

*Новосибирский Государственный Архитектурно-Строительный
Университет (Сибстрин)*

***ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ.
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА***

**ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ
ПЕРЕМЕЩЕНИЙ**

Кафедра теоретической механики

План лекции

Аналитическое описание связей. Число степеней свободы. Возможные перемещения механической системы.

Принцип возможных перемещений (ПВП).

**Определение реакций связей с помощью ПВП.
Примеры.**

Контрольные вопросы к лекции.

Цель лекции

- 1. Ознакомление с принципами динамики.**
- 2. Аналитическое описание связей.**
- 3. Применение принципа возможных перемещений к определению реакций голономных стационарных идеальных связей в механических системах.**

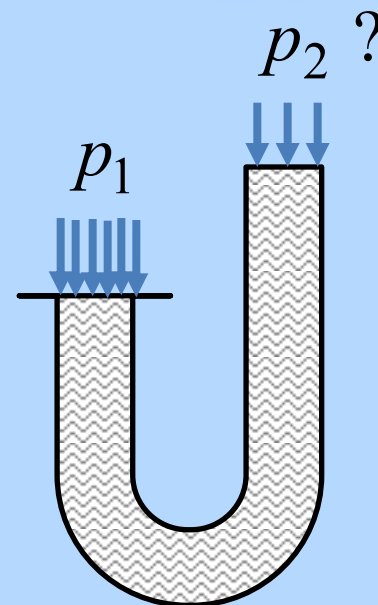
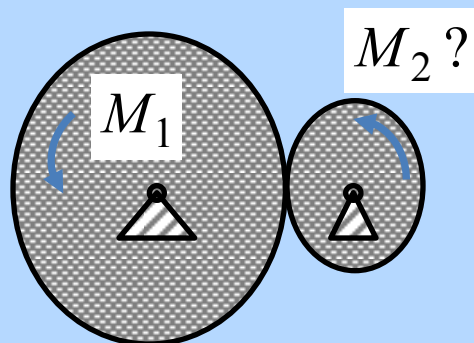
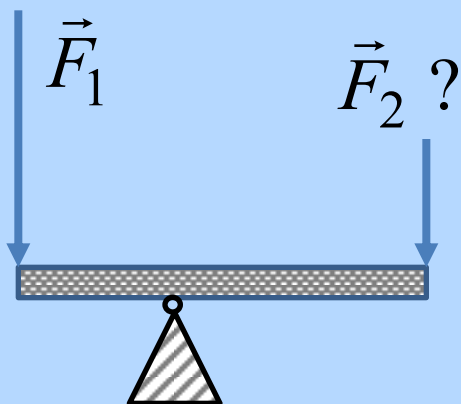
О ПРИНЦИПАХ МЕХАНИКИ

Принципами механики называют положения, следующие из законов Ньютона и выражающие общие закономерности механических явлений. Каждый принцип может быть положен в основу механики и, как следствие, из него можно получить все уравнения, описывающие движение механической системы (или условия ее равновесия).

Вариационные принципы предполагают, что состояние механической системы допускает варьирование.

Принцип возможных перемещений - один из вариационных принципов.

Применение принципа возможных перемещений в различных задачах



ИДЕЯ ПРИНЦИПА

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ дает универсальные условия равновесия несвободных механических систем.

При освобождении от связей добавляются неизвестные реакции связей, и одновременно рассматриваются бесконечно малые перемещения, которые допускаются сохраненными связями.

Главное преимущество ПВП по сравнению с геометрической статикой:

Рассматриваются механизмы, т.е. механические системы, в которых сохранено большинство внутренних связей. Интересующая реакция может быть найдена независимо от других!

ВОЗМОЖНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

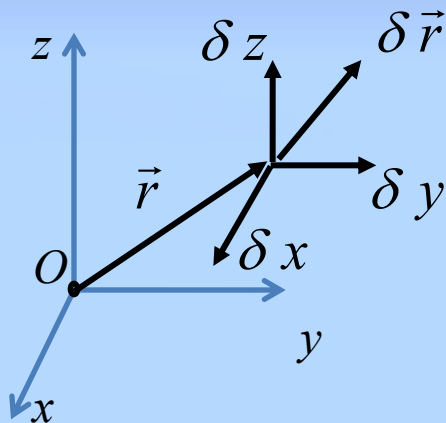
Возможными перемещениями несвободной механической системы называются воображаемые бесконечно малые перемещения, допускаемые в данный момент связями, наложенными на систему.

Возможные перемещения точек системы изображают элементарным вектором $\delta \vec{r}$, направление которого допускается связями.

Число независимых между собой возможных перемещений системы называют **числом степеней свободы системы**.

ВОЗМОЖНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

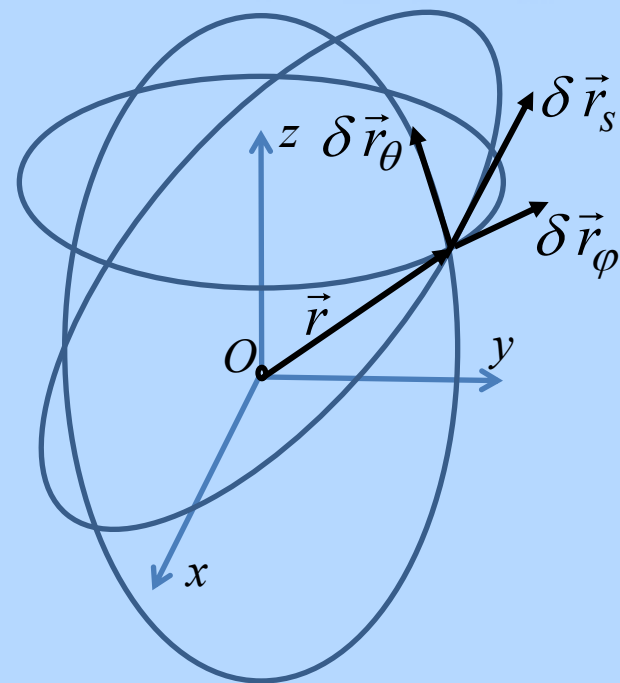
Свободная материальная точка



Любое бесконечно малое перемещение является возможным. Число степеней свободы равно размерности векторного пространства. В системе N свободных точек в пространстве $3N$ степеней свободы.

