МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (СИБСТРИН)

Кафедра теоретической механики

КОЛЕБАНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Методические указания к практическим занятиям
для студентов, обучающихся по всем направлениям
подготовки и специальности 08.05.01 «Строительство
уникальных зданий и сооружений»

НОВОСИБИРСК 2017

Методические указания разработаны
д-ром физ.-мат. наук, профессором В.Я. Рудяком,
канд. физ.-мат. наук, доцентом А.А. Белкиным,
канд. физ.-мат. наук, доцентом С.Л. Краснолуцким

Утверждены учебно-методической комиссией
строительного факультета
11 сентября 2017 года

Рецензенты:
– П.В. Александров, канд. физ.-мат. наук,
доцент НГАСУ (Сибстрин);
– Е.В. Лежнев, канд. техн. наук, доцент НГТУ

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Методические указания посвящены рассмотрению колебательного движения материальной точки. Данная тема является одной из наиболее важных в разделе «Динамика» курса теоретической механики.

При разработке указаний авторы опирались на новые образовательные стандарты для бакалавров, теоретический материал, изложенный в рекомендуемых студентам учебниках, собственный опыт чтения лекций и проведения практических занятий по теоретической механике, ряд методических указаний, использовавшихся ранее. Включенные в контрольные задания задачи в большей степени соответствуют учебным программам бакалавров строительных специальностей.

Цель указаний – помочь студентам освоить теоретический материал и приобрести навыки применения теоретических положений к решению задач на колебательное движение материальной точки. Теоретический материал включает описание различных типов колебательного движения, контрольное задание содержит задачи на свободные незатухающие колебания точки. Задание позволяет для достаточно простых ситуаций научиться связывать удлинение пружины с координатой груза, формулировать начальные условия и использовать их в решении задачи, уяснить смысл статического удлинения. Для настоящих указаний были разработаны новые варианты контрольных задач.

Все принципиальные моменты выполнения индивидуального задания подробно изложены в приведенном примере. Прежде чем приступить к выполнению задания, студенту следует ознакомиться с соответствующим теоретическим материалом и разобрать пример решения задачи.

1. ОСНОВЫ ОПИСАНИЯ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТОЧКИ

1.1. Свободные незатухающие колебания (без учета сопротивления среды)

Рассмотрим колебания материальной точки (груза) на пружине (рис. 1.1), считая сначала, что сила тяжести не действует, и пренебрегая сопротивлением движению. Ось Ox направим в сторону удлинения пружины, а начало координат O возьмем в нижнем конце недеформированной пружины (l_0 – длина недеформированной пружины). Тогда на груз действует единственная сила – сила упругости пружины $\mathbf{F}$, которая является *восстанавливающей* силой, поскольку она стремится вернуть груз в положение равновесия. Модуль силы упругости определяется законом Гука и при малых удлинениях пружины

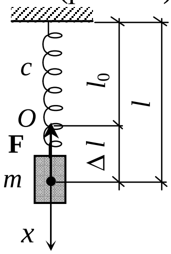

Рис. 1.1

$$\mathbf{F} = -c\Delta l\,, \tag{1.1}$$

где c – коэффициент жесткости пружины (он показывает, какая сила необходима для растяжения пружины на один метр); $\Delta l = l - l_0$ – удлинение пружины.

В выбранной нами системе координат удлинение равно координате груза $\Delta l = x$, проектируя на ось x второй закон Ньютона, получим дифференциальное уравнение (*ДУ) свободных колебаний*

$$m\ddot{x} = -cx \quad \text{или} \quad \ddot{x} + k^2 x = 0\,, \tag{1.2}$$

где $c/m = k^2$. Его общее решение имеет вид

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt \qquad \text{или} \qquad x = A\sin(kt + \alpha)\,. \tag{1.3}$$

Такое движение материальной точки называется *гармоническими колебаниями*. Величина A, равная максимальному отклонению точки от положения равновесия, называется *амплитудой колебаний.* Величина $\varphi = kt + \alpha$ называется *фазой,* при этом α – *начальной фазой колебаний.* Величину k называют *частотой*. Промежуток времени $T = 2\pi / k$, в течение которого совершается одно полное колебание, называется *периодом.*

Общее решение формул (1.3) зависит от двух произвольных постоянных, которые определяются из начальных данных: начального положения груза $x(0) = x_0$, и проекции на ось x его начальной скорости $\mathrm{v}_x(0) = \mathrm{v}_{0x}$. Легко убедиться, что

$$A = \sqrt{x_0^2 + \mathrm{v}_{0x}^2 / k^2}\,,\ \operatorname{tg}\alpha = kx_0 / \mathrm{v}_{0x}\,. \qquad (1.4)$$

Из формул (1.3), (1.4) следуют два важных свойства свободных колебаний:

1. Амплитуда и начальная фаза колебаний зависят от начальных условий задачи.

2. Частота и период колебаний не зависят от начальных условий задачи и полностью определяются параметрами самой колебательной системы (в нашем примере системы из грузика и пружинки).

