

В.А. ЮДИН

ЛЕКЦИИ ПО ДИНАМИКЕ ТОЧКИ

НОВОСИБИРСК 2014

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (СИБСТРИН)

В.А. Юдин

ЛЕКЦИИ ПО ДИНАМИКЕ ТОЧКИ

Учебное пособие

НОВОСИБИРСК 2014

УДК 531.3
ББК В21
Ю 163

Юдин В. А.

Лекции по динамике точки : учеб. пособие / В. А. Юдин ; Новосибир. гос. архитектур.-строит. ун-т (Сибстрин). – Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2014. – 1 электрон.-оптич. диск (CD-R).

ISBN 978-5-7795-0703-5

Учебное пособие включает пять лекций по динамике точки: динамика материальной точки, прямолинейные колебания точки, несвободное движение точки, движение точки в неинерциальной системе отсчета, общие теоремы динамики точки. А также содержит приложение с изложением методов интегрирования встречающихся в лекциях дифференциальных уравнений.

Пособие предназначено для студентов всех специальностей дневной и вечерней форм обучения.

Издается по решению издательско-библиотечного совета
НГАСУ (Сибстрин)

Рецензенты:

- И.Т. Вохмянин, д-р физ.-мат. наук, профессор (НГАСУ (Сибстрин));
- В.В. Леманов, канд. физ.-мат. наук, доцент (ИТ СО РАН)

ISBN 978-5-7795-0703-5

© В.А. Юдин, 2014
© Новосибирский государственный
архитектурно-строительный
университет (Сибстрин), 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	5
Лекция 1. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.....	6
1.1. Предмет и задачи динамики.....	6
1.2. Аксиомы динамики (законы Галилея – Ньютона)	7
1.3. Дифференциальные уравнения материальной точки	11
1.4. Основные задачи динамики точки.....	12
1.5. Рекомендации к решению обратных задач динамики точки	17
Вопросы для самоконтроля	23
Упражнения.....	24
Лекция 2. ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОЧКИ	25
2.1. Колебания в природе и технике.....	25
2.2. Свободные незатухающие колебания (без учета сопротивления среды).....	26
2.3. Свободные колебания при наличии постоянной силы	29
2.4. Свободные затухающие колебания (с учетом сопротивления среды)	30
2.5. Вынужденные колебания без учета сопротивления среды.....	35
2.6. Вынужденные колебания при наличии сил сопротивления	39
2.7. Решение задач на колебательное движение точки.....	45
Вопросы для самоконтроля	51
Упражнения.....	52
Лекция 3. НЕСВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ	54
3.1. Уравнение связей, классификация связей	54
3.2. Движение точки по неподвижной поверхности.....	56
3.3. Движение точки по неподвижной кривой	67
Вопросы для самоконтроля	74
Упражнения.....	75

Лекция 4. ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ В НЕИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА.....	76
4.1. Основной закон динамики в неинерциальной системе отсчета	76
4.2. Покой в неинерциальной системе отсчета.....	82
4.3. Покой относительно Земли	89
4.4. Влияние вращения Земли на движение тел	90
4.5. Невесомость.....	93
Вопросы для самоконтроля	96
Упражнения.....	97
Лекция 5. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ ТОЧКИ.....	98
5.1. Количество движения (импульс) точки	98
5.2. Импульс силы	99
5.3. Теорема об изменении количества движения (импульса) точки	100
5.4. Законы сохранения количества движения (импульса).....	101
5.5. Момент количества движения точки.....	102
5.6. Теорема об изменении момента количества движения (теорема моментов)	103
5.7. Законы сохранения момента количества движения.....	104
5.8. Движение точки под действием центральной силы. Закон площадей	105
5.9. Кинетическая энергия точки	107
5.10. Работа силы.....	108
5.11. Теорема об изменении кинетической энергии	113
5.12. Закон сохранения механической энергии.....	114
5.13. Примеры решения задач на применение общих теорем динамики точки	117
Вопросы для самоконтроля	123
Упражнения.....	124
ПРИЛОЖЕНИЕ	125

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая работа посвящена систематическому изложению части курса теоретической механики, обычно читаемому в технических вузах. А именно, она посвящена основному разделу курса – динамике, причем в ней изложены только вопросы динамики точки.

Данное пособие – это не учебник, а курс лекций. Автор намеренно написал ее максимально приближенным к аудитории в надежде вызвать отклик и живую реакцию. Всего в пособии содержится пять лекций – динамика материальной точки, прямолинейные колебания точки, несвободное движение точки, движение точки в неинерциальной системе отсчета и общие теоремы динамики точки. В приложении даны решения встречающихся в лекциях дифференциальных уравнений.

Пособие написано на основе лекций, которые автор в течение многих лет читал в Новосибирском государственном архитектурно-строительном университете (Сибстрин).

Автор выражает благодарность всем сотрудникам кафедры теоретической механики, которые принимали активное участие в работе над лекциями.

Лекция 1. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1.1. Предмет и задачи динамики

Приступим к рассмотрению основного раздела курса теоретической механики – динамики, изучающей движение материальных тел, возникающее при их взаимодействии. Но поскольку в механике мерой взаимодействия тел являются силы, то *динамика изучает движение материальных тел под действием сил*. Силы в динамике будем считать в общем случае переменными, зависящими от времени, положения тел и их скоростей. Так, например, от времени может зависеть сила давления ветра на преграду, сила упругости пружины зависит от положения прикрепленного к ней груза, а сила сопротивления воздуха – от скорости падающего камня. Под телами по-прежнему будем понимать либо материальные точки, либо абсолютно твердые тела, либо конструкции, из них состоящие.

При всем разнообразии динамических задач выделим *две основные*. В *первой задаче (прямой)* заданными будем считать закон движения тела (или системы тел), а находить силы, под действием которых это движение совершается. Во *второй задаче (обратной)*, наоборот, будем считать заданными силы, а искать закон движения. Стоит отметить, что на практике часто приходится решать смешанную задачу, когда часть сил известна, а некоторые (например, реакции связей) необходимо найти наряду с законом движения. При решении этих задач мы будем опираться на уже изученные разделы – статику и кинематику. А именно, пользоваться принципом освобождения от связей (т.е. считать несвободные тела свободными, отбрасывая связи и заменяя их действие силами реакции связей), способами приведения сил (заменять одну систему сил другой, ей эквивалентной) и методами описания движения тел (законами движения и свойствами основных кинематических характеристик).

Изучение динамики, так же как и изучение статики и кинематики, мы начнем с рассмотрения простейшего случая – движения материальной точки. Напомним, что под материальной точкой мы понимаем геометрическую точку, наделенную массой (т.е. тело конечной массы, размерами которого пренебрегаем).

1.2. Аксиомы динамики (законы Галилея – Ньютона)

В основе динамики точки лежат законы, установленные опытным путем в результате наблюдений и экспериментов. Систематически их впервые изложил Исаак Ньютон в книге «Математические начала натуральной философии», в 1687 г. Они-то и являются аксиомами динамики.

Аксиома 1 (закон инерции Галилея, или первый закон Ньютона). *Если на свободную материальную точку не действуют силы, то она находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.* Такую точку называют еще изолированной, она не взаимодействует с другими телами, и для нее равнодействующая всех действующих сил равна нулю $\mathbf{F} = \sum_k \mathbf{F}_k = 0$. Соответствующее этому случаю движение называют *движением по инерции*.

Мы уже знаем из кинематики, что закон движения зависит от выбора системы отсчета, поэтому естественно поставить вопрос: по отношению к какой системе отсчета справедлив закон инерции Галилея? Ведь движение, происходящее с постоянной скоростью в одной системе отсчета, может иметь ускорение в другой системе отсчета. Введем поэтому определение: система отсчета, в которой справедлив закон инерции Галилея, называется *инерциальной*. И, наоборот, система отсчета, в которой несправедлив закон инерции Галилея, называется *неинерциальной*.

Заметим, что если система отсчета A_1 движется поступательно равномерно прямолинейно относительно инерциальной

системы отсчета A , то она тоже инерциальная. А также, если A_1 и A – две инерциальные системы отсчета, то они движутся относительно друг друга поступательно равномерно прямолинейно. Доказательство этих утверждений непосредственно следует из определения инерциальной системы отсчета и теоремы о сложении скоростей при сложном движении точки. Таким образом, все инерциальные системы отсчета движутся относительно друг друга с постоянной по модулю и направлению скоростью.

Инерциальные системы отсчета являются идеализацией реально существующих. Другими словами, любая конкретная система отсчета, строго говоря, является неинерциальной, а инерциальная система отсчета – это идеальная система отсчета, к которой можно только стремиться. С большой степенью точности за инерциальную можно принять *гелиоцентрическую* систему отсчета – с началом в центре Солнечной системы и осями, направленными на «неподвижные» звезды (центр масс Солнечной системы движется относительно центра масс нашей галактики с пренебрежимо малым ускорением, порядка $3 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2$). Для большинства технических задач за инерциальную можно принять *геоцентрическую* систему координат, жестко связанную с Землей (но не для всех, связано это с суточным вращением Земли, и такие задачи мы рассмотрим в п. 4.3 лекции 4).

Аксиома 2 (второй закон Ньютона). *Сила, действующая на свободную материальную точку, сообщает ей ускорение, которое в инерциальной системе отсчета пропорционально этой силе и имеет одинаковое с ней направление.* В аналитической форме этот закон представляется в виде *основного уравнения динамики*

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \text{ или } m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{F}$ – сила, действующая на свободную материальную точку; $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$ – ее ускорение; m – коэффициент пропорциональности

между силой и ускорением, который в классической механике считается постоянным¹ и называется *массой*.

При этом между модулями силы и ускорения имеется зависимость

$$ma = F. \quad (1.2)$$

Из (1.2) непосредственно следует, что масса материальной точки является мерой ее инертности, поскольку при действии данной силы точка, масса которой больше, т.е. более инертная, получит меньшее ускорение и наоборот (*inertia* – в переводе на русский язык означает «косность», «лень»).

Применяя (1.2) к точке (телу) весом **G** и учитывая, что ускорение свободного падения равно **g**, получим

$$m = G / g. \quad (1.3)$$

То есть масса материальной точки (тела) численно равна весу точки (тела), деленному на ускорение свободного падения.

Аксиома 3 (третий закон Ньютона). *Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по величине и направленными вдоль одной прямой в противоположные стороны.* Так же, как и в статике, этой аксиомой мы воспользуемся при рассмотрении системы материальных точек (тел).

Аксиома 4 (принцип суперпозиции действия сил). *Действие на материальную точку произвольной системы n сил $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$ эквивалентно действию одной силы, равной их сумме*

$\mathbf{F} = \sum_1^n \mathbf{F}_k$. Эта аксиома означает следующее: если при действии

одной силы $\mathbf{F}_k$ точка получает ускорение $\mathbf{a}_k = \mathbf{F}_k / m$, то при одновременном действии на нее n сил $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$ она получит уско-

рение $\mathbf{a} = \mathbf{F} / m = (\sum_1^n \mathbf{F}_k) / m = \sum_1^n (\mathbf{F}_k / m) = \sum_1^n \mathbf{a}_k$.

¹ В специальной теории относительности $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2 / c^2}$, где m_0 – масса покоя, c – скорость света, v – скорость точки. Таким образом, рамки применимости классической механики ограничены случаем малых скоростей тел по сравнению со скоростью света.

Аксиома 5 (аксиома связей). *Всякое несвободное движение материальной точки можно рассматривать как свободное, если освободиться от связей и заменить их силами реакций этих связей.* Заменять связи их реакциями мы будем точно так же, как это делали в статике при изучении равновесия тел.

Основной закон динамики (1.1), в самом общем случае, когда точка несвободна и на нее действуют несколько активных сил, согласно аксиомам 4 и 5, будет иметь вид

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} = \sum_1^n \mathbf{F}_k, \quad (1.4)$$

где под $\mathbf{F}$ нужно понимать сумму всех сил – активных и реакций связей.

В заключение этого пункта обратим внимание на два важных обстоятельства:

1. Формально, исходя из формулировок, первый закон Ньютона является простым следствием второго закона Ньютона. Действительно, подставляя в уравнение (1.1) $\mathbf{F} = 0$, получаем, что $\mathbf{a} = 0$, или, что то же самое, $\mathbf{v} = \text{const}$. Тогда спрашивается: а зачем он нужен? Ответ на этот вопрос следующий – закон инерции Галилея постулирует существование таких систем отсчета, в которых он справедлив, и тем самым указывает на рамки применимости основного закона динамики. А именно, на то, что он применим для инерциальных систем отсчета.

2. Так как все инерциальные системы отсчета движутся относительно друг друга с постоянной по модулю и направлению скоростью, то ускорения точек во всех инерциальных системах отсчета будут одинаковыми (вспомни, читатель, теорему о сложении ускорений при сложном движении точки). Поэтому формулировка законов Галилея – Ньютона во всех инерциальных системах отсчета будет одинакова, т.е. *все инерциальные системы отсчета равноправны, механически неразличимы*. В этом состоит *принцип относительности* классической механики.

1.3. Дифференциальные уравнения материальной точки

Основной закон динамики (1.1) устанавливает зависимость между силами, действующими на точку, и ее ускорением. Найдем теперь взаимосвязь этих сил непосредственно с законом движения материальной точки. В декартовой системе координат такой закон задается уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, а в естественной системе координат – уравнением $s = s(t)$. Ускорение $\mathbf{a}$, как известно из кинематики, связано с этими функциями соотношениями

$$a_x = \ddot{x}, a_y = \ddot{y}, a_z = \ddot{z}, a_\tau = \ddot{s}, a_n = \dot{s}^2 / \rho, a_b = 0,$$

где (a_x, a_y, a_z) и (a_τ, a_n, a_b) – проекции ускорения на оси x, y, z декартовой и на оси τ, n, b естественной систем координат; ρ – радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке M (рис. 1.1).

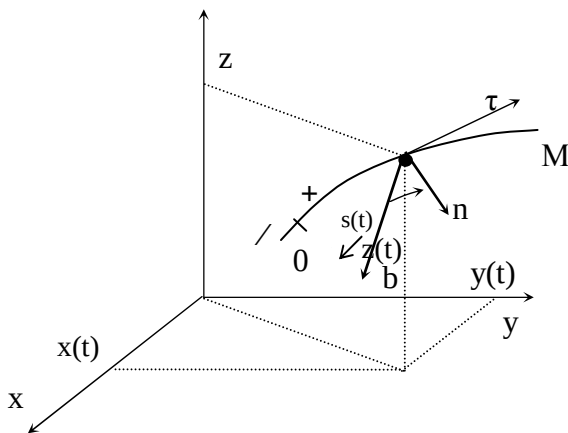


Рис. 1.1

Проектируя теперь равенство (1.1) на эти оси, получим уравнения

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \quad m\ddot{y} = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{z} &= F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$m\ddot{s} = F_\tau(t, s, \dot{s}), \quad m\dot{s} / \rho = F_n(t, s, \dot{s}), \quad 0 = F_b(t, s, \dot{s}). \quad (1.6)$$

Здесь учтено, что сила $\mathbf{F} = \sum_1^n \mathbf{F}_k$ является равнодействующей всех активных сил и сил реакций связей, действующих на точку, которые в общем случае могут зависеть от времени, положения точки и ее скорости. Соответственно, проекции сил F_α , входящие в уравнения (1.5), (1.6), вычисляются по формулам $F_\alpha = \sum_1^n F_{k\alpha}$, где $\alpha = x, y, z, \tau, n, b$.

Уравнения (1.5), (1.6) называются *дифференциальными уравнениями (ДУ) движения точки*, соответственно, в декартовой и естественной системе координат.

1.4. Основные задачи динамики точки

Дифференциальные уравнения (1.5) и (1.6) являются основным инструментом для решения задач динамики точки. Как и при решении любой задачи, некоторые из величин должны быть заданы, а другие требуется определить в процессе решения. По этому признаку можно выделить две основные задачи – *прямую и обратную*.

Прямой (или первой) называется задача, в которой по заданному движению и массе материальной точки определяется равнодействующая сил, приложенных к ней. По существу эта задача сводится к дифференцированию известных функций, задающих закон движения точки. Например, если закон движения задан в декартовой системе координат уравнениями

$x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, то проекции искомой силы F_x, F_y, F_z , согласно уравнениям движения (1.5), вычисляются так:

$$F_x = m\ddot{x} = m \frac{d^2 f_1}{dt^2}, \quad F_y = m\ddot{y} = m \frac{d^2 f_2}{dt^2}, \quad F_z = m\ddot{z} = m \frac{d^2 f_3}{dt^2}. \quad (1.7)$$

Модуль и направление силы могут быть вычислены далее по известным формулам

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2},$$

$$\cos(\mathbf{F}, x) = F_x / F, \quad \cos(\mathbf{F}, y) = F_y / F, \quad \cos(\mathbf{F}, z) = F_z / F.$$

Задача 1. Уравнения плоского движения точки массой m имеют вид $x = r \cos kt$, $y = r \sin kt + b$. Определить силу, под действием которой происходит это движение.

Решение. Исключая время t из уравнений движения, находим уравнение траектории точки

$$x^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

представляющую собой окружность с центром в точке $A(0, b)$ радиуса r (рис. 1.2).

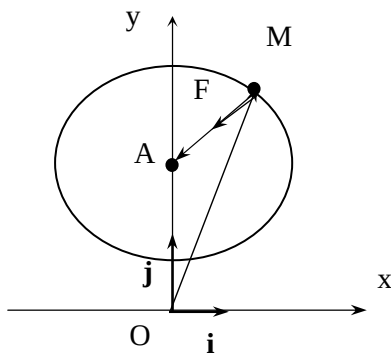


Рис. 1.2

Определяем проекции ускорения точки на оси координат $a_x = \ddot{x} = -rk^2 \cos kt$, $a_y = \ddot{y} = -rk^2 \sin kt$. Следовательно,

$$F_x = m\ddot{x} = -mrk^2 \cos kt = -mk^2 x,$$

$$F_y = m\ddot{y} = -mrk^2 \sin kt = -mk^2 y + mbk^2.$$

Таким образом, сила $\mathbf{F}$ будет иметь вид $\mathbf{F} = -mk^2 \mathbf{OM} + mbk^2 \mathbf{j} = -mk^2 (\mathbf{OM} - b\mathbf{j}) = -mk^2 \mathbf{MA}$. Следовательно, точка движется по окружности радиуса r с центром в точке $(0, b)$ под действием силы притяжения, направленной к центру этой окружности и пропорциональной ее радиусу, $F = mk^2 r$.

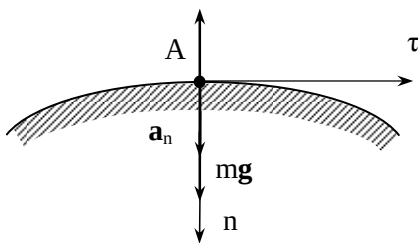


Рис. 1.3

Задача 2. Радиус закругления моста в точке A равен R (рис. 1.3). Найти давление автомобиля массы m , движущегося со скоростью u , на мост в точке A .

Решение. Считая автомобиль материальной точкой, введем естественную систему координат (рис. 1.3) и воспользуемся уравнением (1.6) в проекции на нормаль $mu^2/R = -N + mg$, где N – нормальная реакция моста. Сила давления автомобиля на мост, согласно третьему закону Ньютона, равна по модулю $N = m(g - u^2/R)$ и направлена вниз. Так как по физическому

смыслу задачи $N \geq 0$, то получаем ограничение на скорость движения автомобиля $u \leq \sqrt{Rg}$. При $u > \sqrt{Rg}$ автомобиль оторвется в точке A от поверхности моста (взлетит в воздух).

Обратной (или второй, или ее еще называют основной) задачей динамики называется задача об определении закона движения точки по заданным силам и массе. Для ее решения необходимо проинтегрировать уравнения (1.5) или (1.6). При интегрировании этих уравнений появятся произвольные постоянные интегрирования. Для их определения в условие задачи должны быть включены дополнительные данные, называемые *начальными условиями* задачи. В качестве этих условий обычно задаются положение и скорость точки в некоторый фиксированный момент времени (например, начальный, при $t = 0$). Так, если задача решается в проекциях на оси декартовой системы координат, то при интегрировании системы (1.5) в случае произвольного пространственного движения точки появятся шесть произвольных постоянных (три уравнения, причем каждое второго порядка). Для их определения необходимо задать шесть дополнительных условий, например, положение точки в начальный момент времени $t = 0$: $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$ и ее скорость $\dot{x}(0) = v_{0x}$, $\dot{y}(0) = v_{0y}$, $\dot{z}(0) = v_{0z}$.

Решение обратной задачи представляет подчас значительные сложности, связанные с интегрированием системы дифференциальных уравнений. В общем случае удастся получить лишь приближенное решение с применением численных методов на ЭВМ. В каждом конкретном случае, в зависимости от вида функции $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ и типа движения (например, плоского или прямолинейного), задача может быть значительно упрощена. Способы интегрирования для некоторых типичных задач даны в прил. П1 и представляют сведения чисто математического характера. Что же касается решения задач в целом, то общие рекомендации и полезные советы даны в следующем пункте.

Отметим (см. также п. 1.1 лекции 1), что не все задачи динамики точки сводятся к прямым или обратным. Часто встреча-

ются задачи, в которых известна лишь часть сил, действующих на точку, но зато при этом дается какая-то дополнительная информация о движении этой точки. Например, в случае несвободного движения точки могут быть заданы активные силы и при этом известна траектория ее движения.

Задача 3. Точка M массы m скатывается по гладкой внутренней поверхности полого цилиндра радиуса R без начальной скорости (рис. 1.4). Определить скорость точки и ее давление на поверхность в зависимости от угла φ .

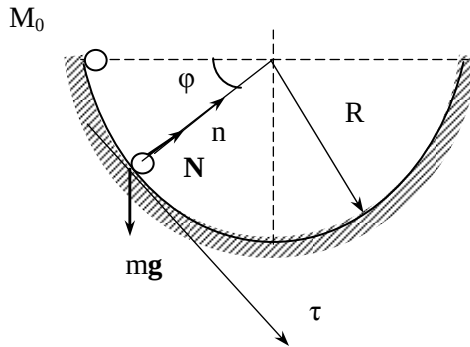


Рис. 1.4

Решение. Рассмотрим движение точки M в произвольный момент времени, соответствующий углу φ . На нее будет действовать сила тяжести mg и нормальная реакция цилиндрической поверхности N . Следовательно, второй закон Ньютона (1.4) запишется в виде $m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{N}$, или в проекциях на оси касательной τ и нормали n в виде:

$$\tau : m \frac{dv}{dt} = mg \cos \varphi, \quad n : mv^2 / R = -mg \sin \varphi + N. \quad (1.8)$$

Зависимость $v = v(\varphi)$ получим из первого уравнения системы (1.8). Для этого заметим, что

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dv}{d\varphi} \omega = \frac{dv}{d\varphi} \frac{v}{R} = \frac{1}{2R} \frac{dv^2}{d\varphi}.$$

Следовательно, $\frac{dv^2}{d\varphi} = 2gR \cos \varphi$. Интегрируя это уравнение с учетом начальных условий $v(\varphi = 0) = 0$, получим $v^2(\varphi) = 2Rg \sin \varphi$, или $v(\varphi) = \sqrt{2Rg \sin \varphi}$.

Давление точки M на поверхность цилиндра, согласно третьему закону Ньютона, равно с точностью до знака силе реакции этой поверхности. Подставляя во второе уравнение системы (1.8) выражение для $v(\varphi)$, получим

$$N(\varphi) = mg \sin \varphi + 2mRg \sin \varphi / R = 3mg \sin \varphi.$$

Заметим, что в нижней точке цилиндра, при $\varphi = \pi / 2$, давление на него будет равно $3mg$. Если бы точка M покоилась, то давление ее на цилиндр в этом месте было бы равно, очевидно, mg . Таким образом, динамическое давление при движении тела может существенно (в нашем случае в три раза) отличаться от статического давления при его покое.

1.5. Рекомендации к решению обратных задач динамики точки

При решении конкретной задачи прежде всего нужно выбрать систему координат. Чаще всего удобно использовать прямоугольную декартову систему координат. Однако если известна траектория движения материальной точки, то предпочтительней может оказаться естественная система координат. Удачный выбор начала системы и направлений ее осей также может существенно упростить ход решения задачи. Начало системы координат часто совмещают с положением точки в начальный момент времени, а направление одной из осей — с направлением возможного движения. При колебательном движении точки (грузика на пружине) начало оси удобнее брать в по-

ложении ее покоя, а саму ось направлять в сторону удлинения пружины.

Далее необходимо в произвольный текущий момент времени изобразить материальную точку и указать все силы, которые на нее действуют. Обязательно нужно учесть, что второй закон Ньютона справедлив для свободной материальной точки. Поэтому нужно кроме активных сил указать еще и все силы реакций связей. Затем следует в векторном виде написать второй закон Ньютона $m\mathbf{a} = \mathbf{F} = \sum_k \mathbf{F}_k$, включив в эту сумму все активные силы и реакции связей.

Вслед за этим нужно спроецировать второй закон Ньютона на выбранные оси координат и получить систему ДУ в виде (1.5) или (1.6). Проекции сил нужно при этом выразить через входящие в эту систему переменные (в общем случае через время, положение точки и ее скорость).

Прежде чем интегрировать полученную систему уравнений, нужно предварительно сформулировать начальные условия задачи. Число этих условий должно равняться числу произвольных постоянных интегрирования. Скажем, при определении плоского движения точки в прямоугольной декартовой системе координат Oxy нужно задать четыре условия, например, начальное положение $x(0)$, $y(0)$ и начальную скорость $\dot{x}(0)$, $\dot{y}(0)$.