Материальная точка на поверхности сферы:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$



Ни одно из перемещений δx , δy , δz не является возможным на сфере в общем случае. Возможные перемещения $\delta \vec{r}_\theta$, $\delta \vec{r}_\varphi$ лежат в плоскости, касательной к сфере. Число степеней свободы равно 2.

Классификация связей

Геометрические связи формулируются только для координат (положений) материальных точек.

Уравнение геометрической связи общего вида:

$$\Phi_k(x_1, y_1, z_1, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots, x_N, y_N, z_N) = 0 \quad (1)$$

Например:

точка 1 движется в плоскости, параллельной yOz :

$$x_1 - a = 0 ;$$

точки i и j связаны твердым стержнем:

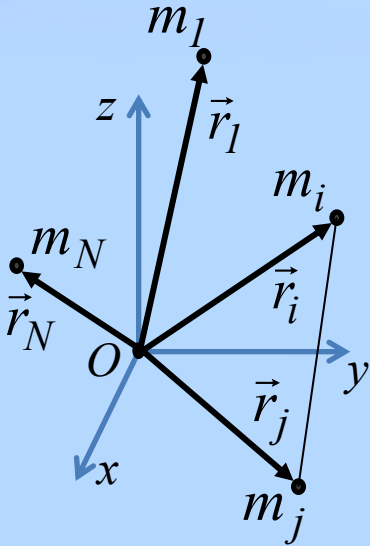
$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 - l^2 = 0 ;$$

точка N неподвижна:

$$x_N - a_N = 0; \quad y_N - b_N = 0; \quad z_N - c_N = 0;$$

Из (1) следует **линейное** уравнение относительно возможных перемещений:

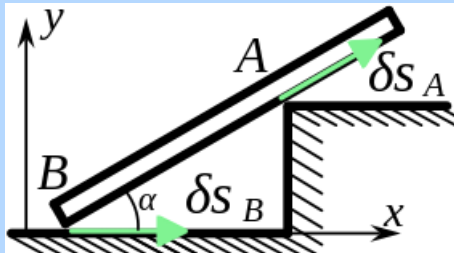
$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial \Phi_k}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0$$



Классификация связей

Кинематические связи формулируются для скоростей (и для координат) точек:

$$\Phi_k(x_1, y_1, z_1, u_1, v_1, w_1, \dots, x_i, y_i, z_i, u_i, v_i, w_i, \dots, x_N, y_N, z_N, u_N, v_N, w_N) = 0 \quad (2)$$



Пример:

Опираие на гладкий уступ.

Геометрическая связь: $y_B = 0$

Кинематическая связь: $v_A = v_B \cos(\alpha)$

Следствие : $\delta s_A - \delta s_B \cos(\alpha) = 0$

Из уравнения геометрической связи дифференцированием по времени следует уравнение кинематической связи:

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} u_i + \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_i} v_i + \frac{\partial \Phi_k}{\partial z_i} w_i \right) = 0$$

Обратное, вообще, не верно!

Классификация связей

Нестационарные – связи, которые изменяются со временем. Время явно входит в уравнение связи.

Пример: точка на поверхности движущейся сферы:

$$(x - Ct)^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

Неудерживающие – связи, способные прекращать свое действие при определенных положениях точки.

Пример: точка отскакивает от горизонтальной плоскости:

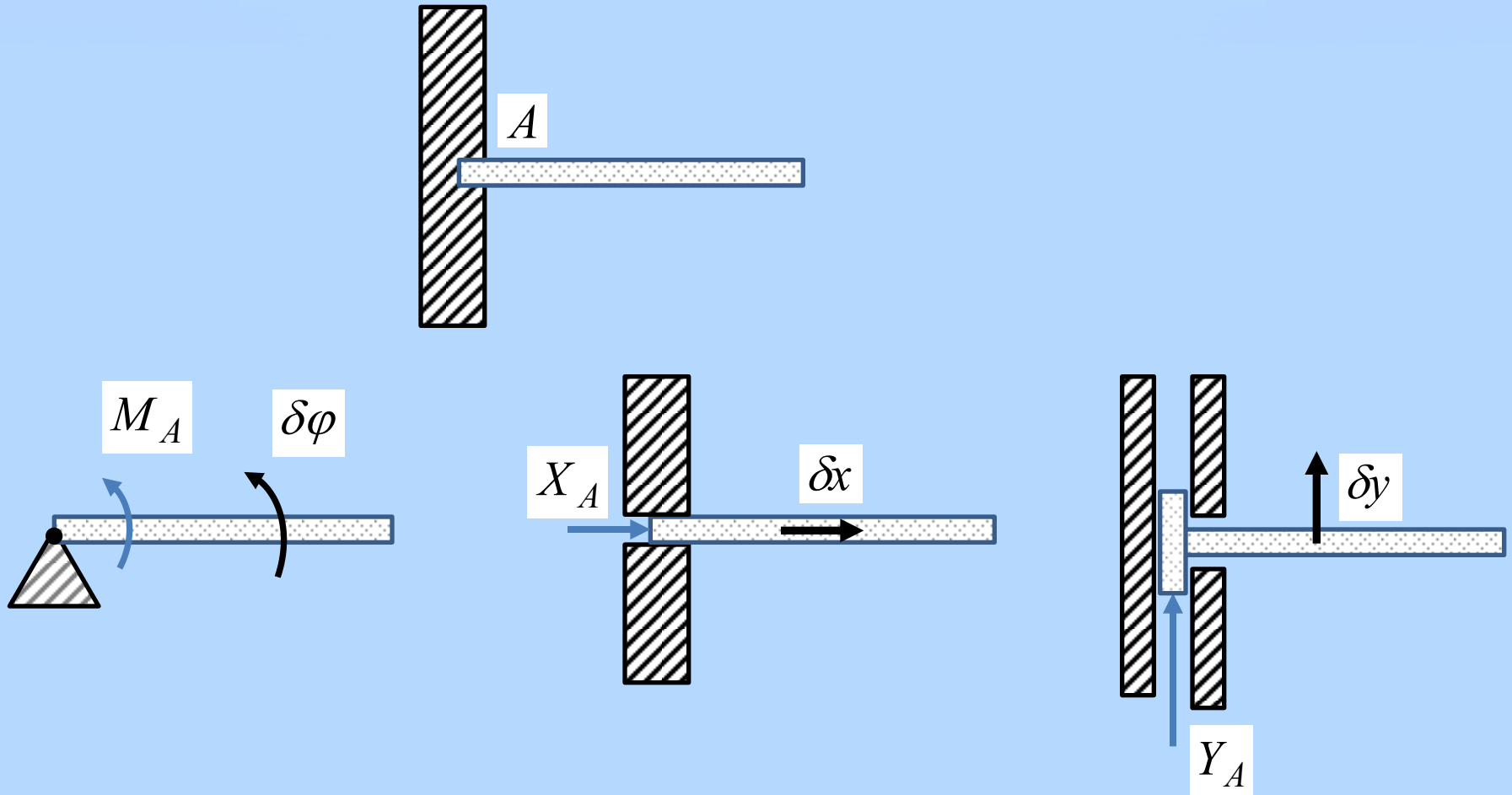
$$z \geq 0$$

Голономные – стационарные, геометрические связи.