1.2. Свободные колебания при наличии постоянной силы

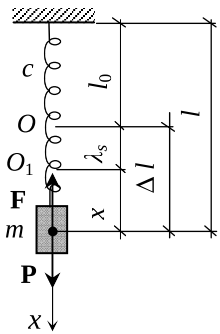

Рис. 1.2

Рассмотрим, как влияет на свободные колебания постоянная сила. Пусть на груз, изображенный на рис. 1.1, действует сила тяжести $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ (рис. 1.2). Заметим, что если бы груз находился в равновесии, то это означало бы, что сила тяжести уравновешивается силой упругости пружины, т.е. выполняется равенство $P = c\lambda_s$, где $\lambda_s = \Delta l_s = l - l_0$ – *статическое удлинение пружины.* Возьмем за начало отсчета оси x точку O_1, отстоящую от конца недеформированной пружины O на расстоянии $OO_1 = \lambda_s$ (см. рис. 1.2). Тогда удлинение пружины в этой системе координат равно $\Delta l = (x + \lambda_s)$. Составляя теперь уравнение Ньютона движения груза и проецируя его на ось x, получим $m\ddot{x} = -c(x + \lambda_s) + mg$, но поскольку $c\lambda_s = mg$, то в этой системе координат снова приходим к уравнению (1.2). Отсюда заключаем, что *постоянная сила* $\mathbf{P}$, *не изменяя характера колебаний, смещает их центр в сторону ее действия на величину статического удлинения* $\lambda_s = P / c$.

1.3. Свободные затухающие колебания (с учетом сопротивления среды)

Пусть теперь на материальную точку действует еще сила сопротивления среды (воды, воздуха), пропорциональная скорости: $\mathbf{R} = -\mu \mathbf{v}$. Записывая второй закон Ньютона и проектируя его на ось x с началом координат в положении статического равновесия пружины, приходим к уравнению

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x}$$

или

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = 0, \tag{1.5}$$

где $b = \mu / 2m$.

Здесь возможны три различных случая. В первом, когда сопротивление среды мало по сравнению с восстанавливающей силой, т.е. $b < k$, общее решение уравнения (1.5) имеет вид

$$x = e^{-bt}(C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t) \text{ или } x = Ae^{-bt}\sin(k_1 t + \alpha). \tag{1.6}$$

Постоянные интегрирования определятся из начальных условий $x(0) = x_0$ и $\mathrm{v}_x(0) = \mathrm{v}_0$

$$A = \sqrt{x_0^2 + (\mathrm{v}_0 + bx_0)^2 / k_1^2}, \quad \mathrm{tg}(\alpha) = x_0 k_1 / (\mathrm{v}_0 + bx_0). \tag{1.7}$$

Движение, таким образом, носит колебательный характер с частотой $k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}$ и периодом $T_1 = 2\pi / k_1$. Амплитуда колебаний $A_1 = Ae^{-bt}$ убывает со временем по экспоненциальному закону.

В двух других случаях, когда $b = k$ или $b > k$, решения можно записать соответственно так

$$x = e^{-bt}(C_1 + tC_2) \quad \text{и} \quad x = Ae^{-bt}(C_1 e^{k_2 t} + C_2 e^{-k_2 t}),$$

где $k_2 = \sqrt{b^2 - k^2}$. Следовательно, в этих двух случаях колебательное движение вообще не возникает, а движение материальной точки быстро затухает.

1.4. Вынужденные колебания (без учета сопротивления среды)

Пусть теперь наряду с восстанавливающей силой $\mathbf{F}$ и силой тяжести $\mathbf{P}$ на точку действует еще и сила $\mathbf{Q}$, изменяющаяся по гармоническому закону: $Q = Q_0 \sin pt$, где Q_0 – ее амплитуда, а p – частота. Уравнение движения в системе координат с началом в положении статического равновесия тогда имеет вид

$$\ddot{x} + k^2 x = p_0 \sin pt, \tag{1.8}$$

где $k^2 = c/m$, $p_0 = Q_0/m$. Это неоднородное дифференциальное уравнение, и его решение можно записать в форме $x = x_0 + x_n$, где x_0 – общее решение однородного уравнения (с нулевой правой частью); x_n – частное решение неоднородного уравнения (1.8). Но $x_0 = A\sin(kt + \alpha)$, частное же решение имеет вид $x_n = [p_0/(k^2 - p^2)]\sin pt$. Поэтому движение точки описывается формулой

$$x = A\sin(kt + \alpha) + [p_0/(k^2 - p^2)]\sin pt. \tag{1.9}$$

Такое движение называют *вынужденными колебаниями*. Постоянные A и α снова определяются из начальных условий задачи. Таким образом, движение точки слагается из собственных колебаний с амплитудой A (зависящей от начальных условий) и частотой k и вынужденных колебаний с амплитудой $p_0 / (k^2 - p^2)$ (не зависящей от начальных условий) и частотой p.

Решение (1.9) применимо лишь в случае, когда $p \neq k$. Если собственная частота совпадает с частотой возмущающей силы $p = k$, решение можно представить в виде

$$x = A\sin(kt + \alpha) + (p_0 t / 2k^2)\cos kt. \tag{1.10}$$

Амплитуда вынужденных колебаний, как мы видим, растет линейно со временем. Это явление называется *резонансом*.