Следующий этап – чисто математический. Необходимо проинтегрировать полученную систему ДУ при заданных начальных условиях. Здесь можно пользоваться как определенными интегралами, находя пределы интегрирования по начальным условиям, так и неопределенными интегралами. В последнем случае нужно искать общее решение задачи, в которое войдут постоянные интегрирования, и выражать эти постоянные через начальные условия. Так или иначе, находится закон движения материальной точки – то единственное решение задачи, удовлетворяющее всем начальным условиям задачи.

Из закона движения материальной точки находятся и остальные неизвестные величины, требуемые в условии задачи. Таковыми могут быть, например, траектория движения, даль-

ность и высота полета, либо максимальное растяжение пружины в задачах о колебании груза и т.д.

Сформулируем еще раз, очень кратко, основные этапы решения задачи:

- 1) удачно выбрать систему координат;
- 2) изобразить все активные силы и силы реакции связей в произвольный момент времени;
- 3) написать уравнение Ньютона в векторном виде, спроецировать его на оси координат и выразить проекции сил через искомые величины;
- 4) сформулировать начальные условия задачи;
- 5) проинтегрировать полученную систему ДУ при заданных начальных условиях и найти искомые неизвестные.

Рассмотрим теперь несколько примеров решения обратных задач с использованием указанных выше рекомендаций.

Задача 4 (движение точки, брошенной под углом к горизонту). Тело массы m брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 . Пренебрегая сопротивлением среды и считая дальность полета и высоту над горизонтом малыми по сравнению с радиусом Земли, найти закон движения, траекторию, дальность и время полета, а также высоту траектории.

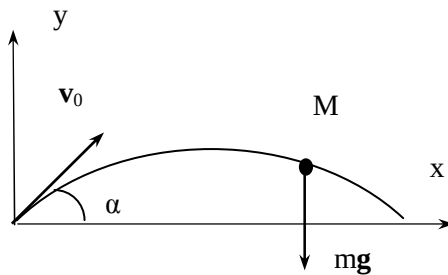


Рис. 1.5

Решение

1. Выберем систему координат Oxy , как показано на рис. 1.5.

2. По условию задачи единственной силой, действующей на тело (точку M на рис 1.5), является вес тела mg , причем g можно считать постоянной (так как дальность полета и высота траектории малы по сравнению с радиусом Земли).

3. Второй закон Ньютона тогда запишется в виде $ma = mg$, или $a = g$ (так как масса сократилась, то от нее не будут зависеть кинематические характеристики). В проекциях на оси координат будем иметь $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = -g$.

4. Начальными условиями для полученных ДУ будут $x(0) = y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha$, $\dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha$.

5. Интегрируя ДУ, получим $\dot{x} = C_1$, $\dot{y} = -gt + C_2$. Так как при $t = 0$: $\dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha$, $\dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha$, то $C_1 = v_0 \cos \alpha$, $C_2 = v_0 \sin \alpha$. Следовательно, $\dot{x} = v_0 \cos \alpha$, $\dot{y} = -gt + v_0 \sin \alpha$. Интегрируя уже эти уравнения, получаем

$$x(t) = (v_0 \cos \alpha)t + C_3, \quad y(t) = -gt^2 / 2 + (v_0 \sin \alpha)t + C_4.$$

Постоянные C_3, C_4 найдем из условий $x(0) = y(0) = 0$. Следовательно, $C_3 = 0$, $C_4 = 0$. Таким образом, закон движения тела (точки) будет иметь вид

$$x(t) = (v_0 \cos \alpha)t, \quad y(t) = -gt^2 / 2 + (v_0 \sin \alpha)t.$$

Определим теперь требуемые характеристики движения. Исключая из полученных уравнений движения время t , получим уравнение траектории $y = x \operatorname{tg} \alpha - gx^2 / (2v_0^2 \cos^2 \alpha)$. Это уравнение параболы с осью, параллельной оси Oy . Дальность полета определим, полагая в уравнении траектории $y = 0$. Из уравнения $x(\operatorname{tg} \alpha - gx / (2v_0^2 \cos^2 \alpha)) = 0$ получаем

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2v_0^2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha / g = v_0^2 \sin 2\alpha / g.$$

Первое решение соответствует началу движения, а второе – моменту приземления точки. То есть дальность полета

$L = v_0^2 \sin 2\alpha / g$. Высоту H траектории получим, полагая в уравнении траектории $x = L/2$. Тогда $H = v_0^2 \sin^2 \alpha / g$. И, наконец, время полета определим из равенства $L = (v_0 \cos \alpha)t$. Заменяя в нем L его значением, получим $T = 2v_0 \sin \alpha / g$.

Отметим, что полученные формулы дают хорошее совпадение для полетов ракет при $L \approx 200\text{--}600$ км. В этом случае основная часть полета проходит на высоте, где уже сопротивление воздуха пренебрежимо мало и вместе с тем еще не требуется учитывать изменение ускорения свободного падения с высотой полета.

Задача 5 (фантастический проект). Для перевозки грузов из Новосибирска в Париж предлагается прорыть сквозь Землю канал и отполировать его стенки (рис. 1.6).

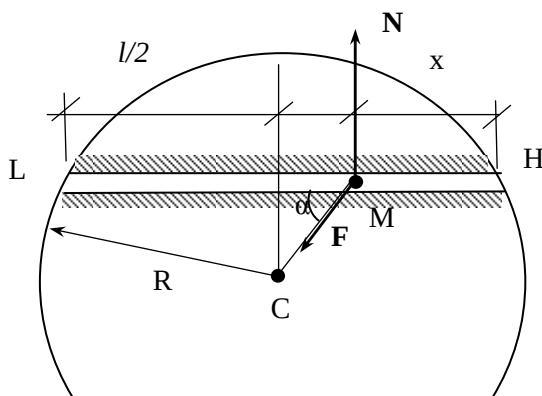


Рис. 1.6

Доедет ли груз до Парижа? Если да, то по какому закону он будет двигаться, сколько времени он будет ехать и с какой скоростью приедет в Париж? Считаем, что из Новосибирска груз

начинает движение с нулевой скоростью, радиус Земли $R = 6370$ км, а сила притяжения направлена к центру Земли и равна $F = mgr/R$, где m – масса груза, $r = MC$ – расстояние от него до центра Земли. Трением о стенки канала пренебречь.

Решение

1. Движение, очевидно, прямолинейное. Начало отсчета поместим в Новосибирске, а ось x направим вдоль канала в сторону Парижа.

2. На груз M , который будем считать материальной точкой, в произвольном его положении будет действовать сила $\mathbf{F}$ притяжения Земли и нормальная реакция гладкого канала $\mathbf{N}$.

3. Уравнение Ньютона запишется в виде $m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{N}$. Спроектируем его на ось x : $m\ddot{x} = F \cos \alpha = mgr \cos \alpha / R$ и выразим проекции сил через величину x : $r \cos \alpha = l/2 - x$, где l – расстояние от Новосибирска до Парижа. Получим ДУ:

$$m\ddot{x} = mg(l/2 - x)/R, \text{ или } \ddot{x} + (g/R)x = gl/2R.$$

Видим, что масса сократилась. Это означает, что для любых грузов движение будет одним и тем же.

4. Начальными условиями будут следующие:
 $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$.

5. Как известно из теории обыкновенных ДУ, общее решение полученного ДУ будет иметь вид $x = x_1 + x_2$, где x_1 – общее решение соответствующего однородного уравнения $\ddot{x} + (g/R)x = 0$; x_2 – некоторое частное решение полного уравнения $\ddot{x} + (g/R)x = gl/2R$ (прил. П1). Тогда

$$x_1 = A \cos(\sqrt{g/R}t) + B \sin(\sqrt{g/R}t),$$

где A и B – произвольные постоянные (прил. П1). Для нахождения частного решения x_2 неоднородного уравнения воспользуемся тем, что его правая часть постоянная. Полагая $x_2 = C = \text{const}$, непосредственной подстановкой находим, что $x_2 = l/2$. Таким образом, общее решение имеет вид

$$x = A \cos(\sqrt{g/R}t) + B \sin(\sqrt{g/R}t) + l/2. \quad (1.9)$$

Для нахождения постоянных A и B из начальных условий задачи $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ получаем два уравнения: $0 = A \cdot 1 + B \cdot 0 + l/2$ и $0 = -A\sqrt{g/R} \cdot 0 + B\sqrt{g/R} \cdot 1 + 0$. Значит, $A = -l/2, B = 0$. Закон движения груза, таким образом, будет иметь вид

$$x = l(1 - \cos(\sqrt{g/R}t))/2. \quad (10)$$

Проанализируем полученное решение. Прежде всего, отметим, что при $\cos(\sqrt{g/R}t) = -1, x = l$. Это означает, что груз до Парижа доедет (!), причем за время t_1 , определяемое равенством $\cos(\sqrt{g/R}t_1) = -1$. То есть $\sqrt{g/R}t_1 = \pi$, или $t_1 = \pi\sqrt{R/g} = 3,14\sqrt{6370 \cdot 10^3/9,8} \approx 42$ мин. Интересно отметить, что время t_1 не зависит от расстояния l (что до Парижа, что до Лондона, что до Омска – груз прибудет через то же время). Скорость, с которой груз доедет, будет равна $v_1 = \dot{x}(t_1) = -l\sqrt{g/R} \cos(\sqrt{g/R}t_1) = 0$. При этом, как это видно из уравнения (1.10), если груз не забрать в Париже, то он поедет обратно в Новосибирск.

Вопросы для самоконтроля

1. Что изучается в динамике?
2. Какие основные задачи динамики?
3. В чем суть закона инерции Галилея?
4. Какие системы отсчета называют инерциальными, а какие неинерциальными?
5. Как связаны между собой две инерциальные системы отсчета?
6. Почему систему отсчета, связанную с Землей, в большинстве случаев приближенно принимают за инерциальную?
7. Сформулируйте условия, при которых справедлив второй закон Ньютона.

8. В чем состоит принцип суперпозиции действия сил на точку?
9. Почему масса точки является мерой ее инерции?
10. Как применять второй закон Ньютона, если движение точки несвободно?
11. В чем состоит принцип относительности классической механики?
12. Для чего нужны дифференциальные уравнения движения точки?
13. Сформулируйте прямую и обратную задачи динамики точки. Все ли задачи динамики точки сводятся к этим двум?
14. Перечислите основные этапы решения обратной задачи динамики точки.
15. Для чего необходимо задавать начальные (дополнительные) условия при решении обратной задачи динамики точки? Сколько таких условий требуется задавать?

Упражнения

У.1. На тело массы m , лежащее на горизонтальной плоскости, действует постоянная сила F под углом α к горизонту. Коэффициент трения f . Найдите закон движения тела, если в начальный момент времени оно покоилось.

У.2. Сила сопротивления воздуха, действующая на капли тумана, пропорциональна произведению радиуса на скорость: $F = arv$, $a = \text{const}$. Капли радиуса $r = 0,1 \text{ мм}$, падая с большой высоты, у земли имеют скорость около 1 м/с . Какую скорость будут иметь капли, радиус которых в два раза меньше? В десять раз меньше?

У.3. Через какое время скорость тела, которому сообщили вверх по наклонной плоскости скорость v , снова будет равна v ? Коэффициент трения f , угол наклона плоскости α , $\text{tg} \alpha > f$.

Лекция 2. ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОЧКИ

2.1. Колебания в природе и технике

Колебательное движение является одним из самых распространенных типов движений. Мы живы, пока бьется наше сердце – т.е. совершает колебательное движение, слышим мы благодаря колебаниям барабанных перепонки, разговариваем – благодаря колебаниям голосовых связок, наконец, все мы состоим из атомов, которые тоже совершают колебательные движения. Многие явления природы имеют колебательный характер – приливы-отливы, смена времен года, суточное вращение Земли.

Среди технических устройств колебаниям подвержены мосты, перекрытия зданий, трубопроводы, крылья самолетов, лопасти турбомашин и т.д. В этих примерах колебания нежелательны, так как создают прямую угрозу прочности конструкций. Достаточно вспомнить о трагедии Такомакого моста (США, штат Вашингтон, 1940 г.), который вскоре после ввода в эксплуатацию начал интенсивно раскачиваться под действием постоянного ветра и затем рухнул. Конец мече статуи Родины-матери на Мамаевом кургане в Волгограде в первоначальном ее исполнении при скорости ветра 6–8 м/с совершал колебания с амплитудой 50 см. Актуальной по сей день является проблема вибрации лопаток турбомашин, например, шахтных вентиляторов, длина лопаток которых достигает трех метров.

Колебания могут нарушать нормальные условия эксплуатации – значительные вибрации приводят к некачественной работе станков при обработке металлов, колебания приборов – к неточности в их работе. Колебания могут также оказывать вредное влияние на организм человека. Известно, что вредными являются профессии, связанные с работой вибраторов, во многих странах музыкантам запрещено играть на определенных частотах (звук – это ведь колебания воздуха), многие пассажиры испытывают морскую болезнь при попадании корабля в шторм, проблема уменьшения уровня шума также связана с его вредным влиянием на организм человека.

Иногда колебания искусственно возбуждают с помощью вибрационных машин, которые генерируют нужные для создания колебаний силы. Диапазон мощностей таких машин исключительно широк – от долей ватта у крошечного зубопротезного бора до тысяч киловатт у тяжелого вибрационного ледокольного судна. Примерами использования вибромашин являются также вибропогружение и вибровыдергивание свай, измельчение, дробление и уплотнение материалов (например, укладка бетонного покрытия), вибротранспортировка сыпучих материалов, вибрационная обработка металлов с целью упрочнения их поверхностей, используемые в медицине вибротерапия для восстановления кровяного давления, вибромассаж, физиолечение (например, токи Бернара).

Мы привели много примеров колебательных движений. Однако если мы начнем выяснять, *почему* происходят колебания, то оказывается, что разных по существу типов колебаний не так уж и много и они поддаются теоретическому изучению. Более того, многие (но не все!) закономерности колебательных процессов можно выявить на простейшем примере – прямолинейных колебаний грузика на пружинке.

2.2. Свободные незатухающие колебания (без учета сопротивления среды)

При рассмотрении колебаний грузика на пружинке (рис. 2.1) примем его за материальную точку и пренебрежем весом пружинки. Не будем также в этом пункте учитывать силу сопротивления воздуха. Кроме того, будем сначала считать, что сила тяжести на груз не действует. Ось Ox направим в сторону удлинения пружины, а начало оси O возьмем в положении равновесия груза. Тогда на груз действует единственная сила – это сила реакции пружины F , которую называют *восстанавливающей* силой, поскольку она стремится вернуть груз в положение равновесия.

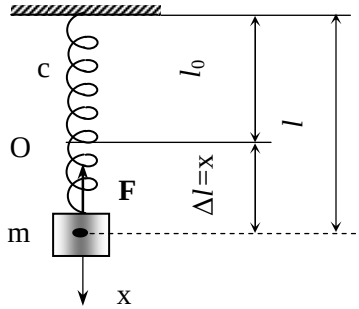


Рис. 2.1

Сила F направлена к центру колебаний O и равна по модулю

$$F = c \cdot \Delta l, \quad (2.1)$$

где c – коэффициент жесткости пружины (он численно равен силе, необходимой для растяжения пружины на один метр); $\Delta l = l - l_0$ – деформация пружины.

В выбранной нами системе координат, очевидно, $\Delta l = x$ (см. рис. 2.1) и мы получаем ДУ (1.5) движения точки (груза) в проекции на ось x в виде $m\ddot{x} = F_x$, или

$$m\ddot{x} = -cx. \quad (2.2)$$

Деля обе части уравнения (2.2) на массу m и вводя обозначение

$$c/m = k^2, \quad (2.3)$$

приведем его к виду

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) представляет собой ДУ свободных колебаний при отсутствии сопротивления. Его общее решение имеет вид (см. прил. П2)

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt, \text{ или } x = A \sin(kt + \alpha), \quad (2.5)$$

где C_1, C_2 , или, соответственно, A, α – постоянные интегрирования. Такое движение материальной точки называется *гармоническими колебаниями*. График таких колебаний приведен на рис. 2.2.

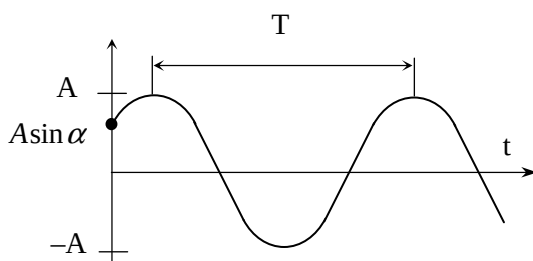


Рис. 2.2

Величина A , равная максимальному отклонению точки от положения равновесия, называется *амплитудой колебаний*. Величина $\varphi = kt + \alpha$ называется *фазой колебаний*, при этом $\varphi(0) = \alpha$ – *начальной фазой колебаний*. Величину k называют *частотой колебаний*. Промежуток времени T , в течение которого совершается одно полное колебание, называется *периодом колебаний*. По истечении периода фаза должна измениться на 2π , поэтому $kT = 2\pi$, откуда

$$T = 2\pi / k. \quad (2.6)$$

Найдем теперь значения постоянных A и α . Считая, что при $t = 0: x(0) = x_0, v_0 = \dot{x}(0) = v_0$, т.е., задав начальное положение и начальную скорость груза, получим из (2.5) $x_0 = A \sin \alpha, v_0 = Ak \cos \alpha$. Следовательно,

$$A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2 / k^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = kx_0 / v_0. \quad (2.7)$$

Из (2.3)–(2.7) следуют два важных свойства свободных колебаний:

1. Амплитуда и начальная фаза колебаний зависят от начальных условий задачи.

2. Частота и период колебаний не зависят от начальных условий задачи и полностью определяются параметрами самой колебательной системы (в нашем примере системы из грузика и пружинки). Частоты незатухающих свободных колебаний часто поэтому называют еще *собственными частотами*.

Оказывается, указанные свойства 1–2 сохраняются и для более сложных колебательных систем, если только они описываются линейными ДУ. Колебания таких систем называют *линейными*. Колебания, которые описываются нелинейными ДУ, называются, соответственно, *нелинейными*. Для нелинейных колебаний частота и период, вообще говоря, зависят от начальных данных и от амплитуды.

2.3. Свободные колебания при наличии постоянной силы

Рассмотрим опять колебательную систему, состоящую из грузика и пружины (см. рис. 2.1). В качестве примера действия на нее постоянной силы рассмотрим действие силы тяжести $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ (рис. 2.3). Заметим, что если бы груз (точка M) находился в равновесии, то это означало бы теперь, что сила тяжести уравнивается силой упругости пружины, т.е. выполняется равенство $P = c\lambda_s$, где $\lambda_s = \Delta l_s = l_s - l_0$ – *статическая де-*

формация пружины. Возьмем за начало отсчета оси x точку O_1 , отстоящую от конца недеформированной пружины O на расстоянии $OO_1 = \lambda_s$.

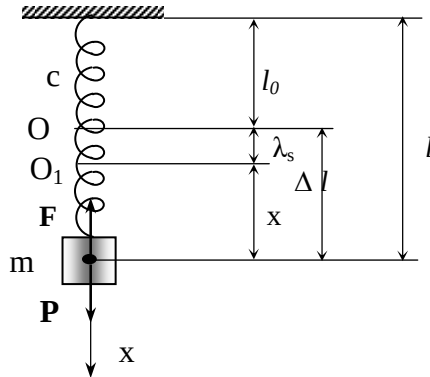


Рис. 2.3

Тогда деформация пружины в этой системе координат равна $\Delta l = x + \lambda_s$. Составляя теперь уравнение Ньютона движения груза и проецируя его на ось x , получим $m\ddot{x} = -c(x + \lambda_s) + mg$. Но поскольку $c\lambda_s = mg$, то мы снова приходим к уравнению (2.4). Отсюда заключаем, что *постоянная сила P , не изменяя характера колебаний, смещает центр колебаний в сторону ее действия на величину статической деформации $\lambda_s = P/c$.*

2.4. Свободные затухающие колебания (с учетом сопротивления среды)

Выясним теперь, как влияет сопротивление среды (воздуха, воды) на свободные колебания. Будем считать силу сопротивления среды (ее еще называют силой вязкого трения, в отличие от силы сопротивления трения скольжения, которое называют си-

лой сухого трения) пропорциональной скорости $\mathbf{R} = -\mu\mathbf{v}$ (знак минус указывает на то, что сила направлена против движения).

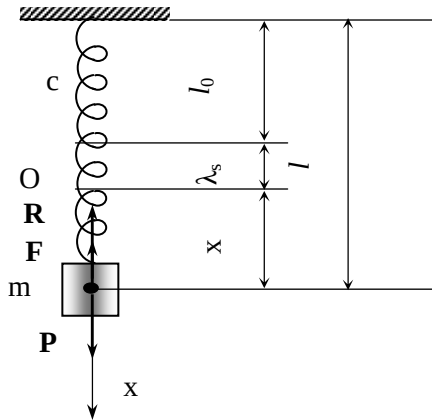


Рис. 2.4

На рис. 2.4 изображена система сил, действующая на груз (точку M) в этом случае. Второй закон Ньютона в проекции на ось x с началом в положении статического равновесия груза запишется в виде $m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x}$, или

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = 0, \quad b = \mu / 2m. \quad (2.8)$$

Уравнение (2.8) представляет собой ДУ свободных затухающих колебаний. Его решение (прил. П2) будет иметь разный вид, в зависимости от коэффициентов k и b . А именно, возможны три случая.

1. Случай малого сопротивления среды, когда $b < k$. Общее решение уравнения (2.8) имеет выражение (см. прил. П2) $x = e^{-bt}(C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t)$, или

$$x = Ae^{-bt} \sin(k_1 t + \alpha), \quad k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}. \quad (2.9)$$

Дифференцируя (2.9) по времени, получим выражение для скорости

$$v = \dot{x} = Ae^{-bt}(-b \sin(k_1 t + \alpha) + k_1 \cos(k_1 t + \alpha)). \quad (2.10)$$

Постоянные A и α определим, подставляя начальные условия $x(0) = x_0$ и $v(0) = v_0$, соответственно, в уравнения (2.9) и (2.10): $x_0 = A \sin \alpha$, $v_0 = A(-b \sin \alpha + k_1 \cos \alpha)$. Следовательно,

$$A = \sqrt{x_0^2 + (v_0 + bx_0)^2 / k_1^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = x_0 k_1 / (v_0 + bx_0). \quad (2.11)$$

Анализируя уравнение (2.9) видим, что движение точки при $b < k$ носит колебательный характер с частотой

$$k_1 = \sqrt{k^2 - b^2} \quad (2.12)$$

и периодом

$$T_1 = 2\pi / k_1 = 2\pi / \sqrt{k^2 - b^2}. \quad (2.13)$$

При этом амплитуда колебаний $A_1 = Ae^{-bt}$ убывает со временем по экспоненциальному закону (рис. 2.5).

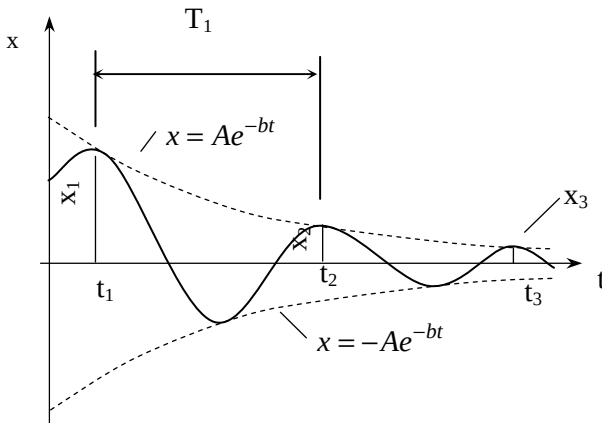


Рис. 2.5

Выясним, как меняется амплитуда колебаний за один период. Если $x_n = Ae^{-bt_n} \sin(k_1 t_n + \alpha)$ и $x_{n+1} = Ae^{-bt_{n+1}} \sin(k_1 t_{n+1} + \alpha)$ два последовательных максимальных отклонения точки от положения равновесия (см. рис. 2.5), то с учетом того, что $t_{n+1} = t_n + T_1$, получим $x_{n+1} / x_n = e^{-bT_1}$. Таким образом, оказывается, что размах колебаний будет убывать по закону геометрической прогрессии. Знаменатель этой прогрессии e^{-bT_1} называется *декрементом затухания*, а модуль его логарифма – т.е. величина bT_1 – *логарифмическим декрементом затухания*. Декремент затухания показывает, во сколько раз уменьшается амплитуда колебаний за один период (например, если декремент колебаний равен 1/2, то за один период их амплитуда уменьшится в два раза, а за десять периодов в $2^{10} = 1024$ раза).

Отметим, что для большинства сред (воздуха, воды) и колебательных систем условие $b < k$ выполняется. Более того, обычно $b \ll k$. В этом случае, как это следует из равенств (2.18), (2.19), можно приближенно принять, что $k_1 \approx k$ и $T_1 \approx T$. То есть считать, что *учет сопротивления среды незначительно сказывается на частоте и периоде колебаний*. Этот вывод остается верным и в случае сложных колебательных систем и часто используется для приближенного определения собственных частот колебаний этих систем (т.е. колебаний в вакууме). А именно, для определения k измеряют экспериментально k_1 , а затем полагают приближенно $k_1 \approx k$.

Что же касается амплитуды колебаний, то ее даже в случае $k_1 \approx k$ нельзя считать приближенно постоянной величиной. Например, при $b = 0,05k$, $T_1 = 1,00125T$, $e^{-bT_1} = 0,7301$. То есть период затухающих колебаний T_1 отличается от периода T свободных колебаний без учета сопротивления среды лишь на 0,125 %, в то время как амплитуда за время одного полного колебания уменьшается на 0,27 своей величины, а после десяти полных колебаний становится равной 0,04304 своего первоначального значения. Таким образом, *основное влияние сопротив-*

ления среды (в случае $b \ll k$) на свободные колебания сказывается в уменьшении амплитуды колебаний, т.е. в их затухании.

