

**А.А. БЕЛКИН
Е.Г. БОРД
С.Л. КРАСНОЛУЦКИЙ
В.В. ЛЕМАНОВ
К.К. МАЕВСКИЙ
А.Я. РОЙТМАН**

**СБОРНИК
ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ
СТАТИКА**

НОВОСИБИРСК 2018

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(СИБСТРИН)

**А.А. Белкин, Е.Г. Борд, С.Л. Краснолуцкий,
К.К. Маевский, В.В. Леманов, А.Я. Ройтман**

**СБОРНИК
ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ
СТАТИКА**

Учебное пособие

Под редакцией С.Л. Краснолуцкого

2-е издание, переработанное и дополненное

НОВОСИБИРСК 2018

УДК 531(075)

ББК 22.21

С 232

Сборник индивидуальных заданий по теоретической механике. Статика : учеб. пособие / А. А. Белкин, Е. Г. Борд, С. Л. Краснолуцкий, К. К. Маевский, В. В. Леманов, А. Я. Ройтман ; под ред. С. Л. Краснолуцкого ; Новосиб. гос. архитектур.-строит. ун-т (Сибстрин). – 2-е изд., перераб. и доп. – Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2018. – 92 с.

ISBN 978-5-7795-0863-6

Сборник содержит 6 заданий по статике, предусмотренных стандартным курсом теоретической механики технического университета. Каждое задание содержит 30 вариантов. Задания предваряются кратким изложением основ статики. Для каждого из заданий приведен пример его выполнения.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство» и специальности 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений» всех форм обучения.

Рецензенты:

- С.М. Аульченко, д-р физ.-мат. наук,
профессор (ИТПМ СО РАН);
- В.А. Юдин, д-р физ.-мат. наук,
профессор (НГАСУ (Сибстрин))

ISBN 978-5-7795-0863-6 © Белкин А.А., Борд Е.Г.,
Краснолуцкий С.Л.,
Маевский К.К., Леманов В.В.,
Ройтман А.Я., 2018
© Новосибирский государственный
архитектурно-строительный
университет (Сибстрин), 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	4
Теоретические основы статики	
1. Понятия статики.....	5
2. Аксиомы статики.....	7
3. Система сходящихся сил	10
4. Система параллельных сил	11
5. Момент силы относительно точки и оси	14
6. Пара сил	16
7. Приведение произвольной системы сил к центру.....	18
8. Рекомендации по решению задач статики.....	21
9. Контрольные вопросы	22
Задание 1. Плоская система сходящихся сил	26
Пример выполнения задания.....	41
Задание 2. Пространственная система сходящихся сил	48
Пример выполнения задания.....	54
Задание 3. Равновесие тела под действием плоской системы сил	58
Пример выполнения задания.....	63
Задание 4. Определение реакций опор двухсоставной рамы	65
Пример выполнения задания.....	71
Задание 5. Определение центра тяжести плоской пластины	74
Пример выполнения задания.....	80
Задание 6. Определение реакций опор твердого тела. Приведение системы сил к простейшему виду	81
Пример выполнения задачи А	87
Пример выполнения задачи Б	89
Библиографический список.....	92

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс теоретической механики нельзя освоить, не решая задачи. Более того, навыки решения задач пригодятся при изучении любых других предметов и решении практически любых проблем, с которыми придется столкнуться в жизни. Закономерности, алгоритмы решения практически всех задач почти одинаковы, и ими надо овладеть. Развитию этих навыков и посвящено данное пособие. Оно содержит шесть индивидуальных заданий по основным темам статики. Предваряется пособие кратким изложением основ статики.

За 14 лет, прошедших с выхода предыдущего издания (Сборник индивидуальных заданий по теоретической механике. Статика. – Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2004. – 92 с.), произошел переход на Болонскую систему, и существенно изменились образовательные стандарты и университетские учебные программы. Настоящее издание ориентировано на подготовку бакалавров и специалистов, в связи этим основное внимание уделяется фундаментальной подготовке студентов.

При составлении данного пособия нами были использованы учебные пособия, разработанные на кафедре теоретической механики НГАСУ (Сибстрин) за последние 50 лет. Студентам рекомендуется, в частности при подготовке ответов на контрольные вопросы (см. страницы 22–25 настоящего сборника), обратить внимание также на учебники и задачки, приведенные в библиографическом списке.

Авторы выражают глубокую признательность своим коллегам, которые в разные годы участвовали в формировании методической базы кафедры: П.В. Александрову, И.М. Бондарю, И.Т. Вохмянину, С.А. Гапонову, А.И. Глыниной, Л.В. Городилову, С.А. Кинеловскому, В.Л. Окулову, И.А. Палымскому, В.Н. Попову, В.Я. Рудяку, Н.Б. Смирных, Г.В. Харламову, В.А. Юдину.

1. Понятия статики

Строгое теоретическое описание в любой области знания основывается на определениях, аксиомах, содержит правила вывода и часто сводится к формулировке набора теорем и методов описания изучаемого объекта или явления. На практике теоретическое описание необходимо при создании методов решения задач, и в этом случае теоретических инструментов оказывается недостаточно. Важнейшим элементом описания является набор понятий, описание которых отражается теорией. Понятия существуют на границе между практическим применением знаний и теоретической моделью, использованной для их получения. Замечательный опыт применения понятий дает геометрия, в частности школьный курс этой дисциплины. Курс теоретической механики использует все геометрические понятия, особенно часто – понятия **точки, прямой, плоскости, поверхности, длины (расстояния), направления**.

Другой незаменимый источник понятий теоретическая механика находит в физическом описании материи. К числу главных в теоретической механике относится понятие **материального тела** – любого объекта, обладающего массой. Если размерами тела в некотором случае можно пренебречь, считая эти размеры сколь угодно малыми, то материальное тело называют **материальной точкой**. Если размеры материального тела не позволяют считать его материальной точкой, но при этом размеры и форма тела остаются неизменными, тело считают **абсолютно твердым**. Абсолютно твердое тело, материальная точка являются примерами абстрактных понятий: такие объекты невозможно найти в природе, их можно только представить себе. Тем не менее эти объекты стандартно изображаются на рисунках: тело – сплошной линией без разрывов, соответствующей его границе, материальная точка – так же, как точка в геометрии. Другим примером абстрактного понятия является **неподвижное основание** – материальное тело, масса которого несо-

размерно превосходит суммарную массу взаимодействующих с ним тел, так что состояние неподвижного основания не меняется в результате этих взаимодействий. Неподвижное основание изображается штриховкой произвольного вида.

Описание взаимодействий между телами и возможных состояний тела, являющихся результатом взаимодействия тела с другими телами, также предполагает применение специальных понятий. Понятие **свободного тела**, т.е. тела, не взаимодействующего с другими телами, позволяет использовать в теоретической механике закон инерции – первый закон Ньютона. Первым законом Ньютона постулируется существование **абсолютной системы отсчета**, относительно которой должно быть задано положение и движение тел. Понятие **равновесия** тела может быть получено из первого закона Ньютона, и тогда оно понимается как состояние покоя или равномерного прямолинейного движения по отношению к абсолютной системе отсчета. В разделе «Статика» нашего курса состояние равновесия свободного твердого тела будет определено аксиомой, при этом будет выполнено соответствие нашего определения первому закону Ньютона.

Для описания взаимодействий между телами используется понятие силы. **Сила** – это векторная характеристика взаимодействия тел. Понятие силы в теоретической механике является обобщением известных физических представлений, в которых силы применяются для описания конкретных типов взаимодействий: гравитационного, кулоновского, межмолекулярного, внутриядерного и других. Теоретическая механика позволяет отвлечься от физической природы возникновения сил. Силы можно представлять себе как результат действия на тело привязанной к нему в данной точке натянутой нити или давления на тело в этой точке заостренным стержнем. Силы, для которых определена единственная точка приложения, называют **сосредоточенными силами**. Совокупность нескольких сил, приложенных к телу (или к нескольким телам), называют **системой сил**. Если система сил эквивалентна одной силе, ее называют **равнодействующей** данной системы сил. Система сил называется

уравновешенной, если свободное твердое тело под действием такой системы сил находится в равновесии.

Систему сил, образованную бесконечной совокупностью бесконечно малых по величине сил, приложенных в различных точках тела, называют **распределенной нагрузкой**. Примером распределенной нагрузки являются силы, возникающие на границе между слоем жидкости, заполняющей резервуар, и основанием или боковой стенкой резервуара. При описании взаимодействий в системе, состоящей из нескольких тел, каждую из сил, приложенных к какому-либо телу системы, называют либо **внутренней**, т.е. действующей со стороны другого тела из данной системы тел, либо **внешней**, т.е. действующей со стороны тел, не принадлежащих рассматриваемой системе тел.

В статике решаются две основные задачи. **Первая задача статики** состоит в замене данной системы сил эквивалентной ей системой сил, обычно упрощенной по сравнению с данной. **Вторая задача статики** заключается в формулировке и проверке выполнения условий равновесия тела под действием данной системы сил и получении содержательных выводов из этих условий. В строительстве решение второй задачи статики, как правило, предполагает нахождение реакций внешних связей или внутренних усилий в конструкции.

2. Аксиомы статики

Статика формулируется на основе следующих аксиом.

Аксиома 1. *Свободное абсолютно твердое тело находится в равновесии под действием двух сил тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю, противоположно направлены и линии их действия совпадают.*

Аксиома 2. *Действие данной системы сил на абсолютно твердое тело не изменится, если к ней прибавить или отнять уравновешенную систему сил.*

Аксиома 3 (аксиома параллелограмма сил). *Две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и равную их геометрической сумме.*

Аксиома 4 (третий закон Ньютона). При взаимодействии двух тел A и B возникают две равные по модулю, противоположные по направлению силы, линии действия которых совпадают. Одна из сил приложена к телу A , другая – к телу B .

Аксиома 5 (принцип отвердевания). Если деформируемое тело находится в равновесии, то это равновесие не нарушится при замене исходного тела или его части абсолютно твердым.

Следствия из аксиом

1. Точку приложения силы можно переносить вдоль линии ее действия.

2. Внутренние силы, действующие на абсолютно твердое тело, взаимно уравниваются.

Связи, реакции связей, аксиома связей. На движение рассматриваемого тела могут накладывать ограничения другие тела, которые называются *связями*. Сила, с которой связь действует на тело, называется *силой реакции связи*. Эта сила направлена в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться данному телу. Силы, не являющиеся реакциями связей, называют *активными*.

Аксиома 6. Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи и заменить их действие силами реакций связей. При этом сила реакции связи направлена в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться.

Ниже перечислим типы связей, наиболее часто используемые в дальнейшем.

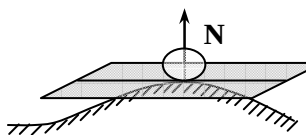


Рис. 1

1. Гладкая поверхность (без трения). Связь не дает перемещаться телу по направлению общей нормали к соприкасающимся в точке касания поверхностям, реакция связи направлена по этой нормали (реакция N на рис. 1).

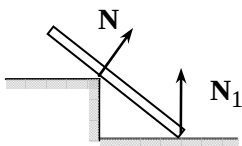


Рис. 2

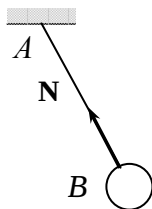


Рис. 3

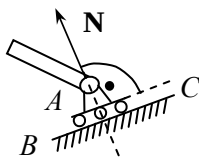


Рис. 4

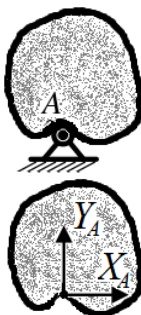


Рис. 5

2. *Гладкая поверхность с угловой точкой (ребро)*. Реакция связи перпендикулярна опирающейся поверхности, поскольку вдоль этой поверхности гладкое ребро не препятствует движению (реакция N на рис. 2).

3. *Идеальная нить (гибкая, невесомая, нерастяжимая, рис. 3)*. Нить не дает телу двигаться вдоль линии AB от точки подвеса. Реакция N поэтому направлена вдоль AB к точке подвеса.

4. *Подвижный цилиндрический шарнир* (рис. 4). Поскольку этот тип связи не препятствует движению в направлении поверхности, на которой находится, то сила реакции N всегда направлена по нормали к этой поверхности.

5. *Неподвижный цилиндрический шарнир*. В простейшем случае представляет собой болт, на который засажена втулка, жестко скрепленная с удерживаемым телом (рис. 5). Сила реакции может иметь любое направление в плоскости чертежа, а поэтому ее ищут в виде двух взаимно перпендикулярных составляющих X_A и Y_A (связь не дает телу перемещаться ни вдоль оси Ox , ни вдоль оси Oy). Пример неподвижного цилиндрического шарнира можно увидеть в канцелярских ножницах: неподвижный шарнир соединяет между собой две рабочие части этого инструмента.

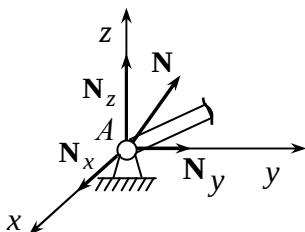


Рис. 6

6. *Неподвижный сферический шарнир.* Тело, укрепленное при помощи *сферического шарнира*, может вращаться вокруг точки крепления, но ему запрещены поступательные движения вдоль трех взаимно перпендикулярных осей. В соответствии с этим направление реакции $\mathbf{N}$ не определено, и она может быть представлена тремя взаимно перпендикулярными составляющими $\mathbf{N}_x$, $\mathbf{N}_y$, $\mathbf{N}_z$ (рис. 6).

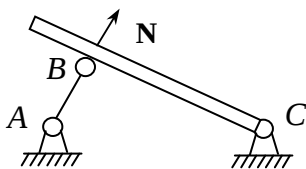


Рис. 7

7. *Идеальный стержень* (жесткий, невесомый стержень, на концах которого шарниры, рис. 7). Такая связь (стержень AB) мешает точке B конструкции (стержня BC) перемещаться параллельно стержню AB и не мешает перемещаться перпендикулярно ему, поэтому сила реакции направлена вдоль стержня AB.

3. Система сходящихся сил

Системой сходящихся сил (ССС) называется система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке.

Теорема о равнодействующей ССС. Система сходящихся сил имеет равнодействующую, равную геометрической сумме этих сил и проходящую через точку пересечения их линий действия.

Две формы условия равновесия ССС. Тело, на которое действует система сходящихся сил ($\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2 \dots \mathbf{F}_n$), находится в равновесии, если их равнодействующая равна нулю, $\mathbf{R} = 0$, или

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0.$$

Для плоской системы сходящихся сил (в плоскости Oxy) условие равновесия выглядит следующим образом:

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0.$$

Геометрическая форма условия равновесия означает, что многоугольник данных сил является замкнутым.

Теорема о трех силах. Если твердое тело находится в равновесии под действием трех сил, причем линии действия двух из них пересекаются, то это система сходящихся сил.

Статически определимые и статически неопределимые задачи. Если в данной задаче число неизвестных величин не превышает числа линейно независимых уравнений равновесия, то она называется статически определимой, в противном случае – статически неопределимой.

4. Система параллельных сил

Силы, линии действия которых параллельны, образуют систему параллельных сил.

Теоремы о сложении двух параллельных сил

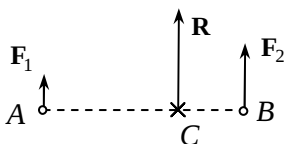


Рис. 8

Теорема 1. Система двух параллельных сил, направленных в одну сторону, имеет равнодействующую, которая по модулю равна сумме модулей данных сил, параллельна им и направлена в ту же сторону. Линия действия равнодействующей проходит через точку C , которая

делит отрезок AB внутренним образом на части, обратно пропорциональные модулям данных сил (рис. 8).

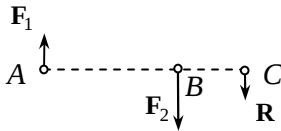


Рис. 9

Теорема 2. Система двух не равных по модулю сил, линии действия которых параллельны, но силы направлены противоположно, имеет равнодействующую, которая равна по модулю разности модулей этих сил, им параллельна и направлена в сторону

большей силы. Линия действия равнодействующей проходит через точку C , которая лежит на продолжении отрезка AB и делит его внешним образом на части, обратно пропорциональные модулям сил (рис. 9).

Центр системы параллельных сил. Равнодействующая системы n параллельных сил ($P_1, \dots, P_n$), направленных в одну сторону, равна их сумме $R = \sum_{i=1}^n P_i$ и приложена в точке C , определяемой радиус-вектором

$\mathbf{r}_C = R^{-1} \sum_{i=1}^n P_i \mathbf{r}_i$, где $\mathbf{r}_i$ – радиус-

векторы точек приложения сил P_i . Точка C называется *центром параллельных сил*. Если повернуть данные силы на один и тот же угол, сохраняя их точки приложения, то и равнодействующая этих сил повернется на тот же угол, причем положение центра параллельных сил не изменится.