1.5. Принципы решения задач на колебательное движение точки

1. Так как колебания прямолинейные, то достаточно ввести одну ось x. Направлять ее лучше в сторону удлинения пружины.

2. Силы удобнее изображать в некоторый момент времени, соответствующий растянутой пружине.

3. Необходимо выразить удлинение пружины Δl, входящее в выражение для силы упругости $\mathbf{F}$, через координату x точки. Для этого следует сделать рисунок, на котором изобразить ось x, растянутую пружину длиной l и недеформированную пружину длиной l_0.

4. Нужно сформулировать начальные условия, т.е. определить в выбранной системе координат начальные координату и скорость материальной точки.

5. Проинтегрировать уравнение движения и определить по известным начальным условиям неизвестные константы.

6. Размером прикрепленных к пружине грузов можно пренебречь, считая их материальными точками.

2. КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

1. На наклонной поверхности к неподвижной стенке прикреплена пружина с грузами A и B массами $m_A = 3$ кг, $m_B = 5$ кг (рис. 2.1). Коэффициент жесткости пружины $c = 1500$ Н/м, угол наклона $\alpha = 30°$. В начальный момент времени система находится в покое. Далее груз B убирают. Необходимо найти закон движения $x(t)$ груза A, взяв за начало отсчета: а) положение грузов, когда пружина не деформирована; б) положение равновесия груза A. Сопротивлением пренебречь.

2. На наклонной поверхности к неподвижной стенке прикреплена пружина, сжатая на $\lambda_0 = 0.04$ м (рис. 2.2). К другому концу пружины закрепляют груз A массой $m_A = 4$ кг, ему сообщают начальную скорость $v_0 = 0.02$ м/с, направленную вдоль поверхности вправо. Коэффициент жесткости пружины $c = 1200$ Н/м. Необходимо найти закон движения $x(t)$ груза A, взяв за начало отсчета: а) положение груза, когда пружина не деформирована; б) положение равновесия груза. Сопротивлением пренебречь.

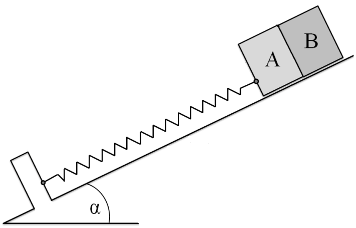

Рис. 2.1

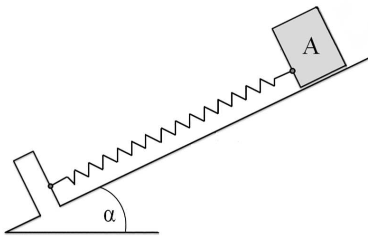

Рис. 2.2

3. На наклонной поверхности к неподвижной стенке прикреплена пружина с грузами A и B массами $m_A = 2$ кг, $m_B = 3$ кг (рис. 2.3). Коэффициент жесткости пружины $c = 1200$ Н/м, угол наклона $\alpha = 30°$. В начальный момент времени система находится в покое. Далее груз B убирают. Необходимо найти закон движения $x(t)$ груза А, взяв за начало отсчета: а) положение, когда пружина не деформирована; б) положение равновесия груза А. Сопротивлением пренебречь.

4. На наклонной поверхности к неподвижной стенке прикреплена пружина, растянутая на $\lambda_0 = 0.04$ м (рис. 2.4). К другому концу пружины закрепляют груз А массой $m_A = 3$ кг, ему сообщают начальную скорость $v_0 = 0.03$ м/с, направленную вдоль поверхности вправо. Коэффициент жесткости пружины $c = 800$ Н/м. Необходимо найти закон движения $x(t)$ груза А, взяв за начало отсчета: а) положение, когда пружина не деформирована; б) положение равновесия груза. Сопротивлением пренебречь.