2. При $b > k$ (случай большого сопротивления среды) общее решение уравнения (2.12) будет иметь вид (см. прил. П2)

$$x = C_1 e^{q_1 t} + C_2 e^{q_2 t},$$

$$q_1 = -b - \sqrt{b^2 - k^2}, q_2 = -b + \sqrt{b^2 - k^2}. \quad (2.14)$$

Уравнение (2.14) показывает, что движение точки не является колебательным, его называют *апериодическим*. Так как при этом $q_1 < 0$ и $q_2 < 0$, то оно будет затухающим по времени ($x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$).

3. Если $b = k$, то общее решение уравнения (2.8) записывается в виде (см. прил. П2)

$$x = e^{-bt} (C_1 + C_2 t). \quad (2.15)$$

В этом случае движение точки также будет апериодическим и затухающим по времени.

Графики движений для случаев $b > k$ и $b = k$ в зависимости от начальных условий задачи $x(0) = x_0, v(0) = v_0$ схематично показаны на рис. 2.6.

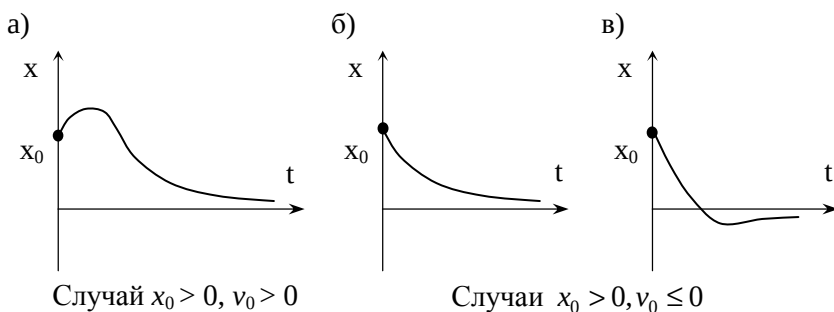


Рис. 2.6

Заметим, что случай $b \geq k$ в инженерной практике встречается очень редко, и для реальных колебательных систем (для которых частоты собственных колебаний существенно больше нуля) соответствуют очень быстрому затуханию движения.

2.5. Вынужденные колебания без учета сопротивления среды

Пусть теперь наряду с восстанавливающей силой $\mathbf{F}$ и силой тяжести $\mathbf{P}$ на точку действует *вынуждающая* сила $\mathbf{Q}$ (рис. 2.7), изменяющаяся по гармоническому закону

$$Q = Q_0 \sin pt, \quad (2.16)$$

где Q_0 – ее амплитуда; p – частота.

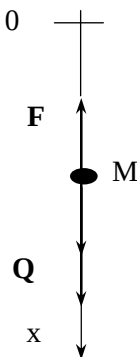


Рис. 2.7

Уравнение движения в системе координат с началом в положении статического равновесия в этом случае будет иметь вид

$$m\ddot{x} = -cx + Q_0 \sin pt.$$

Деля обе части этого уравнения на массу и вводя обозначение $p_0 = Q_0 / m$, получим

$$\ddot{x} + k^2 x = p_0 \sin pt. \quad (2.17)$$

Уравнение (2.17) называют *ДУ вынужденных колебаний точки без учета сопротивления среды*. Это неоднородное уравнение и его решение можно записать в форме $x = x_1 + x_2$, где x_1 – общее решение однородного уравнения (с нулевой правой частью); x_2 – частное решение полного уравнения (2.17). Но $x_1 = A \sin(kt + \alpha)$ (см. раздел 2.1), частное же решение будем искать в виде $x_2 = B \sin pt$, где B – постоянная величина. Подставляя это решение в (2.17), получим

$$-p^2 B \sin pt + k^2 B \sin pt = p_0 \sin pt.$$

Так как это равенство должно выполняться для любого t , то $B(k^2 - p^2) = p_0$, или $B = p_0 / (k^2 - p^2)$, если только $p \neq k$. Следовательно, для случая $p \neq k$, т.е. когда частота вынуждающей силы не совпадает с собственной частотой колебательной системы, мы нашли частное решение уравнения (2.17) в виде

$$x_2 = (p_0 / (k^2 - p^2)) \sin pt. \quad (2.18)$$

Решение (2.18) называют *вынужденными колебаниями точки* при отсутствии сопротивления среды. Общее решение (2.17) представляется в виде

$$x_1 = A \sin(kt + \alpha) + (p_0 / (k^2 - p^2)) \sin pt. \quad (2.19)$$

Постоянные A и α определяются из начальных условий задачи. Таким образом, решение (2.19) складывается из собственных колебаний точки с амплитудой A (зависящей от начальных условий) и частотой k , и вынужденных колебаний с амплитудой B (не зависящей от начальных условий) и частотой p .

Практически, из-за наличия сил сопротивления, собственные колебания будут довольно быстро затухать со временем. Поэтому основное значение в рассматриваемом движении имеют вынужденные колебания, закон которых дается уравнением (2.18).

Отметим еще раз основные свойства вынужденных колебаний при отсутствии сопротивления среды:

1. Вынужденные колебания происходят с постоянной амплитудой, не зависящей от начальных условий.

2. Частота вынужденных колебаний p равна частоте возмущающей силы. То есть происходит «захват» частоты вынуждающей силой (вынуждающая сила «вынуждает» систему колебаться со своей частотой).

3. Фазы вынужденных колебаний и возмущающей силы совпадают при $k > p$ и сдвинуты на π при $k < p$.

Последнее утверждение (о фазах) следует из сравнения формул (2.16) и (2.18). Только для случая $k < p$ нужно внести в формуле (2.18) знак минус под знак синуса и переписать ее в виде $x_2 = (p_0 / (p^2 - k^2)) \sin(pt + \pi)$. Говорят еще, что для $k > p$ колебания происходят в фазе с возмущающей силой (максимальному значению возмущающей силы, направленной вправо, соответствует максимальное отклонение точки, тоже направленное вправо), а для $k < p$ – в противофазе (максимальному значению возмущающей силы, направленной вправо, соответствует максимальное отклонение точки, но направленное влево).

Заметим еще, что амплитуда B вынужденных колебаний тем больше, чем ближе друг к другу частота p вынуждающей силы и частота k собственных колебаний. Пояснить это можно следующим образом. Собственная частота k – это частота, с которой система будет колебаться даже при отсутствии возмущающей силы, если только ее вывести из состояния равновесия (можно образно сказать, что системе «нравится» колебаться только с частотой k). Возмущающая же сила действует на систему с частотой p (на которой системе колебаться «не нравится»). Отклик системы на такое возмущение проявляется в ам-

плитуде B . Вот и получается, что отклик тем больше, чем ближе частоты p и k (когда мы возмущаем систему с частотой, на которой ей «нравится» колебаться, она и будет это делать с максимальной амплитудой). При $p \rightarrow k$ амплитуда B будет неограниченно возрастать при отсутствии сопротивления среды. И мы вплотную подошли, читатель, к резонансу, который и рассмотрим ниже.

Резонанс. Рассмотрим теперь случай $p = k$, когда собственная частота совпадает с частотой возмущающей силы, т.е. имеет место так называемое явление *резонанса*. Частное решение x_2 в этом случае будем искать в виде $x_2 = Ct \cos pt$. Подставляя его в уравнение (2.17) и учитывая, что $p = k$, находим

$$\begin{aligned} x_2 &= -(p_0 / 2p)t \cos pt \quad \text{или} \\ x_2 &= (p_0 / 2p)t \sin(pt - \pi / 2). \end{aligned} \quad (2.20)$$

На рис. 2.8 показан график функции $x_2(t)$, из которого следует, что при резонансе ($p = k$) происходит неограниченное возрастание амплитуды колебаний со временем, причем рост амплитуды линейен во времени.

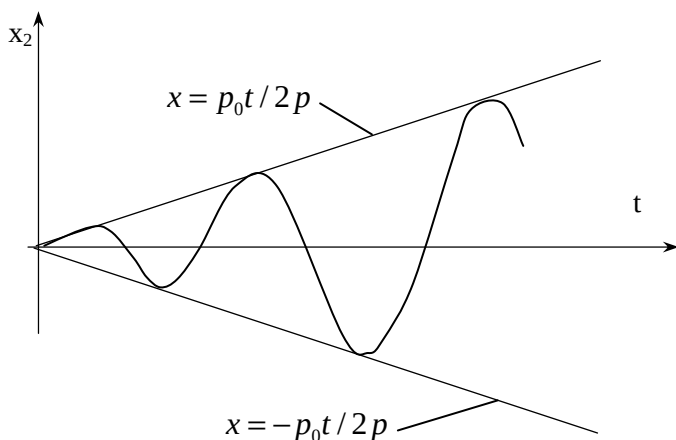


Рис. 2.8

Отметим еще, что, как это следует из (2.20), на резонансе сдвиг по фазе между вынужденными колебаниями и возмущающей силой равен $\pi/2$ (максимальному значению возмущающей силы соответствует положение статического равновесия точки, и, наоборот, когда значение силы равно нулю, отклонение точки от положения статического равновесия оказывается наибольшим).

2.6. Вынужденные колебания при наличии сил сопротивления

Изучим теперь вопрос о том, как влияет сопротивление среды (воздуха) на вынужденные колебания. В этом случае на точку помимо восстанавливающей силы $\mathbf{F}$ и вынуждающей силы $\mathbf{Q}$ действует еще и сила сопротивления $\mathbf{R}$, пропорциональная скорости $\mathbf{R} = -\mu \mathbf{v}$ (рис. 2.9).

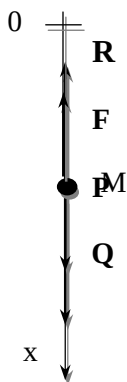


Рис. 2.9

ДУ такого движения в системе отсчета с началом в положении статического равновесия будет иметь вид

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = p_0 \sin pt, \quad (2.21)$$

где, как и раньше, введены обозначения $2b = \mu/m$, $k^2 = c/m$, $p_0 = Q_0/m$.

Уравнение (2.21) называется *ДУ вынужденных колебаний с учетом сопротивления среды*. Его общее решение также имеет вид $x = x_1 + x_2$, где x_1 – общее решение уравнения (2.21) с нулевой правой частью, т.е. уравнения (2.8); x_2 – какое-нибудь частное решение полного уравнения (2.28). Так как при любых значениях b и k решение x_1 однородного уравнения экспоненциально затухает со временем (см. п. 2.4), то через достаточно большой промежуток времени результирующее движение точки будет определяться вынужденными колебаниями x_2 , которые будем искать в виде

$$x_2 = B \sin(pt - \beta), \quad (2.22)$$

где B и β нужно подобрать так, чтобы равенство (2.21) обратилось в тождество. Вычисляя производные и подставляя в (2.21), получим

$$\begin{aligned} B(-p^2 + k^2) \sin \varphi + 2bpB \cos \varphi = \\ p_0 (\cos \beta \sin \varphi + \sin \beta \cos \varphi), \end{aligned} \quad (2.23)$$

где для краткости записи обозначено $\varphi = pt - \beta$. Чтобы равенство (2.23) выполнялось для любого момента времени t , т.е. выполнялось для любого φ , коэффициенты при $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ в левой и правой частях должны быть равны друг другу и, следовательно,

$$B = p_0 / \sqrt{(k^2 - p^2) + 4b^2 p^2}, \quad \operatorname{tg} \beta = 2bp / (k^2 - p^2). \quad (2.24)$$

Полученное решение (2.22), (2.24) и называют *вынужденными колебаниями при наличии сопротивления среды*. Оно представляет собой незатухающие гармонические колебания с амплитудой B , частотой p и начальной фазой β , характеризующей сдвиг по фазе между вынужденными колебаниями и возмущающей силой.

Таким образом, в отличие от случая свободных колебаний, сопротивление среды *не приводит к затуханию вынужденных колебаний*. Возмущающая сила все время поддерживает колебательное движение точки, в результате чего она колеблется с постоянной амплитудой B . Сопротивление среды, также в отличие от случая свободных колебаний, *не меняет частоту и период вынужденных колебаний*. Точка по-прежнему колеблется с частотой p возмущающей силы.

Заметим еще, что в случае $p \neq k$, при уменьшении сопротивления среды, т.е. при $b \rightarrow 0$, решение (2.22), (2.24) плавно переходит в решение (2.18), соответствующее вынужденным колебаниям без учета сопротивления ($b = 0$). Отсюда получаем еще один важный вывод: *малое сопротивление среды вне резонанса ($p \neq k$) оказывает малое влияние на характер вынужденных колебаний*. Поэтому в случае $b \ll 1$ вне резонанса вместо формул (2.22), (2.24) можно приближенно использовать более простую формулу (2.18).

Теперь исследуем влияние сопротивления среды в окрестности резонанса $p = k$. Заметим, что, в отличие от вынужденных колебаний (2.18) без учета сопротивления среды, решение (2.22), (2.24) особенности на резонансе $p = k$ уже не имеет и амплитуда B принимает конечное значение

$$B_{\text{рез}} = p_0 / 2bp. \quad (2.25)$$

Причем это значение тем меньше, чем больше сопротивление среды. Таким образом, *увеличение сопротивления среды приводит к уменьшению амплитуды колебаний на резонансе ($p = k$)*. Это свойство используется в технике для ослабления резонанса с помощью специальных устройств (поглотителей колебаний),

увеличивающих в окрестности резонанса сопротивление колебательной системы, которое гасит ее «раскачку» (см. рис. 2.8).

Введем еще важную характеристику вынужденных колебаний – *коэффициент динамичности*

$$\eta = B / B_{st}, \quad (2.26)$$

где $B_{st} = p_0 / k^2 = Q_0 / c$ представляет собой статическое перемещение точки под действием постоянной силы Q_0 (см. п. 2.3). Коэффициент динамичности η показывает, во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний B под действием возмущающей силы $Q_0 \sin pt$ больше статического перемещения B_{st} при действии постоянной силы Q_0 . Вводя обозначения $z = p / k$ и $h = b / k$, получим из формул (2.24), соответственно,

$$\eta = 1 / \sqrt{(1 - z^2)^2 + 4h^2 z^2}, \quad \operatorname{tg} \beta = 2hz / (1 - z^2).$$

Графики зависимости коэффициента динамичности η и сдвига фазы β от z для различных значений сопротивления среды (параметра h) носят названия *амплитудно-частотной* (рис. 2.10) и *фазо-частотной* (рис. 2.11) характеристик.

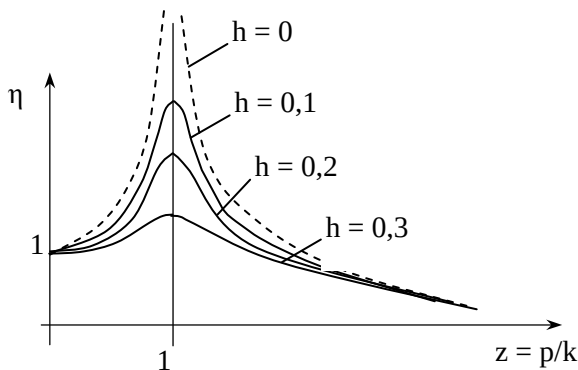


Рис. 2.10

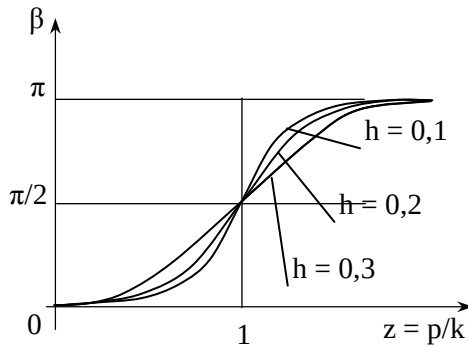


Рис. 2.11

Они, во-первых, иллюстрируют все сделанные нами ранее выводы о качественном поведении вынужденных колебаний и, во-вторых, позволяют количественно оценить значения коэффициента динамичности (амплитуды) и сдвига фазы при фиксированных параметрах k , p и b . Используя эти графики, отметим еще два обстоятельства:

1. Коэффициент динамичности η при малом сопротивлении среды может быть значительно больше единицы (удивительно, не правда ли, читатель, — значение силы $Q_0 \sin pt$ меньше модуля силы Q_0 , а вызывает она гораздо большие отклонения колебательной системы от положения равновесия).

2. При $z \rightarrow \infty$, т.е. при $p \gg k$, коэффициент динамичности $\eta \rightarrow 0$, т.е. становится очень малым. Это означает, что колебательная система практически не реагирует на возмущающую силу. На практике это свойство находит применение, например, при перевозке грузов, не переносящих толчков. Их подвешивают на «мягких» пружинах или обертывают в «мягкую» упаковку

так, чтобы частота собственных колебаний грузов k была значительно меньше частоты p возмущающих сил от толчков, вызванных неровностями дороги.

В заключение этого пункта отметим, что для сложных колебательных систем (мостов, перекрытий зданий, трубопроводов, авиационных конструкций) ситуация оказывается во многом аналогичная, только более сложная. Теперь уже у системы есть не одна собственная частота k , а целый набор собственных частот $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$, и подвержена система в процессе эксплуатации действию «набора» периодических возмущающих сил с частотами $p_1, p_2, \dots, p_m, \dots$. Поэтому и резонансов $p_j = k_i$ ($j = 1, \dots, m, \dots, i = 1, \dots, n, \dots$) может быть много, и «отстраиваться» (если резонанс нежелателен) приходится от каждого из них. Если же резонанс полезен, то важна, наоборот, «настройка» колебательной системы на резонанс $p_j = k_i$. Так как при этом разные собственные частоты $k_n, k_m, n \neq m$ могут быть близки между собой, то проблема «отстройки» от резонанса и «настройки» на резонанс становится достаточно трудной и составляет предмет отдельных курсов теории колебаний. Вот почему очень важно знать набор собственных частот $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ конструкции, уметь его достаточно точно вычислять или измерять. Вычисление этого набора обычно проводится с применением мощных ЭВМ и специальных вычислительных программ с повышенной точностью расчета. Измерение же сопряжено с основной трудностью, связанной с тем, что, строго говоря, измерять-то нужно в вакууме ($k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ — это ведь частоты свободных колебаний без учета сопротивления среды, т.е. в вакууме). Здесь на помощь приходит установленный нами в п. 2.3 факт, что при малом сопротивлении среды (например, в воздухе) частоты свободных затухающих колебаний мало отличаются от собственных частот колебаний в вакууме. Это позволяет приближенно их находить, проводя измерения в среде с малым сопротивлением (например, в воздухе).

2.7. Решение задач на колебательное движение точки

Общие рекомендации для решения обратной задачи динамики материальной точки были даны в п. 1.5 лекции 1. Конкретизируем их применительно к решению задач на колебательное движение точки.

1. Так как колебания прямолинейные, то достаточно ввести одну ось Ox . Направлять ее лучше в сторону удлинения пружины, а начало O оси взять в положении статического равновесия точки.

2. Силы удобнее изображать в момент времени, соответствующий растянутой пружине.

3. При составлении уравнений движения точки в проекции на ось x необходимо предварительно выразить деформацию пружины Δl , входящую в выражение для силы упругости, через координату x точки. Если решение этого вопроса вызывает затруднение, то сделать рисунок, на котором изобразить ось x , с началом в точке O , растянутую пружину с длиной l и свободную пружину с длиной l_0 , а затем уже связать Δl с x .

4. Определить начальное положение $x(0)$ и начальную скорость $v(0) = \dot{x}(0)$ в выбранной, согласно п. 1, системе отсчета.

5. Полученные в п. 3 ДУ привести к стандартному виду ($\ddot{x} + k^2x = 0$ – для свободных незатухающих колебаний, $\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = 0$ – для свободных затухающих колебаний, $\ddot{x} + k^2x = p_0 \sin pt$ – для вынужденных колебаний без учета сопротивления среды, $\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = p_0 \sin pt$ – для вынужденных колебаний с учетом сопротивления среды) и написать уже готовое общее решение, которое мы получали в предыдущих пунктах. Постоянные в этом решении определить из начальных условий задачи согласно п. 4. По найденному закону движения определить требуемые величины.

Задача 6 (заклинивание троса). При равномерном спуске груза (рис. 2.12) массы $m = 2$ т со скоростью $v = 5$ м/с трос мгновенно заклинило. Жесткость троса $c = 4 \cdot 10^6$ Н/м. Пренебрегая массой троса, определить его наибольшее натяжение.

Решение. По условию задачи трос можно считать невесомой пружиной, а груз – материальной точкой. Ось Ox направим вертикально вниз, а начало оси O возьмем в положении груза в момент заклинивания $t = 0$ (рис. 2.13).

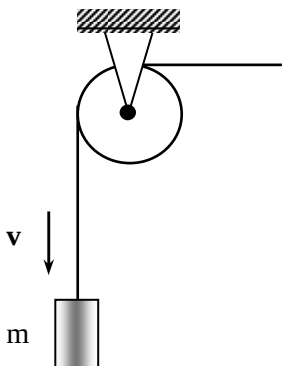


Рис. 2.12

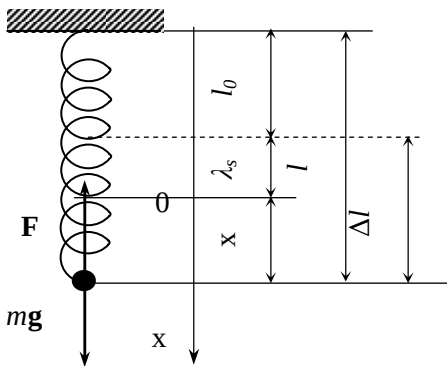


Рис. 2.13

На груз действует сила натяжения троса (сила упругости пружины) $\mathbf{F}$ и сила тяжести $m\mathbf{g}$. Причем $F = c\Delta l$. Согласно рис. 2.13, в нашей задаче $\Delta l = c(x + \lambda_s)$, где λ_s – статическое натяжение троса, т.е. удлинение троса до заклинивания. Определим λ_s из условия равновесия $mg = c\lambda_s$, следовательно, $\lambda_s = mg/c$. Второй закон Ньютона запишется в виде векторного уравнения $m\mathbf{a} = \mathbf{F} + m\mathbf{g}$, проецируя которое на ось x , получим ДУ движения груза: $m\ddot{x} = mg - c(x + \lambda_s)$. Учитывая, что

$mg = c\lambda_s$, и деля на массу m , получим уравнение свободных незатухающих колебаний $\ddot{x} + k^2x = 0$, где $k^2 = c/m$. Решение этого уравнения возьмем в виде (2.5) $x = A\sin(kt + \alpha)$, где, согласно (2.7), $A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2 / k^2}$, $\operatorname{tg} \alpha = kx_0/v_0$. В нашей задаче $x_0 = x(0) = 0$, а $v_0 = v$. Максимальному значению натяжения троса соответствует нижнее положение груза, при котором $x = A$. Таким образом, $T_{\max} = c\Delta l_{\max} = c(A + \lambda_s)$. Следовательно,

$$T_{\max} = mg + v\sqrt{cm}. \quad (2.27)$$

Равенство (2.27) можно еще переписать в виде

$$T_{\max} = T_{st} + T_{din}, \quad (2.28)$$

где $T_{st} = mg$ – натяжение троса до заклинивания, равное весу груза; $T_{din} = v\sqrt{cm}$ – динамический «добавок», возникающий из-за колебаний троса после заклинивания. Подставляя числовые значения, получим, что $T_{st} \approx 20$ кН, а $T_{din} \approx 446,8$ кН.

Рассмотренный пример показывает, что динамические добавки к силам, возникающие из-за колебаний (заметьте, свободных колебаний, никакого резонанса нет!), могут быть большими. Поэтому при расчете прочности конструкции, подверженной колебаниям, необходимо решать динамическую задачу о колебаниях этой конструкции. Статический расчет (не учитывающий динамические добавки к силам) может оказаться настолько грубым, что давать погрешность в десятки, сотни, а то и в тысячи процентов! Один пример: альпинисты при восхождении на вершину в целях облегчения рюкзака экономят буквально граммы на пище и одежде, но, тем не менее, используют для страховки на случай срыва веревку, выдерживающую статическую нагрузку в две тонны, т.е. создают 20–30-кратный запас прочности по сравнению со своим весом.

Задача 7 (замена нескольких пружин одной, им эквивалентной). Часто в задачах груз подвешивается не на одной, а на нескольких пружинах. Возникает вопрос: нельзя ли их заменить одной эквивалентной? Достаточно, очевидно, разобраться со случаем двух пружин. Рассмотрим два наиболее часто встречающихся случая их соединения:

1. *Последовательное соединение пружин* (рис. 2.14). В этом случае общее статическое удлинение λ_s равно сумме статических удлинений λ_{s1} и λ_{s2} каждой из пружин $\lambda_s = \lambda_{s1} + \lambda_{s2}$. Или $\lambda_s = mg / c_1 + mg / c_2$. Так как, с другой стороны, при наличии одной пружины (эквивалентной этим двум) $\lambda_s = mg / c_{\text{экр}}$, то мы получаем формулу $1/c_{\text{экр}} = 1/c_1 + 1/c_2$ или $c_{\text{экр}} = c_1 c_2 / (c_1 + c_2)$.

2. *Параллельное соединение пружин* (рис. 2.15). В этом случае силы P_1 и P_2 , растягивающие пружины, определяются из соотношений $P_1 + P_2 = mg$, $P_1 l_1 = P_2 l_2$.