Центр тяжести и методы его определения. Точка приложения равнодействующей сил тяжести, действующих на тело, называется *центром тяжести тела*. Радиус-вектор центра тяжести определяется формулой $\mathbf{r}_C = P^{-1} \sum_{i=1}^n p_i \mathbf{r}_i$, $P = \sum_{i=1}^n p_i$, где

$\mathbf{r}_i$ – радиус-векторы точек приложения сил тяжести p_i , действующих на элемент объема V_i данного тела. Ниже даны методы определения центра тяжести.

1. *Метод симметрии.* Если однородное тело имеет плоскость или ось симметрии, то его центр тяжести лежит соответственно или в плоскости симметрии, или на оси симметрии. Если же тело имеет центр симметрии, то его центр тяжести находится в этом центре.

2. *Метод разбиений.* Если тело можно разбить на конечное число таких частей, для каждой из которых положение центра тяжести известно, то центр тяжести всего тела определяется по

формуле $\mathbf{r}_C = P^{-1} \sum_{i=1}^n P_i \mathbf{r}_{C_i}$, где $P_1, \dots, P_n$ – веса соответствующих частей тела, P – их сумма, а $\mathbf{r}_{C_1}, \mathbf{r}_{C_2}, \dots, \mathbf{r}_{C_n}$ – радиус-векторы центров тяжести этих частей.

3. *Метод дополнений (отрицательных весов).* Этот метод является частным случаем метода разбиений. Он применяется к телам, имеющим вырезы. Пусть тело, вес которого P , имеет полость заданного объема V . Если бы тело не имело полости, то его вес был бы равен $P' = P + P_V$, где P_V – вес объема V . Радиус-вектор центра тяжести такого тела (без полости) определяется так: $\mathbf{r}'_C = (\mathbf{r}_C P + \mathbf{r}_{CV} P_V) / P'$. Отсюда сразу следует, что радиус-вектор центра тяжести исходного тела (с полостью)

$$\mathbf{r}_C = (\mathbf{r}'_C P' - \mathbf{r}_{CV} P_V) / P.$$

Распределенные силы. Силу, приложенную в точке, называют *сосредоточенной*. Силы же, распределенные по определенному закону по некоторому объему, поверхности или линии, называют *распределенными (распределенными нагрузками)*. Если распределенная нагрузка представляет собой систему параллельных сил, то определение ее равнодействующей проводится так же, как и для сил тяжести.

Действие на тело распределенных сил характеризуется *интенсивностью* $\mathbf{q}$. Средняя интенсивность распределенной силы определяется отношением полной силы, действующей на тело, к его объему, поверхности или отрезку длины в зависимости от

того, распределена данная сила по объему, поверхности или вдоль линии:

$$\mathbf{q}_V = \mathbf{F}_V/V, \quad \mathbf{q}_S = \mathbf{F}_S/S, \quad \mathbf{q}_L = \mathbf{F}_L/L.$$

Здесь $\mathbf{F}_V, \mathbf{F}_S, \mathbf{F}_L$ – соответственно равнодействующие для сил, распределенных по объему V , поверхности S или вдоль линии L .

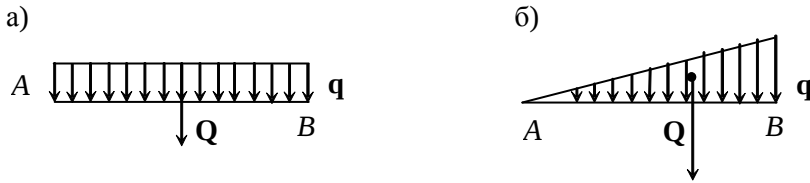


Рис. 10

В частности, если сила равномерно с интенсивностью $\mathbf{q}$ распределена вдоль отрезка прямой $AB = L$ (рис. 10а), то ее равнодействующая равна $|\mathbf{Q}| = |\mathbf{q}| \cdot L$ и приложена в середине отрезка AB . Если силы распределены по линейному закону (рис. 10б) так что основание снова равно $AB = L$, то $|\mathbf{Q}| = |\mathbf{q}| \cdot L/2$, а приложена она на расстоянии $L/3$ от конца B .

5. Момент силы относительно точки и оси

Момент силы относительно точки. Моментом силы $\mathbf{F}$ относительно точки O называется вектор $\mathbf{M}_O(\mathbf{F})$, равный векторному произведению радиус-вектора точки приложения силы и самой силы $\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Его проекции:

$$M_{Ox}(\mathbf{F}) = (yF_z - zF_y), \quad M_{Oy}(\mathbf{F}) = (zF_x - xF_z), \\ M_{Oz}(\mathbf{F}) = (xF_y - yF_x),$$

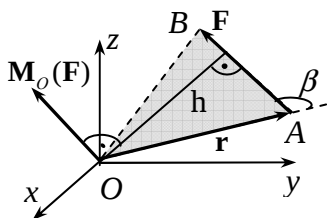


Рис. 11

где x, y, z – координаты радиус-вектора точки A приложения силы (рис. 11). Направлен вектор $\mathbf{M}_O$ перпендикулярно плоскости векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}$ в сторону, откуда вращение тела под действием данной силы представляется происходящим против хода часовой стрелки. Его модуль равен $|\mathbf{M}_O(\mathbf{F})| = |\mathbf{r}| |\mathbf{F}| \sin \beta$, где β – угол между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}$. Отрезок $r \sin \beta = h$ определяет расстояние от точки O до линии действия силы и называется *плечом силы*, $|\mathbf{M}_O(\mathbf{F})| = Fh$. Для плоской системы сил можно ввести понятие алгебраического момента силы $m_O(\mathbf{F}) \equiv \pm M_O(\mathbf{F}) = \pm Fh$ (знак «плюс» берется, если под действием силы тело поворачивается против хода часовой стрелки, знак «минус» – в противном случае).

Теорема Вариньона. Момент равнодействующей системы сходящихся сил относительно произвольной точки O равен векторной сумме моментов слагаемых сил относительно той же точки.

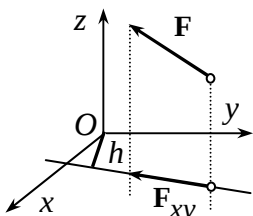


Рис. 12

Момент силы относительно оси. Моментом силы $\mathbf{F}$ относительно оси Oz называется скалярная величина, равная алгебраическому моменту проекции $\mathbf{F}_{xy}$ этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с этой плоскостью:

$$M_z(\mathbf{F}) = \pm M_O(\mathbf{F}_{xy}) = \pm F_{xy} h.$$

Знак «плюс» берется, если с положительной стороны оси Oz вращение, которое сила $\mathbf{F}_{xy}$ стремится совершить, видно проис-

ходящим против хода часовой стрелки, а знак «минус» – в противном случае, h – плечо силы $\mathbf{F}_{xy}$ относительно точки O (рис. 12).

Теорема. Моменты сил относительно осей в системе координат $Oxyz$ равны проекциям момента силы относительно начала координат O :

$$M_x(\mathbf{F}) = M_{Ox}(\mathbf{F}) = yF_z - zF_y,$$

$$M_y(\mathbf{F}) = M_{Oy}(\mathbf{F}) = zF_x - xF_z,$$

$$M_z(\mathbf{F}) = M_{Oz}(\mathbf{F}) = xF_y - yF_x.$$

Момент силы относительно оси равен нулю, когда ось и линия действия силы лежат в одной плоскости, т.е. либо сила параллельна оси ($F_{xy} = 0$), либо линия действия силы пересекает ось ($h = 0$).

6. Пара сил

Пара сил, момент пары. Система двух сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, равных по величине и противоположных по направлению, линии действия которых не совпадают, называется *парой сил*.

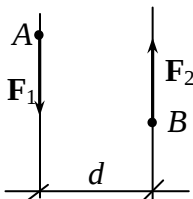


Рис. 13

Пара сил *не имеет* равнодействующей. Расстояние между линиями действия сил пары называется *плечом пары* (отрезок d на рис. 13). *Моментом пары* называется вектор $\mathbf{M}$, модуль которого равен произведению модуля одной из сил пары на плечо пары $M = Fd$. Направлен этот вектор

перпендикулярно плоскости действия пары в сторону, откуда вращение пары видно происходящим против хода часовой стрелки. Момент пары можно еще определить как момент одной из сил пары относительно точки приложения другой силы:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_A(\mathbf{F}_2) = \mathbf{AB} \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{M}_B(\mathbf{F}_1) = \mathbf{BA} \times \mathbf{F}_1.$$

Для пар сил, расположенных в одной плоскости, как и для обычных сил, часто используют понятие алгебраического момента пары $M = \pm Fd$. Знак «плюс» берется, если пара стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, знак «минус» – по ходу.

Теорема об эквивалентности пар. *Все пары сил, имеющие один и тот же момент, эквивалентны.*

Из этой теоремы следует, что пара сил полностью определяется ее моментом. *Располагать пару сил в пространстве можно в любом месте.*

Теорема о сложении пар. *Действие на тело системы пар с моментами $M_1, M_2, \dots, M_n$ эквивалентно действию одной пары с моментом*

$$M = \sum_{i=1}^n M_i.$$

Жесткая заделка. Так называется связь, которая возникает, например, если один конец балки жестко зацементировать неподвижно в стенку так, как показано на рис. 14а. Этот тип связи не позволяет вообще как-либо двигаться закрепленному телу. Поэтому реакция связи – сила и пара сил.

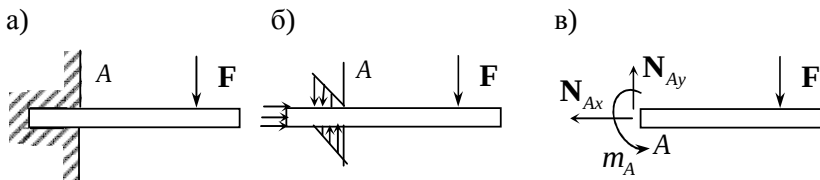


Рис. 14

Для плоской системы сил полная реакция жесткой заделки складывается из силы N с составляющими N_x, N_y и момента жесткой заделки m_A относительно места заделки A (рис. 14в).

7. Приведение произвольной системы сил к центру

Лемма о параллельном переносе силы. Силу $\mathbf{F}$, приложенную в точке A твердого тела, можно перенести параллельно в точку B , добавив при этом пару сил, момент которой равен моменту переносимой силы относительно новой точки приложения.

Главный вектор и главный момент. Главным вектором системы сил $(\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n)$ называется вектор, равный их сумме:

$$\mathbf{R}^* = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i.$$

Главным моментом этой системы сил относительно точки A называется вектор, равный сумме их моментов этой же точки:

$$\mathbf{M}_A^* = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{Ai} \equiv \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_A(\mathbf{F}_i).$$

Главные моменты относительно точек A и B связаны соотношением $\mathbf{M}_A^* = \mathbf{M}_B^* + \mathbf{AB} \times \mathbf{R}^*$.

Основная теорема статики. Произвольную систему сил, действующую на твердое тело, можно заменить ее главным вектором, приложенным в произвольно выбранной точке (центре приведения), и парой сил с моментом, равным главному моменту системы сил относительно этой точки.

Применение основной теоремы статики может привести к следующим частным случаям.

1. Если $\mathbf{R}^* = 0$, $\mathbf{M}_O^* = 0$, то система сил уравновешена и тело находится в равновесии.

2. Если $\mathbf{R}^* \neq 0$, $\mathbf{M}_O^* = 0$, то система сил приводится к равнодействующей, проходящей через точку O .

3. Если $\mathbf{R}^* = 0$, $\mathbf{M}_O^* \neq 0$, то система сил приводится к паре с моментом $\mathbf{M}_O^*$ и главные моменты сил относительно любых точек равны.

4. Если $\mathbf{R}^* \neq 0$, $\mathbf{M}_O^* \neq 0$, но $\mathbf{R}^* \perp \mathbf{M}_O^*$, то система сил также приводится к равнодействующей. Уравнение ее линии действия имеет вид:

$$yR_z^* - zR_y^* = M_{Ox}^*, \quad zR_x^* - xR_z^* = M_{Oy}^*, \quad xR_y^* - yR_x^* = M_{Oz}^*.$$

Для плоской системы сил векторы $\mathbf{R}^*$ и $\mathbf{M}_O^*$ всегда перпендикулярны, поэтому *плоская система сил сводится либо к паре сил (если $\mathbf{R}^* = 0$), либо к равнодействующей (если $\mathbf{R}^* \neq 0$)*.

5. Если $\mathbf{R}^* \neq 0$, $\mathbf{M}_O^* \neq 0$, но $\mathbf{R}^* \parallel \mathbf{M}_O^*$, то такая совокупность силы и пары сил называется *динамой*, а прямая, вдоль которой направлены векторы, – *осью динамы*. *Главный момент сил принимает наименьшее значение на оси динамы*.

6. В общем случае, когда $\mathbf{R}^* \neq 0$, $\mathbf{M}_O^* \neq 0$, но векторы $\mathbf{M}_O^*$ и $\mathbf{R}^*$ не перпендикулярны и не параллельны, система сил также приводится к силовой динаме. *Если произвольная система сил не уравновешена, то она сводится либо к паре сил, либо к равнодействующей, либо к динаме*.

Условия равновесия произвольной системы сил имеют вид:

$$\mathbf{R}^* = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = 0, \quad \mathbf{M}_O^* = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{Oi} = 0,$$

где O – некоторая произвольная точка, или в координатной форме

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\mathbf{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_y(\mathbf{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_z(\mathbf{F}_k) = 0.$$

Для системы параллельных сил (параллельных оси Oz) из шести уравнений остаются только три:

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_x(\mathbf{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_y(\mathbf{F}_k) = 0.$$

А для системы сходящихся сил, как мы уже знаем (см. п. 3),

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0.$$

Уравнения равновесия плоской системы сил имеют вид

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_A(\mathbf{F}_k) = 0.$$

Иногда удобно использовать две другие формы уравнений равновесия:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_A(\mathbf{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_B(\mathbf{F}_k) = 0,$$

причем линия AB не должна быть перпендикулярна оси Ox , или

$$\sum_{k=1}^n M_A(\mathbf{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_B(\mathbf{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_C(\mathbf{F}_k) = 0,$$

где точки A, B, C не должны лежать на одной прямой.

Равновесие составной конструкции. При рассмотрении равновесия конструкции необходимо переформулировать задачу как последовательность задач о равновесии отдельных тел. Уравнения равновесия будут составляться для каждого тела. В эти уравнения наряду с активными силами войдут также и силы реакций внешних и внутренних связей. Если общее число независимых уравнений больше или равно общему числу неизвестных задачи, то такая конструкция будет статически определимой. Можно также, используя аксиому 5 (принцип отвердевания), рассматривать равновесие всей конструкции либо какой-

нибудь ее части. При составлении уравнений равновесия следует иметь в виду, что силы реакций внутренней связи, соединяющей два элемента конструкции, действующие на каждый из элементов, согласно аксиоме 4, равны по величине и противоположно направлены.

8. Рекомендации по решению задач статики

Решение задач статики состоит из следующих действий.

1. Указать (выбрать, найти) материальное тело, состояние равновесия которого будет рассматриваться. Выбранное тело должно быть названо и изображено на отдельном рисунке.

2. Освободить указанное тело от связей, в соответствии с аксиомой связей и типами наложенных связей. В результате освобождения от связей должны быть изображены действующие на тело реакции отброшенных связей. Отброшенные связи изображать не следует. Необходимо показать также внешние силы, действующие на тело по условию. Следует обращать внимание на необходимость учета силы тяжести (так называемого *веса тела*); эта сила действует на все тела в окрестности Земли. Сила тяжести не рассматривается, если в условии задачи предлагается считать тело невесомым (вес тела в условии не дан).

3. Установить, к какому из известных типов относится система сил, действующая на тело, и сформулировать условия равновесия этой системы в соответствии с ее типом.

4. Составить уравнения равновесия.

5. Решить уравнения равновесия и определить тем самым искомые величины. Если тел несколько, то следует рассмотреть другие тела (повторив действия 1–4) исходя из того, что в конечном счете общее число линейно независимых уравнений и неизвестных должно совпадать.