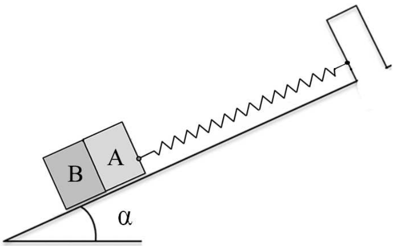

Рис. 2.3

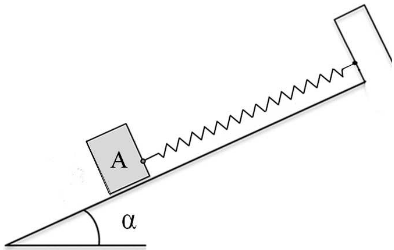

Рис. 2.4

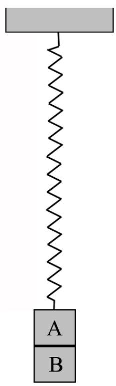

Рис. 2.5

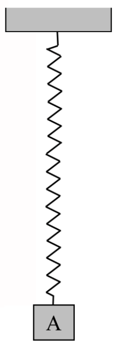

Рис. 2.6

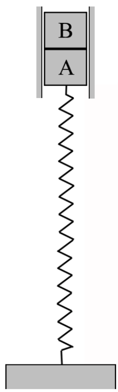

Рис. 2.7

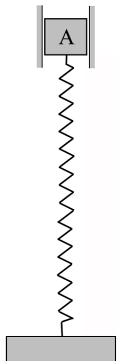

Рис. 2.8

5. Пружина с коэффициентом жесткости $c = 1100$ Н/м расположена вертикально, одним концом она закреплена к неподвижной платформе, к другому прикреплены грузы А и В массами $m_A = 5$ кг, $m_B = 3$ кг (рис. 2.5). Система находилась в состоянии равновесия, далее груз В убирают, грузу А сообщают начальную скорость $v_0 = 0.03$ м/с, направленную вниз. Необходимо найти закон движения $x(t)$ груза А, взяв за начало отсчета: а) положение, когда пружина не деформирована; б) положение равновесия груза А. Сопротивлением пренебречь.

6. Пружина с коэффициентом жесткости $c = 900$ Н/м расположена вертикально, одним концом она закреплена к неподвижной платформе, к другому прикреплен груз А массой $m_A = 5$ кг (рис. 2.6). В начальный момент времени пружину растягивают на $\lambda_0 = 0.02$ м, грузу А сообщают начальную скорость $v_0 = 0.05$ м/с, направленную вниз. Необходимо найти закон движения $x(t)$ груза А, взяв за начало отсчета: а) положение груза, когда пружина не деформирована; б) положение равновесия груза. Сопротивлением пренебречь.

7. Пружина с коэффициентом жесткости $c = 750$ Н/м расположена вертикально, одним концом она закреплена к неподвижной платформе, к другому прикреплены грузы А и В массами $m_A = 3$ кг, $m_B = 4$ кг (рис. 2.7). Система находилась в состоянии равновесия, далее груз В убирают, грузу А сообщают начальную скорость $v_0 = 0.03$ м/с, направленную вниз. Необходимо найти закон движения $x(t)$ груза А, взяв за начало отсчета: а) положение, когда пружина не деформирована; б) положение равновесия груза А. Сопротивлением пренебречь.

8. Пружина с коэффициентом жесткости $c = 800$ Н/м расположена вертикально, одним концом она закреплена к неподвижной платформе, к другому прикреплен груз А массой $m_A = 3$ кг (рис. 2.8). В начальный момент времени пружину сжимают на $\lambda_0 = 0.03$ м, грузу А сообщают начальную скорость $v_0 = 0.02$ м/с, направленную вниз. Необходимо найти закон движения $x(t)$ груза А, взяв за начало отсчета: а) положение, когда пружина не деформирована; б) положение равновесия груза. Сопротивлением пренебречь.

9. На наклонной поверхности к неподвижной стенке прикреплена пружина с грузом А массой $m_A = 2$ кг (рис. 2.1). Коэффициент жесткости пружины $c = 1100$ Н/м, угол наклона $\alpha = 30°$. В начальный момент времени система находится в покое. Затем к грузу А прикрепляют груз В массой $m_B = 4$ кг. Необходимо найти закон движения $x(t)$ грузов, взяв за начало отсчета: а) положение равновесия груза А; б) положение равновесия двух грузов. Сопротивлением пренебречь.

10. На наклонной поверхности к неподвижной стенке прикреплена пружина, растянутая на $\lambda_0 = 0.02$ м (рис. 2.2). К другому концу пружины закрепляют груз А массой $m_A = 3$ кг, ему сообщают начальную скорость $v_0 = 0.02$ м/с, направленную вдоль поверхности влево. Коэффициент жесткости пружины $c = 700$ Н/м. Необходимо найти закон движения $x(t)$ груза А, взяв за начало отсчета: а) положение груза, когда пружина не деформирована; б) положение равновесия груза. Сопротивлением пренебречь.

11. На наклонной поверхности к неподвижной стенке прикреплена пружина с грузом А массой $m_A = 2$ кг (рис. 2.3). Коэффициент жесткости пружины $c = 900$ Н/м, угол наклона $\alpha = 30°$. В начальный момент времени система находится в покое. Затем к грузу А прикрепляют груз В массой $m_B = 1$ кг. Необходимо найти закон движения $x(t)$ грузов, взяв за начало отсчета: а) положение, когда пружина не деформирована; б) положение равновесия двух грузов. Сопротивлением пренебречь.

12. На наклонной поверхности к неподвижной стенке прикреплена пружина, сжатая на $\lambda_0 = 0.05$ м (рис. 2.4). К другому концу пружины закрепляют груз А массой $m_A = 1$ кг, ему сообщают начальную скорость $v_0 = 0.04$ м/с, направленную вдоль поверхности влево. Коэффициент жесткости пружины $c = 900$ Н/м. Необходимо найти закон движения $x(t)$ груза А, взяв за начало отсчета: а) положение, когда пружина не деформирована; б) положение равновесия груза. Сопротивлением пренебречь.