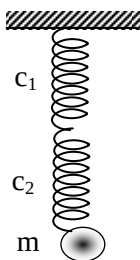


Рис. 2.14

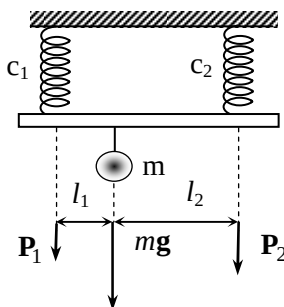


Рис. 2.15

Так как удлинения λ_s пружин мы считаем одинаковыми (при прямолинейных колебаниях планка $A_1 A_2$ должна оставаться параллельной самой себе), то $P_1 = \lambda_s c_1$, $P_2 = \lambda_s c_2$ и, следовательно, $c_1 = P_1 / \lambda_s$, $c_2 = P_2 / \lambda_s$. Тогда жесткость $c_{\text{экр}}$ экви-

валентной пружины определится из соотношения $c_{\text{экв}} = mg / \lambda_s = (P_1 + P_2) / \lambda_s = P_1 / \lambda_s + P_2 / \lambda_s = c_1 + c_2$, т.е. $c_{\text{экв}} = c_1 + c_2$.

Задача 8. Груз массой 3 кг совершает затухающие колебания с периодом $T_1 = 0,3$ с и декрементом затухания $\lambda = 0,5$. Определить коэффициент жесткости c пружины и коэффициент μ силы вязкого сопротивления. Определить также, во сколько раз нужно уменьшить массу груза, чтобы движение стало аperiодическим.

Решение. Воспользуемся соотношениями $T_1 = 2\pi / \sqrt{k^2 - b^2}$, $\lambda = e^{-bT_1}$, $k = \sqrt{c/m}$. Подставляя в эти соотношения числовые значения, получим $0,3 = 2\pi / \sqrt{k^2 - b^2}$, $0,5 = e^{-bT_1}$, $k = \sqrt{c/3}$. Решая эти уравнения относительно c , b и k , находим $b = 2,31$, $k = 21,1$, $c = 0,136$. Следовательно, $c = 0,136$ Н/м, $\mu = 2mb = 13,86$ Н·с/м.

Пусть теперь m_1 – новая масса. Тогда, вводя обозначение $a = m / m_1$, будем иметь $b_1 = \mu / 2m_1 = \mu a / 2m$, $k_1 = \sqrt{c / m_1} = k\sqrt{a}$. Наименьшая масса m_1 , при которой движение станет аperiодическим, найдется из условия $b_1 = k_1$, откуда $a = (k2m / \mu)^2 \approx 83$ раза.

Задача 9. Пластина весом $G = 0,5$ Н помещена в сосуд с вязкой жидкостью (рис. 2.16), прикреплена к концу B пружины AB с жесткостью $c = 0,25$ Н/см. В некоторый момент времени ползун A начинает совершать вертикальные колебания по закону $x_A = 2\sin 15t$ (см). Сила сопротивления движению пластины со стороны жидкости равна $\mathbf{R} = -3,06\mathbf{v}$ (Н). Получить закон установившихся вынужденных колебаний пластины.

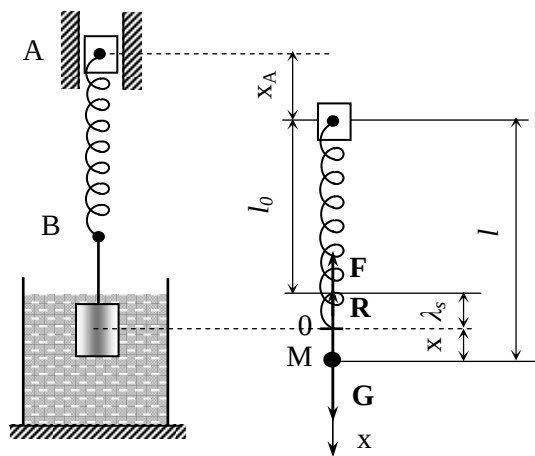


Рис. 2.16

Решение. Поступательное движение пластины рассмотрим как движение материальной точки M , ось Ox направим вниз, начало O оси возьмем в положении покоя точки M . Система сил, действующих на пластину (точку M), показана на рис. 2.16. Второй закон Ньютона в векторной форме запишется в виде

$$m\mathbf{a} = \mathbf{G} + \mathbf{F} + \mathbf{R}. \quad (2.29)$$

Удлинение пружины (см. рис. 2.16) Δl складывается из статического удлинения λ_s и динамического удлинения, равно- го $x - x_A$, т.е.

$$\Delta l = \lambda_s + x - x_A. \quad (2.30)$$

Проецируя уравнение (2.29) на ось x и учитывая (2.30), получим $m\ddot{x} = G - c(\lambda_s + x - x_A) - \mu\dot{x}$. Деля на массу и принимая во внимание, что в положении равновесия $G = c\lambda_s$ приходим к ДУ вынужденных колебаний

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = p_0 \sin pt, \quad (2.31)$$

в котором $b = \mu / 2m$, $k^2 = c / m$, $p_0 = 2c / m$. Частное решение этого уравнения, соответствующее вынужденным колебаниям, имеет вид $x_2 = B \sin(pt - \beta)$, где $B = p_0 / \sqrt{(k^2 - p^2) + 4b^2 p^2}$, $\operatorname{tg} \beta = 2bp / (k^2 - p^2)$. Подставляя числовые значения, получим закон вынужденных колебаний пластины $x = 3,5 \sin(15t - 0,33)$.

В рассматриваемом примере непосредственно на груз никакая вынуждающая сила не действует. Пластина совершает вынужденные колебания в результате возмущающего действия от колебаний верхнего конца A пружины. Это действие через пружину передается пластине. Как показывает уравнение (2.31), движение конца B пружины по закону $x_A = 2 \sin 15t$ эквивалентно действию на пластину возмущающей силы $Q = cx_A = 3,75 \sin 15t$.

Вопросы для самоконтроля

1. Как направлена и чему равна сила упругости пружины?
2. Какой вид имеют ДУ свободных колебаний материальной точки? Приведите вид его общего решения.
3. Чем определяются амплитуда и начальная фаза свободных колебаний точки?
4. Зависят ли частота и период свободных колебаний от начальных условий? Какими параметрами они полностью определяются?
5. Какой вид имеют ДУ свободных затухающих колебаний материальной точки? Приведите вид его общего решения.
6. Какой вид графиков свободных и затухающих колебаний, а также апериодического движения материальной точки?
7. Как определяется декремент затухающих колебаний и что он характеризует?

8. Как связаны между собой частоты (периоды) и амплитуды свободных колебаний точки без учета и с учетом сопротивления среды? Велико ли отличие для реальных сред (например, воздуха)?

9. Какой вид имеют ДУ вынужденных колебаний материальной точки без учета сопротивления среды? Приведите его общее решение вне резонанса и на резонансе.

10. Из каких составляющих складывается движение материальной точки под действием восстанавливающей и вынуждающей сил? Какую из этих составляющих называют вынужденными колебаниями точки?

11. Каковы период и частота вынужденных колебаний точки? От каких факторов зависит их амплитуда?

12. Как влияет сопротивление среды, пропорциональное скорости, на амплитуду, частоту и период вынужденных колебаний?

13. Как определяется и что характеризует коэффициент динамичности? Каков график его зависимости от отношения частот p/k (вынуждающей силы и свободных колебаний)?

14. Какова зависимость сдвига фазы колебаний от отношения частот p/k ?

15. Как ведет себя коэффициент динамичности при $p \gg k$? Где это используется в технике?

16. Каковы общие рекомендации к решению задач на колебательное движение точки?

Упражнения

У.4. К пружине, коэффициент жесткости которой c , были подвешены два груза с массами m_1 и m_2 . Система находилась в покое, когда второй груз убрали. Найти уравнение движения оставшегося груза.

У.5. Тело массы $m = 5$ кг подвешено на пружине жесткости $c = 2$ кН/м. Сопротивление среды пропорционально скорости. Амплитуда после четырех колебаний уменьшилась в 12 раз. Определить период и декремент колебаний. Найти также уравнение движения тела, если его подвесили к концу недеформированной пружины и отпустили без начальной скорости.

У.6. Статический прогиб рессор груженого товарного вагона $\Delta l_{st} = 5$ см. Определить критическую скорость движения вагона, при которой начнется «галопирование» вагона, если на стыках рельсов вагон испытывает толчки, вызывающие его вынужденные колебания. Длина рельсов 12 м.

Лекция 3. НЕСВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

3.1. Уравнение связей, классификация связей

Как указывалось в лекции 1, второй закон Ньютона справедлив, если точка свободна. В случае несвободного движения точки, когда на нее наложены связи, мы пользуемся принципом освобождаемости от этих связей, хорошо знакомым нам по курсу статики. Типичными примерами несвободного движения являются движения точки по заданной поверхности и по заданной линии. Такие связи могут быть заданы аналитически, в виде *уравнений связи*. Например, точка, находящаяся на конце нерастяжимого стержня длины l , другой конец которого закреплен шарнирно в точке O (рис. 3.1), будет двигаться по сфере радиуса l . В системе координат $Oxyz$ (см. рис. 3.1) уравнение этой сферы будет иметь вид

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0. \quad (3.1)$$

Движение же кольца M , насаженного на проволоку, изогнутую в виде окружности радиуса R (рис. 3.2), будет происходить вдоль этой окружности.

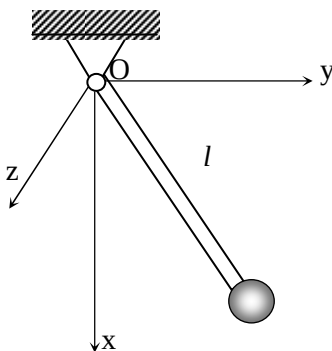


Рис. 3.1

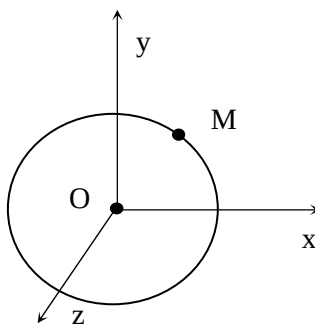


Рис. 3.2

Задание ее в системе координат $Oxyz$ с началом в центре окружности и плоскостью Oxy , совпадающей с ее плоскостью (см. рис. 3.2), определится системой двух уравнений

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0, \quad z = 0. \quad (3.2)$$

В этих примерах уравнения (3.1) и (3.2) и являются уравнениями связей.

Рассмотрим теперь вопрос о связях подробнее и дадим им классификацию. Под *связями* в динамике будем понимать *любого вида ограничения, которые налагаются на положение и скорость движущихся тел (точек)*. Связь при этом может видоизменяться со временем, т.е. в общем случае уравнения связей имеют вид

$$f(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0. \quad (3.3)$$

Если связь не меняется со временем (т.е. в уравнении (3.3) функция f от времени t явно не зависит), то ее называют *стационарной*, а если меняется, то *нестационарной*. В рассмотренном нами примере движения точки (3.1) связь является стационарной. Если же стержень заменить пружиной, то ее длина уже будет зависеть от времени $l = l(t)$ и уравнение (3.1) в этом случае будет описывать нестационарную связь

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2(t) = 0.$$

Если связь не накладывает ограничений на скорости точек, то ее называют *голономной (геометрической)*, а если накладывает, то *неголономной (негеометрической)*. Уравнение голономной связи тогда будет описываться уравнением (3.3), в котором функция f не зависит от $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$. В рассмотренных примерах не свободного движения точки связи, описываемые уравнениями (3.1), (3.2), являются голономными. Примером неголономной связи является движение конькобежца, а точнее, скольжение конька по льду. Конек может занимать любое положение на по-

верхности льда, но при этом скорость конька в каждый момент времени должна быть направлена вдоль конька.

Наконец, различают связи *двусторонние (удерживающие)* и *односторонние (неудерживающие)*. Под двусторонними понимают связи, которые задаются *уравнениями*, а под односторонними – связи, которые задаются *неравенствами*. Для двусторонней связи точка должна во все время движения находиться строго на ее поверхности $f(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0$ и не может ее покинуть ни с какой из двух ее сторон (поверхность удерживает точку). Для односторонней связи $f(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \geq 0$ (или ≤ 0) точка может находиться как на поверхности, так и покинуть ее с одной стороны (поверхность не удерживает точку от покидания). Например, если в рассматриваемом нами первом примере стержень заменить нерастяжимой нитью, то такая связь уже будет задаваться неравенством

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 \leq 0, \quad (3.4)$$

указывающим на то, что точка может быть как на поверхности сферы радиуса l , так и внутри ее. Связь в этом примере позволяет точке покинуть поверхность в сторону ее внутренности.

В нашем курсе мы будем в основном рассматривать двусторонние, голономные, стационарные связи. Такие связи задаются уравнениями вида

$$f(x, y, z) = 0. \quad (3.5)$$

3.2. Движение точки по неподвижной поверхности

Рассмотрим сначала случай движения точки по *гладкой* неподвижной поверхности (рис. 3.3), задаваемой уравнением (3.5). Запишем второй закон Ньютона в виде

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{N}, \quad (3.6)$$

где $\mathbf{F}$ – равнодействующая всех активных сил, действующих на точку; $\mathbf{N}$ – реакция гладкой поверхности, направленная, как известно, по нормали к ней. Известными будем считать силу $\mathbf{F}$, массу точки m и начальные условия $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$, $\dot{x}(0) = v_{0x}$, $\dot{y}(0) = v_{0y}$, $\dot{z}(0) = v_{0z}$ заданные в инерциальной системе отсчета $Oxyz$.

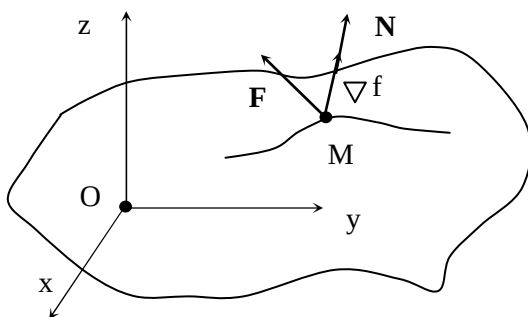


Рис. 3.3

Тогда искомыми будут закон движения точки $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ и реакция $\mathbf{N}$ гладкой поверхности.

Заметим, что поставленная выше задача не является ни прямой, ни обратной (см. п. 1.4 лекции 1). Специфика задач на несвободное движение точки состоит в том, что реакции связей заранее неизвестны.

Распишем второй закон Ньютона (3.6) в проекциях на оси координат

$$m\ddot{x} = F_x + N_x, m\ddot{y} = F_y + N_y, m\ddot{z} = F_z + N_z. \quad (3.7)$$

Эти три уравнения содержат шесть неизвестных – три координаты точки x, y, z и три проекции N_x, N_y, N_z реакции поверхности. Так как точка во все время движения должна находиться на поверхности, то уравнение этой поверхности $f(x, y, z) = 0$ является четвертым уравнением. Для получения двух недостающих уравнений используем условие гладкости поверхности. Как известно из дифференциальной геометрии, вектор $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z)$ направлен по нормали к поверхности $f(x, y, z) = 0$, и мы имеем условие коллинеарности векторов $\mathbf{N}$ и ∇f

$$N_x / f'_x = N_y / f'_y = N_z / f'_z. \quad (3.8)$$

Таким образом, мы получили шесть уравнений, которые в принципе позволяют решить поставленную нами задачу. Из уравнений (3.7), (3.8) можно исключить реакцию связи, если обозначить равные отношения (3.8) через λ , т.е.

$$N_x / f'_x = N_y / f'_y = N_z / f'_z = \lambda. \quad (3.9)$$

Тогда мы получим следующую систему из четырех уравнений

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \lambda f'_x, m\ddot{y} = F_y + \lambda f'_y, m\ddot{z} = F_z + \lambda f'_z, \\ f(x, y, z) &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

для определения четырех неизвестных функций времени $x(t), y(t), z(t), \lambda(t)$. После отыскания этих неизвестных можно определить проекции реакции $\mathbf{N}$ по формуле (3.9). Уравнения (3.10) называются *уравнениями Лагранжа первого рода*.

Задача 10. Определить закон движения точки массы m по поверхности гладкого цилиндра $x^2 + z^2 - R^2 = 0$ (рис. 3.4), а также реакцию N цилиндра при отсутствии активных сил.

В начальный момент времени $t = 0$ точка находилась в положении $A(R, 0, 0)$ и имела скорость $\mathbf{v}_0(0, v_{0y}, v_{0z})$.

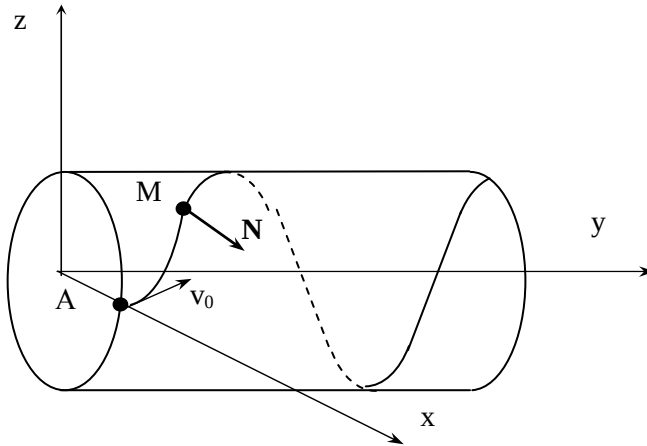


Рис. 3.4

Решение. В нашем случае сумма всех активных сил, действующих на точку, равна нулю, и второй закон Ньютона запишется в виде $m\mathbf{a} = \mathbf{N}$. Учитывая, что $f'_x = 2x$, $f'_y = 0$, $f'_z = 2z$, запишем уравнения Лагранжа первого рода (3.10)

$$m\ddot{x} = 2\lambda x, m\ddot{y} = 0, m\ddot{z} = 2\lambda z, x^2 + z^2 = R^2 \quad (3.11)$$

при начальных данных

$$x(0) = R, y(0) = 0, z(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, \dot{y}(0) = v_{0y}, \dot{z}(0) = v_{0z}.$$

Из второго уравнения (3.11) получается с учетом начальных данных, $\dot{y} = v_{y0}$ и $y = v_{y0}t$. Поделив далее первое уравнение (3.11) на третье, получим $\ddot{x}/\ddot{z} = x/z$, откуда $-\ddot{x}z + \ddot{z}x = 0$, или

$$\frac{d(-\dot{x}z + \dot{z}y)}{dt} = 0.$$

Интегрируя последнее уравнение с учетом начальных данных, получим $-\dot{x}z + \dot{z}x = Rv_{0z}$. Делая замену переменных (или пере-

ходя к полярным координатам) $x = R \cos \varphi$, $z = R \sin \varphi$ получим, что $R^2 \frac{d\varphi}{dt} = R v_{0z}$, или $\frac{d\varphi}{dt} = v_{0z} / R$. Следовательно (с учетом того, что $\varphi(0) = 0$), $\varphi = \omega t$, где $\omega = v_{0z} / R$. Мы получили закон движения точки M в виде

$$x = R \cos \omega t, y = v_{0y} t, z = R \sin \omega t. \quad (3.12)$$

Уравнения (3.12) означают, что точка будет двигаться по винтовой линии.

Найдем теперь реакцию цилиндра $\mathbf{N} = \lambda \nabla f$. Так как $\lambda = m\ddot{x} / 2x = -m\omega^2 / 2$, то

$$N = |\lambda| \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_z)^2} = m\omega^2 R.$$

Знак минус у λ указывает на то, что реакция $\mathbf{N}$ направлена внутрь цилиндра.

Задача 11 (задача о сферическом маятнике). Точка массой m движется под действием силы тяжести по внутренней поверхности гладкой сферы радиуса R вблизи положения равновесия (рис. 3.5). В начальный момент времени $t = 0$, $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$, $v_x(0) = 0$, $v_y(0) = v_0$. Определить движение точки и силу реакции сферы.

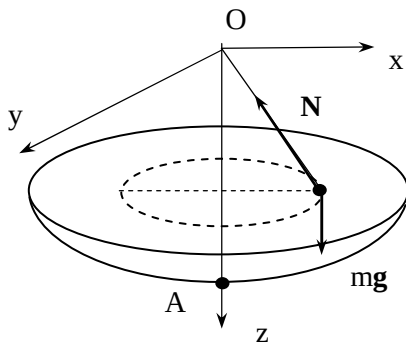


Рис. 3.5

Решение. Уравнение сферы в системе координат $Oxyz$ (O – центр сферы) имеет вид $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$. Следовательно, $f'_x = 2x$, $f'_y = 2y$, $f'_z = 2z$ и уравнения Лагранжа первого рода запишутся в виде

$$m\ddot{x} = 2\lambda x, m\ddot{y} = 2\lambda y, m\ddot{z} = 2\lambda z, x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (3.13)$$

Полученная система уравнений сложна для интегрирования (неизвестная λ ведь не обязана быть постоянной величиной). Найдем поэтому приближенное решение задачи, воспользовавшись тем, что по условию задачи движение происходит вблизи положения равновесия $A(0,0,R)$. Это означает, что x/R и y/R являются малыми величинами и можно в первом приближении пренебречь их квадратами в выражении для z :

$$z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} = R\sqrt{1 - (x^2 + y^2)/R^2} = R(1 - (x^2 + y^2)/R^2)^{0.5} \approx R(1 - (x^2 + y^2)/R^2) \approx R.$$

Полагая в третьем уравнении (3.13) $z = R$ и $\ddot{z} = 0$, будем иметь $mg + 2\lambda R = 0$. В нашем приближении $\lambda = -mg/2R$ оказалась постоянной величиной и мы сразу можем определить реакцию сферы $N = |\lambda| \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + (f'_z)^2} = -mg$.

Подставляя теперь полученное значение λ в первые два уравнения (3.13), получим $\ddot{x} = -(g/R)x$, $\ddot{y} = -(g/R)y$ или

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \ddot{y} + k^2 y = 0, k = \sqrt{g/R}. \quad (3.14)$$

Уравнения (3.14) показывают, что точка вдоль осей x и y совершает свободные гармонические колебания с частотой k (см. п. 2.2 лекции 2). Следовательно,

$$x = A_1 \sin(kt + \alpha_1), y = A_2 \sin(kt + \alpha_2).$$

Подставляя начальные данные, получим искомые уравнения движения

$$x = x_0 \sin(\sqrt{g/R} t), y = \sqrt{g/R} \cos(\sqrt{g/R} t), z = R.$$

Если исключить из этих уравнений время t , то получим уравнение траектории

$$x^2 / x_0^2 + y^2 / (Rv_0^2) = 1, z = R.$$

То есть в принятом приближении точка будет двигаться по эллипсу, лежащему в плоскости $z = R$ с центром на оси Oz .

Сделаем замечание к нашему решению. Строго говоря, нельзя считать, что мы получили его с точностью до членов порядка x/R и y/R , так как дополнительно еще приняли, что $\ddot{z} = 0$ (из того, что $z = R$ с точностью до членов порядка x/R и y/R , еще не следует, что $\ddot{z} = 0$ с той же точностью). Строгое решение в первом приближении (см., например, собрание трудов академика А.Н. Крылова, вып. III, Математика, ч. I, издание АН СССР, 1949, с. 333) дает вместо эллипса незамкнутую кривую, близкую для первого витка к эллипсу. Движение по такой незамкнутой кривой можно получить, если полученный эллипс поворачивать с определенной скоростью в сторону движения точки.

Рассмотрим теперь движение по *шероховатой* поверхности. В этом случае реакция связи $\mathbf{R}$ имеет две составляющие – нормальную реакцию $\mathbf{N}$ и силу трения $\mathbf{F}_f$. Основное уравнение динамики будет теперь иметь вид

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_f, \quad (3.14)$$

или, в проекциях на оси координат,

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + N_x + F_{fx}, m\ddot{y} = F_y + N_y + F_{fy}, \\ m\ddot{z} &= F_z + N_z + F_{fz}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Так как сила трения направлена противоположно вектору скорости точки, то ее можно представить в виде $\mathbf{F}_f = -(F_f / v)\mathbf{v}$, где F_f и v – модули векторов $\mathbf{F}_f$ и $\mathbf{v}$. Тогда ее проекции будут равны $F_{fx} = -(F_f / v)\dot{x}$, $F_{fy} = -(F_f / v)\dot{y}$, $F_{fz} = -(F_f / v)\dot{z}$. Учитывая,

что $F_f = f_d N$, где f_d – динамический коэффициент трения скольжения, снова получим систему из четырех уравнений движения

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \lambda f'_x - (F_f / v)\dot{x}, m\ddot{y} = F_y + \lambda f'_y - (F_f / v)\dot{y}, \\ m\ddot{z} &= F_z + \lambda f'_z - (F_f / v)\dot{z}, f(x, y, z) = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

относительно тех же неизвестных функций $x(t), y(t), z(t), \lambda(t)$.

Система уравнений (3.16) позволяет, таким образом, решить задачу о движении точки с учетом трения о поверхность. Решение ее, однако, может быть сложным и в общем случае требует привлечения ЭВМ и численных методов решения систем ДУ.

В качестве иллюстрации рассмотрим пример решения системы (3.16) для случая прямолинейных колебаний точки с учетом трения скольжения (рис. 3.6).

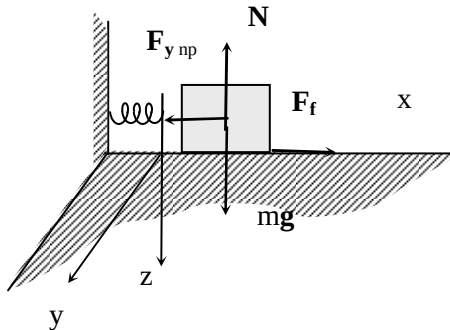


Рис. 3.6

Систему координат $Oxyz$ введем так, чтобы движение точки происходило вдоль оси Ox , начало O выберем в положении равновесия точки, соответствующем недеформируемой пружи-

не, а ось z направим вертикально вниз, как показано на рис. 3.6. Уравнение поверхности тогда запишется в виде $z = 0$. То есть в нашем примере $f = z$ и $f'_x = f'_y = 0$, $f'_z = 1$. Так как точка движется вдоль оси x , то $y = z = \dot{y} = \dot{z} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0$ во все время движения. Учитывая, далее, что сумма активных сил $\mathbf{F} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{упр}$, где $F_{упр} = cx$; c – коэффициент жесткости пружины, приведем систему уравнений (3.16) к виду

$$m\ddot{x} = -cx - (F_f / v)\dot{x}, 0 = \lambda + mg. \quad (3.17)$$

Из второго уравнения (3.17) получаем, что $\lambda = -mg$ и, следовательно, $N_x = \lambda f'_x = 0$, $N_y = \lambda f'_y = 0$, $N_z = \lambda f'_z = -mg$. То есть мы получили (как и должно быть), что $N = mg$ и направлена вертикально вверх.