СВОЙСТВА ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

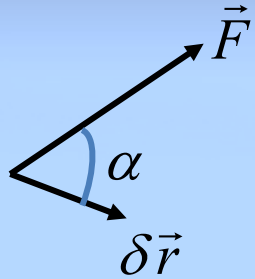
- ВП бесконечно малы и определены для мгновенного положения механизма;
- при стационарных связях действительное перемещение $d\vec{r}$ совпадает с одним из возможных перемещений $\delta\vec{r}$;
- при нестационарных связях действительное перемещение не совпадает ни с одним из возможных перемещений;
- ВП не связаны с действием приложенных сил.
- ВП являются воображаемыми (возможными) и определяются только геометрией механической системы.

Освобождение от связей в статически определимых задачах пример: жесткая заделка



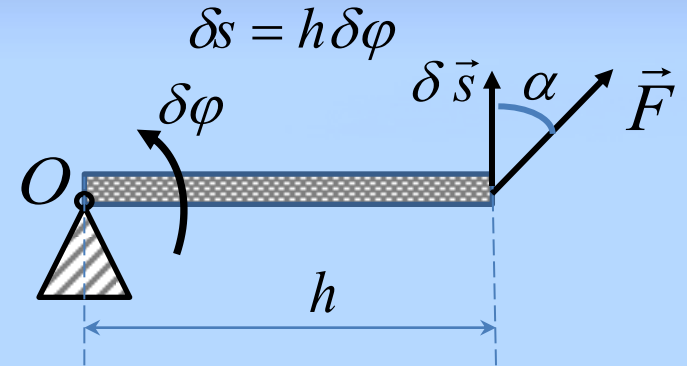
Элементарная работа силы

1. По определению:



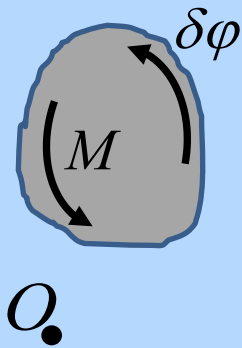
$$\delta A_{\delta \vec{r}}(\vec{F}) = |\vec{F}| |\delta \vec{r}| \cos \alpha$$

2. Работа на бесконечно малом повороте тела:



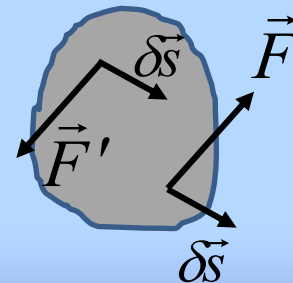
$$\begin{aligned} \delta A_{\delta \varphi}(\vec{F}) &= |\vec{F}| |\delta \vec{s}| \cos \alpha = (|\vec{F}| h \cos \alpha) \delta \varphi = \\ &= M_O(\vec{F}) \delta \varphi \end{aligned}$$

3. Работа пары сил на бесконечно малом повороте тела:



$$\begin{aligned} \delta A_{\delta \varphi}(M) &= \\ &= \delta A_{\delta \varphi}(\vec{F}) + \delta A_{\delta \varphi}(\vec{F}') = \\ &= M_O(\vec{F}) \delta \varphi + M_O(\vec{F}') \delta \varphi = \\ &= M \delta \varphi \end{aligned}$$

4. Работа пары сил на бесконечно малом поступательном перемещении тела:



$$\begin{aligned} \delta A_{\delta \vec{s}}(M) &= \\ &= \delta A_{\delta \vec{s}}(\vec{F}) + \delta A_{\delta \vec{s}}(\vec{F}') = \\ &= \delta A_{\delta \vec{s}}(\vec{F}) - \delta A_{\delta \vec{s}}(\vec{F}) = 0 \end{aligned}$$

ИДЕАЛЬНЫЕ СВЯЗИ

Связи называются **идеальными**, если сумма элементарных работ их реакций на любых возможных перемещениях системы равна нулю:

$$\delta A_{\delta \vec{s}}(\vec{R}) = 0$$

Примеры идеальных связей:

1. абсолютно гладкие поверхности;
2. абсолютно гладкие линии (направляющие);
3. идеальные шарниры и подшипники (без трения);
4. нерастяжимая, невесомая нить;
5. стержневая опора;
6. жесткая заделка.

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА-ЛАГРАНЖА

Для системы с идеальными удерживающими связями выполнено

Общее уравнение динамики:

Истинное движение из всех кинематически возможных выделяется тем, что для него и только для него в данный момент времени сумма элементарных работ всех приложенных к системе активных сил и сил инерции на любом возможном перемещении равна нулю:

$$\sum_{i=1}^N \left(\delta A_{\delta \vec{s}_i} (\vec{F}_i) + \delta A_{\delta \vec{s}_i} (-m_i \vec{a}_i) \right) = 0$$

Доказательство. Необходимость.

В системе мат. точек, освобожденных от связей выполнен II-й закон Ньютона:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i$$

Так как связи идеальны:

$$\sum_{i=1}^N \vec{R}_i \delta \vec{s}_i = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \delta \vec{s}_i = 0$$

Достаточность.