13. Пружина с коэффициентом жесткости $c = 600$ Н/м расположена вертикально, одним концом она закреплена к неподвижной платформе, к другому прикреплен груз А массой $m_A = 2$ кг (рис. 2.5). Система находилась в состоянии равновесия, далее к грузу А прикрепляют груз В массой $m_B = 1$ кг, грузам сообщают начальную скорость $v_0 = 0.05$ м/с, направленную вниз. Необходимо найти закон движения $x(t)$ грузов, взяв за начало отсчета: а) положение, когда пружина не деформирована; б) положение равновесия грузов. Сопротивлением пренебречь.

14. Пружина с коэффициентом жесткости $c = 900$ Н/м расположена вертикально, одним концом она закреплена к неподвижной платформе, к другому прикреплен груз А массой $m_A = 3$ кг (рис. 2.6). В начальный момент времени пружину сжимают на $\lambda_0 = 0.08$ м, грузу А сообщают начальную скорость $v_0 = 0.05$ м/с, направленную вверх. Необходимо найти закон движения $x(t)$ груза А, взяв за начало отсчета: а) положение, когда пружина не деформирована; б) положение равновесия груза. Сопротивлением пренебречь.

15. Пружина с коэффициентом жесткости $c = 850$ Н/м расположена вертикально, одним концом она закреплена к неподвижной платформе, к другому прикреплен груз А массой $m_A = 3$ кг (рис. 2.7). Система находилась в состоянии равновесия, далее к грузу А прикрепляют груз В массой $m_B = 6$ кг, грузам сообщают начальную скорость $v_0 = 0.09$ м/с, направленную вниз. Необходимо найти закон движения $x(t)$ грузов, взяв за начало отсчета: а) положение, когда пружина не деформирована; б) положение равновесия грузов. Сопротивлением пренебречь.

16. Пружина с коэффициентом жесткости $c = 650$ Н/м расположена вертикально, одним концом она закреплена к неподвижной платформе, к другому прикреплен груз А массой $m_A = 6$ кг (рис. 2.8). В начальный момент времени пружину растягивают на $\lambda_0 = 0.07$ м, грузу А сообщают начальную скорость $v_0 = 0.05$ м/с, направленную вверх. Необходимо найти закон движения $x(t)$ груза А, взяв за начало отсчета: а) положение, когда пружина не деформирована; б) положение равновесия груза. Сопротивлением пренебречь.

17. На наклонной поверхности к неподвижной стенке прикреплена недеформированная пружина (рис. 2.2). К другому концу пружины прикрепляют груз А массой $m_A = 8$ кг, ему сообщают начальную скорость $v_0 = 0.04$ м/с, направленную вдоль поверхности вправо. Коэффициент жесткости пружины $c = 900$ Н/м. Необходимо найти закон движения $x(t)$ груза А, взяв за начало отсчета: а) начальное положение груза; б) положение равновесия груза. Сопротивлением пренебречь.

18. На наклонной поверхности к неподвижной стенке прикреплена пружина с грузом А массой $m_A = 6$ кг (рис. 2.3). Коэффициент жесткости пружины $c = 950$ Н/м, угол наклона $\alpha = 30°$. В начальный момент времени система находится в покое. Затем к грузу А прикрепляют груз В массой $m_B = 5$ кг. Необходимо найти закон движения $x(t)$ грузов, взяв за начало отсчета: а) начальное положение грузов; б) положение равновесия грузов. Сопротивлением пренебречь.

19. На наклонной поверхности к неподвижной стенке прикреплена недеформированная пружина (рис. 2.4). К другому концу пружины закрепляют груз A массой $m_A = 9$ кг, ему сообщают начальную скорость $v_0 = 0.02$ м/с, направленную вдоль поверхности влево. Коэффициент жесткости пружины $c = 550$ Н/м. Необходимо найти закон движения $x(t)$ груза A, взяв за начало отсчета: а) начальное положение груза; б) положение равновесия груза. Сопротивлением пренебречь.

20. Пружина с коэффициентом жесткости $c = 700$ Н/м расположена вертикально, одним концом она закреплена к неподвижной платформе, к другому прикреплен груз A массой $m_A = 2$ кг (рис. 2.5). Система находилась в состоянии равновесия, далее к грузу A прикрепляют груз B массой $m_B = 6$ кг, грузам сообщают начальную скорость $v_0 = 0.09$ м/с, направленную вверх. Необходимо найти закон движения $x(t)$ грузов, взяв за начало отсчета: а) начальное положение грузов; б) положение равновесия грузов. Сопротивлением пренебречь.

21. Пружина с коэффициентом жесткости $c = 900$ Н/м расположена вертикально, одним концом она закреплена к неподвижной платформе, к другому прикреплен груз A массой $m_A = 7$ кг (рис. 2.6). В начальный момент времени пружина не деформирована, грузу A сообщают начальную скорость $v_0 = 0.02$ м/с, направленную вверх. Необходимо найти закон движения $x(t)$ груза A, взяв за начало отсчета: а) начальное положение груза; б) положение равновесия груза. Сопротивлением пренебречь.