Первое же уравнение (3.17) распадается на два уравнения $m\ddot{x} = -cx - f_d mg$, для $\dot{x} > 0$ и $m\ddot{x} = -cx + f_d mg$, для $\dot{x} < 0$, или

$$\ddot{x} + k^2 x = -f_d g, \text{ для } \dot{x} > 0; \quad (3.18)$$

$$\ddot{x} + k^2 x = f_d g, \text{ для } \dot{x} < 0. \quad (3.19)$$

Для решения уравнений (3.18), (3.19) зададим начальные условия. Пусть в начальный момент времени груз был отклонен вправо на расстояние $x(0) = A_0$ и был отпущен без начальной скорости $\dot{x}(0) = 0$. Будем еще считать, что в этом смещенном положении восстанавливающая сила упругости пружины больше силы трения, т.е. $cA_0 > f_d mg$ или $A_0 > f_d g / k^2$ (иначе груз останется в покое).

Заметим, что на начальном этапе движения $\dot{x} < 0$ и нужно интегрировать уравнение (3.19). Общее решение (3.19) найдется как сумма решений $x = x_1 + x_2$, где x_1 – общее решение однородного уравнения $\ddot{x} + k^2 x = 0$; x_2 – частное решение полного уравнения (3.19).

Общее решение $x_1 = A \sin(kt + \alpha)$ мы уже знаем (см. п. 2.2 лекции 2), а частное решение (3.19) можно взять в виде постоянной $x_2 = f_d g / k^2$. Тогда $x = A \sin(kt + \alpha) + f_d g / k^2$. Постоянные интегрирования A и α найдем из начальных условий задачи $x(0) = A_0$, $\dot{x}(0) = 0$. Следовательно, $\alpha = \pi / 2$, $A = A_0 - f_d g / k^2$. Значит,

$$x = (A_0 - f_d g / k^2) \cos kt + f_d g / k^2. \quad (3.20)$$

Решение (3.20), однако, справедливо лишь до тех пор, пока скорость

$$\dot{x} = -(A_0 - f_d g / k^2) \sin kt \quad (3.21)$$

остаётся отрицательной, т.е. до момента времени $t_1 = \pi / k$. При этом значение x_1 , соответствующее крайне левому положению, равно $x_1 = x(t_1) = -(A_0 - 2 f_d g / k^2)$. Амплитуда $A_1 = -x_1$ первого отклонения определится равенством $A_1 = (A_0 - 2 f_d g / k^2)$. В рассматриваемом интервале времени груз совершит половину колебательного цикла относительно среднего положения $f_d g / k^2$.

Дальнейшее (обратное) движение груза возможно лишь при условии, что восстанавливающая сила упругости пружины больше силы трения в крайнем левом положении, т.е. $A_1 > f_d g / k^2$. Если это условие соблюдается, то начнется движение вправо при новых начальных условиях $x = x_1 = -A_1$, $\dot{x} = 0$. На этом участке $\dot{x} > 0$ и интегрировать нужно уже уравнение (3.18). Рассуждая аналогично, получим, что это решение имеет вид

$$\begin{aligned} x &= -(A_1 - f_d g / k^2) \cos kt - f_d g / k^2, \\ \dot{x} &= (A_1 - f_d g / k^2) \sin kt. \end{aligned} \quad (3.22)$$

В конце второго участка $\dot{x} = 0$, откуда следует, что промежуток времени, в течение которого происходит движение на

втором этапе $t_2 = \pi/k$, т.е. $t_2 = t_1$. Наибольшее отклонение A_2 точки получим, подставив $t = t_2$ в первое уравнение (3.22), $A_2 = A_1 - 2f_d g/k^2$.

Если окажется, что $A_2 > f_d g/k^2$, то вновь начнется движение влево и снова нужно интегрировать уравнение (3.19) при новых начальных данных $x = A_2, \dot{x} = 0$. Понятно, что мы вновь придем к уравнениям (3.20), (3.21), в которых A_0 следует заменить на A_2 и т.д.

Легко заметить, что за каждый полупериод амплитуда уменьшается на величину $2f_d g/k^2$, причем длительность каждого полупериода одинакова и равна π/k . После истечения n полупериодов, амплитуда уменьшится, очевидно, на $2nf_d g/k^2$ и станет равной $A_n = A_0 - 2nf_d g/k^2$. Таким образом, *при трении скольжения (сухом трении), амплитуда убывает по закону арифметической прогрессии* (напомним, что при учете сопротивления среды (вязком трении), амплитуда убывала по закону геометрической прогрессии, см. п. 2.3 лекции 2).

Колебания будут происходить до тех пор, пока сила упругости sA_n в одном из крайних положений не станет меньше силы трения: $sA_n < f_d mg$, или $A_n < f_d g/k^2$. Пользуясь выражением для A_n , получим

$$A_0 = x_0 < (2n+1)f_d g/k^2. \quad (3.23)$$

Неравенство (3.23) может служить для определения числа полупериодов колебаний до остановки груза, или, наоборот, значения x_0 , по известному значению числа полупериодов.

На рис. 3.7 приведен график движения точки (груза). На этом графике параллельно оси t проведены две прямые $x = b = f_d g/k^2$ и $x = -b = -f_d g/k^2$.

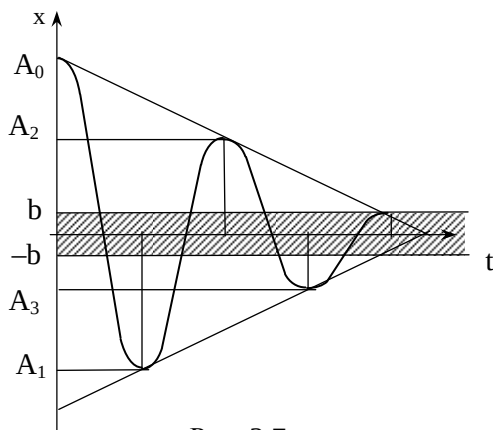


Рис. 3.7

Около верхней прямой располагаются полупериоды, соответствующие движению влево, а около нижней прямой – движению вправо. Внутри этих прямых – «зона застоя». Если какой-нибудь полупериод заканчивается в «зоне застоя», то движение прекращается. Огибающие графика имеют вид наклонных прямых $x = \pm(A_0 - tg(2 f_d g / \pi k) \cdot t)$.

Рассмотренный пример показывает, в частности, что учет трения скольжения при несвободном движении точки существенно усложняет задачу.

3.3. Движение точки по неподвижной кривой

При изучении движения точки по заданной неподвижной кривой удобнее пользоваться ДУ движения (1.6) в проекциях на оси естественной системы координат (τ, n, b) . На рис. 3.8 показана сила $\mathbf{F}$ – равнодействующая всех активных сил, действующих на точку, и сила $\mathbf{R}$ – сила реакции кривой. Разлагая силу $\mathbf{R}$

на нормальную реакцию $\mathbf{N}$ и силу трения скольжения $\mathbf{F}_f$ получим, что $R_\tau = F_{f\tau}$, $R_n = N_n$, $R_b = N_b$ и ДУ (1.6) запишутся тогда в виде

$$m\ddot{s} = F_\tau + F_{f\tau}, m v^2 / \rho = F_n + N_n, 0 = F_b + N_b. \quad (3.24)$$

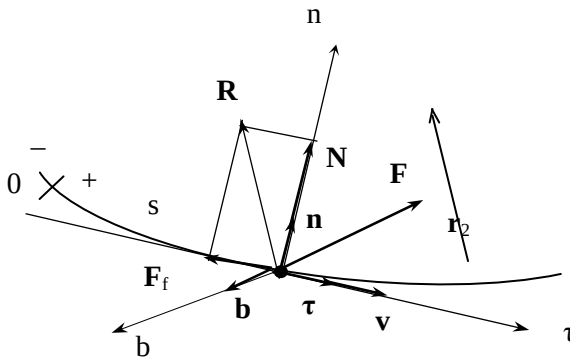


Рис. 3.8

Из третьего уравнения (3.24) следует, что бинормальная реакция кривой полностью определяется бинормальной составляющей равнодействующей активных сил и от закона движения точки не зависит.

Модуль силы трения $F_f = f_d N = f_d \sqrt{N_n^2 + N_b^2}$, а ее направление противоположно направлению скорости $\mathbf{v}$, поэтому

$$F_{f\tau} = -f_d \sqrt{N_n^2 + N_b^2} \cdot v_\tau / v. \quad (3.25)$$

Подставляя (3.25) в (3.24) и учитывая, что $v_\tau = \dot{s}$, получим

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= F_\tau - f_d \sqrt{N_n^2 + N_b^2} \cdot \dot{s} / v, m v^2 / \rho = F_n + N_n, \\ 0 &= F_b + N_b. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Полученная система из трех уравнений позволяет определить все три неизвестных задачи s, N_n и N_b при заданных активных силах, массе и начальных условиях движения точки. Сила трения восстанавливается далее по уравнению (3.25).

Если движение происходит по гладкой кривой, то $F_f = 0$ и уравнения (3.26) принимают вид

$$m\ddot{s} = F_\tau, m v^2 / \rho = F_n + N_n, 0 = F_b + N_b. \quad (3.27)$$

В этом случае первое уравнение служит для определения закона движения точки, а второе и третье – для определения реакции связи.

Задача 12. Бруску массы m , находящемуся на вершине гладкой цилиндрической поверхности радиуса R , сообщили начальную скорость v_0 (рис. 3.9).

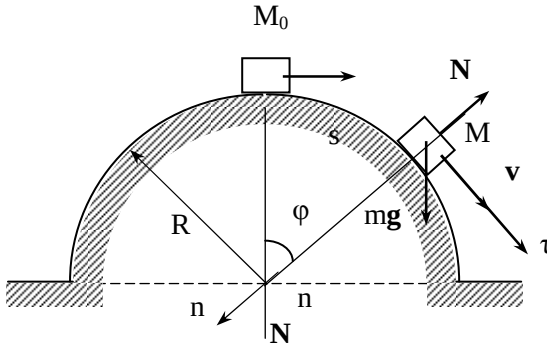


Рис. 3.9

Определить зависимость скорости бруска и его давления на поверхность от угла φ , а также предельный угол φ_1 , при котором он оторвется от поверхности цилиндра.

Решение. Прежде чем решать эту задачу, отметим, что в данном случае мы имеем дело с односторонней связью – брусок может как находиться на поверхности цилиндра, так и покинуть эту поверхность – оторваться от нее. Условие отрыва означает, что брусок в этот момент времени уже перестает давить на поверхность. Следовательно, в точке отрыва реакция поверхности равна нулю. Далее при решении задачи брусок будем считать материальной точкой.

Введем теперь естественную систему отсчета. За начало отсчета примем начальное положение бруска (точки), а ось τ направим в сторону его движения. На брусок действует активная сила – сила тяжести $m\mathbf{g}$ и нормальная реакция $\mathbf{N}$ цилиндра. Запишем второй закон Ньютона в векторном виде $m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{N}$. В проекциях на оси τ и n естественной системы координат будем иметь

$$\tau : m \frac{dv}{dt} = mg \sin \varphi, n : mv^2 / R = mg \cos \varphi - N. \quad (3.28)$$

Зависимость $v = v(\varphi)$ получим из первого уравнения системы (3.28). Для этого заметим, что

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dv}{d\varphi} \omega = \frac{dv}{d\varphi} \frac{v}{R} = \frac{1}{2R} \frac{dv^2}{d\varphi}.$$

Следовательно, $\frac{dv^2}{d\varphi} = 2gR \sin \varphi$. Интегрируя это уравнение с учетом начальных условий $v(\varphi = 0) = v_0$, получим $v^2(\varphi) = v_0^2 + 2Rg(1 - \cos \varphi)$, или $v(\varphi) = \sqrt{v_0^2 + 2Rg(1 - \cos \varphi)}$.

Давление бруска на поверхность цилиндра, согласно третьему закону Ньютона, равно с точностью до знака силе реакции этой поверхности. Подставляя во второе уравнение системы (3.28) выражение для $v(\varphi)$, получим

$$N(\varphi) = mg \cos \varphi - m(v_0^2 + 2Rg(1 - \cos(\varphi))) / R.$$

И, наконец, предельный угол $\varphi = \varphi_1$ найдем, приравняв в точке отрыва $N(\varphi_1) = 0$. Следовательно,

$$\cos \varphi_1 = 2/3 - v_0^2 / (3Rg),$$

$$\text{или } \varphi_1 = \arccos(2/3 - v_0^2 / (3Rg)).$$

Заметим, что если $v_0^2 > gR$, то в полученном нами решении $\cos \varphi_1 > 1$ (чего не может быть!). Чтобы снять такое противоречие, рассмотрим сначала случай $v_0^2 = gR$. В этом случае $\cos \varphi_1 = 0$. То есть при скорости $v_0 = \sqrt{Rg}$ брусок оторвется от поверхности цилиндра уже в самом начале своего движения. Теперь уже понятно, что если $v_0 > \sqrt{Rg}$, тем более отрыв произойдет в самом начале движения, и брусок вообще не будет двигаться по поверхности цилиндра. В этом случае и уравнение (3.28) не будет выполняться. Значит, ответ будет следующим: $\varphi_1 = 0$, если $v_0 \geq \sqrt{Rg}$; $\varphi_1 = \arccos(2/3 - v_0^2 / (3Rg))$, если $v_0 < \sqrt{Rg}$.

Задача 13. Найти в задаче 12 скорость бруска в зависимости от угла φ для случая шероховатого цилиндра с динамическим коэффициентом трения f .

Решение. Отличие от предыдущей задачи в том, что добавляется сила трения $\mathbf{F}_f$, направленная против движения (рис. 3.10).

ДУ (3.28) теперь преобразуются к виду

$$\tau : m \frac{dv}{dt} = mg \sin \varphi - fN, \quad n : mv^2 / R = mg \cos \varphi - N. \quad (3.30)$$

Находя N из второго уравнения и подставляя его значение в первое уравнение, получим

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin \varphi - fmg \cos \varphi + fmv^2 / R.$$

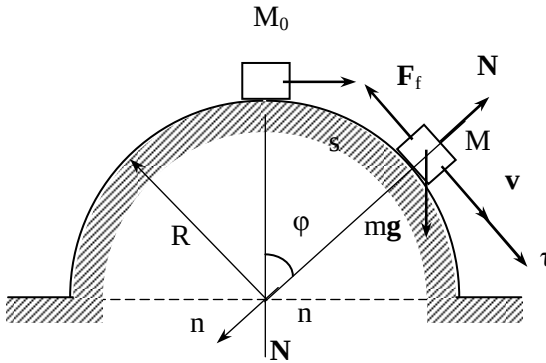


Рис. 3.10

Учитывая, так же как и в предыдущей задаче, что

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dv}{d\varphi} \omega = \frac{dv}{d\varphi} \frac{v}{R} = \frac{1}{2R} \frac{dv^2}{d\varphi}, \text{ будем иметь}$$

$$\frac{dv^2}{d\varphi} + 2fv^2 = 2gR(\sin \varphi - \cos \varphi). \quad (3.31)$$

Уравнение (3.31) представляет собой линейное неоднородное уравнение первого порядка относительно v^2 . Его общее решение складывается из общего решения однородного уравнения $\frac{dv^2}{d\varphi} + 2fv^2 = 0$ и частного решения неоднородного уравнения (3.31).

Общее решение однородного уравнения имеет вид $v_1 = C \exp(-2f\varphi)$, где C – постоянная интегрирования. Частное решение будем искать в форме

$$v_2^2 = A \cos \varphi + B \sin \varphi. \quad (3.32)$$

Для определения постоянных A и B подставим (3.32) в (3.31):

$$-A \sin \varphi + B \cos \varphi + 2fA \cos \varphi + 2fB \sin \varphi = 2gR(\sin \varphi - f \cos \varphi).$$

Так как последнее равенство должно выполняться для любого φ , то коэффициенты при $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ в обеих частях равенства должны быть равны, и мы получаем $-A + 2fB = 2gR$, $B + 2fA = -2fgR$. Откуда

$$A = -2gR(1 + 2f^2)/(1 + 4f^2), B = 2fgR/(1 + 4f^2).$$

Так как $v^2 = v_1^2 + v_2^2$, то

$$v^2 = C \exp(-2f\varphi) + (2fgR \sin \varphi - 2gR(1 + 2f^2))/(1 + 4f^2). \quad (3.33)$$

Постоянную C найдем из начальных условий задачи: при $t = 0: \varphi = 0, v = v_0$. Подставляя эти значения в (3.33), найдем

$$C = v_0^2 + 2gR(1 + 2f^2)/(1 + 4f^2). \quad (3.34)$$

Из (3.33) и (3.34) получим окончательно

$$v^2 = (v_0^2 + 2gR(1 + 2f^2)/(1 + 4f^2)) \exp(-2f\varphi) + (2fgR \sin \varphi - 2gR(1 + 2f^2))/(1 + 4f^2). \quad (3.35)$$

Видим, что выражение (3.35) совпадает с (3.29) в случае $f = 0$.

Заметим еще, что мы так же, как и в предыдущей задаче, могли бы попытаться найти угол отрыва $\varphi = \varphi_1$, подставив во второе уравнение (3.30) выражение (3.35) и положив в нем $N = 0$. Однако в этом случае мы бы получили уравнение относительно φ_1 , содержащее $\sin \varphi_1, \cos \varphi_1$ и $\exp(-2f\varphi_1)$, которое можно решить только приближенно численными методами с применением ЭВМ.

Вопросы для самоконтроля

1. Что имеют в виду, когда говорят, что точка свободна или несвободна?
2. Есть ли отличие в понятиях «свободная точка» и «изолированная точка»?
3. Задача о несвободном движении точки является прямой, обратной или смешанной?
4. Что понимается под связями в динамике?
5. Какие связи называются стационарными (нестационарными)? Голономными (неголономными)? Двусторонними (односторонними)? Уравнениями (или неравенствами) какого вида они описываются?
6. Как определяется вектор ∇f для уравнения поверхности $f(x, y, z) = 0$ и как он направлен по отношению к этой поверхности?
7. Как используется вектор ∇f при составлении уравнений Лагранжа первого рода?
8. Позволяют ли в принципе уравнения Лагранжа первого рода решить задачу о движении точки по заданной гладкой поверхности при заданных начальных условиях? А если поверхность шероховатая?
9. В чем существенное отличие влияния на амплитуду колебаний точки сухого и вязкого трения?
10. Почему при определении движения точки по заданной линии удобнее пользоваться естественной системой отсчета?
11. Всегда ли бинормальная реакция кривой, по которой движется точка, равна нулю? Зависит ли ответ на этот вопрос от закона движения точки?

Упражнения

У.7. Груз подвешен на нити длиной $l = 70$ см. В низшем положении грузу сообщена скорость $v_0 = 4,9$ м/с. Определить в каком положении нить перестает удерживать груз и он начнет двигаться как свободная точка.

У.8. Тяжелому кольцу, нанизанному на горизонтально расположенную гладкую проволочную окружность, сообщают начальную скорость v_0 , направленную по касательной к окружности. При движении на кольцо действует сила сопротивления $R = km\sqrt{v}$, где m – масса кольца; v – его скорость; k – постоянный коэффициент. Найти, через какое время кольцо остановится.

У.9. Груз массой m подвешен к тросу длиной l и совершает вместе с тросом колебания согласно уравнению $\varphi = (\pi/6)\sin 2\pi t$. Определить натяжение троса в верхнем и нижнем положении груза.

Лекция 4. ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ В НЕИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

4.1. Основной закон динамики в неинерциальной системе отсчета

Второй закон Ньютона $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ справедлив в инерциальной системе отсчета. Часто, однако, возникает необходимость изучать движение в неинерциальной системе отсчета. Достаточно сказать, что система отсчета, связанная с Землей, не является инерциальной из-за ее суточного вращения.

Рассмотрим неинерциальную систему координат $O_1x_1y_1z_1$, которая движется относительно инерциальной системы координат $Oxyz$ (рис. 4.1).

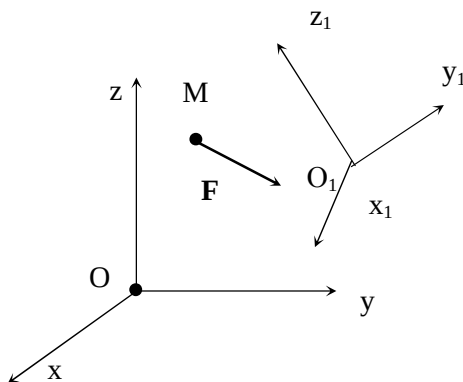


Рис. 4.1

Пусть $\mathbf{F}$ – равнодействующая всех сил (активных и реакций связей, если они имеются), действующих на точку. Так как система координат $Oxyz$ инерциальная, то в ней второй закон Ньютона

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (4.1)$$

выполняется. Представим теперь движение точки как сложное. А именно, инерциальную систему отсчета $Oxyz$ примем за неподвижную и тогда движение по отношению к ней будет абсолютным (a). Неинерциальную систему отсчета $O_1x_1y_1z_1$ – считаем подвижной, тогда движение по отношению к ней будет относительным (r). Само движение неинерциальной системы $O_1x_1y_1z_1$ относительно инерциальной системы $Oxyz$ тогда будет переносным (e). Воспользуемся теперь теоремой Кориолиса о сложении ускорений

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c, \mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r. \quad (4.2)$$

Учитывая, что $\mathbf{a} = \mathbf{a}_a$ и подставляя (4.2) в (4.1), получим $m\mathbf{a}_r + m\mathbf{a}_e + m\mathbf{a}_c = \mathbf{F}$, или

$$m\mathbf{a}_r = \mathbf{F} + \mathbf{F}_e^{in} + \mathbf{F}_c^{in}, \quad (4.3)$$

где введены обозначения $\mathbf{F}_e^{in} = -m\mathbf{a}_e$, $\mathbf{F}_c^{in} = -m\mathbf{a}_c$. Заметим, что величины $\mathbf{F}_e^{in}$ и $\mathbf{F}_c^{in}$ имеют размерность силы. Их называют *переносной и кориолисовой силами инерции*, а уравнение (4.3) – *основным уравнением динамики для неинерциальных систем*.

Сопоставляя (4.1) и (4.3) заключаем, что мы получили «подправленный» закон Ньютона: *при рассмотрении движения точки в неинерциальной системе отсчета к действующим силам нужно добавить переносную и кориолисову силы инерции*.

В неинерциальной системе отсчета силы инерции, согласно (4.3), проявляют себя так же, как и обычные силы, с которыми мы имеем дело в инерциальной системе отсчета. Переносная и кориолисова силы инерции наряду с обычными силами вызывают относительное ускорение, они могут деформировать тело и даже разрушить его, они совершают работу и т.п. Вместе с тем необходимо помнить об их основном отличии. Обычные силы являются результатом взаимодействия тел между собой, определяются соответствующими физическими законами взаимо-

действия и поэтому не зависят от выбора системы отсчета, т.е. в любой системе отсчета одинаковы. Переносная и кориолисова силы инерции, наоборот, полностью определяются выбором системы отсчета. Поэтому они в различных неинерциальных системах отсчета разные. В соответствии с этим и законы движения материальных точек (тел) в разных неинерциальных системах отсчета будут отличаться (неинерциальные системы отсчета динамически различны). Во всех же инерциальных системах отсчета, как мы уже указывали в лекции 1 (см. п. 1.2, принцип Галилея), законы движения материальных точек одинаковы (динамически неразличимы). Это следует и непосредственно из (4.3), так как во всех инерциальных системах отсчета переносная и кориолисова силы инерции равны нулю.

Уравнение (4.3) также позволяет дать ответ на такой практически важный вопрос: можно ли при решении конкретной задачи данную систему координат (систему $O_1x_1y_1z_1$) приближенно считать инерциальной? Ясно, что положительный ответ на этот вопрос возможен лишь при условии, что силы инерции $\mathbf{F}_e^{in}$ и $\mathbf{F}_c^{in}$ малы по сравнению с равнодействующей $\mathbf{F}$ обычных сил, действующих на точку (тело). Однако, как мы увидим на примерах, рассмотренных в п. 4.3, этого условия может быть недостаточно. Нужно еще потребовать, чтобы время воздействия этих сил не было слишком большим.

Обратимся теперь к решению задач на применение основного закона динамики в неинерциальной системе координат. Рекомендации к их решению остаются теми же, что и для решения задач на применение второго закона Ньютона в инерциальной системе координат (см. п. 1.5 лекции 1), с той лишь разницей, что наряду с обычными силами следует еще изображать на чертеже и учитывать при составлении ДУ переносную и кориолисову силы инерции. Для вычисления этих сил необходимо определить переносное и кориолисово ускорения точки, используя рекомендации к решению задач кинематики на сложное движение точки (см. «Лекции по теоретической механике», Рудяк В.Я., Юдин В.А., ч. 1, лекция 11, п. 11.4).

Задача 14. Точка M покоится в неподвижной системе отсчета Oxy и находится на расстоянии $OM = R$ от ее начала (рис. 4.2). Система координат Ox_1y_1 вращается равномерно с угловой скоростью ω против хода часовой стрелки. Составить дифференциальное уравнение движения точки M в подвижной системе координат Ox_1y_1 .