9. Контрольные вопросы

1. Какое тело называется абсолютно твердым?
2. Какими тремя факторами определяется сила, действующая на твердое тело?
3. Какая сила называется равнодействующей данной системы сил?
4. Если деформируемое (не абсолютно твердое тело) находится в равновесии под действием некоторой системы сил, будет ли эта система удовлетворять условиям равновесия абсолютно твердого тела?
5. Какое тело называется несвободным и что называется силой реакции связи?
6. В чем состоит правило силового многоугольника?
7. В чем состоит аналитический способ сложения сил, приложенных в одной точке?
8. Как формулируются условия равновесия системы сходящихся сил в геометрической и аналитической формах?
9. Известно, что сумма проекций всех сил, приложенных к телу, на данную ось равна нулю. Как направлена равнодействующая такой системы сил?
10. В чем состоит теорема о трех уравнивающих непараллельных силах?
11. Что называется парой сил?
12. Как направлен и чему равен по величине вектор-момент пары?
13. При каком условии две пары будут эквивалентны?
14. Могут ли быть эквивалентными две пары, лежащие в пересекающихся плоскостях?
15. Чему равна проекция вектора-момента равнодействующей пары на данную ось?
16. В чем состоит теорема о сложении пар?
17. В чем состоит условие равновесия системы пар?

18. Что называется алгебраическим моментом силы относительно данной точки?
19. В каком случае момент силы относительно данной точки равен нулю?
20. Изменится ли момент силы относительно данной точки при переносе силы по линии ее действия?
21. В чем состоит условие равновесия рычага?
22. Что называется главным вектором данной системы сил?
23. Что называется главным моментом системы сил относительно данной точки?
24. Изменится ли главный момент и главный вектор данной системы сил при перемене центра приведения?
25. В чем состоит теорема Вариньона?
26. При каком условии главный момент плоской системы не зависит от выбора центра приведения?
27. Величина главного вектора данной плоской системы сил равна 10 Н , а величина главного момента этой системы сил относительно точки A равна $5\text{ Н}\cdot\text{м}$. Чему равно расстояние линии действия равнодействующей этой системы сил от точки A ?
28. Как формулируются условия равновесия плоской системы сил?
29. В чем заключается метод решения задачи о равновесии системы, состоящей из нескольких твердых тел? Сколько независимых уравнений равновесия можно составить в такой задаче, если все силы, действующие на систему, лежат в одной плоскости?
30. Что называется углом трения?
31. Какая зависимость существует между углом трения и коэффициентом трения?

32. Цилиндрический каток радиусом 20 см и весом $P = 1000$ Н катится равномерно без скольжения по горизонтальной плоскости под действием горизонтальной силы, проходящей через центр катка и равной 250 Н. Чему равен коэффициент трения качения?
33. В какой форме составляются уравнения равновесия в способе разрезов фермы?
34. Какая ферма называется фермой с лишними стержнями?
35. Какая зависимость существует между числом стержней и числом узлов фермы, не имеющих лишних стержней?
36. Что называется моментом силы относительно данной оси? Как выбирается знак момента?
37. Когда момент силы относительно данной оси равен нулю?
38. Как направлен вектор-момент силы относительно данной точки?
39. Какая зависимость существует между вектором-моментом силы относительно данной точки и моментом силы относительно оси, проходящей через эту точку?
40. Если вектор-момент данной системы сил относительно начала координат лежит в координатной плоскости Oxy , то чему равен момент этой силы относительно оси Oz ?
41. Как направлен вектор-момент данной силы относительно начала координат, если момент этой силы относительно двух координатных осей равен нулю?
42. Чему равны проекции главного момента данной системы сил относительно начала координат на каждую из координатных осей?
43. Чему равны проекции главного вектора данной системы сил на каждую из координатных осей?
44. Как изменяется главный момент данной системы сил при перемещении центра приведения?

45. В каких случаях пространственная система сил приводится к одной равнодействующей силе?
46. В каком случае пространственная система сил приводится к одной паре?
47. В каком случае пространственная система сил приводится к динаме?
48. Как формулируются условия равновесия пространственной системы сил?
49. Сколько независимых уравнений равновесия можно составить в задаче о равновесии твердого тела, если все силы, приложенные к нему, не лежат в одной плоскости?
50. Что называется центром данной системы параллельных сил?
51. Какая точка называется центром тяжести данного тела?
52. Какие существуют способы определения центра тяжести?

ЗАДАНИЕ 1. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Каждая задача в задании сопровождается отдельным рисунком (они приведены начиная со страницы 36). Во всех задачах связи предполагаются идеальными – идеальный неподвижный блок, нерастяжимая невесомая нить, гладкая наклонная плоскость. Весом стержней пренебрегаем. В формулировках задач в названиях связей приняты сокращения: блок, нить, стержень. Решение задач следует начинать с выполнения рисунка с заданными значениями углов. При решении задач ответ должен быть получен в символьном виде, подстановка значений выполняется последним действием при получении ответа в численном виде. Вес груза P в расчетах принять равным 10 кН.

Задача 1. Задача 2.

Стержни OA и OB соединены неподвижным шарниром в точке O , на котором расположен блок. Через блок переброшена привязанная к основанию нить, удерживающая груз, вес которого равен P . Определить усилия в стержнях OA и OB . Варианты условия:

	1	2	3	4	5	6
α	30°	45°	60°	30°	45°	60°
β	60°	30°	45°	45°	60°	30°

Задача 3.

Диск, вес которого равен Q , удерживается нитью, привязанной в центре диска O . Другая нить привязана к основанию в точке B , переброшена через диск по его ободу и удерживает груз весом P . Размером диска пренебречь, диск рассматривать как материальную точку, находящуюся в центре диска. Определить усилие в нити OA и угол φ , образованный нитью с вертикальным основанием. Варианты условия:

	1	2	3	4	5	6
α	30°	45°	60°	30°	45°	60°
Q/P	1	2	0,5	0,25	1,25	0,75

Задача 4.

Диск, вес которого равен P , удерживается нитью, привязанной в центре диска O . К центру диска приложена внешняя сила $\mathbf{F}$. Определить усилие в нити OB и величину силы $\mathbf{F}$ при заданных направлениях силы $\mathbf{F}$ и нити. Варианты условия:

	1	2	3	4	5	6
α	30°	45°	60°	30°	45°	60°
β	45°	30°	30°	60°	60°	45°

Задача 5.

Стержень OA удерживается шарниром в точке O . В точке A стержня на неподвижном шарнире расположен блок. Через блок переброшена нить, на нити подвешен груз весом P . На другой конец нити действует сила $\mathbf{F}$, необходимая для равновесия нити с грузом. Определить усилие в стержне OA и угол φ при данном положении нити. Варианты условия:

	1	2	3	4	5	6
α	30°	45°	60°	0°	15°	75°

Задача 6.

Стержни OA и OB соединены неподвижным шарниром в точке O , на котором расположен блок. Через блок переброшена нить, удерживающая груз, вес которого равен P . На другой конец нити действует внешняя сила $\mathbf{F}$, обеспечивающая равновесие нити с грузом. Определить усилия в стержнях OA и OB . Варианты условия:

	1	2	3	4	5	6
α	30°	45°	60°	30°	45°	60°
β	60°	45°	30°	45°	30°	90°

Задача 7.

Стержень OA удерживается шарниром в точке O . В точке A стержня на неподвижном шарнире расположен ролик, способный вращаться без трения в шарнире. Вес ролика равен P . В точке B ролик опирается на гладкую наклонную плоскость. Определить усилие в стержне OA и реакцию наклонной плоскости. Варианты условия:

	1	2	3	4	5	6
α	60°	45°	60°	90°	45°	30°
β	60°	60°	45°	45°	90°	90°

Задача 8.

Стержень OA удерживается шарниром в точке O . В точке A стержня на неподвижном шарнире расположен блок. Через блок переброшена нить, удерживающая груз, вес которого равен P . Определить усилие в стержне OA и угол φ при данном положении нити. Варианты условия:

	1	2	3	4	5	6
α	30°	45°	60°	0°	15°	75°

Задача 9.

Стержни OA и OB соединены неподвижным шарниром в точке O , на шарнире расположен блок. Через блок переброшена нить, удерживающая груз весом P . На другой конец нити действует внешняя сила F , необходимая для равновесия нити с грузом. Определить усилия в стержнях OA и OB . Варианты условия:

	1	2	3	4	5	6
α	30°	45°	60°	30°	45°	60°
β	60°	45°	30°	45°	30°	90°

Задача 10.

Невесомый стержень OA удерживается шарниром в точке O и нитью AB , привязанной к основанию. К шарниру A на нити подвешен груз, вес которого равен P , и на шарнир действует внешняя сила $\mathbf{F}$, $|\mathbf{F}| = P/2$. Определить усилие в стержне OA и силу натяжения нити AB . Варианты условия:

	1	2	3	4	5	6
α	30°	45°	60°	30°	45°	60°
β	60°	30°	45°	45°	60°	30°

Задача 11.

Стержни OA и OB соединены неподвижным шарниром в точке O , на шарнире находится блок. Через блок переброшена нить, удерживающая груз, вес которого равен P . На другой конец нити действует внешняя сила $\mathbf{F}$, необходимая для равновесия нити с грузом. Определить усилия в стержнях OA и OB . Варианты условия:

	1	2	3	4	5	6
α	30°	45°	60°	30°	45°	60°
β	60°	45°	30°	45°	30°	90°

Задача 12.

В точке A на гладкую наклонную плоскость опирается тяжелый диск, вес которого равен P . К центру O диска привязана нить, удерживающая груз, вес которого равен Q . Определить, каким должен быть вес груза Q , чтобы диск оставался в равновесии. Определить реакцию основания в точке A . Варианты условия:

	1	2	3	4	5	6
α	30°	45°	60°	36°	15°	75°

Задача 13. Задача 14.

Стержни OA и OB соединены неподвижным шарниром в точке O , на котором расположен блок. Через блок переброшена привязанная к основанию нить, удерживающая груз, вес которого равен P . Определить усилия в стержнях OA и OB . Варианты условия:

	1	2	3	4	5	6
α	60°	75°	60°	45°	60°	75°
β	30°	60°	45°	30°	15°	30°

Задача 15.

В точке A на гладкую наклонную плоскость опирается тяжелый диск, вес которого равен P . К центру O диска привязана нить, прикрепленная к основанию в точке B . Определить силу натяжения нити OB и реакцию основания в точке A . Варианты условия:

	1	2	3	4	5	6
α	30°	45°	60°	30°	45°	60°
β	60°	45°	30°	45°	30°	60°

Задача 16.

Стержни OA и OB соединены неподвижным шарниром в точке O , на котором расположен блок. Через блок переброшена нить, удерживающая груз, вес которого равен P . На другой конец нити действует сила F , необходимая для равновесия нити с грузом. Определить усилия в стержнях OA и OB . Варианты условия:

	1	2	3	4	5	6
α	30°	45°	60°	30°	45°	60°
β	60°	45°	30°	45°	30°	60°

Задача 17.

Тяжелый диск, вес которого равен P , подвешен на двух нитях, привязанных к диску в центре O . Нить OA привязана к основанию в точке A . На нити, переброшенной через неподвижный блок B , подвешен груз, вес которого равен Q . Определить силу натяжения нити OA и угол φ , образованный нитью OB с горизонтальной осью, при котором диск будет в равновесии. Варианты условия:

	1	2	3	4	5	6
α	30°	45°	60°	30°	45°	60°
Q/P	1	2	0,5	0,25	1,25	0,75

Задача 18.

Тяжелый диск, вес которого равен P , подвешен на двух нитях. Горизонтально расположенная нить OC привязана к основанию в точке C и к диску в центре O . На нить AB диск опирается своим ободом. Вес диска равен P . Определить силу натяжения нити AB и нити OC . Варианты условия:

	1	2	3	4	5	6
α	30°	45°	60°	30°	45°	60°
β	60°	30°	45°	45°	60°	30°

Задача 19.

Стержни OA и OB соединены неподвижным шарниром в точке O , на котором расположен блок. Через блок переброшена нить, к концу которой приложена сила F , $|F| = P/2$. Определить усилия в стержнях OA и OB . Варианты условия:

	1	2	3	4	5	6
α	30°	45°	90°	90°	60°	60°
β	15°	30°	30°	45°	30°	45°

Задача 20.

Тяжелый диск, вес которого равен P , опирается на вертикальное гладкое основание в точке B и на наклонное гладкое основание в точке A . К центру O диска приложена внешняя сила $\mathbf{F}$, $|\mathbf{F}| = P/2$. Определить давление диска на основания в точках A и B . Варианты условия:

	1	2	3	4	5	6
α	30°	45°	60°	30°	45°	60°
β	60°	30°	45°	45°	60°	30°

Задача 21.

Тяжелый диск, вес которого равен P , подвешен на двух нитях OA и OB , привязанных к диску в центре O . На точку O действует внешняя сила $\mathbf{F}$, $|\mathbf{F}| = P/2$. Определить силы натяжения нитей OA и OB . Варианты условия:

	1	2	3	4	5	6
α	60°	45°	90°	45°	60°	60°
β	30°	30°	45°	45°	45°	0°

Задача 22.

Невесомый стержень OA удерживается шарниром в точке O и нитью AB , привязанной к основанию. К шарниру A на нити подвешен груз, вес которого равен P , и на шарнир действует внешняя сила $\mathbf{F}$, $|\mathbf{F}| = P/4$. Определить усилие в стержне OA и силу натяжения нити AB . Варианты условия:

	1	2	3	4	5	6
α	30°	45°	60°	30°	45°	60°
β	60°	30°	45°	45°	60°	30°

Задача 23.

Невесомый стержень OA удерживается шарниром в точке A . В точке O стержня на неподвижном шарнире расположен ролик, способный вращаться без трения в шарнире. Вес ролика равен P . В точке B ролик опирается на гладкую наклонную плоскость. Определить усилие в стержне OA и реакцию наклонной плоскости. Варианты условия:

	1	2	3	4	5	6
α	30°	45°	60°	30°	45°	0°
β	60°	60°	45°	45°	30°	30°

Задача 24.

Стержни OA и OB соединены неподвижным шарниром в точке O , на котором подвешен груз P . К шарниру O приложена внешняя сила F , $|F| = P/2$. Определить усилия в стержнях OA и OB . Варианты условия:

	1	2	3	4	5	6
α	30°	45°	90°	30°	60°	90°
β	30°	30°	30°	45°	0°	45°

Задача 25.

Стержни OA и OB соединены неподвижным шарниром в точке O , на котором размещен блок. Через блок переброшена нить, на которой подвешен груз весом P . К другому концу нити приложена внешняя сила F , необходимая для равновесия груза. Определить усилия в стержнях OA и OB . Варианты условия:

	1	2	3	4	5	6
α	30°	45°	90°	30°	60°	90°
β	30°	30°	30°	45°	0°	45°

Задача 26.

Стержни OA и OB соединены неподвижным шарниром в точке O , на котором расположен блок. Через блок переброшена привязанная к основанию нить, удерживающая груз, вес которого равен P . Определить усилия в стержнях OA и OB . Варианты условия:

	1	2	3	4	5	6
α	60°	30°	45°	45°	60°	30°
β	30°	60°	60°	30°	45°	30°

Задача 27.

Невесомые стержни OA и AB соединены шарниром в точке A . Стержень OA удерживается шарниром в точке O , стержень AB опирается на гладкую наклонную поверхность в точке B . Длины отрезков OA , OB , AB и угол наклона поверхности выбраны так, что прямая OB перпендикулярна опорной поверхности (в частности, для этого требуется, чтобы угол AOB был прямым). Сила P приложена в середине стержня AB , линия действия силы проходит через точку O . Определить усилие в стержне OA и реакцию наклонной плоскости в точке B . Варианты условия:

	1	2	3	4	5	6
α	30°	45°	60°	36°	15°	75°

Задача 28.

Стержни OA и OB соединены неподвижным шарниром в точке O , на котором расположен блок. Через блок переброшена привязанная к основанию нить, удерживающая груз, вес которого равен P . Определить усилия в стержнях OA и OB . Варианты условия:

	1	2	3	4	5	6
α	60°	30°	45°	45°	60°	30°
β	30°	60°	60°	30°	45°	30°

Задача 29.