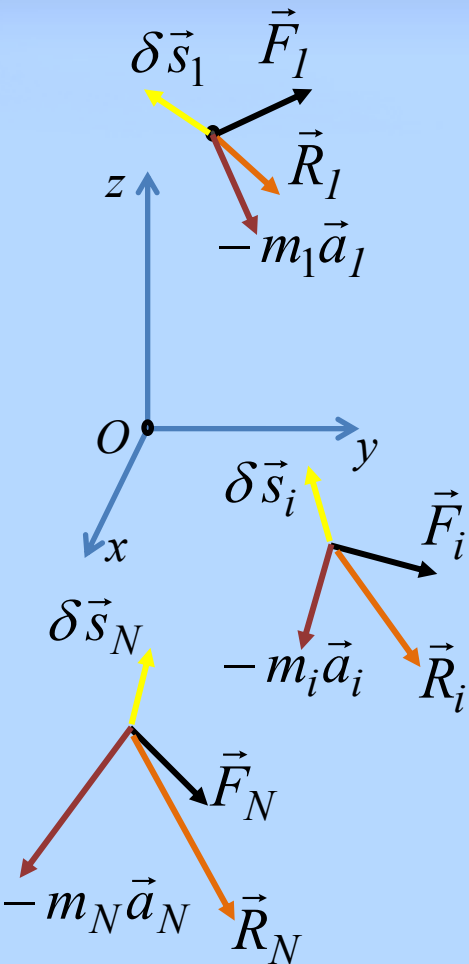
$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \delta \vec{s}_i = 0 \quad u \quad \sum_{i=1}^N \vec{R}_i \delta \vec{s}_i = 0$$

Суммируем:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{R}_i - m_i \vec{a}_i) \delta \vec{s}_i = 0$$

$\delta \vec{s}_i$ - независимы, следовательно:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i$$



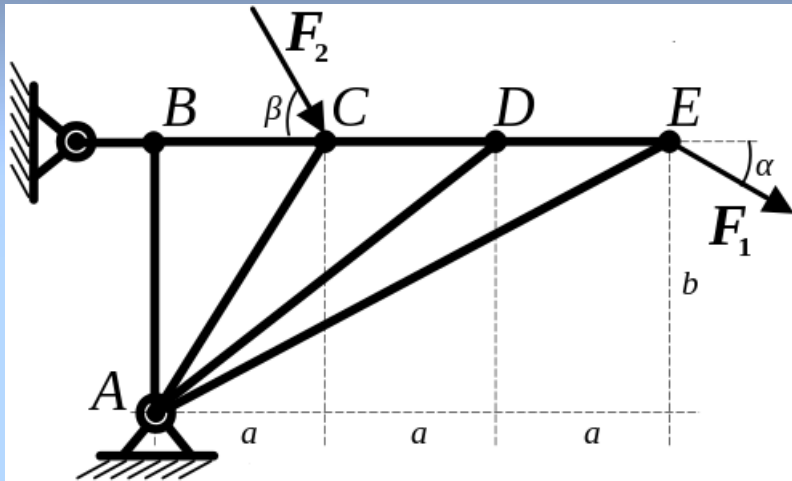
ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Принцип возможных перемещений формулируется следующим образом:

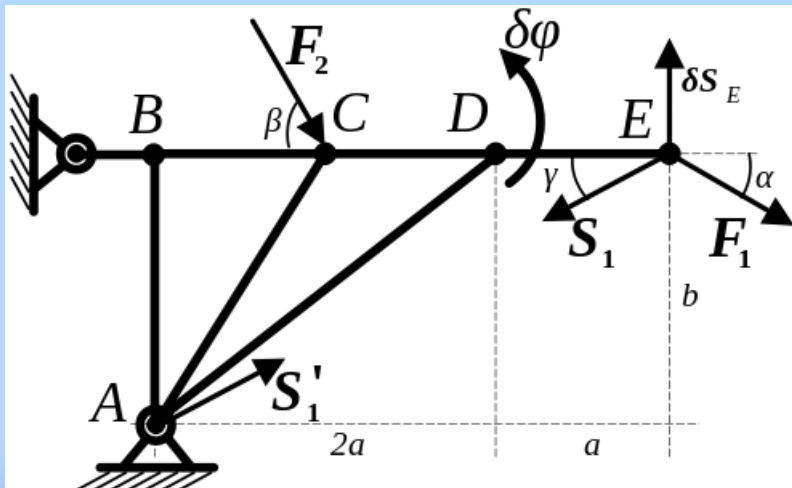
Для равновесия механической системы с идеальными стационарными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех приложенных к системе активных сил на любом возможном перемещении системы была равна нулю:

$$\sum_{i=1}^N \delta A_{\delta \vec{s}_i} (\vec{F}_i) = 0$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ. ФЕРМА.



Усилие в стержне AE



Удаляем связь – стержень AE

$\vec{S}_1$ и $\vec{S}_1'$ реакции отброшенной связи.
Кинематический анализ:

1. Часть конструкции, образованная стержнями AB , BC , CD , AD остается неподвижной.

2. Стержень DE удерживается неподвижным шарниром в точке D .

Возможное перемещение $\delta \vec{s}_E$ точки E стержня, перпендикулярно DE .

3. Уравнение работ:

$$\begin{aligned} \sum \delta A_{\delta s}(\vec{F}_i) &= \vec{S}_1 \cdot \delta \vec{s}_E + \vec{F}_1 \cdot \delta \vec{s}_E = \\ &= -S_1 \delta s_E \sin \gamma - F_1 \delta s_E \sin \alpha = \\ &= -(S_1 \sin \gamma + F_1 \sin \alpha) \delta s_E = 0 \end{aligned}$$

Ответ:

$$S_1 \sin \gamma + F_1 \sin \alpha = 0$$

$$S_1 = -\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} F_1 = -\sqrt{1 + (3a/b)^2} F_1 \sin \alpha$$

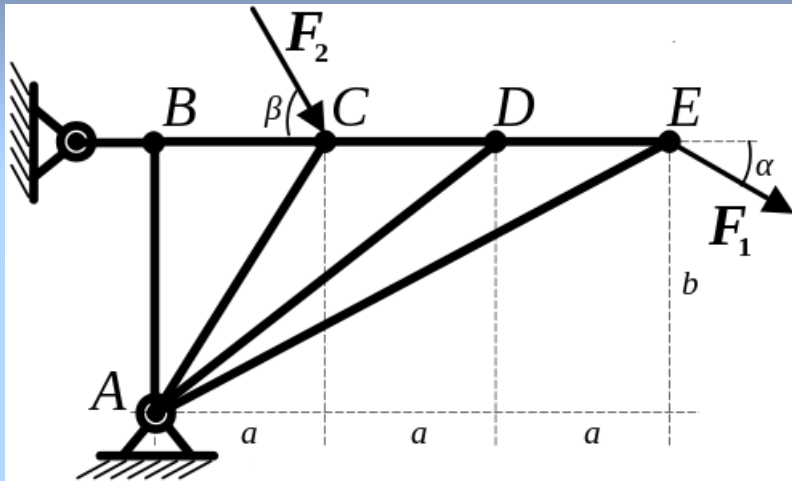
The diagram shows a mechanical system with a horizontal beam ABDE and a vertical support at A. A force F_2 acts at C, and a force F_1 acts at E. Virtual forces S_2' and S_2 are shown at C and D. A virtual rotation $\delta\phi$ is indicated at A. Dimensions $2a$ and a are shown.