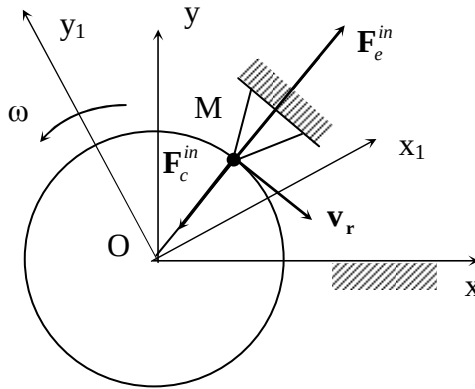


Рис. 4.2

Решение. Так как точка M в системе координат Oxy находится в покое, то $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e = 0$ и $\mathbf{a}_a = 0$. Так как в этой системе выполняется второй закон Ньютона, то $m\mathbf{a}_a = \mathbf{F}$ и, следовательно, $\mathbf{F} = 0$. Далее, так как $\mathbf{v}_e = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OM}$, то $\mathbf{v}_r = -\mathbf{v}_e = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OM}$. То есть точка M в системе координат Ox_1y_1 движется по окружности радиуса R по ходу часовой стрелки (см. рис. 4.2) с постоянной угловой скоростью ω .

Переносное ускорение $\mathbf{a}_e$ найдем, закрепив мысленно точку M в подвижной системе координат. Так как подвижная система вращается равномерно относительно неподвижной системы, то $\mathbf{a}_e$ – центростремительное ускорение, равное по модулю

$a_e = \omega^2 R$. Следовательно, $\mathbf{F}_e^{in} = -m\mathbf{a}_e$ и направлена в противоположную сторону (от центра). Ее часто называют, поэтому, центробежной силой инерции. Величина этой силы равна $F_e^{in} = m\omega^2 R$.

Кориолисова сила инерции вычисляется по формуле $\mathbf{F}_c^{in} = -m\mathbf{a}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$. Так как вектор $\boldsymbol{\omega}$ направлен перпендикулярно чертежу (на нас), а вектор $\mathbf{v}_r$ – по касательной к окружности в сторону хода часовой стрелки, то вектор $\mathbf{F}_c^{in}$ будет направлен к центру O . Так как векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}_r$ перпендикулярны, то модуль кориолисова ускорения равен $F_c^{in} = 2m\omega v_r = 2m\omega^2 R$.

Уравнение (4.3) в нашем случае запишется в виде $m\mathbf{a}_r = \mathbf{F} + \mathbf{F}_e^{in} + \mathbf{F}_c^{in} = 0 + m\omega^2 \mathbf{R} - 2m\omega^2 \mathbf{R} = -m\omega^2 \mathbf{R}$, где $\mathbf{R} = \mathbf{OM}$. Таким образом, дифференциальное уравнение движения точки M во вращающейся системе координат Ox_1y_1 имеет вид $m\mathbf{a}_r = -m\omega^2 \mathbf{R}$.

Задача 15. Балка AB равномерно вращается с угловой скоростью ω в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси Sz . Одновременно по балке движется с постоянной относительной скоростью u ползун M массы m (рис. 4.3). Определить изгибающий момент относительно оси вращения, действующий на балку, а также закон изменения со временем движущей силы F , направленной вдоль балки от A к B , и обеспечивающей равномерное движение ползуна, если коэффициент трения между балкой и ползуном равен f .

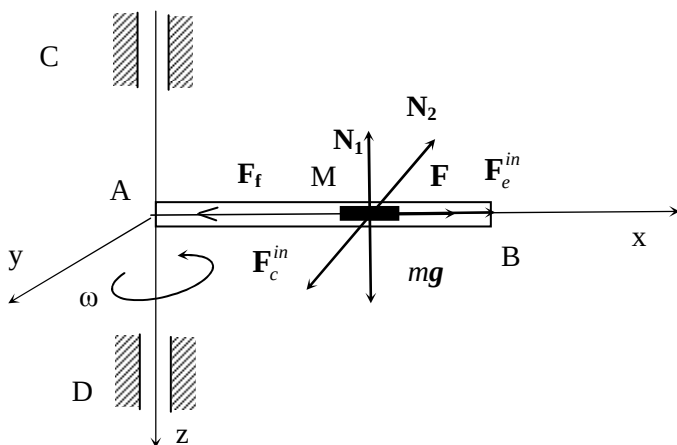


Рис. 4.3

Решение. Построим систему координат $Axyz$, жестко связанную с балкой, как показано на рис. 4.3. На ползун действует движущаяся сила $\mathbf{F}$, сила тяжести $m\mathbf{g}$, сила трения $\mathbf{F}_f$ и нормальная реакция балки $\mathbf{N}$, которую разложим на вертикальную $\mathbf{N}_1$ и горизонтальную $\mathbf{N}_2$ составляющие $\mathbf{N} = \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2$. Направления сил инерции $\mathbf{F}_e^{in}$ и $\mathbf{F}_c^{in}$ показаны на рис. 4.3, а их модули равны $F_e^{in} = m\omega^2 x$ и $F_c^{in} = 2m\omega u$, где $x = AM$ – расстояние ползуна до оси вращения балки.

Уравнение (4.3) в нашем случае будет иметь вид

$$m\mathbf{a}_r = m\mathbf{g} + \mathbf{F} + \mathbf{F}_f + \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 + \mathbf{F}_e^{in} + \mathbf{F}_c^{in}. \quad (4.4)$$

Действие кориолисовой силы инерции $\mathbf{F}_c^{in}$ передается на балку, в результате чего изгибающий момент M_z относительно вертикальной оси z будет равен

$$M_z = F_c^{in} x = 2m\omega u x = 2m\omega u(x_0 + ut),$$

где x_0 – начальное расстояние ползуна от оси вращения.

Для определения силы F распишем уравнение (4.4) в проекциях на оси x, y, z . Так как ползун M движется равномерно относительно балки, то $a_r = 0$, и мы имеем

$$F - F_f + F_e^{in} = 0, \quad -N_2 + F_c^{in} = 0, \quad mg - N_1 = 0. \quad (4.5)$$

Следовательно, $N_1 = mg$, $N_2 = 2m\omega u$ и полная нормальная реакция балки $N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = m\sqrt{g^2 + 4\omega^2 u^2}$. Следовательно, $F_f = fN = fm\sqrt{g^2 + 4\omega^2 u^2}$, и из первого уравнения (4.5) получим

$$F = m(f\sqrt{g^2 + 4\omega^2 u^2} - (x_0 + ut)\omega^2). \quad (4.6)$$

Заметим, что если бы балка AB не вращалась ($\omega = 0$), то равномерному движению ползуна соответствовала бы постоянная сила $F = F_f = fN = fmg$. Вращение же балки увеличивает нормальную реакцию балки $N = m\sqrt{g^2 + 4\omega^2 u^2}$ и тем самым увеличивает силу трения. При этом возникает еще переносная сила инерции, которая является центробежной силой, зависящей от времени $F_e^{in} = m\omega^2(x_0 + ut)$. И теперь уже сила F должна уравновешивать две силы, т.е. $F = F_f - F_e^{in}$, что и приводит к достаточно сложному ее выражению (4.6).

4.2. Покой в неинерциальной системе отсчета

Рассмотрим случай, когда материальная точка под действием приложенных к ней сил находится в покое в неинерциальной системе координат $O_1x_1y_1z_1$ (см. рис. 4.1). При отсутствии отно-

сительного движения $\mathbf{a}_r = \mathbf{v}_r = 0$, и, следовательно, $\mathbf{F}_c^{in} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r = 0$. Тогда уравнение (4.3) принимает вид

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_e^{in} = 0. \quad (4.7)$$

Таким образом, *если материальная точка находится в покое по отношению к неинерциальной системе отсчета, то сумма всех сил, приложенных к ней и переносной силы инерции, равна нулю.*

Задача 16. Тело массой m положено на гладкую грань трехгранной призмы (рис. 4.4), другая грань которой лежит на горизонтальной плоскости. Какое горизонтальное ускорение должна иметь призма, чтобы тело относительно нее не двигалось и какое при этом давление на призму со стороны тела? Гладкая грань призмы составляет угол α с горизонтом.

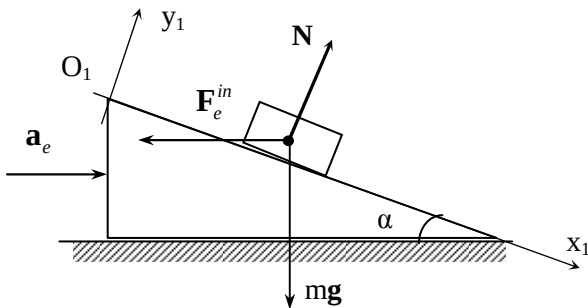


Рис. 4.4

Решение. Введем подвижную систему координат $O_1x_1y_1$, жестко связанную с призмой, как показано на рис. 4.4, и изобразим все силы, входящие в уравнение относительного покоя (4.7). Тогда

$$\mathbf{N} + m\mathbf{g} + \mathbf{F}_e^{in} = 0, \quad (4.8)$$

где $\mathbf{F}_e^{in} = -m\mathbf{a}_e$, $\mathbf{a}_e$ – ускорение призмы. В проекциях на оси x_1, y_1 векторное уравнение (4.8) дает два скалярных уравнения: $mg \sin \alpha - F_e^{in} \cos \alpha = 0$, $N - mg \cos \alpha - F_e^{in} \sin \alpha = 0$. Первое из этих уравнений дает $F_e^{in} = mgtg\alpha$ и, следовательно, $a_e = gtg\alpha$. Из второго уравнения определим модуль реакции N призмы $N = mg \cos \alpha + mgtg\alpha \sin \alpha = mg\sqrt{1 + tg^2\alpha}$.

Заметим, что эту задачу мы могли бы решать и в неподвижной системе отсчета Oxy , связанной с горизонтальной плоскостью (рис. 4.5). В этом случае на тело будут действовать две силы – сила тяжести mg и реакция гладкой призмы N . Условие же относительного покоя означает теперь, что тело имеет такое же ускорение $\mathbf{a}_e$, как и призма. В результате, записывая второй закон Ньютона $m\mathbf{a}_e = mg + N$, приходим к тому же уравнению (4.8).

Задача 17. Тележка движется горизонтально вправо с постоянным ускорением a . На какой угол α отклонится от вертикали нить OM с грузом массы m на ее конце M (см. рис. 4.5).

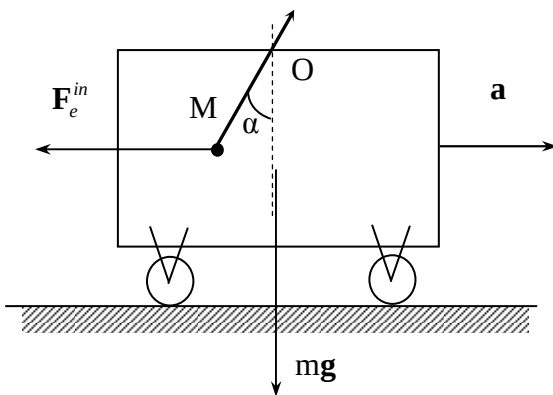


Рис. 4.5

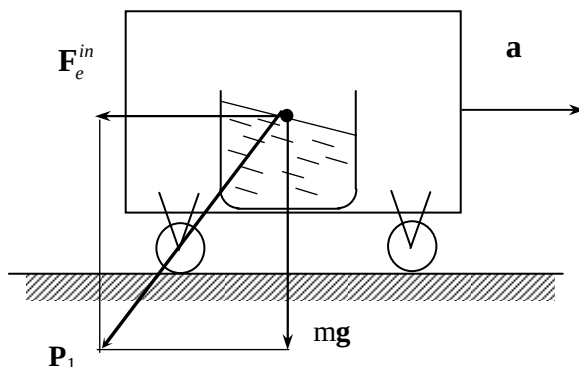


Рис. 4.6

Решение. Груз будет находиться в покое относительно тележки. На него действует сила тяжести mg , реакция нити T и переносная сила инерции F_e^{in} , направленная горизонтально влево (рис. 4.5). Условие равновесия груза относительно тележки запишется тогда в виде $mg + T + F_e^{in} = 0$. Следовательно, $\operatorname{tg} \alpha = F_e^{in} / mg$. То есть нить отклонится влево и составит с вертикалью угол α .

На примере этой задачи видим, что в движущейся тележке роль силы тяжести $P = mg$, создающей натяжение нити, играет сила $P_1 = mg + F_e^{in}$. Если бы на тележке был установлен бак с водой, то свободная поверхность воды была бы перпендикулярна не к силе тяжести P , а к силе P_1 , т.е. составляла бы с горизонтом угол α (рис. 4.6).

Задача 18. Определить форму свободной поверхности воды во вращающемся с постоянной угловой скоростью цилиндрическом стакане.

Решение. В этой задаче вода находится в покое относительно вращающегося стакана. На частицу воды M , находящуюся на ее свободной поверхности, действует сила тяжести частицы mg и переносная сила инерции $\mathbf{F}_e^{in}$, которая является центробежной силой $F_e^{in} = m\omega^2 x$, где x – расстояние точки M до оси вращения Oy (рис. 4.7).

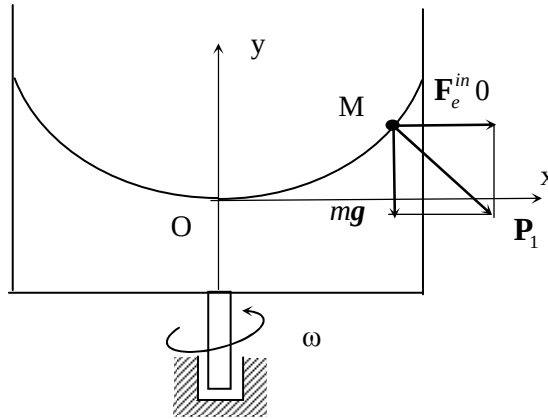


Рис. 4.7

Роль силы тяжести здесь так же, как и в предыдущей задаче, играет сила $\mathbf{P}_1 = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_e^{in}$ и свободная поверхность воды в точке M будет перпендикулярна этому вектору $\mathbf{P}_1$. Принимая далее во внимание, что тангенс угла наклона касательной к функции $y = f(x)$ равен значению ее производной, получаем, что $\frac{df}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{F_e^{in}}{mg} = \frac{m\omega^2 x}{mg} = \frac{\omega^2 x}{g}$. Следовательно, сама функция $f(x)$ будет равна $f(x) = \int (\omega^2 x / g) dx = \omega^2 x^2 / 2g + C$. Постоянную интегрирования C найдем из условия $y(0) = f(0) = 0$.

Следовательно, кривая $y = f(x)$ является параболой, а свободная поверхность воды – параболоидом вращения, получающимся при вращении этой параболы вокруг оси цилиндрического стакана.

Эксперименты с водой в равномерно вращающемся цилиндрическом стакане действительно показывают, что по истечении некоторого времени t_1 , т.е. при $t > t_1$, форма свободной поверхности практически совпадает с полученной при решении нашей задачи. Время t_1 в эксперименте – это время, необходимое для того, чтобы вода относительно стакана уже не двигалась, т.е. это время установления относительного покоя.

Рассмотренные нами в этом пункте примеры показывают, что условия покоя в неинерциальных системах отсчета (т.е. относительно тел, движущихся с ускорением) могут существенно отличаться от условий покоя в инерциальных системах отсчета (т.е. относительно тел, которые сами покоятся либо движутся прямолинейно и равномерно). Мы убедились, что тело может находиться в покое на гладкой наклонной призме, что обычный отвес может отклоняться от вертикали, а уровень воды – от горизонтали. Все это – примеры влияния сил инерции на равновесие тел. В заключение этого пункта рассмотрим уже совсем парадоксальный пример влияния на равновесие сил инерции. А именно, покажем, что можно на грузовике завезти на горку полный бак воды, не пролив ни капли (бак без крышки!).

Действительно, пусть нам требуется взобраться на горку BC на грузовике с полным баком воды. Условие того, что вода не проливается из бака, означает, что эта вода находится в относительном покое (относительно бака, или, что то же самое, относительно грузовика). Относительный покой воды означает, что уровень воды в баке должен быть во все время движения параллелен дну бака, или горке BC . Последнее же условие означает, что (см. задачи 18 и 19) равнодействующая P_1 сил mg и F_e^{in} , для точек воды, находящихся на ее свободной поверхности должна быть перпендикулярна горке BC (рис. 4.8).

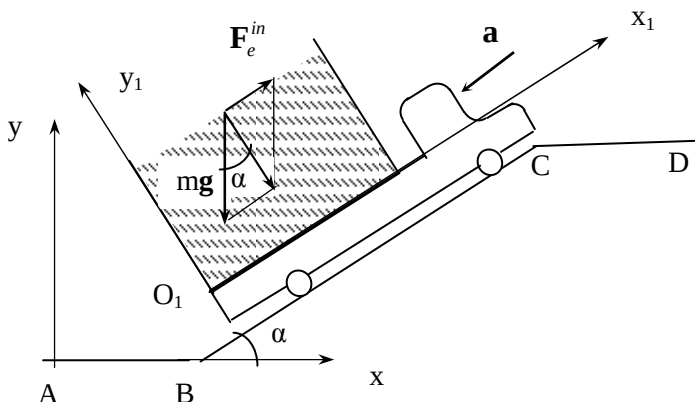


Рис. 4.8

Если угол наклона горки с горизонтом равен α , то условие перпендикулярности вектора $\mathbf{P}_1$ горке BC равносильно условию $\sin \alpha = F_e^{in} / mg = -ma / mg = -a / g$. Отсюда $a = -g \sin \alpha$. То есть, чтобы вода не проливалась, нужно ехать замедленно, с ускорением

$$a = -g \sin \alpha. \quad (4.9)$$

В нашем примере условие (4.9) нужно удовлетворять для всех точек свободной поверхности воды, а это возможно лишь для идеально ровной поверхности горки (линия BC должна быть прямой линией). Поэтому, конечно же, практически осуществить такую процедуру в точности (не пролив ни капли!) не удастся, так как на стыках B и C с горизонтальными участками дороги это условие нарушится и какая-то часть воды все-таки прольется. Поэтому решение (4.9) дает лишь режим движения автомобиля, при котором воды выльется минимальное количество.

4.3. Покой относительно Земли

В качестве примера рассмотрим покой относительно Земли материальной точки (тела), находящейся на ее поверхности. Условие относительного покоя (4.7) в этом случае выражается равенством

$$\mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_e^{in} = 0, \quad (4.8)$$

где $\mathbf{P}$ – сила притяжения Земли, направленная к ее центру; $\mathbf{N}$ – реакция Земли; $\mathbf{F}_e^{in}$ – переносная сила инерции, которая вследствие равномерного вращения Земли представляет собой центробежную силу (рис. 4.9). Ее модуль $F_e^{in} = mh\omega^2$, где h – расстояние от тела до оси вращения Земли; $\omega = 2\pi / 24 \cdot 3600$ 1/с – угловая скорость вращения Земли.

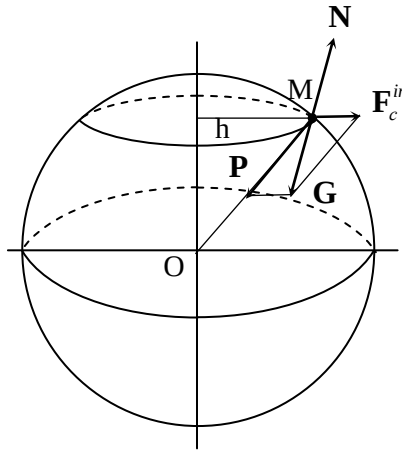


Рис. 4.9

Силу $\mathbf{G} = \mathbf{P} + \mathbf{F}_e^{in}$, представляющую собой равнодействующую силы притяжения Земли и переносной силы инерции, называют *силой тяжести*. В соответствии с (4.8), для покоящегося

ся на Земле тела сила тяжести $\mathbf{G} = -\mathbf{N}$, т.е. совпадает с весом тела (напомним, что под весом понимается сила, с которой тело действует на опору или на точку подвеса).

Направление силы тяжести определяет направление вертикали в данной точке земной поверхности, а плоскость, перпендикулярная к силе тяжести, является горизонтальной плоскостью. Таким образом, направление вертикали совпадает с направлением к центру Земли только на экваторе и на Северном и Южном полюсах. В остальных точках земной поверхности эти два направления не совпадают. Тем не менее это различие мало, так как сила F_e^{in} мала по сравнению с весом тела. Отношение их модулей равно $F_e^{in}/G = mh\omega^2/mg = R\omega^2 \cos\varphi/g$, где φ – широта, на которой находится точка; R – радиус Земли. Оно имеет максимальное значение на экваторе ($\varphi = 0, R = 6370$ км, $g = 9,78$ м/с²) и равно $F_e^{in}/G = 1/290$. Наименьший вес тело имеет на экваторе (там $G = P - F_e^{un}$ и $g = 9,78$ м/с²), а наибольший – на полюсах (там $G = P$ и $g = 9,83$ м/с²).

Заметим, что весы для взвешивания тел определяют именно силу тяжести (вес тела) G (а не силу P притяжения к Земле), а отвес (груз на нитке) – направление силы тяжести (веса) G (а не направление к центру Земли).

Переносной силой инерции, вызванной суточным вращением Земли, объясняется также и сжатие Земли. В результате форма поверхности Земли такова, что вес тела в любой ее точке перпендикулярен поверхности Земли в этой точке, а плоскость горизонта – касательная к ней. Как правило, сжатием Земли также пренебрегают.

4.4. Влияние вращения Земли на движение тел

Как говорилось ранее, при решении большинства технических задач систему отсчета, связанную с Землей считают инерциальной. Тем самым не учитывают ее суточного вращения.

Это вращение происходит с угловой скоростью $\omega = 2\pi / 24 \cdot 3600 \approx 0,000073$ 1/с. Выведенное нами уравнение (4.3) движения тел в неинерциальной системе отсчета позволяет определить влияние такого медленного вращения на движение тел вблизи земной поверхности.

Во-первых, отметим, что так как под силой тяжести (см. предыдущий п. 4.3) мы понимаем равнодействующую силы притяжения $\mathbf{P}$ и переносной силы инерции $\mathbf{F}_e^{in}$, то *переносная сила инерции учитывается при решении задач в системе отсчета, связанной с Землей*. Поэтому нам нужно оценить лишь влияние кориолисовой силы инерции $\mathbf{F}_c^{in}$, равной по модулю $F_c^{in} = 2m\omega v_r \sin \alpha$, где α – угол между скоростью $\mathbf{v}_r$ относительно Земли и земной осью. Так как угловая скорость Земли очень мала, то при относительно небольшой v_r величина F_c^{in} по сравнению с силой тяжести также будет мала (например, при скорости обычного артиллерийского снаряда 700 м/с значение F_c^{in} составляет всего лишь 1 % от его веса). Поэтому учет кориолисовой силы инерции F_c^{in} приобретает практическое значение, если скорости тел очень большие (например, скорости полета баллистических ракет), или для движений, длящихся очень долгое время (течения рек, воздушные и морские течения).

Рассмотрим, в чем качественно сказывается влияние кориолисовой силы инерции:

1. *Движение по земной поверхности*. При движении по меридиану в северном полушарии кориолисова сила инерции $\mathbf{F}_c^{in} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$ направлена на запад, если точка движется с севера на юг, и на восток – если с юга на север. В обоих случаях она вызовет отклонение точек вправо от направления движения. При движении в северном полушарии по параллели на восток $\mathbf{F}_c^{in}$ будет направлена вдоль $\mathbf{CM}$, а если на запад – то вдоль $\mathbf{MC}$ (рис. 4.10).

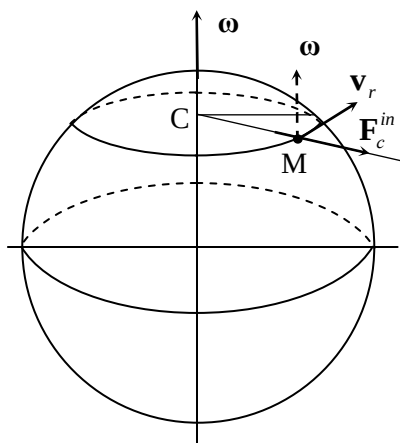


Рис. 4.10

В обоих случаях вертикальная составляющая будет влиять на вес тела, а горизонтальная составляющая, направленная вдоль меридиана (к югу при движении на восток и к северу при движении на запад), вызовет также отклонение вправо от направления ее движения. Отсюда заключаем, что *в северном полушарии тело, движущееся по поверхности Земли, будет отклоняться вправо от направления движения. В южном полушарии, наоборот, тело будет отклоняться влево от направления движения.*

Этим объясняется то, что реки, текущие в северном полушарии, подмывают правый (орографически) берег (закон Бэра). В северном полушарии правые рельсы испытывают большие нагрузки со стороны колес поезда. В этом же причина отклонения ветров постоянного направления (пассатов) и морских течений, а также воздушных масс в циклоне и антициклоне.

2. *Свободное падение тел вблизи земной поверхности.* Так как F_c^{in} мала по сравнению с силой тяжести тела, то для приближенного определения направления F_c^{in} можно считать, что относительная скорость $\mathbf{v}_r$ тела при его падении направлена по вертикали. Тогда F_c^{in} будет направлена на восток. Поэтому *свободно падающее тело отклоняется вследствие вращения Земли от вертикали к востоку*. Величина этого отклонения очень мала и заметна лишь при падении с большой высоты (например, на широте Москвы при падении с высоты 100 м величина отклонения на восток равна 1,2 см).