Диск, вес которого равен P , удерживается нитью OB , привязанной в центре диска O . Другая нить привязана к основанию в точке A , переброшена через диск по его ободу и удерживает груз весом Q . Определить усилие в нити OB и угол φ , образованный нитью с горизонтальным основанием. Варианты условия:

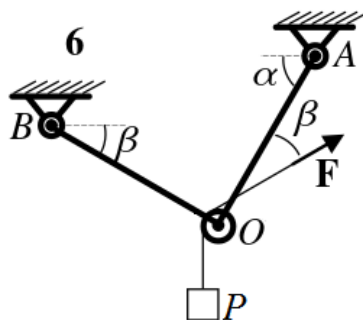
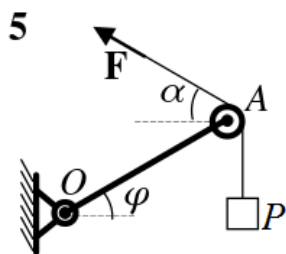
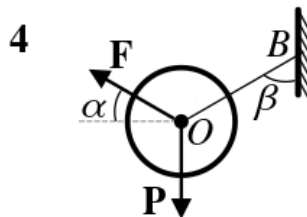
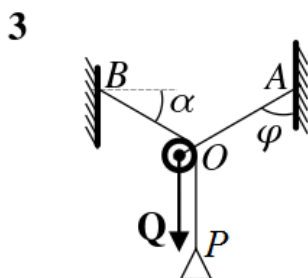
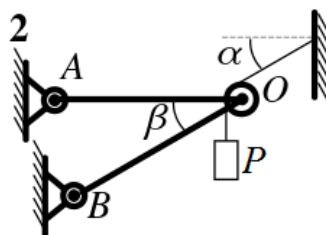
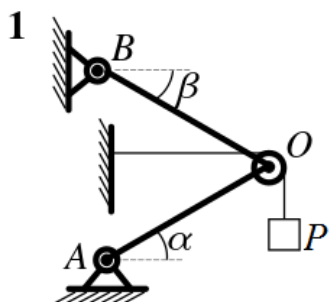
	1	2	3	4	5	6
α	30°	45°	60°	30°	45°	60°
Q/P	1	2	0,5	0,25	1,25	0,75

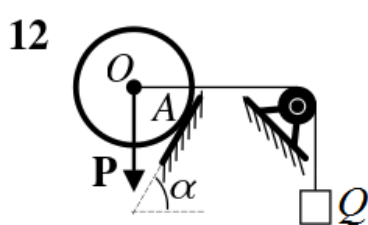
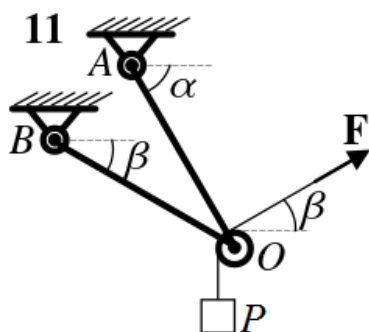
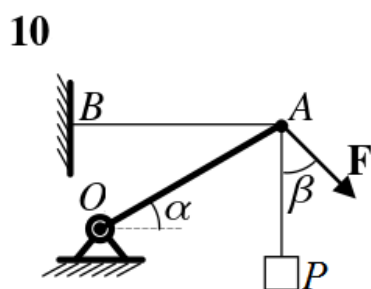
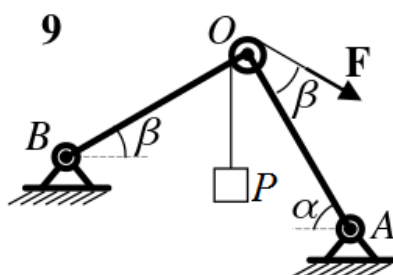
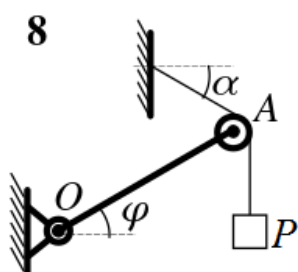
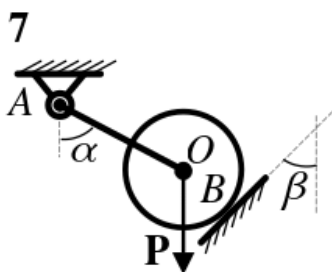
Задача 30.

Тяжелый диск, вес которого равен P , опирается на гладкую плоскость. К центру O диска привязана нить, удерживающая груз, вес которого равен Q . Определить, какую дополнительную внешнюю силу F необходимо приложить к центру O , чтобы диск оставался в равновесии. Определить реакцию горизонтального основания в этом случае. Варианты условия:

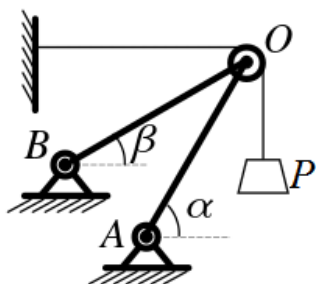
	1	2	3	4	5	6
α	30°	45°	60°	36°	15°	75°

Рисунки к заданию 1

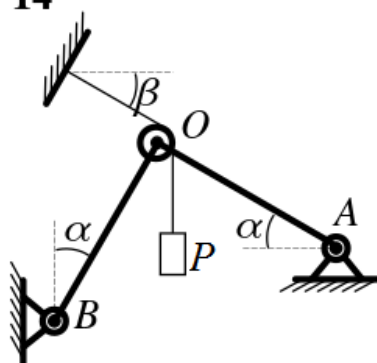




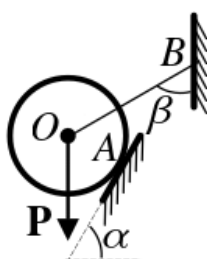
13



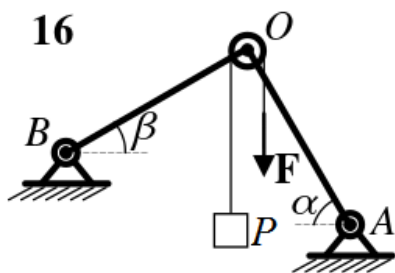
14



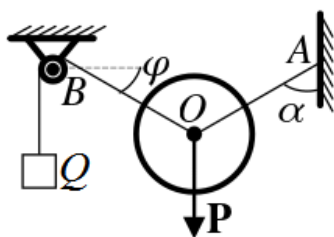
15



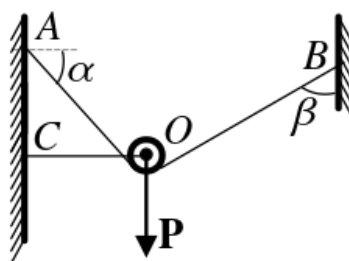
16



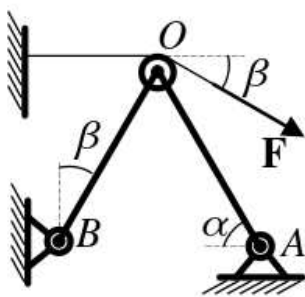
17



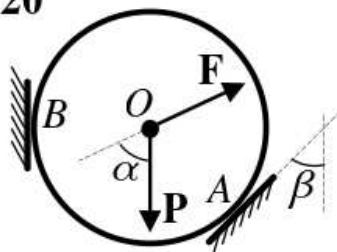
18



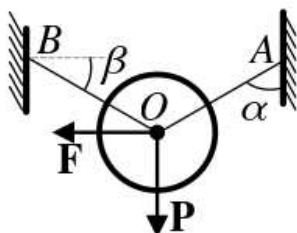
19



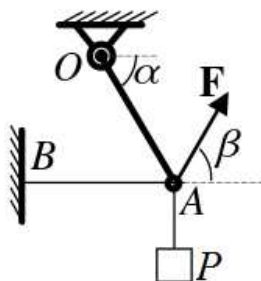
20



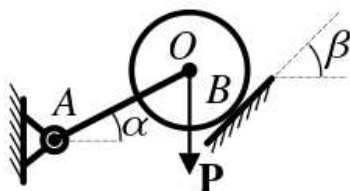
21



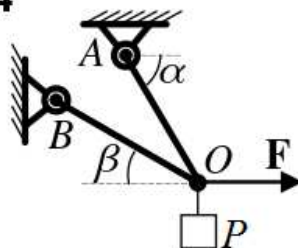
22

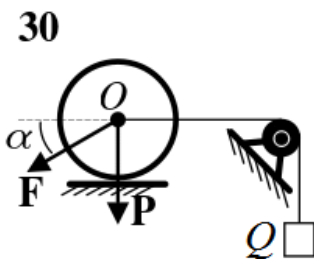
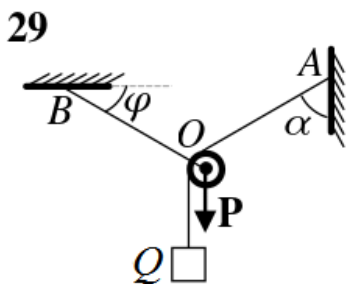
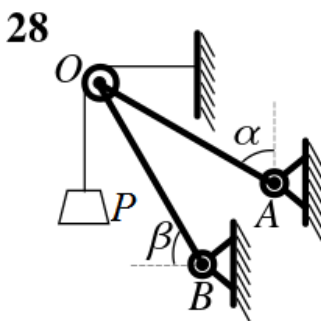
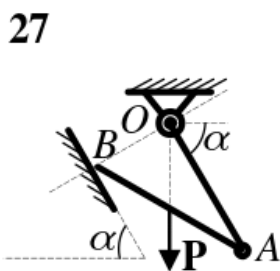
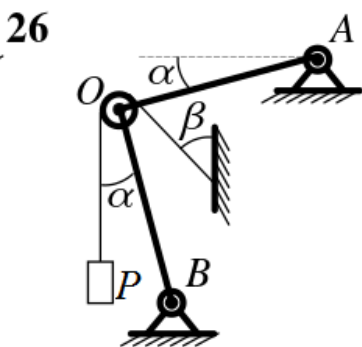
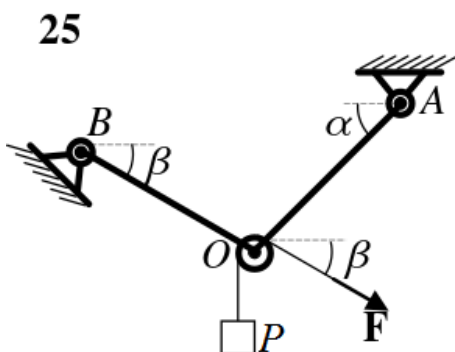


23



24





Пример выполнения задания

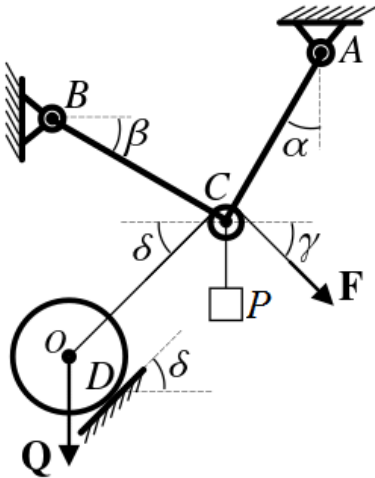


Рис. 1. Шарнирно-стержневая конструкция

Рассматривается конструкция, изображенная на рис. 1. Стержни AC и BC конструкции соединены с неподвижным основанием в точках A и B неподвижными шарнирами и между собой неподвижным шарниром в точке C . На шарнире C подвешен груз, вес которого равен P , и размещен идеальный неподвижный блок. Через неподвижный блок переброшена невесомая нить, привязанная к тяжелому цилиндру, опирающемуся на гладкую наклонную плоскость в точке D . Вес цилиндра равен Q .

Найти усилия в стержнях AC и BC конструкции и величину силы F , которую необходимо приложить к свободному концу нити, переброшенной через неподвижный блок, для равновесия цилиндра. Числовые данные: $|Q| = 8 \text{ Н}$, $P = 12 \text{ Н}$, $\alpha = 42^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 75^\circ$, $\delta = 30^\circ$.

Решение

В условии задачи предложена конструкция, состоящая из достаточно большого числа материальных тел, поэтому первый выбор тела должен быть рациональным. Выберем тело, ограниченное связями, реакции которых могут быть найдены в результате единственной реализации последовательности решения задачи статики.

Действие 1. Рассмотрим состояние цилиндра (рис. 2). Цилиндр находится в равновесии по условию.

Действие 2. Освобождение цилиндра от связей состоит в том, что действие гладкой наклонной поверхности заменяется реакцией, перпендикулярной поверхности и направленной от поверхности, а действие нити заменяется силой, направленной вдоль нити от тела. Реакцию поверхности назовем $\mathbf{R}_D$, силу натяжения нити $\mathbf{T}$ (см. рис. 2).

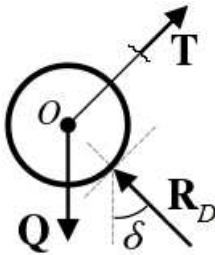


Рис. 2

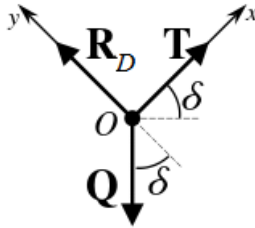


Рис. 3

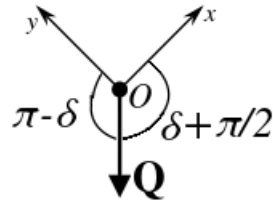


Рис. 4

Действие 3. Линии действия сил $\mathbf{R}_D$, $\mathbf{T}$ и силы тяжести $\mathbf{Q}$ пересекаются в одной точке – центре цилиндра. Это значит, что система сил, под действием которой цилиндр находится в равновесии, является сходящейся.

Действие 4. Условия равновесия сходящейся системы сил могут быть сформулированы в геометрической или в аналитической форме. В последнем случае должна быть указана система координат. Выберем начало отсчета в точке O , ось Ox прямоугольной декартовой системы координат направим вдоль нити, ось Oy – от поверхности опирания. Силы $\mathbf{R}_D$ и $\mathbf{T}$ можно перенести вдоль линий действия в точку O , а направления сил по условию совпадут с направлениями осей координат (рис. 3). Условием равновесия сходящейся системы сил является условие равенства нулю главного вектора этой системы. Аналитическая форма этого условия эквивалентна двум условиям равенства нулю суммы проекций сил на оси Ox и Oy :

$$\sum_{i=1}^N F_{ix} = 0: \quad T - Q \sin \delta = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^N F_{iy} = 0: \quad R_D - Q \cos \delta = 0. \quad (2)$$

Действие 5. Решение уравнений (1), (2) имеет вид:

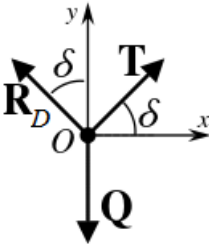
$$T = Q \sin \delta; \quad R_D = Q \cos \delta.$$

В результате подстановки числовых значений находим:

$$T = 8 \sin 30^\circ = 8 \cdot 0,5 = 4 \text{ Н}; \quad R_D = 8 \cos 30^\circ = 8 \cdot 0,86603 = 6,9282 \text{ Н}.$$

Способы определения углов между силой **Q** и осями *Ox* и *Oy*, использованные при определении проекций Q_x и Q_y , иллюстрируются рис. 4. Известные преобразования тригонометрических функций приводят к выражениям:

$$Q_x = Q \cos\left(\delta + \frac{\pi}{2}\right) = -Q \sin \delta; \quad Q_y = Q \cos(\pi - \delta) = -Q \cos \delta.$$



Конкретный вид уравнений равновесия и, следовательно, сложность нахождения неизвестных усилий зависят от того, как была задана система отсчета. Если выбрать направления осей прямоугольной системы координат «стандартно» – как на рис. 5, уравнения равновесия будут иметь вид:

Рис. 5

$$\sum_{i=1}^N F_{ix} = 0: \quad T \cos \delta - R_D \sin \delta = 0$$

$$\sum_{i=1}^N F_{iy} = 0: \quad T \sin \delta + R_D \cos \delta - Q = 0$$

Для нахождения неизвестных реакций R_D и T в этом случае необходимо решить систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} T \cos \delta - R_D \sin \delta = 0 \\ T \sin \delta + R_D \cos \delta = Q \end{cases}$$

Для решения такой системы уравнений удобно воспользоваться методом алгебраического сложения:

$$\begin{cases} T \cos \delta - R_D \sin \delta = 0 \\ T \sin \delta + R_D \cos \delta = Q \end{cases} \begin{vmatrix} \cos \delta & -\sin \delta \\ \sin \delta & \cos \delta \end{vmatrix}$$

$$T(\cos^2 \delta + \sin^2 \delta) + R_D(-\sin \delta \cos \delta + \cos \delta \sin \delta) = Q \sin \delta$$

$$T(-\sin \delta \cos \delta + \cos \delta \sin \delta) + R_D(\cos^2 \delta + \sin^2 \delta) = Q \cos \delta$$

Решение этих уравнений, очевидно, не отличается от найденного из уравнений (1), (2): $T = Q \sin \delta$; $R_D = Q \cos \delta$.