$\vec{S}_2$ и $\vec{S}'_2$ реакции отброшенной связи.
Кинематический анализ:

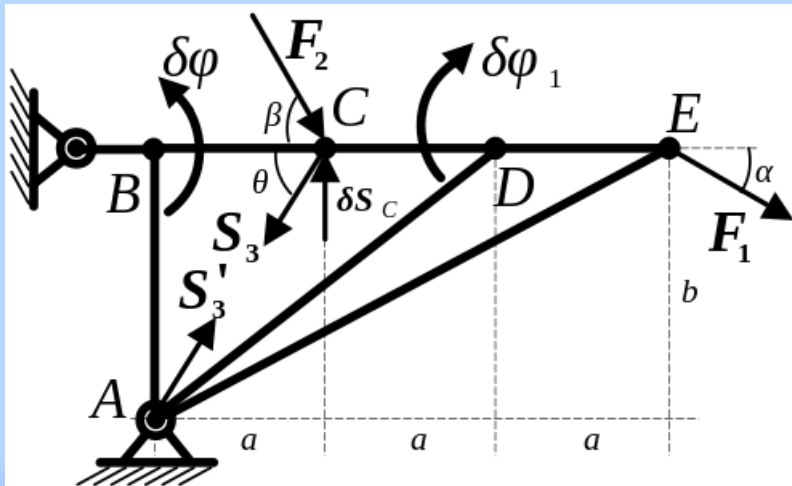
2. Часть конструкции, образованная стержнями AD , DE , AE является твердым телом с МЦС в точке A . Возможное перемещение тела ADE это поворот на угол $\delta\varphi$ относительно МЦС.

$$\begin{aligned}\sum \delta A_{\delta\varphi}(\vec{F}_i) &= M_A(S_2)\delta\varphi + M_A(F_1)\delta\varphi = \\ &= bS_2\delta\varphi - (3aF_1\sin\alpha + bF_1\cos\alpha)\delta\varphi = \\ &= [bS_2 - (3aF_1\sin\alpha + bF_1\cos\alpha)]\delta\varphi = 0\end{aligned}$$
$$S_2 = \left(\cos \alpha + 3 \frac{a}{b} \sin \alpha \right) F_1$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ. ФЕРМА.



Усилие в стержне AC



Удаляем связь – стержень AC

$\vec{S}_3$ и $\vec{S}'_3$ реакции отброшенной связи.
Кинематический анализ:

1. Стержень AB остается неподвижным.
Возможное перемещение $\delta \vec{s}_C$ точки C перпендикулярно стержню BC

и определяется поворотом стержня относительно его МЦС в точке B.

2. Часть конструкции, образованная стержнями AD, DE, AE является твердым телом. МЦС стержня CD лежит на прямой перпендикулярной $\delta \vec{s}_C$ и оказывается в точке D. Следовательно, тело ADE остается неподвижным.

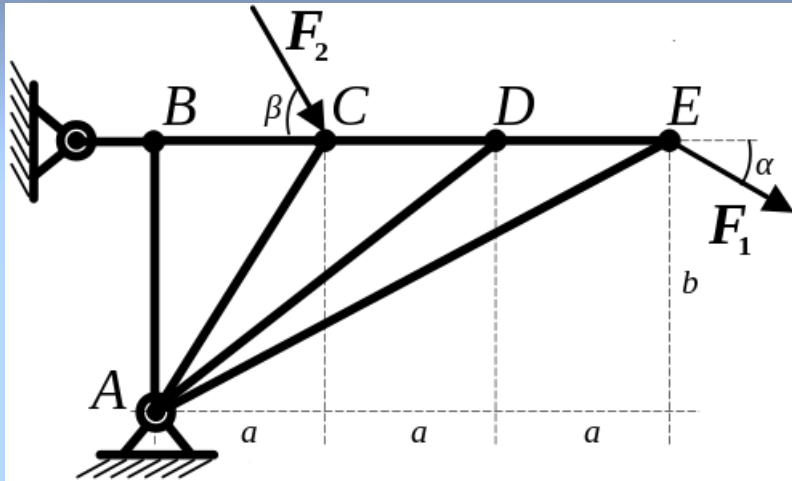
3. Уравнение работ:

$$\begin{aligned} \sum \delta A_{\delta}(\vec{F}_i) &= \vec{S}_3 \cdot \delta \vec{s}_C + \vec{F}_2 \cdot \delta \vec{s}_C = \\ &= -S_3 \delta s_C \sin \theta - F_2 \delta s_C \sin \beta = \\ &= -(S_3 \sin \theta + F_2 \sin \beta) \delta s_C = 0 \end{aligned}$$

Ответ:

$$S_3 = -\frac{\sin \beta}{\sin \theta} F_2 = -\sqrt{1 + (a/b)^2} F_2 \sin \beta$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ. ФЕРМА.



САМОСТОЯТЕЛЬНО:

1. Определить усилие в стержнях AB , AD :

Освободиться от связи.

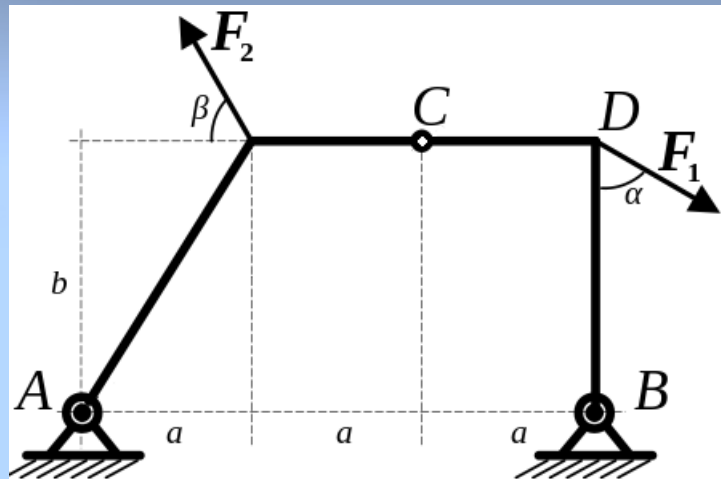
Провести кинематический анализ.