4.5. Невесомость

При рассмотрении этого пункта систему координат $Oxyz$, связанную с Землей, будем считать снова инерциальной. Тогда на человека массы m , стоящего неподвижно на горизонтальной поверхности Земли, действует сила тяжести $m\mathbf{g}$ (равнодействующая сил тяжести, действующих на все его точки) и сила реакции поверхности $\mathbf{N}$ (рис. 4.11). В системе координат $Oxyz$ $m\mathbf{g} + \mathbf{N} = 0$, или в проекции на ось z : $N = mg$. То есть, стоя на Земле, мы ощущаем внешнее давление от нее. Если мы мысленно расчленим человека по сечению а-а (рис. 4.12) и рассмотрим, например, его верхнюю часть, то на него будут действовать сила тяжести его верхней части $m_a\mathbf{g}$ (m_a – масса верхней части) и S_a – сила давления нижней части человека на верхнюю. Условие равновесия верхней части человека в той же системе координат $Oxyz$ будет иметь вид $S_a + m_a\mathbf{g} = 0$, или в проекции на ось z : $S_a = m_ag$. Сила S_a представляет собой внутреннее давление, которое мы ощущаем, находясь на поверхности Земли или вблизи нее. Эти наши ощущения можно назвать ощущением *невесомости*.

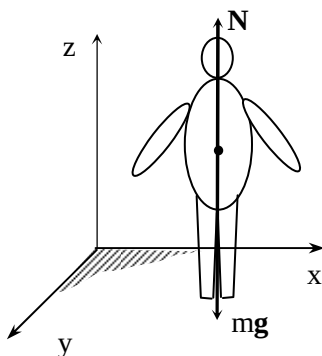


Рис. 4.11

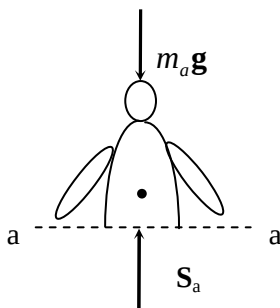


Рис. 4.12

Представим теперь, что человек находится в кабине, движущейся поступательно относительно Земли, дно которой горизонтально. Тогда в системе координат $O_1x_1y_1z_1$, жестко связанной с кабиной (рис. 4.13), условие его равновесия будет иметь вид

$$m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_e^{in} = 0, \quad (4.19)$$

где $\mathbf{F}_e^{in} = -m\mathbf{a}_e$; $\mathbf{a}_e$ – ускорение кабины относительно Земли.

Из уравнения (4.19) следует, что если кабина движется относительно Земли с ускорением $\mathbf{a}_e = \mathbf{g}$, то $\mathbf{N} = 0$. То есть человек перестает давить на дно кабины. Если при этом мы рассмотрим верхнюю часть человека (выше сечения a-a), то будем иметь $m_a\mathbf{g} + \mathbf{S}_a + \mathbf{F}_{ae}^{in} = 0$, где $\mathbf{F}_{ae}^{in} = -m_a\mathbf{a}_e = -m_a\mathbf{g}$, и, следовательно, $\mathbf{S}_a = 0$. То есть, находясь в кабине, человек уже не ощущает давление, обусловленное весом тела (этот вес нейтрализовала сила инерции $\mathbf{F}_{ae}^{in} = -m_a\mathbf{g}$). Эти наши ощущения называют ощущением *невесомости*.

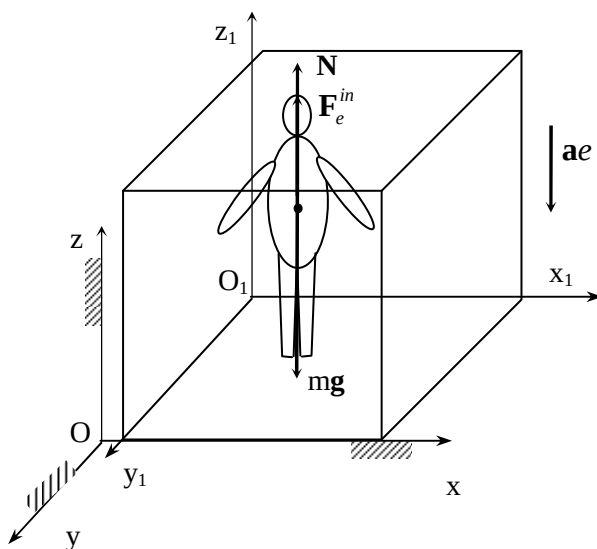


Рис. 4.13

Реально ощущение невесомости мы почувствуем, находясь в свободно падающем лифте. Длительное состояние невесомости можно получить при помощи так называемого баллистического броска самолета. Для этого самолет должен выдерживать строго скорость и траекторию полета тела, брошенного под углом к горизонту в пустоте. Состояние невесомости испытывают космонавты, находясь на борту космического корабля. То есть во всех случаях, находясь в системе координат, движущейся с ускорением $\mathbf{g}$ вблизи поверхности Земли, мы будем ощущать состояние невесомости.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем различие между ДУ движения точки в инерциальной и неинерциальной системах отсчета?
2. Как определяются переносная и кориолисова силы инерции?
3. Ощущаем ли мы на себе действие переносной и кориолисовой сил инерции, находясь в неинерциальной системе отсчета? Приведите примеры их действия.
4. В чем схожесть и в чем отличие сил инерции от обычных сил?
5. Могут ли отличаться ДУ движения точки в двух неинерциальных системах отсчета? А в двух инерциальных?
6. Каково условие относительного покоя материальной точки?
7. Как определяется сила тяжести? Чем она отличается от силы притяжения к Земле? Зависит ли ее величина от места на Земле?
8. Как определить, можно ли данную систему отсчета приближенно считать инерциальной при решении конкретной задачи?
9. Почему для решения большинства задач систему координат, жестко связанную с Землей, можно приближенно считать инерциальной? Приведите примеры, когда этого делать нельзя.
10. Почему у рек, текущих на север, западные берега положе восточных?
11. Чем объясняется отклонение падающих тел к востоку?
12. В какой системе отсчета должен находиться человек, чтобы испытывать ощущение невесомости? Почему?
13. Чем отличаются основные этапы решения задач динамики точки в инерциальной и в неинерциальной системах отсчета?

Упражнения

У.10. Точка подвеса математического маятника длины l движется по вертикали вверх с ускорением a . Определите период малых колебаний маятника.

У.11. Поезд едет с ускорением a по прямому горизонтальному пути. На сколько градусов от вертикали отклонится груз, подвешенный на нити в вагоне поезда?

У.12. Во сколько раз надо увеличить угловую скорость вращения Земли, чтобы тяжелая точка, находящаяся на экваторе на поверхности Земли, не имела бы веса?

Лекция 5. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

Для решения многих задач динамики точки вместо непосредственного интегрирования дифференциальных уравнений оказывается более эффективным пользоваться так называемыми общими теоремами, являющимися следствиями второго закона Ньютона. Сами общие теоремы выражают собой зависимости поведения от времени некоторых динамических характеристик. В случае движения точки в качестве таких характеристик выступают количество движения (импульс), момент количества движения (момент импульса) и кинетическая энергия. В этой лекции мы дадим определение этим характеристикам, поясним их механический смысл, выведем сами теоремы об их поведении и рассмотрим примеры решения задач с использованием этих теорем.

5.1. Количество движения (импульс) точки

Количеством движения (импульсом) точки будем называть вектор $m\mathbf{v}$, равный произведению ее массы на скорость.

$$\mathbf{Q} = m\mathbf{v}. \quad (5.1)$$

Единицей измерения количества движения в системе СИ является $1 \text{ Н} \cdot \text{с}$.

Например, разрушительное действие летящего камня характеризуется как раз его количеством движения. Оно будет, очевидно, тем больше, чем больше произведение массы камня на его скорость. У летящей пули количество движения $\mathbf{Q} = m\mathbf{v}$ также будет велико за счет большой скорости, несмотря на маленькую массу. А количество движения летящего комара будет очень маленьким, так как и его скорость, и его масса малы.

Вектор количества движения $\mathbf{Q}$ может быть задан своими проекциями, выражения для которых непосредственно следуют из формулы (5.1)

$$Q_x = mv_x, \quad Q_y = mv_y, \quad Q_z = mv_z. \quad (5.2)$$

5.2. Импульс силы

Для характеристики действия, оказываемого на тело силой за некоторый промежуток времени, вводится понятие *импульса силы*. Сначала введем понятие об элементарном импульсе, т.е. об импульсе силы за промежуток времени dt . *Элементарным импульсом силы называется векторная величина $d\mathbf{S}$, равная произведению силы $\mathbf{F}$ на элементарный промежуток времени dt*

$$d\mathbf{S} = \mathbf{F}dt. \quad (5.3)$$

Направлен элементарный импульс вдоль действия силы. Импульс $\mathbf{S}$ любой силы $\mathbf{F}$ за конечный промежуток времени $t_2 - t_1$ определяется далее как предел интегральной суммы соответствующих элементарных импульсов, т.е.

$$\mathbf{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)dt. \quad (5.4)$$

Единицей измерения импульса силы в системе СИ является 1 кгм/с.

В частном случае если $\mathbf{F} = \text{const}$, то $\mathbf{S} = \mathbf{F}(t_2 - t_1)$ и $S = F(t_2 - t_1)$. В общем случае модуль и направление импульса могут быть определены по его проекциям

$$S_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x(t)dt, S_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y(t)dt, S_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z(t)dt. \quad (5.5)$$

Если к точке приложено несколько сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$, то импульс их равнодействующей очевидно равен сумме импульсов составляющих ее сил $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \dots + \mathbf{S}_n$, соответственно,

$$S_x = S_{1x} + S_{2x} + \dots + S_{nx}, \quad S_y = S_{1y} + S_{2y} + \dots + S_{ny}, \\ S_z = S_{1z} + S_{2z} + \dots + S_{nz}.$$

5.3. Теорема об изменении количества движения (импульса) точки

Дифференцируя равенство (5.1) по времени, получим

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}.$$

Согласно второму закону Ньютона $m\mathbf{a} = \sum_k \mathbf{F}_k$, и, следовательно,

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \sum_k \mathbf{F}_k. \quad (5.6)$$

Равенство (5.6) выражает собой теорему об изменении количества движения (импульса) точки в дифференциальной форме. *Производная по времени от количества движения точки равна сумме действующих на нее сил.*

В дифференциальной форме эта теорема практически совпадает со вторым законом Ньютона. Поэтому чаще она используется в интегральной форме. Для получения ее проинтегрируем равенство (5.6) по времени в пределах от t_1 до t_2

$$\mathbf{Q}(t_2) - \mathbf{Q}(t_1) = \sum_k \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_k(t) dt = \sum_k \mathbf{S}_k. \quad (5.7)$$

Мы получили, что *изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов действующих на нее сил за тот же промежуток времени.*

В проекциях на координатные оси равенство (5.7) переписывается в виде

$$Q_{2x} - Q_{1x} = \sum_k S_{kx}, \quad Q_{2y} - Q_{1y} = \sum_k S_{ky}, \quad Q_{2z} - Q_{1z} = \sum_k S_{kz}. \quad (5.8)$$

Уравнения (5.8) обычно используются при решении задач на применение теоремы об изменении количества движения.

Заметим, что согласно (5.7) количество движения (импульс) точки за время $t_2 - t_1$ меняют не сами силы, а импульсы сил (суммарный толчок сил) за время $t_2 - t_1$. То есть конечное изменение импульса точки за время $t_2 - t_1$ полностью определяется значением интегралов $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_k(t) dt$ и не зависит от закона изменения сил $\mathbf{F}_k(t), t \in (t_1, t_2)$ во время $t_2 - t_1$. Графически это означает, что, например, изменение проекции импульса на ось x за время $t_2 - t_1$ полностью определяется площадью S_x заштрихованной фигуры на рис. 5.1 и не зависит от вида кривой $F_x = F_x(t), t \in (t_1, t_2)$.

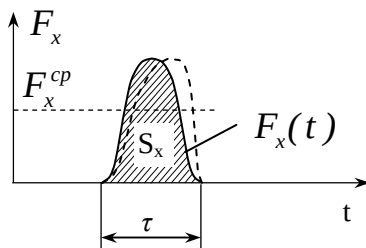


Рис. 5.1

5.4. Законы сохранения количества движения (импульса)

Рассмотрим теперь случаи, когда сохраняется со временем количество движения системы.

1. Пусть сумма сил, действующих на систему, равна нулю $\sum_k \mathbf{F}_k = 0$. Тогда из уравнения (5.6) следует, что $\mathbf{Q} = \text{const}$. Таким образом, если сумма сил, действующих на точку, равна ну-

лю, то вектор количества движения сохраняется во все время движения.

Если же за некоторый промежуток времени от t_1 до t_2 сумма импульсов внешних сил, действующих на систему, равна нулю, т.е. $\sum_k \mathbf{S}_k = \sum_k \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_k(t) dt = 0$, то, как следует из (5.7), не меняется и количество движения за этот промежуток времени $\mathbf{Q}(t_2) = \mathbf{Q}(t_1)$.

2. Пусть силы таковы, что $\sum_k F_{kx} = 0$. Тогда постоянным во все время движения остается $Q_x = \text{const}$. То есть если сумма проекций всех действующих на точку сил на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция количества движения на эту ось сохраняется во времени.

Если же равна нулю проекция суммы импульсов сил за промежуток времени от t_1 до t_2 , $S_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x(t) dt = 0$, то сохраняется за этот промежуток времени и проекция количества движения системы на эту ось, $Q_x(t_2) = Q_x(t_1)$.

Эти результаты и выражают законы сохранения количества движения точки.

5.5. Момент количества движения точки

В некоторых задачах в качестве динамической характеристики движения точки удобнее использовать не вектор количества движения $\mathbf{Q} = m\mathbf{v}$, а его момент относительно точки или оси. Эти моменты определяются так же, как и моменты силы.

Момент количества движения (момент импульса) материальной точки относительно некоторого центра O определим равенством (рис. 5.2)

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}. \quad (5.9)$$

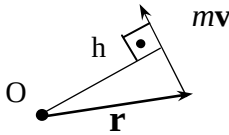


Рис. 5.2

То есть точно так же, как в статике, мы определяли момент силы относительно центра O , только роль силы играет вектор количества движения $m\mathbf{v}$. При этом $\mathbf{K}_0$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через вектор $m\mathbf{v}$ и точку O (в ту сторону, откуда вращение, производимое вектором $m\mathbf{v}$, видно происходящим против часовой стрелки), а его модуль равен $K_0 = mvh$ (см. рис. 5.2).

Как всякий вектор, момент количества движения $\mathbf{K}_0$ может быть задан своими проекциями (моментами количеств движения относительно координатных осей)

$$\begin{aligned} K_x &= m(yv_z - zv_y), K_y = m(zv_x - xv_z), \\ K_z &= m(xv_y - yv_x), \end{aligned} \quad (5.10)$$

где x, y, z — координаты точки M .

5.6. Теорема об изменении момента количества движения (теорема моментов)

Рассмотрим теперь, как изменяется момент количества движения $\mathbf{K}_0$ точки со временем. Обратимся ко второму закону Ньютона, записанному в виде $m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$, и умножим обе части этих уравнений векторно слева на $\mathbf{r}$. Получим, что

$$\mathbf{r} \times (m \frac{d\mathbf{v}}{dt}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Заметим далее, что $\mathbf{r} \times (m \frac{d\mathbf{v}}{dt})$ можно представить в виде

$\mathbf{r} \times (m \frac{d\mathbf{v}}{dt}) = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) - \mathbf{v} \times m\mathbf{v}$. Так как векторы $\mathbf{v}$ и $m\mathbf{v}$ параллельны, то $\mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0$, и мы получаем

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Учитывая, что $\mathbf{F} = \sum_k \mathbf{F}_k$ – равнодействующая всех сил, действующих на точку, получим

$$\frac{d\mathbf{K}_0}{dt} = \sum_k \mathbf{M}_0(\mathbf{F}_k^e). \quad (5.11)$$

Уравнение (5.12) выражает *теорему моментов: производная по времени от момента количества движения точки относительно некоторого неподвижного центра O равна сумме моментов всех сил, действующих на эту точку относительно того же центра O.*

Часто при решении задач теорема моментов применяется в проекции на какую-нибудь ось (ось z):

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_k M_z(\mathbf{F}_k). \quad (5.12)$$

5.7. Законы сохранения момента количества движения

Рассмотрим частные случаи, когда момент количества движения сохраняется.

1. Если сумма моментов относительно точки O всех сил, действующих на точку, равна нулю $\sum_k \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_k) = 0$, то момент количества движения относительно этой же точки O сохраняется по величине и направлению $\mathbf{K}_O = \text{const}$.

2. Если сумма моментов всех внешних сил, действующих на точку относительно некоторой оси z , равна нулю $\sum_k M_z(\mathbf{F}_k) = 0$, то момент количества движения относительно этой оси сохраняется $K_z = \text{const}$.

Эти результаты непосредственно вытекают из уравнений (7.6) и (7.7) и выражают собой законы сохранения момента количества движения.

5.8. Движение точки под действием центральной силы. Закон площадей

Применим теорему моментов к случаю, когда на точку M действует сила $\mathbf{F}$, направленная к некоторому неподвижному центру O (рис. 5.3). Такую силу называют центральной силой. Примером такого случая является движение Земли под действием силы притяжения Солнца. Сила притяжения здесь является центральной и направлена к центру Солнца.

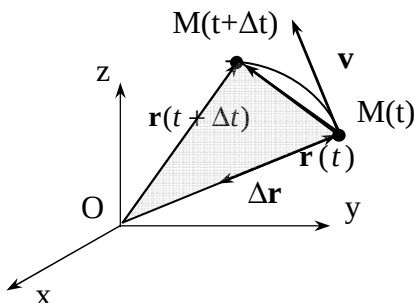


Рис. 5.3

Момент силы $\mathbf{F}$ относительно центра O , очевидно, равен нулю, поэтому момент количества движения $\mathbf{K}_0$ должен сохраняться во все время движения

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \text{const.} \quad (5.13)$$

Условие (5.13) означает, что $\mathbf{K}_0$ сохраняется как по модулю, так и по направлению. Сохранение его модуля означает, что

$$|\mathbf{K}_0| = |\mathbf{r} \times m\mathbf{v}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (|\mathbf{r} \times \Delta \mathbf{r} / \Delta t| m) = m \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (|\mathbf{r} \times \Delta \mathbf{r}| / \Delta t). \quad (5.14)$$

Но $|\mathbf{r} \times \Delta \mathbf{r}|$ равно численно удвоенной площади ΔS треугольника OMM_1 (см. рис. 5.3). Это означает, согласно (5.14), что $dS/dt = \text{const}$, т.е. скорость изменения площади треугольника OMM_1 остается постоянной во все время движения. Или, другими словами, радиус-вектор точки описывает равные площади в любые одинаковые промежутки времени. Этот результат называется законом площадей.

Постоянство направления $\mathbf{K}_0$ означает, что радиус вектор $\mathbf{r}$ точки все время лежит в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{K}_0$. Это означает в свою очередь, что траектория движения точки является плоской кривой. Поэтому орбиты планет в Солнечной системе являются плоскими кривыми.

Задача 19. Траектория наиболее удаленной от Солнца планеты Плутон имеет вид эллипса. Расстояние от Солнца до Плутона меняется при этом от $4,46 \cdot 10^9$ до $7,4 \cdot 10^9$ км. Определить отношение между максимальной и минимальной скоростями движения Плутона.

Решение. Заметим, что в максимально удаленной (A) и минимально удаленной (B) точках скорости $v_{\max}$ и $v_{\min}$ составляют прямой угол с радиус-векторами $\mathbf{r}_{\max}$ и $\mathbf{r}_{\min}$ соответственно (рис. 5.4).

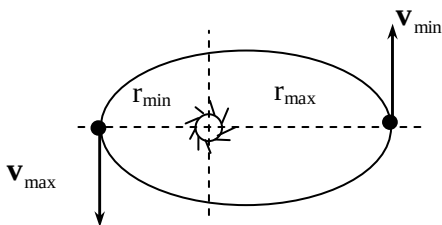


Рис. 5.4

Следовательно, условие постоянства модуля $\mathbf{K}_0$ означает, что для этих точек $r_{\max} v_{\max} = r_{\min} v_{\min}$. Отсюда искомое отношение $v_{\max} / v_{\min} = 1,66$.

5.9. Кинетическая энергия точки

Введем еще одну динамическую характеристику движения точки – *кинетическую энергию*

$$T = mv^2 / 2.$$

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина, равная половине произведения ее массы на квадрат скорости.

Единица измерения кинетической энергии в системе СИ:
Дж = $\text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2 = \text{н} \cdot \text{м}$.

Отметим, что в отличие от импульса и момента импульса, которые были векторными величинами, кинетическая энергия – величина скалярная. Когда-то в России (до революции 1917 года) ее еще называли «живой силой». Она характеризует энергию движения («живую силу») точки.

5.10. Работа силы

Перейдем к понятию работы сил, с помощью которой мы получим теорему об изменении кинетической энергии. Сначала вспомним, что в школьном курсе физики понятие работы силы уже определялось, только для случая постоянной по модулю и по направлению силы $\mathbf{F}$, приложенной к точке M , движущейся прямолинейно. А именно, если точка за время $\Delta t = t_2 - t_1$ переместилась на расстояние $M_2M_1 = s$, то работа A_{12} силы $\mathbf{F}$ на этом перемещении определялась формулой

$$A_{12} = Fs \cos \alpha, \quad (5.15)$$

где α – угол между вектором силы $\mathbf{F}$ и перемещением точки (рис. 5.5).

Конечно, равенство (5.15) можно записать в виде скалярного произведения

$$A_{12} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}, \quad (5.16)$$

где $\mathbf{s}$ – вектор перемещения точки.

Перейдем теперь к общему определению работы, когда сила $\mathbf{F}$ может изменяться по величине и по направлению, а точка M приложения силы перемещается за время $\Delta t = t_2 - t_1$ по любой криволинейной траектории (рис. 5.6).

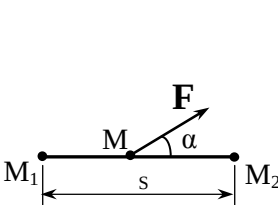


Рис. 5.5

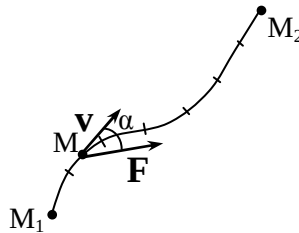


Рис. 5.6

Разобьем отрезок кривой M_2M_1 на n произвольных, но малых участков, обозначив длину участка с номером k через Δs_k . Заменяя теперь каждый малый участок прямолинейным отрезком и считая, что при перемещении по этому отрезку сила остается постоянной по величине и по направлению, получим, что работа на k -ом участке, согласно (5.15), будет приблизительно равна $F_k \Delta s_k \cos \alpha_k$ (см. рис. 5.6), а на всем пути от M_1 до M_2 – сумме работ на отдельных участках

$$A_{12} \approx \sum_k F_k \Delta s_k \cos \alpha_k = \sum_k \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{s}_k.$$

Точное значение работы получим, переходя к пределу, когда число участков неограниченно возрастает, а длина каждого из них неограниченно убывает. Такой предел выражается криволинейным интегралом

$$\begin{aligned} A_{12} &= \int_{M_1 M_2} \mathbf{F}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} = \int_{M_1 M_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \\ &= \int_{M_1 M_2} F(s) \cos \alpha(s) ds = \int_{M_1 M_2} F_\tau(s) ds, \end{aligned} \quad (5.17)$$

где F_τ – проекция силы $\mathbf{F}$ на направление перемещения точки M ; интегрирование ведется вдоль траектории точки M .

$$\delta A = \mathbf{F}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} = F(s) \cos \alpha(s) ds = F_\tau(s) ds. \quad (5.18)$$

выражает работу силы на элементарном перемещении $d\mathbf{s}$ и называется *элементарной работой*. Формула (5.17) тогда означает, что *работа силы на перемещении равна интегралу от элементарной работы, взятому вдоль этого перемещения*.

Единицей измерения работы является 1 джоуль (1 Дж).

Если сила $\mathbf{F}$ задана как функция положения точки, т.е. $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$, то в соответствии с (5.17)

$$A_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz, \quad (5.19)$$

где (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) – координаты точки M в моменты времени t_1 и t_2 .

При естественном задании движения точки работа силы на конечном перемещении точки из положения s_1 в положение s_2 согласно (5.17) выразится формулой

$$A_{12} = \int_{s_1}^{s_2} F(s) \cos \alpha(s) ds = \int_{s_1}^{s_2} F_\tau(s) ds. \quad (5.20)$$

Если известен график функции $F_\tau(s), s \in [s_1, s_2]$, то, согласно геометрическому смыслу интеграла, работа A_{12} численно равна площади криволинейной трапеции, изображенной на рис. 5.7.

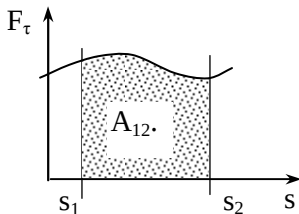


Рис. 5.7

Если сила $\mathbf{F}$ известна как функция времени, то формулу (5.17) удобно преобразовать, используя равенство $ds = \mathbf{v}dt$, к виду

$$A_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{v}(t) dt. \quad (5.21)$$

В этой формуле величина

$$N(t) = \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = F_r(s)v(s) = F_r(s) \frac{ds}{dt} = \frac{dA}{dt} \quad (5.22)$$

характеризует работу силы, совершенную в единицу времени, и называется *мощностью силы*. Мощность силы измеряется в ваттах (Джоуль/секунда). Из равенства $N = F_r v$ видно, например, что у двигателя, имеющего данную мощность N , сила тяги тем больше, чем меньше скорость. Поэтому на подъеме или на плохом участке дороги у автомобиля включают низшие передачи, позволяющие при полной мощности двигателя с меньшей скоростью развивать большую тягу.