22. Пружина с коэффициентом жесткости $c = 850$ Н/м расположена вертикально, одним концом она закреплена к неподвижной платформе, к другому прикреплен груз A массой $m_A = 3$ кг (рис. 2.7). Система находилась в состоянии равновесия, далее к грузу A прикрепляют груз B массой $m_B = 6$ кг, грузам сообщают начальную скорость $v_0 = 0.09$ м/с, направленную вверх. Необходимо найти закон движения $x(t)$ грузов, взяв за начало отсчета: а) начальное положение грузов; б) положение равновесия грузов. Сопротивлением пренебречь.

23. Пружина с коэффициентом жесткости $c = 1250$ Н/м расположена вертикально, одним концом она закреплена к неподвижной платформе, к другому прикреплен груз А массой $m_A = 4$ кг (рис. 2.8). В начальный момент времени пружина не деформирована, грузу А сообщают начальную скорость $v_0 = 0.01$ м/с, направленную вниз. Необходимо найти закон движения $x(t)$ груза А, взяв за начало отсчета: а) начальное положение груза; б) положение равновесия груза. Сопротивлением пренебречь.

24. На наклонной поверхности к неподвижной стенке прикреплена пружина с грузом А массой $m_A = 8$ кг (рис. 2.1). Коэффициент жесткости пружины $c = 1300$ Н/м, угол наклона $\alpha = 30°$. В начальный момент времени система находится в покое. Затем к грузу А прикрепляют груз В массой $m_B = 4$ кг. Необходимо найти закон движения $x(t)$ грузов, взяв за начало отсчета: а) начальное положение грузов; б) положение равновесия грузов. Сопротивлением пренебречь.

25. На наклонной поверхности к неподвижной стенке прикреплена пружина с грузом А массой $m_A = 5$ кг (рис. 2.3). Коэффициент жесткости пружины $c = 800$ Н/м, угол наклона $\alpha = 30°$. В начальный момент времени система находится в покое. Затем к грузу А прикрепляют груз В массой $m_B = 4$ кг. Необходимо найти закон движения $x(t)$ грузов, взяв за начало отсчета: а) положение равновесия груза А; б) положение равновесия двух грузов. Сопротивлением пренебречь.

26. Пружина с коэффициентом жесткости $c = 650$ Н/м расположена вертикально, одним концом она закреплена к неподвижной платформе, к другому прикреплен груз А массой $m_A = 7$ кг (рис. 2.5). Система находилась в состоянии равновесия, далее к грузу А прикрепляют груз В массой $m_B = 3$ кг, грузам сообщают начальную скорость $v_0 = 0.04$ м/с, направленную вниз. Необходимо найти закон движения $x(t)$ грузов, взяв за начало отсчета: а) положение равновесия груза А; б) положение равновесия двух грузов. Сопротивлением пренебречь.

27. Пружина с коэффициентом жесткости $c = 750$ Н/м расположена вертикально, одним концом она закреплена к неподвижной платформе, к другому прикреплен груз А массой $m_A = 3$ кг (рис. 2.7). Система находилась в состоянии равновесия, далее к грузу А прикрепляют груз В массой $m_B = 4$ кг, грузам сообщают начальную скорость $v_0 = 0.04$ м/с, направленную вниз. Необходимо найти закон движения $x(t)$ грузов, взяв за начало отсчета: а) положение равновесия груза А; б) положение равновесия двух грузов. Сопротивлением пренебречь.

28. На наклонной поверхности к неподвижной стенке прикреплена пружина с грузами А и В массами $m_A = 6$ кг, $m_B = 3$ кг (рис. 2.3). Коэффициент жесткости пружины $c = 1150$ Н/м, угол наклона $\alpha = 30°$. В начальный момент времени система находится в покое. Далее груз В убирают. Необходимо найти закон движения $x(t)$ груза А, взяв за начало отсчета: а) положение равновесия двух грузов; б) положение равновесия груза А. Сопротивлением пренебречь.

29. Пружина с коэффициентом жесткости $c = 1000$ Н/м расположена вертикально, одним концом она закреплена к неподвижной платформе, к другому прикреплены грузы А и В массами $m_A = 2$ кг, $m_B = 3$ кг (рис. 2.5). Система находилась в состоянии равновесия, далее груз В убирают, грузу А сообщают начальную скорость $v_0 = 0.09$ м/с, направленную вниз. Необходимо найти закон движения $x(t)$ груза А, взяв за начало отсчета: а) положение равновесия двух грузов; б) положение равновесия груза А. Сопротивлением пренебречь.

30. Пружина с коэффициентом жесткости $c = 1250$ Н/м расположена вертикально, одним концом она закреплена к неподвижной платформе, к другому прикреплены грузы А и В массами $m_A = 7$ кг, $m_B = 4$ кг (рис. 2.7). Система находилась в состоянии равновесия, далее груз В убирают, грузу А сообщают начальную скорость $v_0 = 0.03$ м/с, направленную вниз. Необходимо найти закон движения $x(t)$ груза А, взяв за начало отсчета: а) положение равновесия двух грузов; б) положение равновесия груза А. Сопротивлением пренебречь.

3. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

На наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30°$ к неподвижной стенке прикреплена пружина с грузом А массой $m_A = 3$ кг (рис. 3.1).

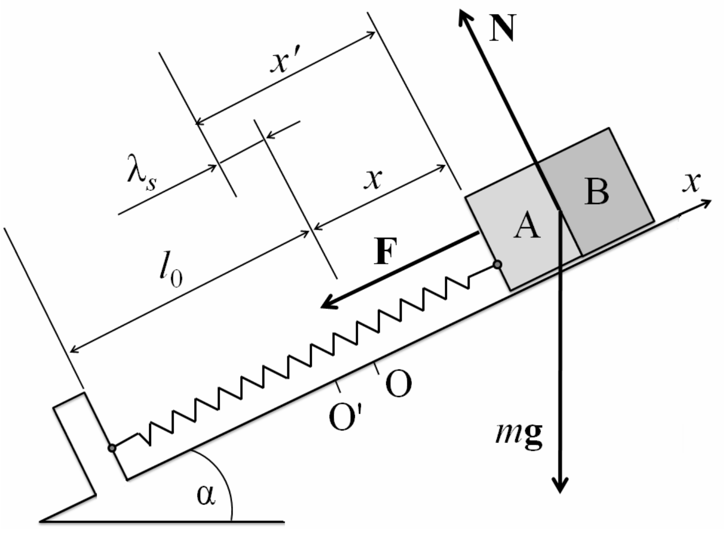

Рис. 3.1

Коэффициент жесткости пружины $c = 300$ Н/м, длина нерастянутой пружины $l_0 = 0.4$ м. В начальный момент времени $t_0 = 0$ с груз A находится в покое. Затем к грузу A прикрепляют груз B массой $m_B = 5$ кг. Необходимо найти законы движения грузов:

а) $x(t)$, взяв за начало отсчета положение грузов при нерастянутой пружине – точку O;

б) $x'(t)$ взяв за начало отсчета положение равновесия скрепленных грузов A и B, точку O'.

Трением пренебречь. Грузы считать материальными точками.

Решение

Запишем второй закон Ньютона для скрепленных грузов. При этом грузы A и B будем считать материальной точкой массой

$$m = m_A + m_B = 3 + 5 = 8 \text{ кг.}$$

На грузы действуют сила тяжести $m\mathbf{g}$, сила упругости пружины **F** и сила нормальной реакции гладкой наклонной плоскости **N**. Запишем второй закон Ньютона

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + m\mathbf{g} + \mathbf{N} \tag{3.1}$$

и спроектируем его на ось *Ox* с началом отсчета в положении грузов при нерастянутой пружине

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = F_x - mg\sin\alpha\,. \tag{3.2}$$

Сила упругости пропорциональна удлинению пружины, которое в данном случае равно координате *x*

$$F_x = -cx\,. \tag{3.3}$$

Подставляя формулу (3.3) в (3.2), получаем

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -cx - mg\sin\alpha. \qquad (3.4)$$

Разделим уравнение (3.4) на массу грузов

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{c}{m}x - g\sin\alpha \qquad (3.5)$$

и введем круговую частоту колебаний

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{300}{8}} = 6.12 \text{ рад/с}.$$

После этого уравнение (3.5) можно переписать в виде

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + k^2x = -g\sin\alpha. \qquad (3.6)$$

Это линейное неоднородное уравнение. Его общее решение можно искать в виде суммы общего решения однородного

$$\frac{\mathrm{d}^2x_{(1)}}{\mathrm{d}t^2} + k^2x_{(1)} = 0, \qquad (3.7)$$

и частного решения неоднородного уравнений

$$\frac{\mathrm{d}^2x_{(2)}}{\mathrm{d}t^2} + k^2x_{(2)} = -g\sin\alpha. \qquad (3.8)$$

Общее решение однородного уравнения (3.7) имеет вид

$$x_{(1)}(t) = C_1\cos(kt) + C_2\sin(kt), \qquad (3.9)$$

частное решение неоднородного уравнения (3.8) при постоянной правой части можно искать в виде константы

$$x_{(2)} = C_3. \qquad (3.10)$$

Подставляя формулу (3.10) в (3.8), получим

$$x_{(2)} = -\frac{g\sin\alpha}{k^2} = -\frac{9.8\sin 30^\circ}{37.5} = -0.131\,\text{м}. \tag{3.11}$$

Заметим, что частное решение (3.11) соответствует положению равновесия скрепленных грузов А и В. Таким образом, общее решение уравнения (3.6) имеет вид

$$x(t) = C_1\cos(kt) + C_2\sin(kt) - g\sin\alpha/k^2. \tag{3.12}$$

Константы C_1, C_2 в уравнении (3.12) зависят от начального положения и скорости грузов.