Далее рассматривается фрагмент нити, переброшенный через неподвижный блок с центром в точке C (рис. 6). Сила T заменяет действие растянутой нити на ближнюю к цилиндру сторону воображаемого разреза. На другую сторону разреза действует иная сила. Обозначим эту силу T' . Силы T и T' являются внутренними, по следствию из аксиомы 4: $T = -T'$. Участок нити, переброшенный через неподвижный блок с центром в точке C , находится в равновесии под действием внешних сил T' и F (см. рис. 6). Каковы бы ни были углы γ и δ , для равновесия



Рис. 6

фрагмента нити, переброшенного через неподвижный блок, необходимо выполнение равенства $|F| = |T'|$, так как блок идеальный и сила трения на оси C отсутствует. Учитывая, что $|T'| = |T|$, находим: $|F| = |T|$.

Для равновесия цилиндра необходимо, чтобы к свободному концу нити, привязанной к цилиндру в центре O , была приложена сила F , направленная вдоль нити от цилиндра, $|F| = 4 \text{ Н}$. Силы T' и F равны силам натяжения нити, действующим в различных ее сечениях.

Если сила натяжения нити найдена, первоначальная формулировка условия задачи может быть упрощена. Теперь можно исключить из рассмотрения цилиндр, опирающийся на наклонную плоскость, заменяя действие цилиндра силой натяжения T' , при этом необходимо учитывать и силу F , создающую вместе с цилиндром натяжение нити.

Задача свелась к определению усилий в стержнях AC и BC конструкции, показанной на рис. 7, под действием известных внешних сил T' и F ($|T'| = |F| = 4 \text{ Н}$, направления сил даны на рисунке) и подвешенного к шарниру C груза P .

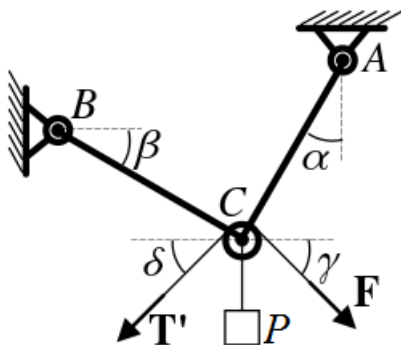


Рис. 7

Рассмотрим последовательно все тела, составляющие конструкцию. Груз P по условию находится в равновесии (как и вся конструкция в целом). На груз действуют сила тяжести, равная P по величине, направленная вертикально вниз, и сила натяжения нити, подлежащая определению.

На тело (груз) действуют две силы. В этом случае состояние равновесия можно описать с помощью аксиомы 1. По аксиоме 1 сила тяжести и сила натяжения нити должны быть равны по величине, направлены противоположно и линии действия этих сил должны совпадать. Следовательно, сила натяжения нити в точке крепления груза к нити направлена вверх, вдоль нити, величина силы натяжения равна P . Других следствий из условий равновесия груза P нет. Рассмотрим следующее тело – пусть это будет стержень AC . Стержень AC взаимодействует с неподвижным шарниром на неподвижном основании в точке A и с неподвижным соединительным шарниром в точке C . Других связей, удерживающих стержень AC , в конструкции нет. Внешних активных сил, приложенных к внутренним сечениям стержня AC ,

в условии задачи не дано. Следовательно, освободив стержень AC от связей (неподвижный шарнир A и неподвижный шарнир C), мы получим свободное твердое тело, находящееся в равновесии под действием двух сил – реакции неподвижного шарнира A и реакции неподвижного шарнира C . Как и при рассмотрении равновесия груза P , мы можем (и должны) воспользоваться аксиомой 1. По аксиоме 1 линии действия двух сил, приложенных к телу AC , должны совпадать. Линия действия реакции шарнира A проходит через точку A , линия действия реакции шарнира C проходит через точку C . Условие совпадения линий действия будет выполнено только в случае, если обе реакции направлены вдоль прямой AC . Два других необходимых условия, содержащихся в аксиоме 1, – равенство величин сил и противоположность их направлений – должны быть удовлетворены, но не позволяют сделать каких-либо конкретных выводов. Реакция неподвижного шарнира C действует на стержень AC со стороны шарнира. По аксиоме 4 со стороны стержня AC действует равная этой реакции по величине и противоположная по направлению сила, приложенная к шарниру C . Таким образом, из условия равновесия стержня AC следует только то, что со стороны стержня на шарнир C действует неизвестная по величине сила, линия действия которой совпадает с прямой AC . Для описания равновесия стержня BC можно, заменяя обозначения, повторить все утверждения, сформулированные о равновесии стержня AC . Результатом такого описания будет вывод о том, что из условия равновесия стержня BC следует, что сила, действующая со стороны этого стержня на шарнир C , направлена вдоль прямой BC .

В конструкции осталось два нерассмотренных тела: неподвижный шарнир C и прикрепленный к шарниру неподвижный идеальный блок. Будем рассматривать эти два тела совместно, причем размеры блока и шарнира будем предполагать пренебрежимо малыми. В этом предположении все силы, действующие на блок и шарнир, можно считать приложенными к центру неподвижного шарнира C . Предполагая стержни AC и BC растянутыми, покажем силы, действующие на центр C , на рис. 8.

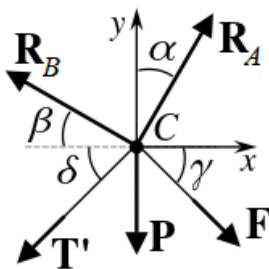


Рис. 8

Силы $\{F, T', P\}$ здесь были найдены ранее или даны по условию. Система сил $\{R_A, R_B, F, T', P\}$ является сходящейся. Силы $\{R_A, R_B\}$ заменяют действие растянутых стержней, т.е. являются подлежащими определению усилиями в стержнях AC и BC.

Составляем уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N F_{ix} = 0: & R_A \sin \alpha - R_B \cos \beta - T' \cos \delta + F \cos \gamma = 0 \\ \sum_{i=1}^N F_{iy} = 0: & R_A \cos \alpha + R_B \sin \beta - T' \sin \delta - F \sin \gamma - P = 0 \end{cases}$$

Переносим известные величины в правые части уравнений:

$$\begin{cases} R_A \sin \alpha - R_B \cos \beta = T' \cos \delta - F \cos \gamma \\ R_A \cos \alpha + R_B \sin \beta = T' \sin \delta + F \sin \gamma + P \end{cases}$$

Применяя метод алгебраического сложения, находим:

$$R_A = \frac{T' \sin(\delta + \beta) + F \sin(\gamma - \beta) + P \cos \beta}{\cos(\alpha - \beta)};$$

$$R_B = \frac{-T' \cos(\delta + \alpha) + F \cos(\gamma - \alpha) + P \sin \alpha}{\cos(\alpha - \beta)}.$$

Подставляя известные числовые значения, получаем:

$$R_A \approx \frac{4 \cdot 0,86603 + 4 \cdot 0,70711 + 12 \cdot 0,86603}{0,97815} = 17,057 \text{ Н};$$

$$R_B \approx \frac{-4 \cdot 0,30902 + 4 \cdot 0,83867 + 12 \cdot 0,66913}{0,97815} = 10,375 \text{ Н}.$$

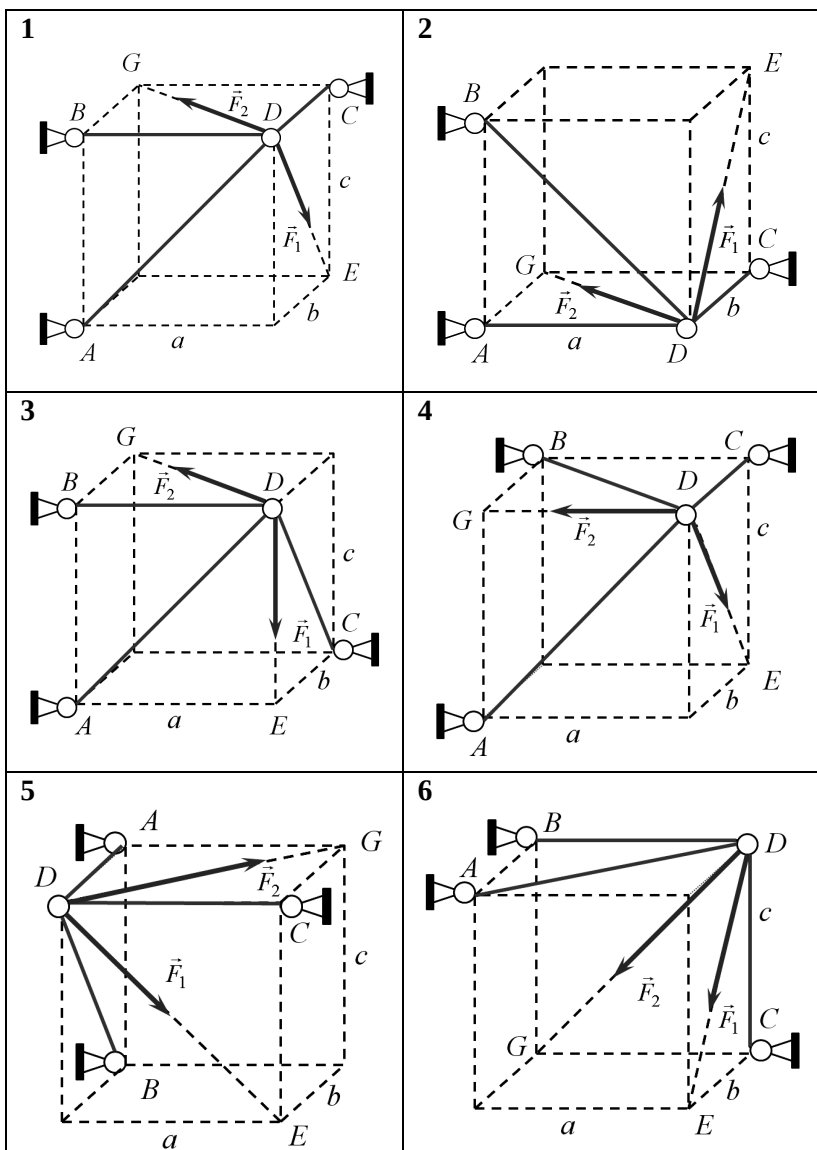
ЗАДАНИЕ 2. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

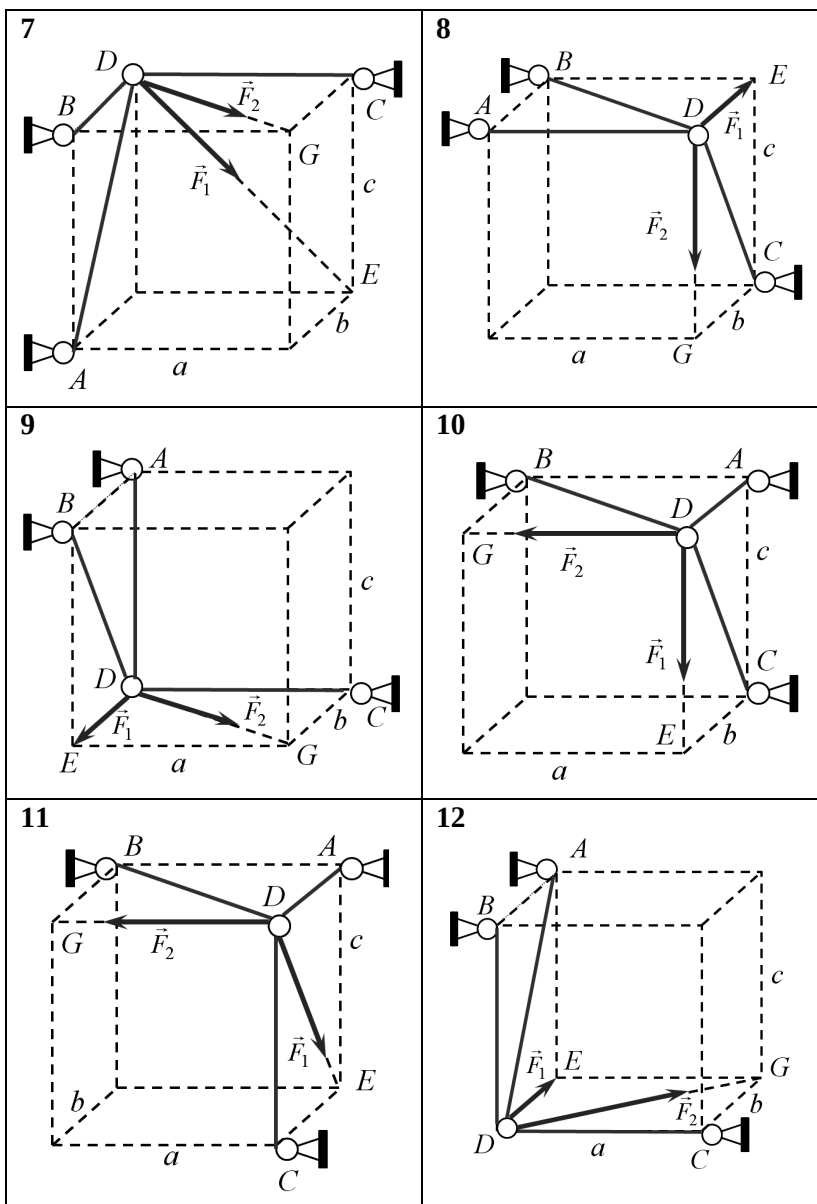
На шарнир D , закрепленный стержнями AD, BD, CD , действуют силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Модули этих сил указаны в таблице. Стержни и силы расположены на ребрах или гранях прямоугольного параллелепипеда со сторонами a, b, c , значения которых также приведены в таблице. Линиями действия сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ являются прямые DE и DG соответственно. Размером шарниров и толщиной стержней можно пренебречь.

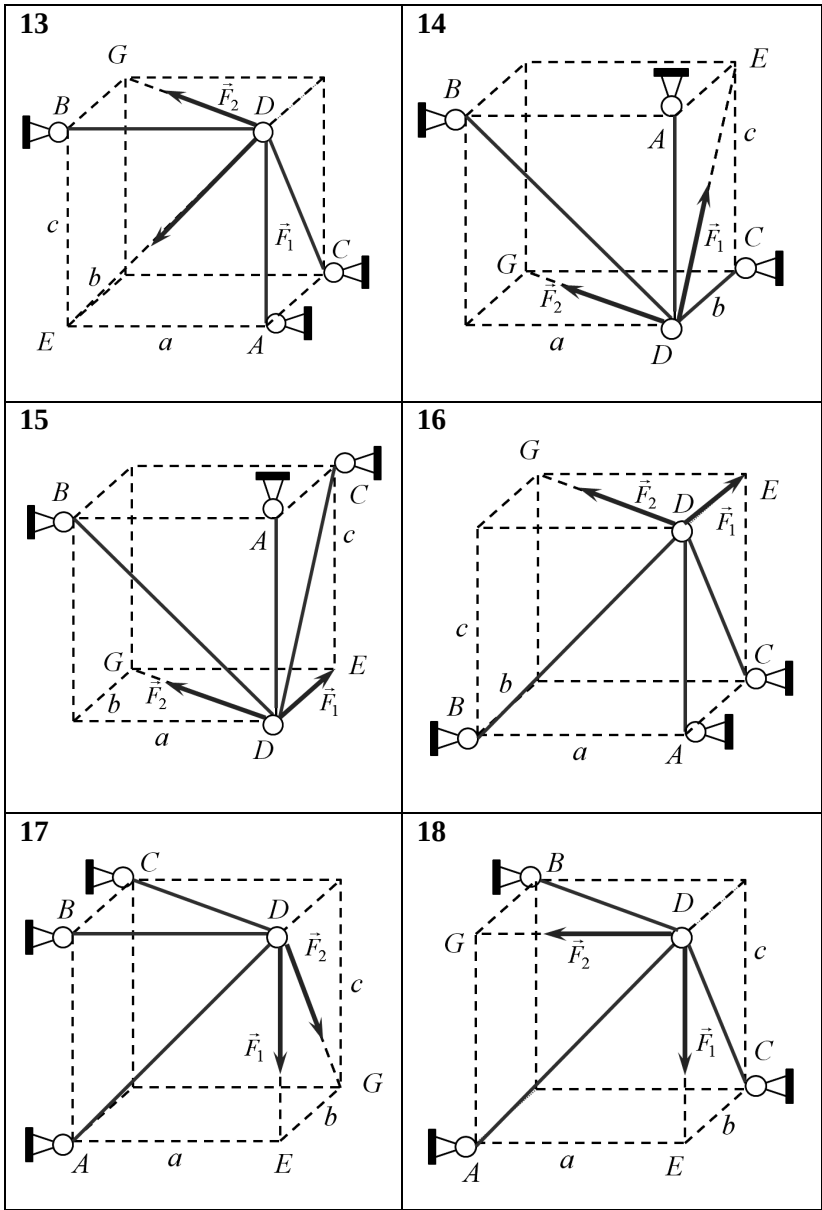
Необходимо определить значения реакций стержней AD, BD, CD .