Согласно формуле (5.21) работа силы за время $\Delta t = t_2 - t_1$ равна

$$A_{12} = \int_{t_1}^{t_2} N(t) dt. \quad (5.23)$$

Если мощность постоянная $N(t) = N$, то

$$A_{12} = N \cdot (t_2 - t_1), \quad (5.24)$$

т.е. работу можно измерять произведением мощности на время. Отсюда возникла употребительная в технике единица измерения киловатт-час ($1 \text{ кВт} \cdot \text{час} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ Дж}$).

Перейдем теперь к примерам вычисления работы сил, приложенных к точке.

1. *Работа силы тяжести*. Пусть на точку M действует сила тяжести mg . Ее элементарная работа $\delta A = mg ds$, где ds – элементарное перемещение точки M_k . Так как вектор $\mathbf{g}$ направлен вертикально вниз, то его проекции на оси x, y, z , соответствен-

но, будут равны $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ (если ось z направлена вертикально вверх). Поэтому $\delta A = -mgdz$. Следовательно, полная работа силы тяжести за время $\Delta t = t_2 - t_1$ определится равенством

$$A_{12} = -Mg \int_{z_1}^{z_2} dz = -Mg(z_2 - z_1) = -Mgh. \quad (5.25)$$

Работа силы тяжести равна ее весу Mg , умноженному на вертикальное перемещение h точки (при этом работа положительная, если точка опускается, $h < 0$ и отрицательная – если поднимается, $h > 0$).

2. *Работа силы упругости.* Вычислим работу силы упругости пружины AB жесткости c при перемещении груза B из положения B_1 , $l = l_1$ в положение B_2 , $l = l_2$. Так как сила упругости $F = c\lambda$, где $\lambda = l - l_0$ – деформация пружины, то согласно формуле (5.20)

$$A_{12} = \int_{l_1}^{l_2} c\lambda \cos 180^\circ dl = - \int_{l_1}^{l_2} c(l - l_0) dl = c(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) / 2. \quad (5.26)$$

Работа силы упругости равна половине произведения коэффициента жесткости на разность квадратов начального и конечного удлинений пружины.

3. *Работа силы трения скольжения.* Так как сила трения F_f при скольжении тела всегда направлена против его движения, то $\mathbf{F}_f d\mathbf{s} = -F_f ds$ и согласно формуле (8.8) получаем

$$A_{12} = - \int_{s_1}^{s_2} F_f ds = -f \int_{s_1}^{s_2} N(s) ds. \quad (5.27)$$

Если нормальная реакция $N(s) = N$ численно постоянная (например, при движении тела по горизонтальной поверхности $N = mg = \text{const}$), то

$$A_{12} = -fN(s_2 - s_1). \quad (5.28)$$

Работа силы трения всегда отрицательная и зависит от длины дуги $M_1\tilde{M}_2$ и тем самым от формы траектории, по которой тело (точка) пришла из положения M_1 в положение M_2 (рис. 5.8).

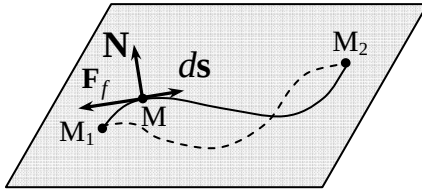


Рис. 5.8

Заметим, что работа силы тяжести и силы упругости (см. формулы (5.25) и (5.26)) полностью определялись начальным и конечным положениями механической системы и не зависели от пути перехода системы из начального к конечное положение. На это обстоятельство мы обратим особое внимание в п. 5.12.

5.11. Теорема об изменении кинетической энергии

Установим теперь зависимость между кинетической энергией точки и действующими на нее силами. Для этого снова рассмотрим второй закон Ньютона

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F},$$

умножим обе части уравнения скалярно на $\mathbf{v}$ и перепишем его в виде

$$m\mathbf{v}d\mathbf{v} = \mathbf{F}\mathbf{v}dt.$$

Учитывая, что $m\mathbf{v}d\mathbf{v} = d(mv^2/2)$, получим $d(mv^2/2) = \delta A$ или

$$dT = \delta A. \quad (5.29)$$

Равенство (5.29) выражает *теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме*. Интегрируя теперь это равенство по времени в пределах от t_1 до t_2 , получим

$$T_2 - T_1 = A_{12}. \quad (5.30)$$

Мы получили теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме: *изменение кинетической энергии точки равно сумме работ всех действующих на нее сил*.

5.12. Закон сохранения механической энергии

При изучении школьного курса физики для решения задач применялся закон сохранения полной механической энергии

$$T + \Pi = 0, \quad (5.31)$$

где Π – потенциальная энергия системы.

В этом пункте мы покажем, что этот закон является частным случаем нашей теоремы, но для этого нам нужно разобратся с потенциальной энергией системы. Для этого введем несколько определений.

Силу $\mathbf{F}$ назовем потенциальной (или консервативной), если работа этой силы на любом перемещении не зависит от формы траектории, по которой оно совершается. На рис. 5.9 для иллюстрации этого определения изображены несколько траекторий (1, 2 и 3), по которым совершается переход из точки M_1 в точку M_2 . Для потенциальных (консервативных) сил интеграл

$A_{12} = \int_{M_1 M_2} \mathbf{F}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s}$ остается одним и тем же, т.е. не зависит от то-

го, вдоль какой из траекторий (1, 2 или 3) мы его будем вычислять. Если же этот интеграл зависит от формы траектории, то сила, соответственно, называется *непотенциальной* (*неконсервативной*).

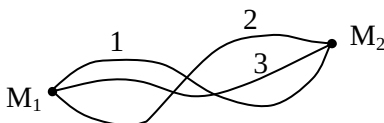


Рис. 5.9

В п. 5.10 уже обращалось внимание на то, что работа силы тяжести и работа силы упругости определяются полностью начальным M_1 и конечным M_2 положениями системы и не зависят от формы траектории, т.е. эти силы являются потенциальными. Примером потенциальной силы является также сила ньютоновского притяжения тел. В этом же пункте мы убедились, что работа силы трения скольжения зависит от формы траектории, т.е. сила трения скольжения не является потенциальной. Не являются потенциальными также силы сопротивления среды (например, воздуха или воды).

Для потенциальной силы $\mathbf{F}$ можно ввести понятие потенциальной энергии этой силы. А именно: *потенциальная энергия силы $\mathbf{F}$ в точке $M(x, y, z)$ – это работа, которую производит эта сила при перемещении из положения $M(x, y, z)$ в положение $O(0, 0, 0)$*

$$П(x, y, z) = A_{MO} = \int_{MO} \mathbf{F}(\mathbf{s}) d\mathbf{s}. \quad (5.32)$$

Из этого определения ясно, что если сила непотенциальная (неконсервативная), то для нее нельзя ввести потенциальную энергию, так как интеграл (5.32) зависит от формы траектории

движения из положения M в положение O (рис. 5.10) и однозначной функции $\Pi(x, y, z)$ просто не существует.

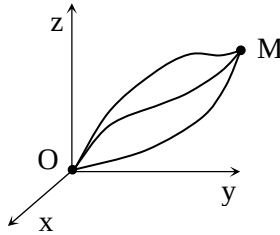


Рис. 5.10

Из формулы (5.30) непосредственно следует, что для потенциальной силы

$$A_{M_1 M_2} = \Pi_1 - \Pi_2, \quad (5.33)$$

где Π_1 и Π_2 – соответственно, значение потенциальной энергии в точках M_1 и M_2 . Действительно, ведь $A_{M_1 M_2} = A_{M_1 O} + A_{O M_2} = A_{M_1 O} - A_{M_2 O} = \Pi_1 - \Pi_2$ (здесь мы использовали определение работы силы и то, что работа потенциальной силы не зависит от выбора траектории).

Таким образом, все силы, действующие на точку, можно разделить на потенциальные и непотенциальные. Теперь уже легко видеть, что если все силы потенциальны, то полная *механическая энергия сохраняется*, т.е. выполняется равенство (5.31). Под Π при этом понимается сумма потенциальных энергий всех сил, действующих на точку $\Pi = \sum_k \Pi_k, k=1, \dots, N$. Дей-

ствительно, согласно теореме об изменении кинетической энергии $T_2 - T_1 = \sum_k A_{12} = \sum_k (\Pi_{1k} - \Pi_{2k}) = \Pi_1 - \Pi_2$ и, следовательно, $T_2 + \Pi_2 = T_1 + \Pi_1$.

Если не все силы потенциальны (неконсервативны), т.е. среди сил, действующих на нее, есть непотенциальные силы, то полная механическая энергия не сохраняется. При наличии сил трения механическая энергия точки будет убывать, так как работа сил трения всегда отрицательная. Если же работа непотенциальных сил будет положительной, то механическая энергия системы будет возрастать. Примером такой силы является вынуждающая сила при колебаниях грузика на пружинке при резонансе и при отсутствии сопротивления среды (см. п. 2.4, пп. 1 лекции 2). В этом случае работа вынуждающей силы за полный период колебаний грузика положительная (заметим, что только в этом случае (!)); вне резонанса работа за полный период равна нулю), это и приводит к возрастанию амплитуды колебаний. При наличии сопротивления среды даже на резонансе наблюдается баланс энергии – положительная работа вынуждающей силы компенсируется отрицательной работой силы сопротивления среды. В результате полная механическая энергия в колебательной системе «пружинка – грузик» сохраняется, и амплитуда колебаний остается конечной (хотя и может быть очень большой на резонансе).

5.13. Примеры решения задач на применение общих теорем динамики точки

В этом пункте мы решим несколько задач с помощью общих теорем динамики точки.

Задача 20. Маятник (рис. 5.11), представляющий собой точечный груз массы m , подвешенный на невесомой нити длиной l , отклонен от вертикали на угол φ_0 так, что груз находится на расстоянии z_0 от земли и отпущен без начальной скорости. Определить угловую скорость маятника ω , когда груз будет находиться на расстоянии z от земли. Всеми силами трения пренебречь.

Решение. Эта задача проще всего решается с помощью теоремы об изменении кинетической энергии. Так как по условию задачи трением пренебрегаем, то мы имеем частный случай этой теоремы – закон сохранения полной механической энергии маятника $T + \Pi = \Pi_0$. Или $mv^2/2 + mgz = mgz_0$. Следовательно, $\omega = v/l = \sqrt{2mg(z_0 - z)/l}$.

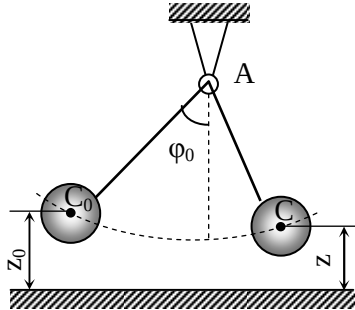


Рис. 5.11

Задача 21. Первоначально неподвижное тело, находящееся на горизонтальной плоскости, начали тянуть за привязанную к нему веревку с силой F . Через время τ действие этой силы прекратилось. Какая сила трения действовала на тело во все время его движения, если оно остановилось спустя время 3τ после начала движения?

Решение. Решим эту задачу с помощью теоремы об изменении импульса. Согласно (5.7) имеем

$$Q(3\tau) - Q(0) = \int_0^{3\tau} (F(t) - F_{mp}(t))dt.$$

В нашем случае $Q(3\tau) = Q(0) = 0$, а

$$\int_0^{3\tau} (F(t) - F_{mp}(t))dt = F \cdot \tau - F_{mp} \cdot 3\tau.$$

Следовательно, $F_{mp} = F/3$.

Задача 22. Точка массой m движется по окружности с постоянной скоростью u (рис. 5.12). Определить модуль импульса действующей на точку силы за время, в течение которого точка проходит четверть окружности.

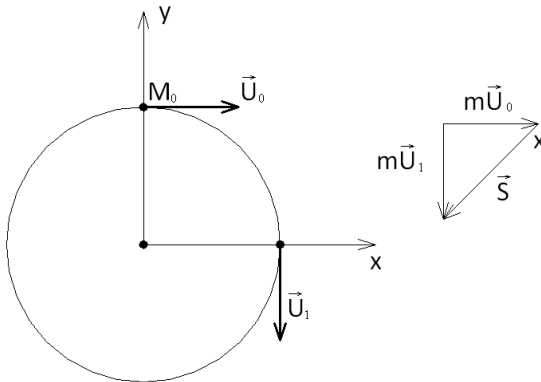


Рис. 5.12

Решение. По теореме об изменении импульса $\vec{S} = m\vec{u}_1 - m\vec{u}_0$. Строя разность этих количеств движения (см. рис. 5.12), находим из полученного прямоугольного треугольника $S = \sqrt{u_1^2 + u_0^2}$. Так как по условию задачи $u_1 = u_0 = u$, то $S = mu\sqrt{2}$.

Задача 23. Шарик M привязан к нити MBA , часть BA которой продета сквозь вертикальную трубу (рис. 5.13). В момент, когда шарик находится на расстоянии h_0 от оси трубки, ему сообщают начальную скорость $\vec{u}_0$, перпендикулярную плоскости MBA . Одновременно нить начинают втягивать в трубку. Найти скорость u_1 шарика, когда его расстояние от оси трубки станет равным h_1 .

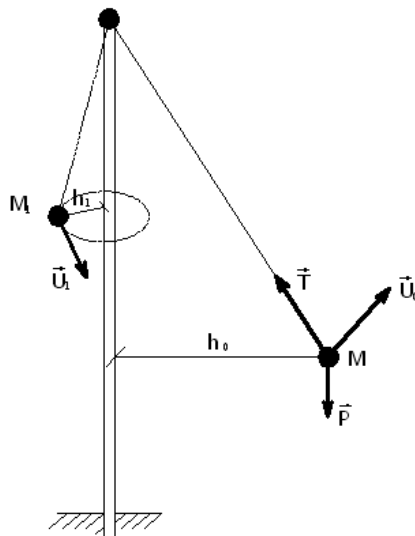


Рис. 5.13

Решение. Для решения этой задачи применим теорему моментов для шарика, считая его материальной точкой. На шарик действуют сила тяжести $\vec{P}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Моменты этих сил относительно оси z , направленной вдоль трубки, равны нулю. Поэтому момент импульса шарика относительно оси z остается постоянным. То есть $mu_1h_1 = mu_0h_0$. Значит,

$$u_1 = h_0u_0 / h_1.$$

Задача 24. С верхнего конца доски длины L , образующей угол α с горизонтом, начинает соскальзывать без начальной скорости тело массы m (рис. 5.14). Какую кинетическую энергию оно приобретет, дойдя до нижнего края доски? Коэффициент трения между доской и телом равен f ($f < \tan \alpha$).

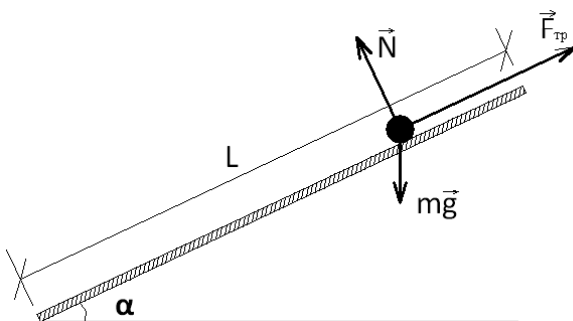


Рис. 5.14

Решение. На тело действуют (см. рис. 5.14) сила тяжести $m\vec{g}$, нормальная реакция доски $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$. Согласно теореме об изменении кинетической энергии, имеем

$$T_{кон} - T_{нач} = A_{mg} + A_N + A_{тр}.$$

В нашей задаче $T_{нач} = 0$, $A_{mg} = mgL \sin \alpha$, $A_N = 0$, $A_{тр} = -fNL$ причем $N = mg \cos \alpha$. Следовательно, $T_{кон} = mgL(\sin \alpha - f \cos \alpha)$.

Заметим, что условие $f < \operatorname{tg} \alpha$ означает, что тело не может находиться в равновесии на доске, т.е. будет соскальзывать вниз и приобретет кинетическую энергию $T_{кон} > 0$ (условие $f < \operatorname{tg} \alpha$ равносильно условию $(\sin \alpha - f \cos \alpha) > 0$).

Задача 25. Груз массой m , брошенный с начальной скоростью V_0 из пункта A , находящегося на высоте h (рис. 5.15), имеет в точке падения C скорость V_1 . Определить работу силы сопротивления воздуха $\vec{R}$.

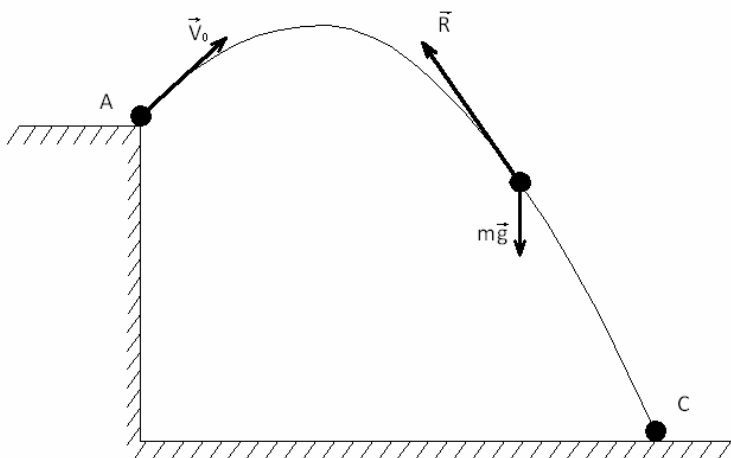


Рис. 5.15

Решение. На груз действуют две силы – сила сопротивления воздуха $\vec{R}$ и сила тяжести $m\vec{g}$. Согласно теореме об изменении кинетической энергии $mV_1^2 - mV_0^2 = A_{mg} + A_R$. Так как $A_{mg} = mgh$, то $A_R = mV_1^2 - mV_0^2 - mgh$.

В заключение этой лекции отметим еще раз, что, хотя второй закон Ньютона и является основным инструментом для решения задач динамики точки, применение общих теорем динамики может значительно упростить их решение. Приведенные в этой лекции задачи 20–25 ярко демонстрируют преимущество их использования. В качестве упражнения решите, читатель, эти задачи «в лоб», с использованием второго закона Ньютона и убедитесь в этом самостоятельно.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется количеством движения (импульсом) точки? Это вектор или скаляр?
2. Что такое импульс силы?
3. Если импульсы сил одинаковы, то сами силы одинаковы?
4. Сформулируйте теорему об изменении импульса точки.
5. В каком случае импульс точки сохраняется? А в каком случае сохраняется проекция импульса на данную ось?
6. Как определяется момент импульса (количества движения) относительно данной точки? А относительно данной оси?
7. Сформулируйте теорему моментов (теорему об изменении момента количества движения).
8. В каком случае момент импульса относительно данной точки сохраняется? А в каком случае сохраняется момент импульса относительно данной оси?
9. Как определяется кинетическая энергия точки? Это вектор или скаляр?
10. Что такое работа силы на перемещении? В каких случаях она равняется нулю?
11. Как связаны кинетическая энергия и работа сил?
12. Какие силы называют консервативными (потенциальными)?
13. Как определяется потенциальная энергия?
14. Что называют полной механической энергией?
15. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии для случая, когда все силы консервативны.

Упражнения

У.13. Точка массой m движется с постоянной скоростью V по параболе $y = x^2$. Найти проекцию импульса точки на ось Y в точке x_0 .

У.14. Падающий вертикально шарик массой m ударился об пол и подпрыгнул на высоту h . Найти среднюю силу, действующую на шарик со стороны пола, если длительность удара τ , а к моменту удара шарик имел скорость V .

У.15. Брусок массы m , имея скорость V , скатился по шероховатой наклонной доске длины L с углом наклона α . В конце доски его скорость осталась прежней. Каков коэффициент трения бруска о доску?

ПРИЛОЖЕНИЕ

П1. В этом пункте приводятся способы интегрирования уравнения

$$m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}) \quad (1)$$

для трех частных случаев задания функции F .

1. $F = F(t)$. В этом случае перепишем уравнение (1) в виде

$$m\ddot{x} = (1/m)F(t, x, \dot{x})$$

и проинтегрируем его:

$$\dot{x} = (1/m) \left\{ \int F(t) dt + C_1 \right\},$$

где $C_1 = \text{const}$.

Проинтегрировав еще раз, получим решение:

$$x(t) = (1/m) \int \left\{ \int F(t) dt + C_1 \right\} dt + C_1 t + C_2,$$

где $C_2 = \text{const}$.

2. $F = F(x)$. Сделаем преобразование:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \cdot \dot{x} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{x}^2}{dx} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dx}.$$

Подставив в (1), получим:

$$\frac{m}{2} \frac{dv^2}{dx} = F(x), \text{ или } dv^2 = \frac{2}{m} \frac{dx}{F(x)}.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим:

$$v^2 = \frac{2}{m} \int \frac{dx}{F(x)} + C_1, \text{ или } v = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \int \frac{dx}{F(x)} + C_1},$$

где $C_1 = \text{const}$.

Учитывая, что $v = \frac{dx}{dt}$, получим:

$$dt = \pm \left\{ 1 / \sqrt{\frac{2}{m} \int \frac{dx}{F(x)} + C_1} \right\} dx. \quad \text{Интегрируя, получим:}$$

$$t = \pm \int \left\{ 1 / \sqrt{\frac{2}{m} \int \frac{dx}{F(x)} + C_1} \right\} dx + C_2, \quad \text{где } C_2 = \text{const. То есть по-}$$

лучили решение в виде $t = \Phi(x, C_1, C_2)$. Обращая функцию Φ , найдем окончательно $x = x(t, C_1, C_2)$.

3. $F = F(v)$. Перепишем (1) в виде $m \frac{dv}{dt} = F(v)$. Разделяя переменные и интегрируя, получим: $t = m \int \frac{dv}{F(v)} + C_1$, где $C_1 = \text{const}$. То есть получили функцию $t = \Phi(v, C_1)$. Обращая ее, получим $v = \varphi(t, C_1)$. Учитывая, что $v = \frac{dx}{dt}$, и интегрируя, получим окончательно: $x(t) = \int \varphi(t, C_1) dt + C_2$, где $C_2 = \text{const}$.

Можно проинтегрировать и по-другому. Представим $\ddot{x}$ в виде $\ddot{x} = \frac{v dv}{dx}$ и перепишем (1): $\frac{m v dv}{F(v)} = dx$. Интегрируя, полу-

чим: $x = \int \frac{m v dv}{F(v)} + C_1$, где $C_1 = \text{const}$. В результате получили функцию $x = \Phi(v, C_1)$. Обращая ее, получим $v = \varphi(x, C_1)$, или $\frac{dx}{dt} = \varphi(x, C_1)$. Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$t = \int \frac{dx}{\varphi(x, C_1)} + C_2, \quad \text{где } C_2 = \text{const. То есть получили функцию}$$

$t = \chi(x, C_1, C_2)$. После ее обращения получим окончательно $x = x(t, C_1, C_2)$.

П2. Здесь приводятся решения уравнений $\ddot{x} + k^2 x = 0$ и $\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = 0$, в которых k и b постоянные.

1. Решение уравнения

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 \quad (2)$$

будем искать в виде $x = e^{\lambda t}$, $\lambda = \text{const}$. Учитывая, что $\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}$, $\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$, получим после подстановки в (2): $(\lambda^2 + k^2)e^{\lambda t} = 0$. Следовательно, $\lambda_{1,2} = \pm ik$. Значит, общее решение имеет вид:

$$x = D_1 e^{ikt} + D_2 e^{-ikt}, \quad (3)$$

где D_1 и D_2 – комплексные постоянные. Учитывая, что $e^{\pm ikt} = \cos kt \pm i \sin kt$, подставляя в (3) и выделяя действительную часть, получим окончательно:

$$x(t) = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные (уже действительные).

2. Решение уравнения

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = 0 \quad (4)$$

будем искать в виде $x = ze^{-bt}$. Учитывая, что $\dot{x} = \dot{z}e^{-bt} - bze^{-bt}$, $\ddot{x} = \ddot{z}e^{-bt} - 2b\dot{z}e^{-bt} + b^2 ze^{-bt}$, после подстановки в уравнение (4) получим: $[\ddot{z} + (k^2 - b^2)z]e^{-bt} = 0$, или

$$\ddot{z} + (k^2 - b^2)z = 0. \quad (5)$$

Рассмотрим три возможных случая:

1. $k^2 - b^2 > 0$. Обозначая $k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}$ и подставляя в (5), получим: $\ddot{z} + k_1^2 z = 0$. Видим, что это уравнение с точностью до обозначений совпадает с уравнением (2).

Следовательно,

$$z = C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t ,$$

и получили решение $x(t) = e^{-bt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t)$.

2. $k^2 - b^2 < 0$. Обозначая $k_2 = \sqrt{b^2 - k^2}$ и подставляя в (5), получим

$$\ddot{z} - k_2^2 z = 0. \quad (6)$$

Так же, как и в п. 1, ищем решение этого уравнения в виде $z = e^{\lambda t}$, $\lambda = \text{const}$. Беря производные и подставляя в (6), получим $(\lambda^2 - k_2^2)e^{\lambda t} = 0$. Корни этого уравнения действительные $\lambda_{1,2} = \pm k_2$, и мы получаем решение $z = C_1 e^{k_2 t} + C_2 e^{-k_2 t}$, или $x(t) = e^{-bt} (C_1 e^{k_2 t} + C_2 e^{-k_2 t})$.

3. $k^2 - b^2 = 0$. В этом случае уравнение (5) имеет вид $\ddot{z} = 0$ и его общее решение $z = C_1 t + C_2$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Следовательно, $x(t) = e^{-bt} (C_1 t + C_2)$.

Учебное издание

Юдин Владимир Алексеевич

ЛЕКЦИИ ПО ДИНАМИКЕ ТОЧКИ

Учебное пособие

ISBN 978-5-7795-0703-5



9 785779 507035

Темплан 2014 г.

Редактор Н.Б. Литвинова

Новосибирский государственный
архитектурно-строительный университет (Сибстрин)
630008, Новосибирск, ул. Ленинградская, 113