Вывод можно сделать не составляя уравнение работ!

2. Найти усилия в стержнях BC , CD , DE .

3.* Показать, что метод вырезания узлов и метод Риттера следуют из принципа возможных перемещений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ. РАМА.



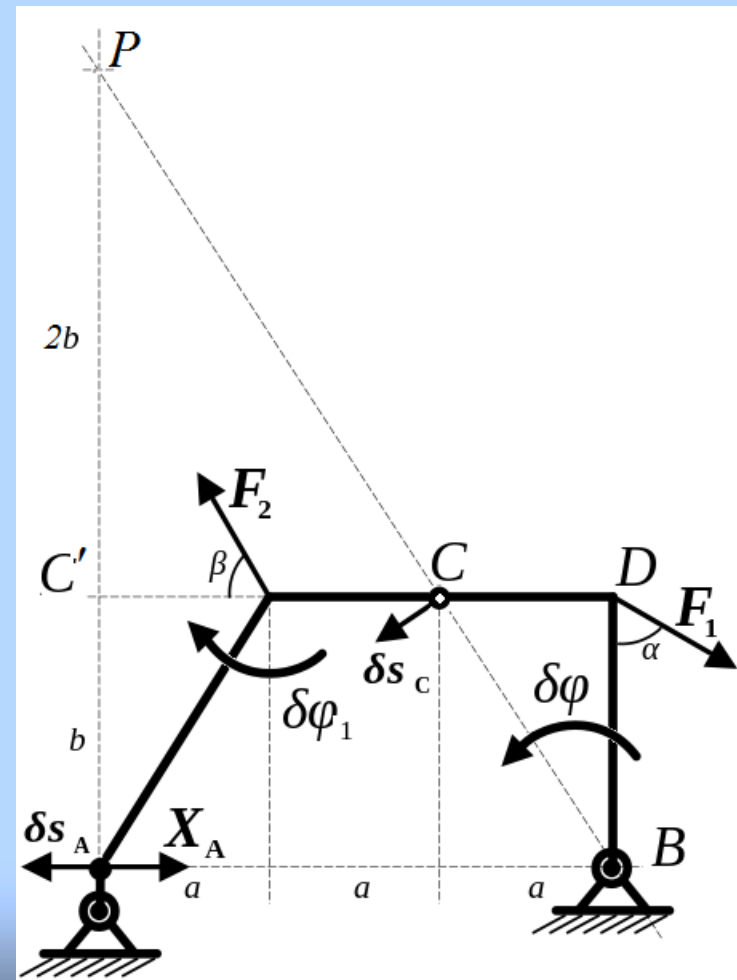
Удаляем одну связь: неподвижный шарнир A заменяем вертикальной стержневой опорой и добавляем реакцию отброшенной связи X_A .

Кинематический анализ:

1. Тело BC может вращаться относительно МЦС в точке B .
2. Тело AC может вращаться относительно МЦС в точке P .

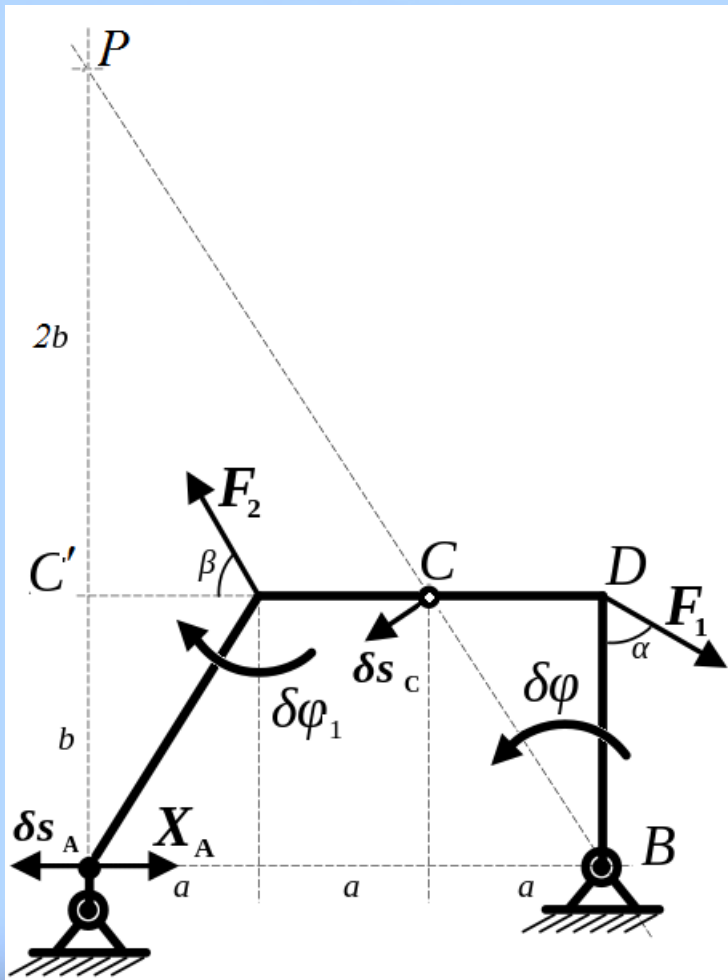
$$3. \quad \delta s_C = BC \delta \varphi = PC \delta \varphi_1$$

Горизонтальная составляющая реакции неподвижного шарнира A



ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ. РАМА.

Горизонтальная составляющая реакции неподвижного шарнира А. Уравнение работ.