Номер рисунка и условия из таблицы задаются преподавателем.

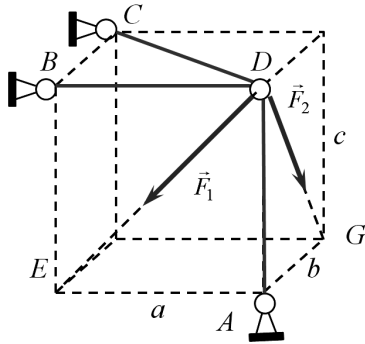
Вариант	a , м	b , м	c , м	F_1 , Н	F_2 , Н
1	2	3	4	3	4
2	1	2	3	1	5
3	3	4	2	4	2
4	1	3	4	5	3
5	4	2	1	4	1
6	3	2	1	2	3
7	1	4	2	1	2
8	2	4	1	3	2
9	3	1	2	5	1
10	2	1	3	2	4



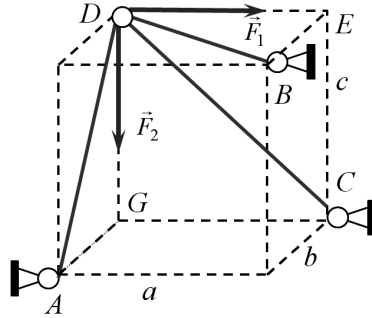




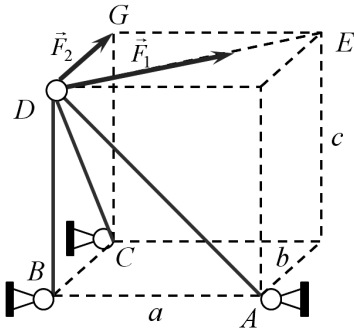
19



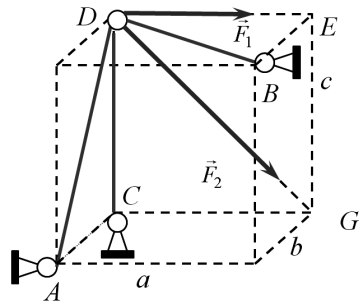
20



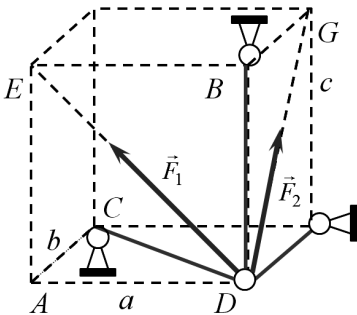
21



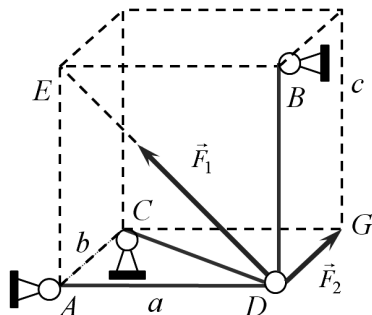
22



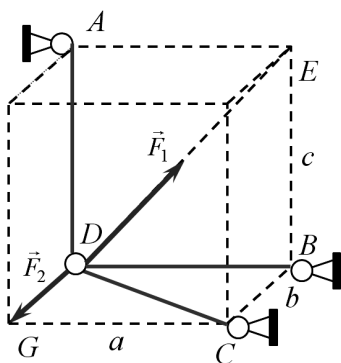
23



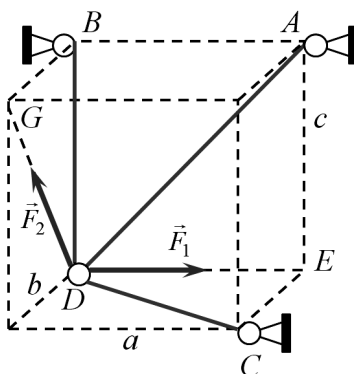
24



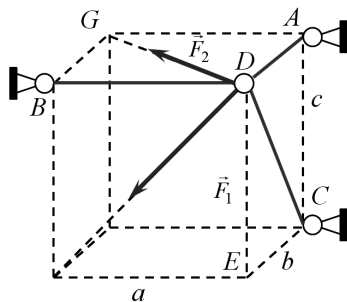
25



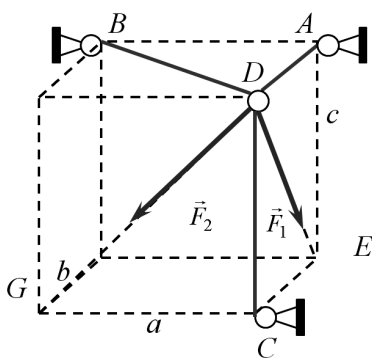
26



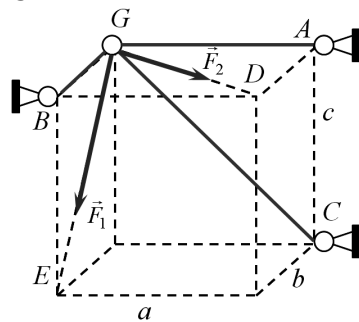
27



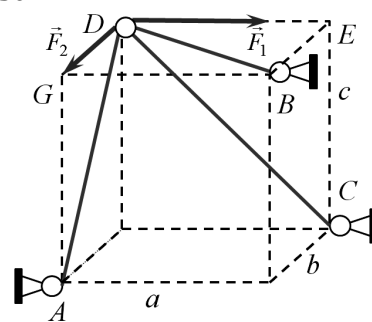
28



29



30



Пример выполнения задания

Необходимо **определить** значения реакций стержней AD , BD , CD для конструкции, изображенной на рис. 1. Размеры сторон прямоугольного параллелепипеда следующие: $a = 5$ м, $b = 2$ м, $c = 3$ м. $F_1 = 4$ Н, $F_2 = 3$ Н.

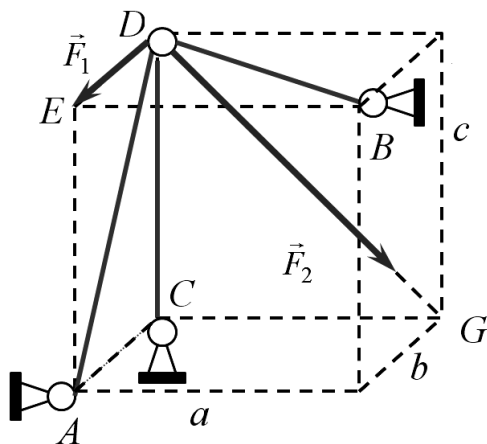


Рис. 1

Решение

Рассмотрим равновесие шарнира D . Отбросим действующие на него связи, а именно стержни AD , BD и CD , заменив их силами реакции стержней на шарнир D – $\vec{S}_A$, $\vec{S}_B$ и $\vec{S}_C$ соответственно (рис. 2). Будем считать, что стержни растянуты, в этом случае данные реакции направлены от шарнира D .

Нетрудно убедиться, что система сил, действующая на шарнир D – пространственная сходящаяся.

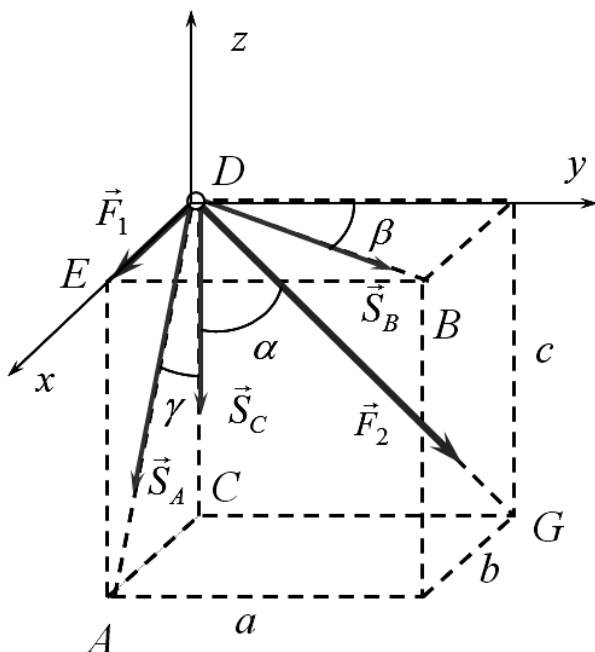


Рис. 2

Для тела, находящегося в равновесии под действием такой системы сил, можно написать три уравнения равновесия. Это равенства нулю проекций сил на оси декартовой системы координат:

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i F_{iy} = 0, \quad \sum_i F_{iz} = 0. \quad (*)$$

Поместим начало системы координат в точку D , введем углы α , β , γ (см. рис. 2). Для их определения используем то, что в прямоугольном треугольнике тангенс угла равен отношению противолежащего катета к прилежащему. Получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= a/c = 1,66, & \operatorname{tg} \beta &= b/a = 0,4, & \operatorname{tg} \gamma &= b/c = 1,66; \\ \alpha &= 1,03 \text{ рад}, & \beta &= 0,38 \text{ рад}, & \gamma &= 0,58 \text{ рад}. \end{aligned}$$

Теперь мы можем определять проекции сил на оси пространственной системы координат. Изображенные на рис. 2 силы можно разделить на два типа.

К первому принадлежат силы, параллельные одной из координатных осей, т.е. лежащие на ребрах параллелепипеда. В нашем случае это силы $\vec{S}_C$ и $\vec{F}_1$. Их проекции на ось, которой они параллельны, равны взятым с соответствующим знаком модулям сил. Знак зависит от того, сонаправлены или противоположно направлены сила и ось координат. Таким образом,

$$\begin{array}{lll} F_{1x} = F_1, & F_{1y} = 0, & F_{1z} = 0; \\ S_{Cx} = 0, & S_{Cy} = 0, & S_{Cz} = -S_C. \end{array}$$

Ко второму типу относятся силы, расположенные на гранях параллелепипеда. Они перпендикулярны одной из трех координатных осей, проекция на эту ось равна нулю. При определении проекций на оставшиеся оси координат можно использовать правила, знакомые по работе с плоскими системами сил. Так, например, угол γ является углом между силой $\vec{S}_A$ и осью z , поэтому $S_{Az} = -S_A \cos \gamma$, $S_{Ax} = S_A \sin \gamma$, $S_{Ay} = 0$. Аналогично для остальных сил:

$$\begin{array}{lll} F_{2x} = 0, & F_{2y} = F_2 \sin \alpha, & F_{2z} = -F_2 \cos \alpha; \\ S_{Bx} = S_B \sin \beta, & S_{By} = S_B \cos \beta, & S_{Bz} = 0. \end{array}$$

Подставляя найденные проекции сил в уравнения равновесия (*), получим:

$$\begin{aligned} F_1 + S_A \sin \gamma + S_B \sin \beta &= 0, \\ F_2 \sin \alpha + S_B \cos \beta &= 0, \\ -S_C - S_A \cos \gamma - F_2 \cos \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Определив входящие в эти уравнения синусы и косинусы углов и подставив модули сил F_1, F_2 , получим окончательно систему из трех линейных алгебраических уравнений для определения трех неизвестных реакций

$$4 + 0,55S_A + 0,37S_B = 0,$$

$$3 \cdot 0,86 + 0,93S_B = 0,$$

$$-S_C - 0,83S_A - 3 \cdot 0,52 = 0.$$

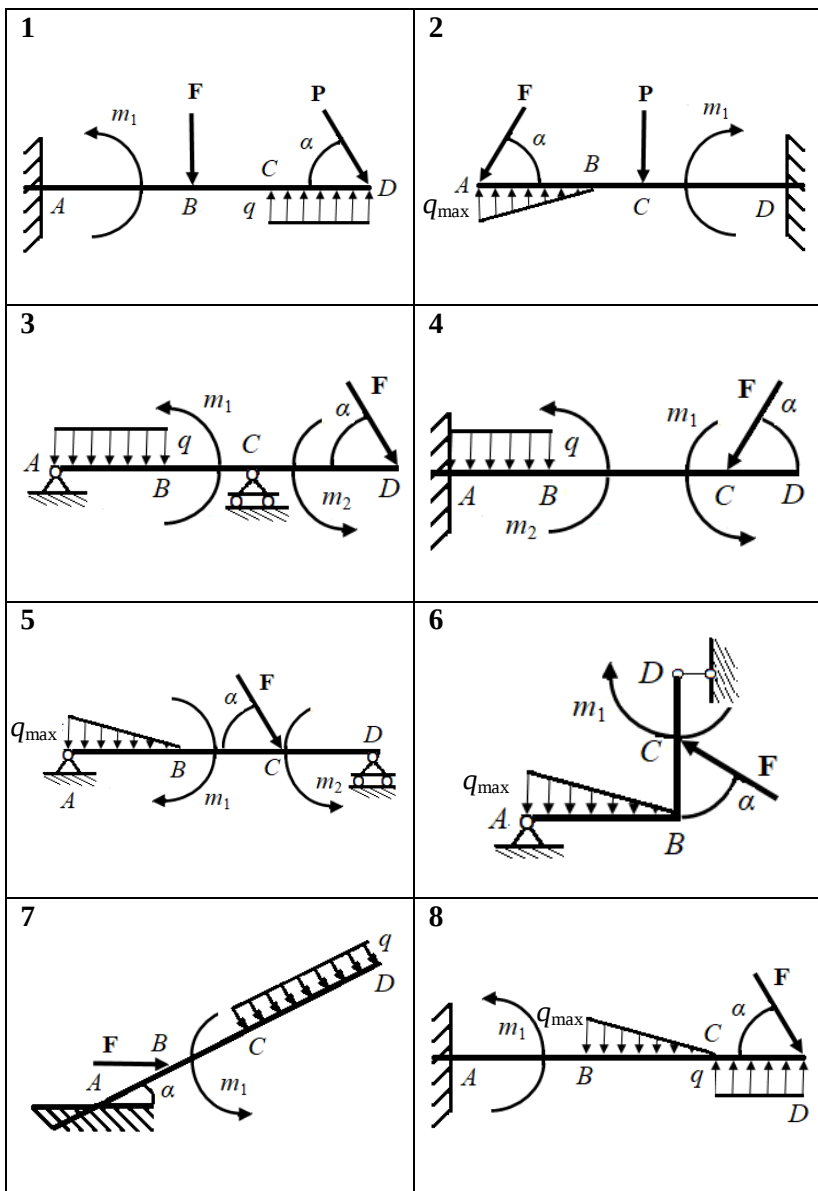
Решая их, определим искомые реакции.

Ответ: $S_A = -5,41$ Н, $S_B = -2,77$ Н, $S_C = 2,93$ Н. Знаки найденных реакций показывают, что стержни AD и BD сжаты, CD – растянут.

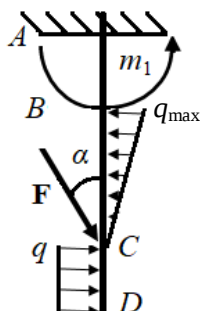
ЗАДАНИЕ 3. РАВНОВЕСИЕ ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

В данном задании необходимо определить реакции связей тел, представленных на рисунках, которые находятся в равновесии под действием плоской системы сил. Данные для решения задания приведены в таблице.

