.

3. Вычислим кинетическую энергию рамы $T = T(\varphi, \dot{\varphi}, t)$: так как $m_{CD} = m_{DE} = 0$, то (см. п. 2.3) $T = T_{AB} + T_{BC} = J_{AB}^A \dot{\varphi}^2 / 2 + J_{BC}^A \dot{\varphi}^2 / 2$, где J_{AB}^A, J_{BC}^A – моменты инерции AB и BC относительно вертикальной оси вращения, проходящей через точку A . Считая AB и BC однородными стержнями и используя теорему Гюйгенса, запишем: $J_{AB}^A = ml^2 / 3, J_{BC}^A = J_{BC}^{C_1} + m_1(AC_1)^2 = m_1 l_1^2 / 12 + m_1(l^2 + l_1^2 / 4)$. Следовательно, $T = \mu \dot{\varphi}^2$, где $\mu = (ml^2 + m_1(3l^2 + l_1^2)) / 6 = \text{const}$.

4. Найдем обобщенную силу Q_φ . Дадим возможное перемещение раме $\delta\varphi$ (против часовой стрелки). Работа активных сил на этом перемещении (см. п. 2.3) будет равна $\delta A = M_1 \delta\varphi + M_2 \delta\varphi_2 + Q \cdot PE \cdot \delta\varphi_2$, где P – мгновенный центр скоростей CDE , а $\delta\varphi_2$ найдется из соотношения $\delta s_C = AC \delta\varphi = PC \delta\varphi_2$, т.е. $\delta\varphi_2 = (AC / PC) \delta\varphi$ (см. схему бб). Так как, по условиям задачи, $CE = AC$, то и $PC = AC$. При этом $PE = 2AC \cos \varphi_1$, $\varphi_1 = \varphi - \alpha$, $\alpha = \text{arctg}(l_1 / l)$. Следовательно, $\delta A = (M_1 + M_2 + 2Q\sqrt{l^2 + l_1^2} \cos(\varphi - \text{arctg}(l_1 / l))) \delta\varphi$. Так как $\delta A = Q_\varphi \delta\varphi$, то $Q_\varphi = M_1 + M_2 + 2Q\sqrt{l^2 + l_1^2} \cos(\varphi - \text{arctg}(l_1 / l))$.

5. Уравнение Лагранжа второго рода $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi$

запишется в виде $2\mu \ddot{\varphi} = Q_\varphi$, или

$$(ml^2 + m_1(l^2 + l_1^2 / 3)) \ddot{\varphi} = M_1 + M_2 + 2Q\sqrt{l^2 + l_1^2} \cos(\varphi - \text{arctg}(l_1 / l)).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Учебники и учебные пособия

1. Бутенин Н. В. Курс теоретической механики / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – М. : Наука, 1985. – Т. 2. – 544 с.
2. Яблонский А. А. Курс теоретической механики. Часть II. Динамика / А. А. Яблонский. – М. : Высшая школа, 1977. – 430 с.
3. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики / С. М. Тарг. – М. : Высшая школа, 1998. – 416 с.

Сборники задач и заданий

4. Мещерский И. В. Задачи по теоретической механике / И. В. Мещерский. – СПб. : Лань, 1998. – 448 с.
5. Бать М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – СПб. : Политехника, 1995. – Т. 3. – 488 с.
6. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / под общ. ред. А. А. Яблонского. – М. : Интеграл-Пресс, 1998. – 382 с.

Составитель

Владимир Алексеевич Юдин

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ.
УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

Методические указания и контрольные задания
для студентов всех направлений
всех форм обучения

Редактор Э.Е. Полякова

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 54.НС.05.953.П.006252.06.06 от 26.06.2006 г.
Подписано к печати 26.06.2013. Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$ д.л.
Гарнитура Таймс. Бумага офсетная. Ризография.
Объем 2,5 п.л. Тираж 154 экз. Заказ №

Новосибирский государственный архитектурно-строительный
университет (Сибстрин)
630008, Новосибирск, ул. Ленинградская, 113

Отпечатано мастерской оперативной полиграфии
НГАСУ (Сибстрин)