Треугольники $B CD$ и $P C C'$ подобны, по подобию треугольников:

$$\frac{BC}{PC} = \frac{CD}{CC'} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \delta\varphi_1 = \frac{\delta\varphi}{2}$$

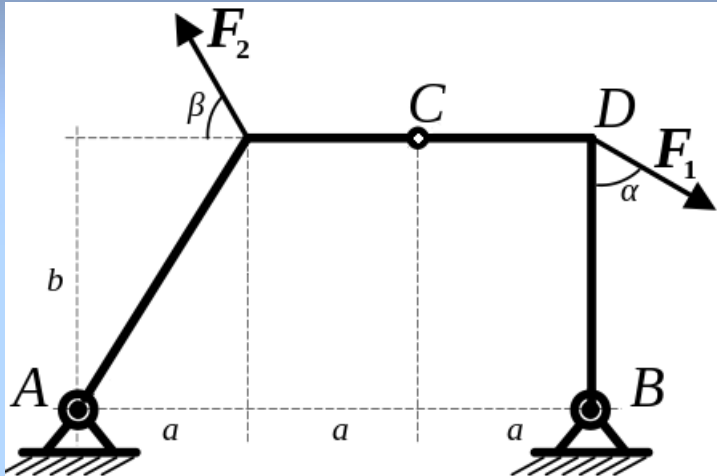
При составлении уравнения работ учитываем взаимные направления поворотов и моментов:

$$\begin{aligned} \sum \delta A_{\delta\varphi}(\vec{F}_i) &= -M_P(X_A)\delta\varphi_1 - M_P(F_2)\delta\varphi_1 + M_B(F_1)\delta\varphi = \\ &= -3bX_A\delta\varphi_1 - (aF_2 \sin \beta - 2bF_2 \cos \beta)\delta\varphi_1 - bF_1 \sin \alpha \delta\varphi = \\ &= \left(-\frac{3}{2}bX_A - \frac{a}{2}F_2 \sin \beta + bF_2 \cos \beta - bF_1 \sin \alpha \right) \delta\varphi = 0 \end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{3}{2}bX_A - \frac{a}{2}F_2 \sin \beta + bF_2 \cos \beta - bF_1 \sin \alpha = 0$

$$X_A = -\frac{a}{3b}F_2 \sin \beta + \frac{2}{3}F_2 \cos \beta - \frac{2}{3}F_1 \sin \alpha$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ. РАМА.



Горизонтальная составляющая реакции неподвижного шарнира B

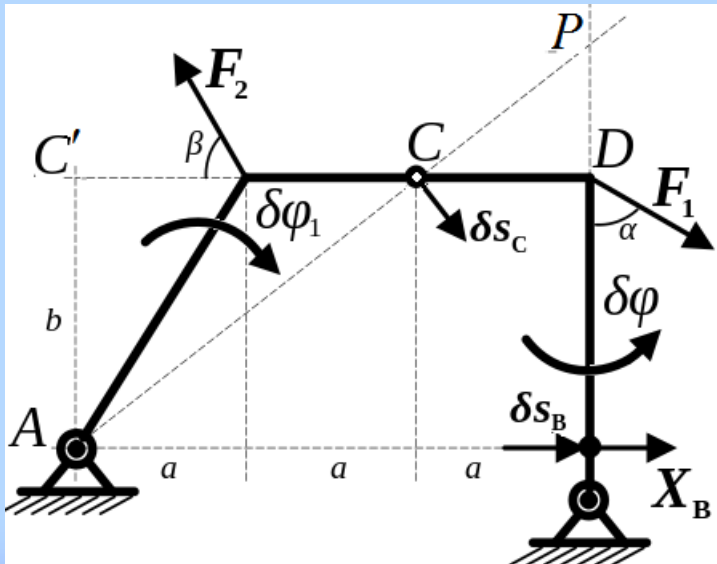
Удаляем одну связь: неподвижный шарнир B заменяем вертикальной стержневой опорой и добавляем реакцию отброшенной связи X_B . Кинематический анализ:

1. Тело BC может вращаться относительно МЦС в точке P .
2. Тело AC может вращаться относительно МЦС в точке A .

$$3. \quad \delta s_C = PC \delta \varphi = AC \delta \varphi_1$$

Треугольники PCD и ACC' подобны, по подобию треугольников:

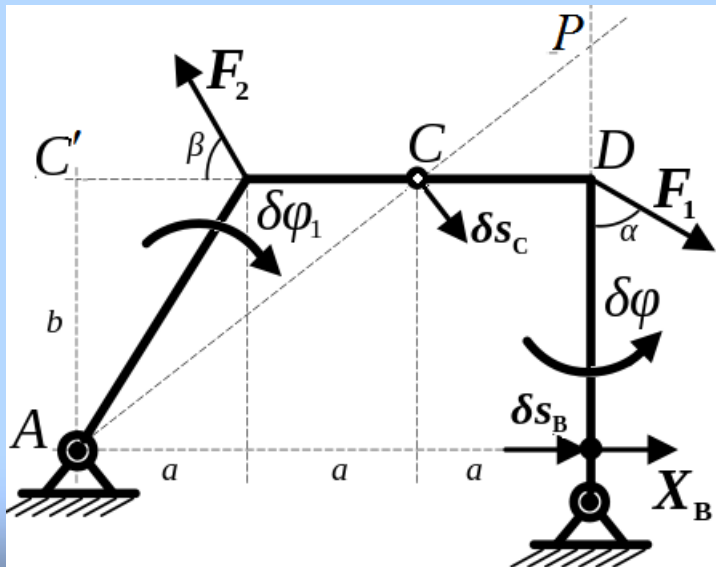
$$\frac{PC}{AC} = \frac{CD}{CC'} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \delta \varphi_1 = \frac{\delta \varphi}{2}$$



ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ. РАМА.

Горизонтальная составляющая реакции неподвижного шарнира B . Уравнение работ.

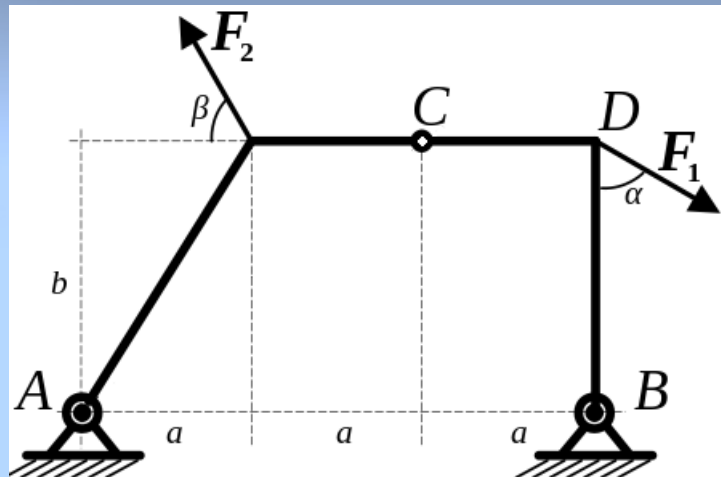
$$\begin{aligned}\sum \delta A_{\delta\varphi}(\vec{F}_i) &= M_P(X_B)\delta\varphi + M_P(F_1)\delta\varphi - M_A(F_2)\delta\varphi_1 = \\ &= \frac{3}{2}bX_B\delta\varphi + \frac{b}{2}F_1\sin\alpha\delta\varphi - (aF_2\sin\beta + bF_2\cos\beta)\delta\varphi_1 = \\ &= \left(\frac{3}{2}bX_B + \frac{b}{2}F_1\sin\alpha - \frac{a}{2}F_2\sin\beta - \frac{b}{2}F_2\cos\beta\right)\delta\varphi = 0\end{aligned}$$