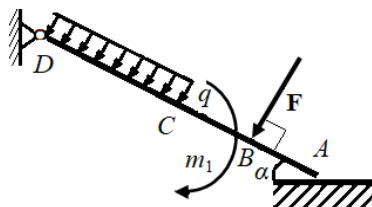
Вариант	AB, м	BC, м	CD, м	α , град	F, кН	P, кН	m_1 , кН·м	m_2 , кН·м	q, кН/м	$q_{\max}$, кН
1	6	10	12	30	100	150	30	—	15	—
2	8	14	20	45	120	170	25	—	—	10
3	5	10	22	60	140	—	15	10	8	—
4	10	16	26	60	100	—	8	12	10	—
5	7	12	20	45	50	—	20	5	—	20
6	10	8	12	50	200	—	25	—	—	15
7	5	11	15	30	110	—	15	—	12	—
8	12	10	8	60	80	—	10	—	8	14
9	7	8	7	25	70	—	22	—	10	12
10	8	12	10	30	100	—	14	—	7	—
11	4	6	4	25	50	—	10	—	—	5
12	10	7	11	45	70	—	15	—	—	8
13	12	5	8	30	120	—	12	—	—	10
14	9	7	10	60	90	—	8	—	10	—
15	6	4	5	35	80	—	10	—	12	8
16	11	3	—	45	120	—	11	—	—	8
17	12	5	—	30	100	—	10	—	12	—
18	10	7	6	40	80	—	15	—	10	4
19	9	12	7	60	50	60	9	—	8	7
20	4	7	6	30	40	55	10	—	—	6
21	8	10	5	50	60	—	17	—	—	6
22	10	5	9	60	40	70	15	—	14	5
23	7	9	5	45	65	80	7	12	—	10
24	5	8	4	30	40	60	10	—	10	—
25	10	5	7	30	100	50	7	—	—	10
26	4	10	6	25	50	—	10	12	14	7
27	5	12	8	30	55	40	14	—	10	8
28	7	9	6	60	80	60	15	—	12	6
29	10	4	8	30	70	55	10	8	9	—
30	15	11	7	45	60	90	7	12	—	10



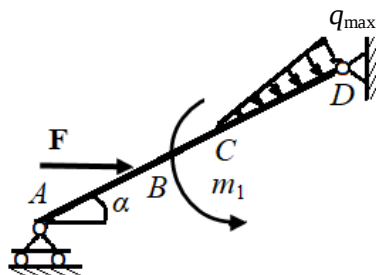
9



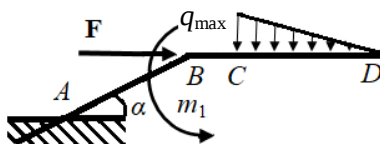
10



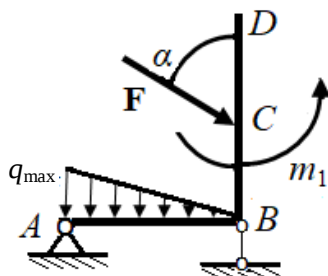
11



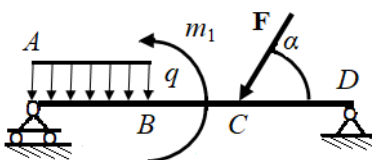
12



13



14



15	16
17	18
19	20
21	22

23	24
25	26
27	28
29	30

Пример выполнения задания

На балку AD (рис. 1), конец A которой заделан в стену, действуют распределенные нагрузки с интенсивностями $q = 10 \text{ кН/м}$ и $q_{\max} = 15 \text{ кН/м}$, сосредоточенная сила F и пара сил с моментом $m = 25 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Определить реакции заделки, если $F = 70 \text{ кН}$, $AB = 5 \text{ м}$, $BC = 6 \text{ м}$, $CD = 4 \text{ м}$, $\alpha = 60^\circ$.

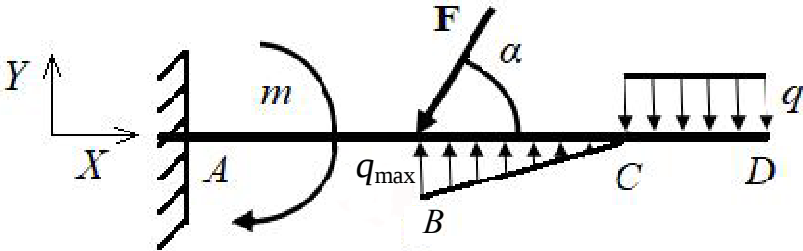


Рис. 1

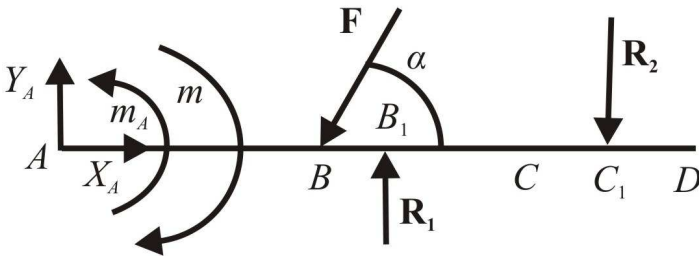


Рис. 2

Решение

Освободим балку от связей и заменим их реакциями. Одновременно распределенные нагрузки заменим их равнодействующими (рис. 2): $R_1 = q_{\max} \cdot BC/2 = 45 \text{ Н}$, приложенной в точке B_1 , так что $BB_1 = BC/3 = 2 \text{ м}$, и $R_2 = q \cdot CD = 40 \text{ Н}$, приложенной в точке C_1 . При этом $C_1D_1 = CD_1/2 = 2 \text{ м}$.

Действие жесткой заделки сводится к силе, которую ищем в виде суммы двух ортогональных составляющих X_A и Y_A , и паре сил с моментом m_A . В результате система уравнений равновесия имеет вид:

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0 : X_A - F \cos \alpha = 0, \\ \sum F_{ky} &= 0 : Y_A - F \sin \alpha + R_1 - R_2 = 0, \\ \sum m_A(F_k) &= 0 : -F \sin \alpha \cdot AB + R_1 \cdot AB_1 - R_2 \cdot AC_1 + m_A - m = 0.\end{aligned}$$

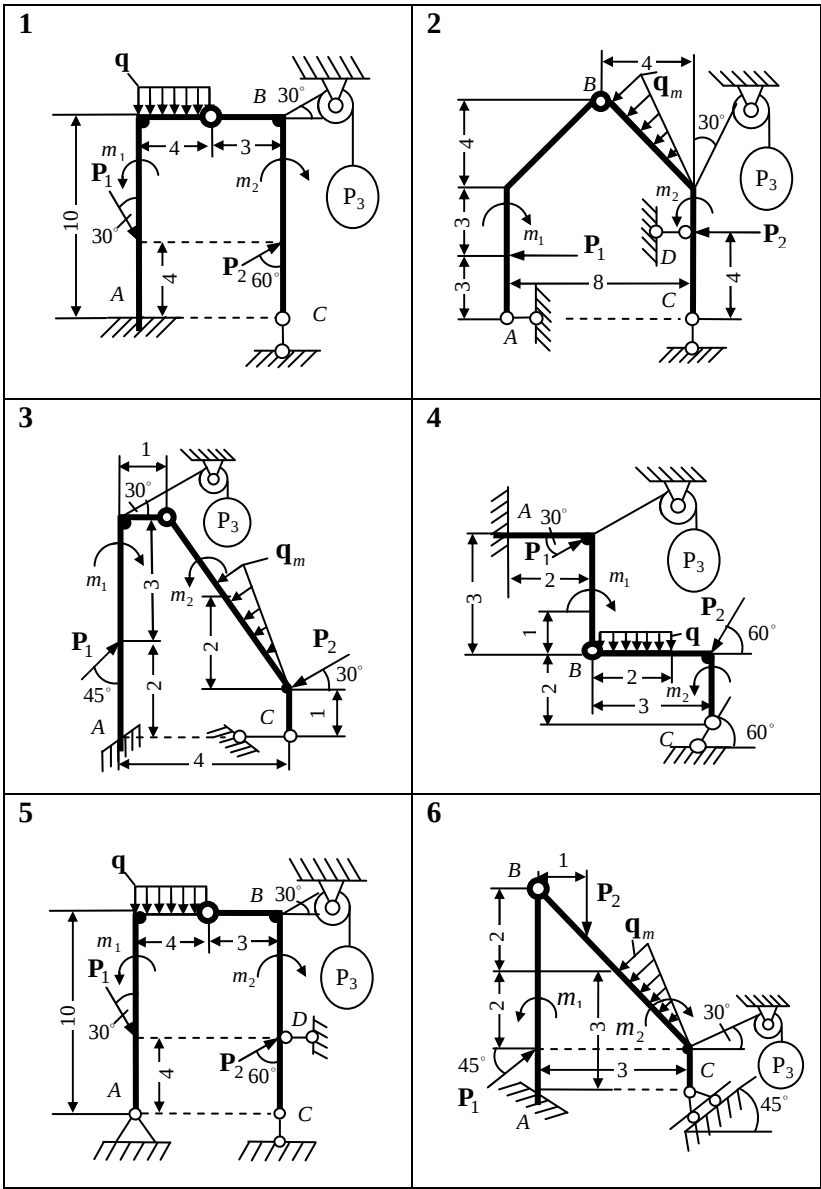
Решая ее, находим: $X_A = 35$ Н, $Y_A = 55,6$ Н, $m_A = 533,1$ Н·м. В данном примере мы получили положительные значения искоемых проекций силы и пары сил. Это означает, что истинное их направление совпадает с выбранным. Если получаем отрицательное значение, то этот «минус» у момента или силы означает, что найденное направление противоположно выбранному.

ЗАДАНИЕ 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР ДВУХСОСТАВНОЙ РАМЫ

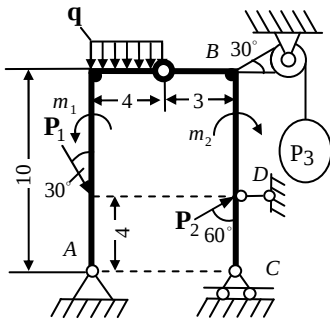
Найти реакции внешних и внутренних связей двухсоставной рамы. Схемы конструкций представлены на рисунках (размеры проставлены в метрах), нагрузка указана в таблице.

Примечание. Если в таблице одна из сил отсутствует (например, P_2 в варианте 1), а на рисунке она присутствует (например, P_2 в варианте 1), то при выполнении задания следует руководствоваться таблицей (например, в варианте 1 на рисунке силу P_2 не изображать).

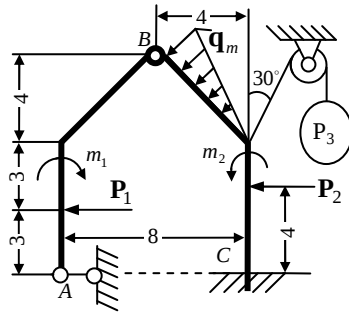
Вариант	P_1 , кН	P_2 , кН	P_3 , кН	m_1 , кН·м	m_2 , кН·м	q, q_m , кН/м	Вариант	P_1 , кН	P_2 , кН	P_3 , кН	m_1 , кН·м	m_2 , кН·м	q, q_m , кН/м
1	10	–	12	25	30	2	16	8	–	11	7	3	5
2	15	7	–	40	15	3	17	12	9	–	8	11	4
3	–	11	12	20	35	4	18	15	–	8	4	3	5
4	–	15	9	25	10	2	19	10	–	10	3	5	3
5	19	12	–	15	20	3	20	8	5	–	25	11	1
6	8	–	15	15	30	5	21	9	–	11	5	3	2
7	12	10	–	35	10	4	22	6	7	–	4	9	3
8	15	–	18	20	15	1	23	–	10	2	7	9	2
9	11	–	13	30	25	3	24	–	5	9	12	10	4
10	10	–	12	25	30	2	25	9	2	–	10	2	1
11	14	6	–	30	15	2	26	3	–	3	4	9	3
12	–	11	13	25	30	4	27	2	7	–	13	8	4
13	4	5	–	25	10	3	28	8	–	12	21	3	2
14	–	15	9	5	4	2	29	3	–	4	5	6	3
15	19	11	–	6	2	1	30	7	5	–	7	6	1