Начальное положение скрепленных грузов соответствует положению равновесия груза А. Запишем уравнение равновесия этого груза с учетом того, что на него действуют силы тяжести $m_A\mathbf{g}$, упругости пружины **F** и нормальной реакции **N**

$$\mathbf{F} + m_A\mathbf{g} + \mathbf{N} = 0. \tag{3.13}$$

Спроектируем уравнение (3.13) на ось *Ox*

$$F_x - m_A g\sin\alpha = 0.$$

Сила упругости пропорциональна удлинению пружины, которое в данном случае равно координате груза в положении равновесия $x_A^{\text{равн}}$. Поэтому последнее уравнение можно переписать в виде

$$-cx_A^{\text{равн}} - m_A g\sin\alpha = 0,$$

и найти

$$x_A^{\text{равн}} = -0.049\,\text{м}.$$

Эта координата является начальной координатой скрепленных грузов А и В при их движении

$$x(0) = x_A^{\text{равн}} = -0.049\,\text{м}.$$

Теперь найдем константы C_1, C_2 в уравнении (3.12). Для этого, записав (3.12) и производную от него в начальный момент времени $t_0 = 0\,\text{с}$, приравняем их к начальной координате и скорости грузов соответственно

$$x(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 - g \sin\alpha / k^2 \,,$$

$$\mathrm{v}_x(0) = -C_1 k \sin 0 + C_2 k \cos 0. \qquad (3.14)$$

Из уравнений (3.14) найдем константы

$$C_1 = x(0) + g \sin\alpha / k^2 \,,\ C_2 = \mathrm{v}_x(0)/k \,.$$

Подставляя найденные константы в уравнение (3.12), окончательно получим

$$x(t) = \left(x(0) + g \sin\alpha / k^2\right)\cos(kt) + \left(\mathrm{v}_x(0)/k\right)\sin(kt) - g \sin\alpha / k^2 \,.$$

Вычислив численные значения, получаем уравнение движения скрепленных грузов А и В

$$x(t) = 0{,}082\cos(6.12t) - 0.131\ \text{м}. \qquad (3.15)$$

Закон движения грузов (формула (3.15)) записан в системе координат с началом в точке О, соответствующей положению грузов, когда пружина не растянута.

Теперь выберем в качестве начала координат точку О', соответствующую положению равновесия скрепленных грузов А и В. Введем величину λ_s, соответствующую сжатию пружины в положении статического равновесия (см. рис. 3.1). Тогда удлинение пружины связано с координатой x' следующим образом

$$\Delta l = x' - \lambda_s \,,$$

сила упругости (3.3) имеет вид

$$F_{x'} = -c\left(x' - \lambda_s\right),$$

а проекция второго закона Ньютона на ось x' –

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x'}{\mathrm{d}t^2} = -c\left(x' - \lambda_s\right) - mg \sin\alpha = -cx' + c\lambda_s - mg \sin\alpha \,. \qquad (3.16)$$

Если грузы находятся в равновесии, то ускорение и координата x' равны нулю, отсюда из формулы (3.16) находим

$$\lambda_s = \frac{mg\sin\alpha}{c} = \frac{8\cdot 9.8\sin 30^\circ}{300} = 0.131\,\text{м}.$$

Теперь уравнение (3.16) можно переписать в виде

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x'}{\mathrm{d}t^2} = -cx'.$$

Это линейное однородное уравнение имеет известное решение (1.3), константы которого связаны с начальными условиями соотношениями (1.4)

$$x'(t) = x'(0)\cos(kt) + \left(\mathrm{v}'_x(0)/k\right)\sin(kt). \qquad (3.17)$$

С учетом того, что начальные координата и скорость

$$x'(0) = x_A^{\text{равн}} + \lambda_s = -0.049 + 0.131 = 0.082\,\text{м}, \qquad \mathrm{v}'_x(0) = 0\,\text{м/с},$$

получим уравнение движения скрепленных грузов А и В в системе координат с началом в положении равновесия грузов

$$x'(t) = 0.082\cos(6.12t).$$

Этот закон движения отличается от уравнения (3.15) лишь константой, равной статическому удлинению λ_s, что вполне естественно, поскольку именно это расстояние разделяет начала координат систем отсчета $\mathrm{O}'x'$ и $\mathrm{O}x$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики : учебник для втузов : в 2 т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – 10-е изд., стер. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2008. – 730 с.
2. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики : учебник для втузов / С. М. Тарг. – 20-е изд., стер. – Москва : Высшая школа, 2010. – 416 с.
3. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики: статика, кинематика, динамика : учебник для вузов по техн. спец. / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – 15-е изд., стер. – Москва : КНОРУС, 2010. – 603 с.
4. Юдин, В. А. Лекции по динамике точки [Электронный ресурс] : учеб. пособие / В. А. Юдин ; Новосиб. гос. архитектур.-строит. ун-т (Сибстрин). – Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2014. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

Составители

Валерий Яковлевич Рудяк
Александр Анатольевич Белкин
Сергей Леонидович Краснолуцкий

КОЛЕБАНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Методические указания к практическим занятиям
для студентов, обучающихся по всем направлениям
подготовки и специальности 08.05.01 «Строительство
уникальных зданий и сооружений»

Редактор Г.К. Найденова

Новосибирский государственный архитектурно-строительный
университет (Сибстрин)
630008, Новосибирск, ул. Ленинградская, 113