Ответ:

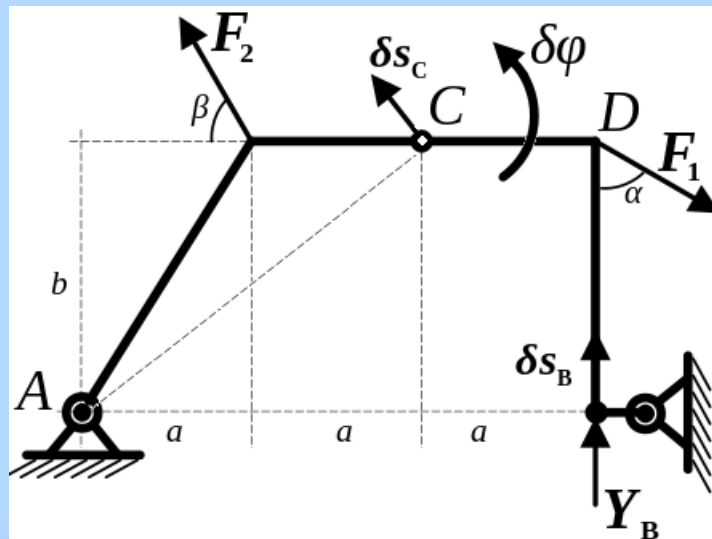
$$\begin{aligned}\frac{3}{2}bX_B + \frac{b}{2}F_1\sin\alpha - \frac{a}{2}F_2\sin\beta - \frac{b}{2}F_2\cos\beta &= 0 \\ X_B &= -\frac{1}{3}F_1\sin\alpha + \frac{a}{3b}F_2\sin\beta + \frac{1}{3}F_2\cos\beta\end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ. РАМА.



Вертикальная составляющая реакции шарнира B

Удаляем одну связь: неподвижный шарнир B заменяем горизонтальной стержневой опорой и добавляем реакцию отброшенной связи Y_B . Кинематический анализ:



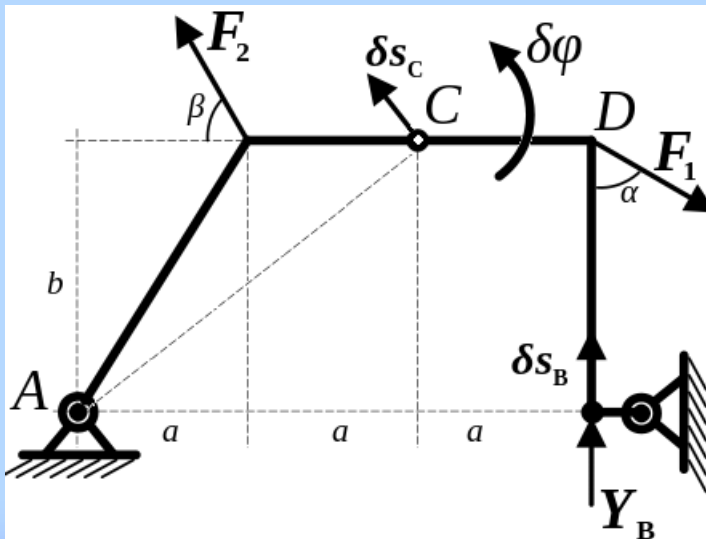
1. Тело AC может вращаться относительно МЦС в точке A .
2. МЦС тела BC является точкой пересечения перпендикуляров к возможным перемещениям $\delta \vec{s}_B$ и $\delta \vec{s}_C$ т.е. находится в точке A .

3. Конструкция совершает мгновенный поворот на угол $\delta \varphi$ как твердое тело относительно МЦС в точке A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ. РАМА.

Вертикальная составляющая реакции неподвижного шарнира B . Уравнение работ.

$$\begin{aligned}\sum \delta A_{\delta\varphi}(\vec{F}_i) &= M_A(Y_B)\delta\varphi + M_A(F_1)\delta\varphi + M_A(F_2)\delta\varphi = \\ &= 3aY_B\delta\varphi + (-3aF_1\cos\alpha - bF_1\sin\alpha)\delta\varphi + (aF_2\sin\beta + bF_2\cos\beta)\delta\varphi = \\ &= (3aY_B - 3aF_1\cos\alpha - bF_1\sin\alpha + aF_2\sin\beta + bF_2\cos\beta)\delta\varphi = 0\end{aligned}$$



ОТВЕТ:

$$3aY_B - 3aF_1\cos\alpha - bF_1\sin\alpha + aF_2\sin\beta + bF_2\cos\beta = 0$$

$$Y_B = F_1\cos\alpha + \frac{b}{3a}F_1\sin\alpha - \frac{1}{3}F_2\sin\beta - \frac{b}{3a}F_2\cos\beta$$

Самостоятельно: найти Y_A

ПЕРВЫЕ ВЫВОДЫ

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДАЕТ НАМ УНИВЕРСАЛЬНЫЙ ИНСТРУМЕНТ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ УСЛОВИЙ **РАВНОВЕСИЯ** МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИДЕАЛЬНЫМИ СТАЦИОНАРНЫМИ СВЯЗЯМИ.

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СОЧЕТАНИИ С ПРИНЦИПОМ ДАЛАМБЕРА ПОЗВОЛИТ ПОЛУЧИТЬ И **ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ**, ПРИГОДНОЕ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ **ДВИЖЕНИЯ** МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ.

Контрольные вопросы к лекции.

- Что такое возможное перемещения точки?
- возможное перемещение механической системы?
- Зависят ли возможные перемещения от действующих сил?
- Какие связи называются: а) голономными?
- б) стационарными? в) идеальными?
- Что такое возможная работа силы?
- Сформулируйте принцип возможных перемещений.
- Как найти число степеней свободы системы?