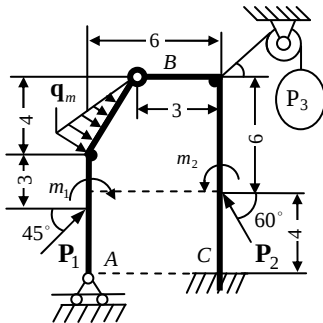
7



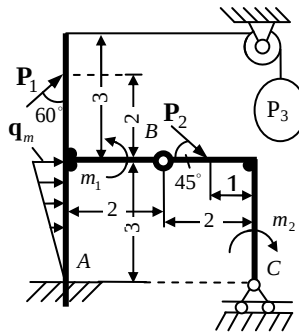
8



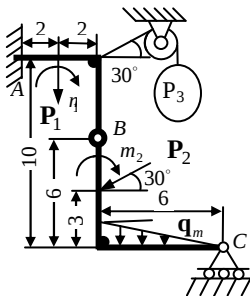
9



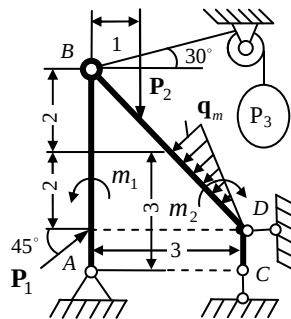
10



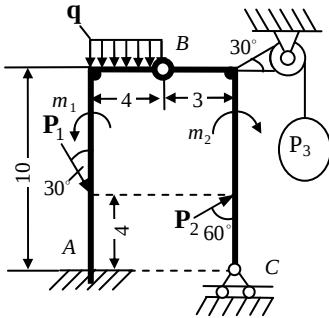
11



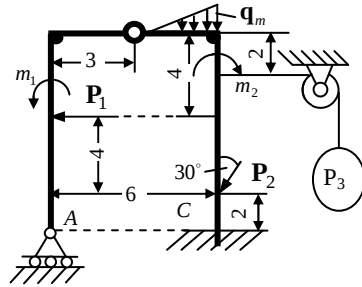
12



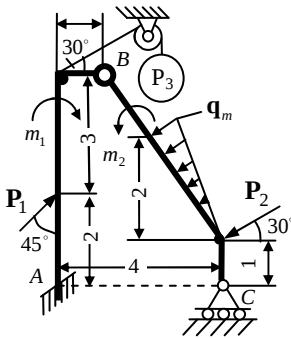
13



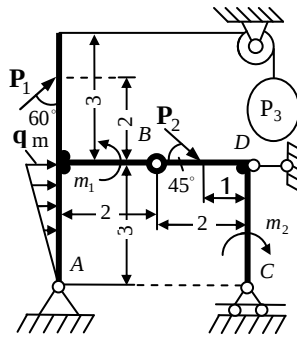
14



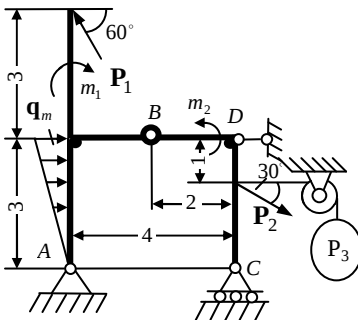
15



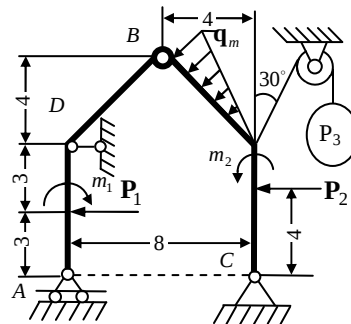
16



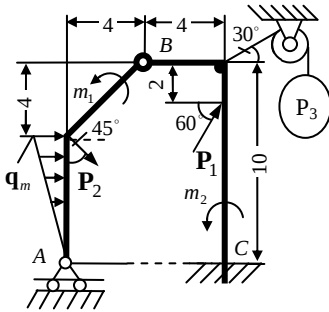
17



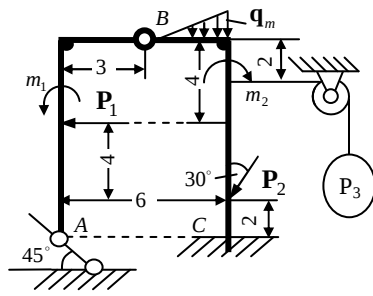
18



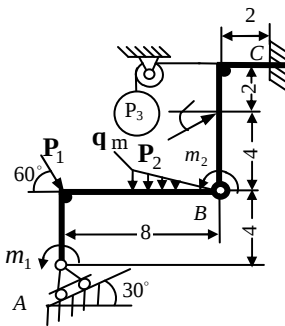
19



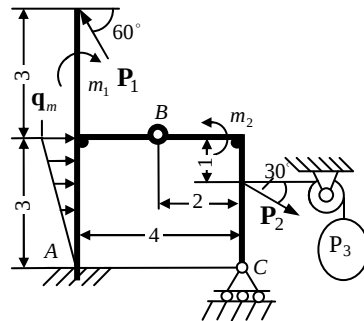
20



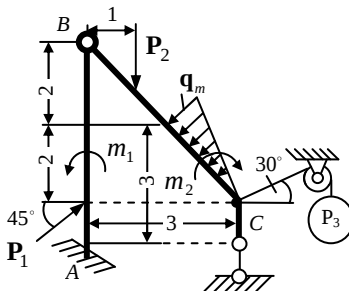
21



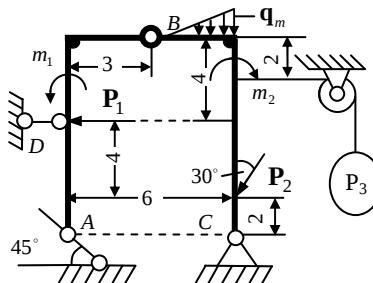
22



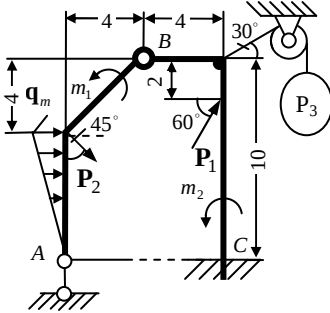
23



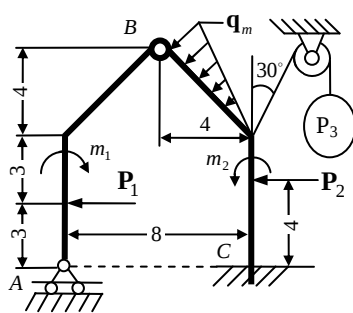
24



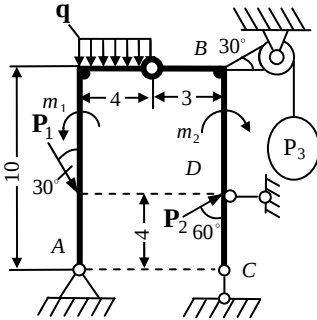
25



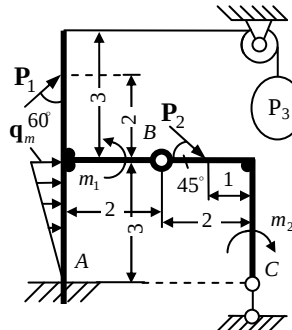
26



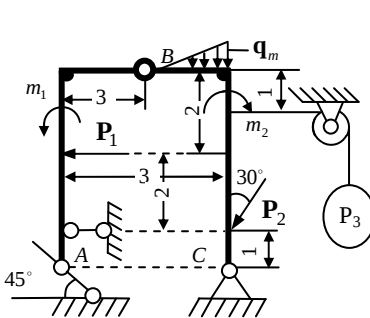
27



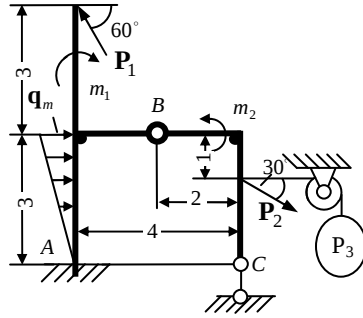
28



29



30



Пример выполнения задания

Рассмотрим составную раму, показанную на рис. 1. Рама находится в равновесии под действием сил $P_1 = 3 \text{ кН}$, $P_2 = 7 \text{ кН}$, пар сил $m_1 = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $m_2 = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$ и распределенной нагрузки с интенсивностью $q = 3 \text{ кН/м}$.

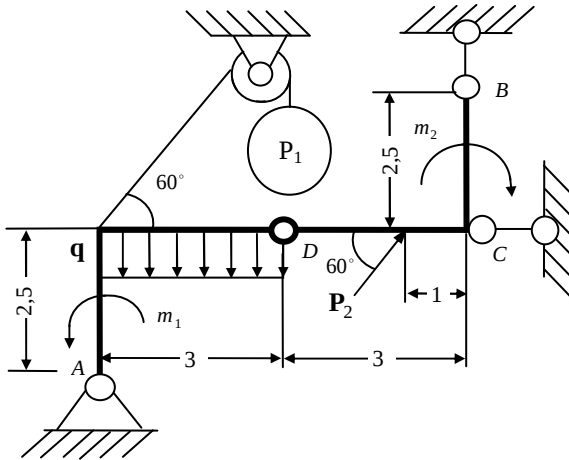


Рис. 1

Решение

Для решения задания применим метод расчленения. В результате задача сводится к исследованию условий равновесия левой (рис. 2) и правой (рис. 3) рам, составляющих данную конструкцию. Освободим конструкцию от внешних и внутренних связей, заменяя связи их реакциями. Каждое твердое тело и действующие на него силы (расчетная схема) изображены на рис. 2, 3.

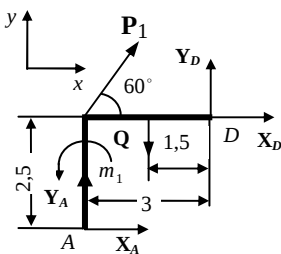


Рис. 2

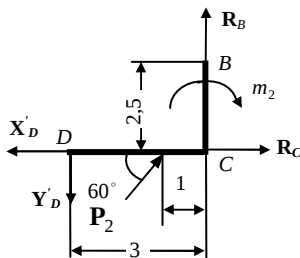


Рис. 3

Уравнения равновесия для простой рамы AD :

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0, \quad X_A + P_1 \cos 60^\circ + X_D = 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, \quad Y_A + P_1 \sin 60^\circ - Q + Y_D = 0, \\ \sum m_A(\mathbf{F}_k) &= 0, \quad m_1 - P_1 \cos 60^\circ \cdot 2,5 - Q \cdot 1,5 - X_D \cdot 2,5 + Y_D \cdot 3 = 0\end{aligned}$$

Уравнения равновесия для простой рамы BD :

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0, \quad -X'_D + P_2 \cos 60^\circ + R_C = 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, \quad -Y'_D + P_2 \sin 60^\circ + R_B = 0, \\ \sum m_D(\mathbf{F}_k) &= 0, \quad P_2 \sin 60^\circ \cdot 2 - m_2 + R_B \cdot 3 = 0.\end{aligned}$$

Кроме того, следует учесть, что

$$X'_D = X_D, \quad Y'_D = Y_D, \quad Q = 3 \cdot q = 9 \text{ кН}.$$

Решая эту систему уравнений, находим:

$$\begin{aligned}X_A &= 0,975 \text{ кН}, \quad Y_A = 3,381 \text{ кН}, \\ X_D &= -2,48 \text{ кН}, \quad Y_D = 3,021 \text{ кН}, \\ R_B &= -3,041 \text{ кН}, \quad R_C = -5,96 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Для проверки расчетов составим уравнение равновесия для составной конструкции как для одного твердого тела (метод отщепления). Соответствующая расчетная схема дана на рис. 4.

Указанные уравнения имеют вид:

$$\sum F_{kx} = X_A + P_1 \cos 60^\circ + P_2 \cos 60^\circ + R_C = 0,$$

$$\sum F_{ky} = Y_A + P_1 \sin 60^\circ - Q + P_2 \sin 60^\circ + R_B = 0,$$

$$\sum m_D(\mathbf{F}_k) = 2,5X_A - 3Y_A + m_1 - 3P_1 \sin 60^\circ + 1,5Q +$$

$$+ 2P_2 \sin 60^\circ - m_2 + 3R_B = 0.$$

При подстановке правильно рассчитанных реакций эти уравнения должны тождественно обратиться в нуль.

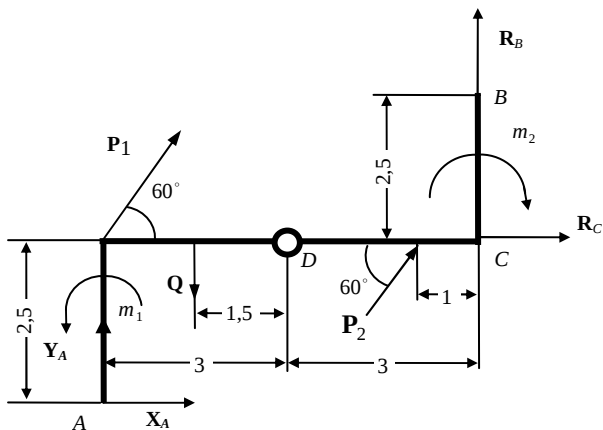
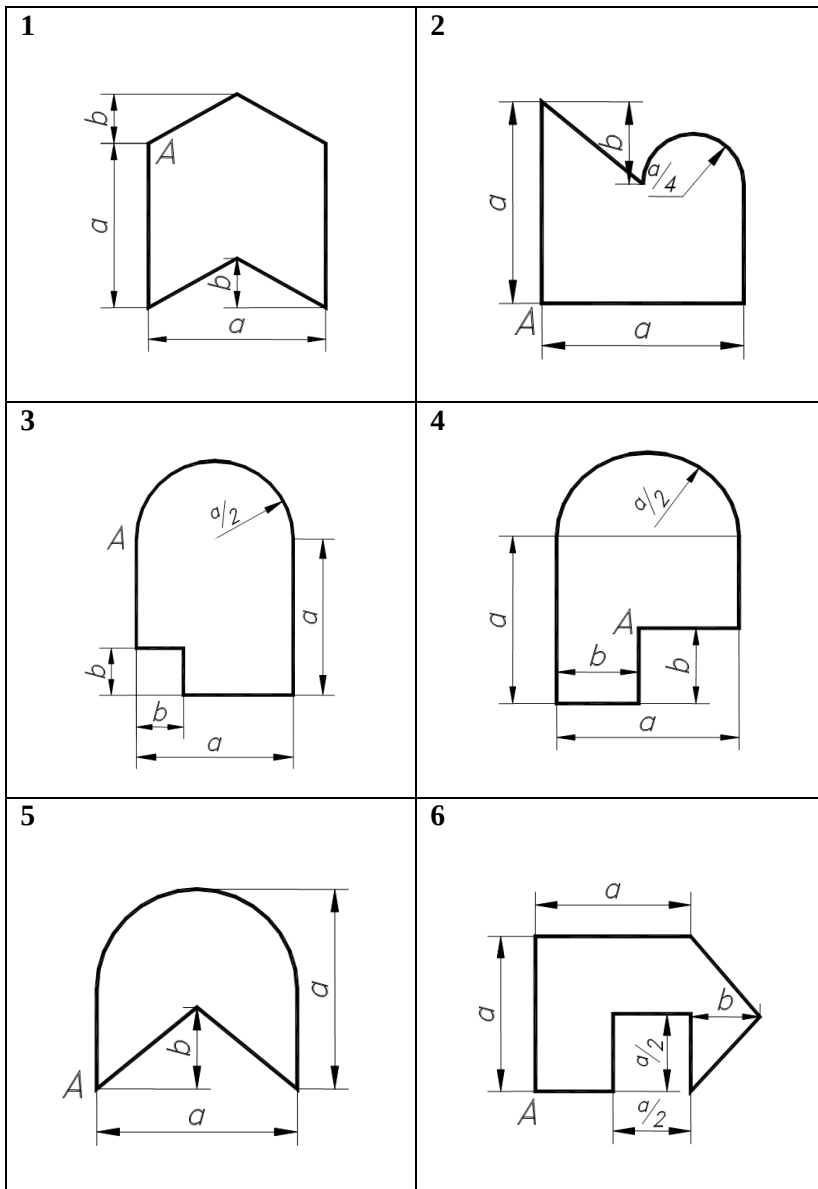


Рис. 4

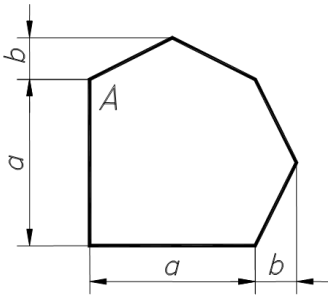
ЗАДАНИЕ 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ

Поместив начало координат в точку A , вычислить координаты центров тяжести плоских фигур (см. рисунки на страницах 75–79). Размеры a , b и c приведены в таблице.

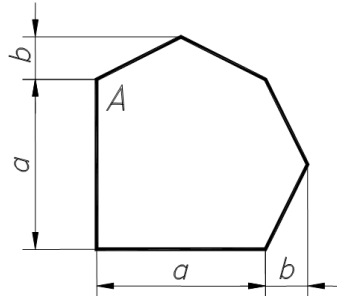
Вариант	a , м	b , м	c , м	Вариант	a , м	b , м	c , м
1	10	2	—	16	14	6	—
2	12	4	—	17	20	6	—
3	20	5	—	18	10	6	—
4	10	5	—	19	10	4	—
5	12	5	—	20	15	6	—
6	14	4	—	21	10	4	—
7	20	8	—	22	15	4	—
8	10	4	—	23	20	5	—
9	10	3	—	24	20	6	—
10	14	—	—	25	12	5	—
11	10	6	—	26	14	8	—
12	15	8	—	27	20	12	8
13	20	8	—	28	10	6	4
14	12	8	—	29	10	6	—
15	12	5	—	30	8	2	—



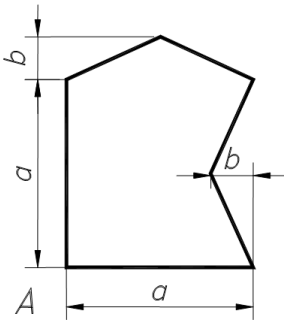
7



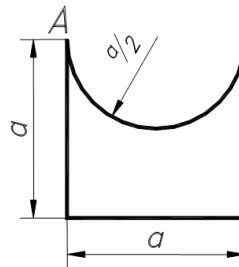
8



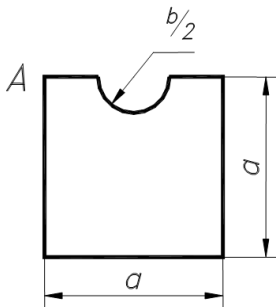
9



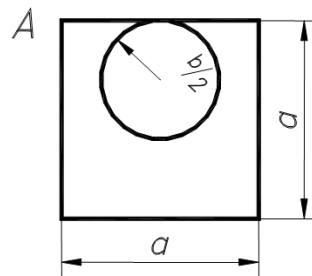
10



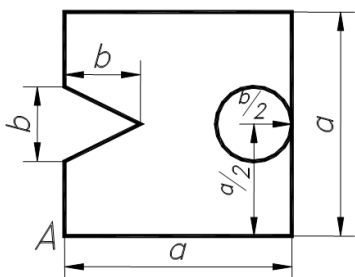
11



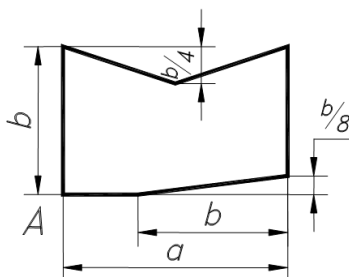
12



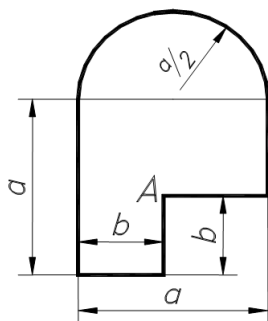
13



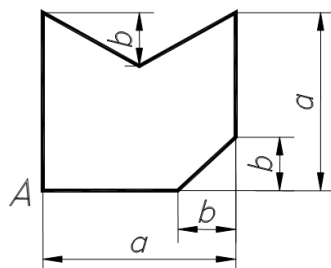
14



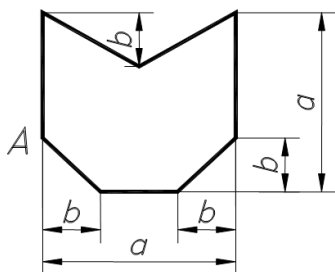
15



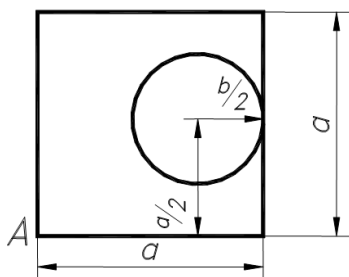
16



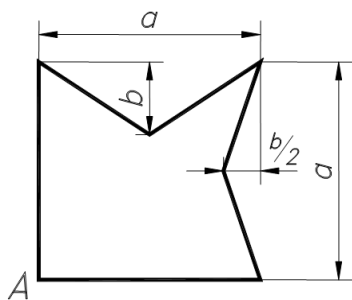
17



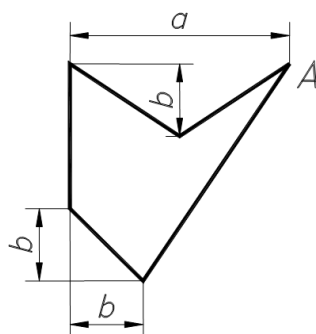
18



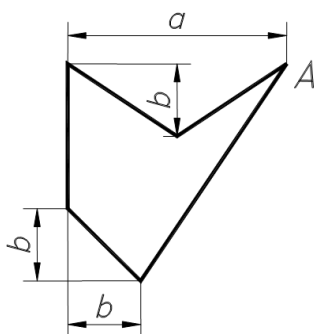
19



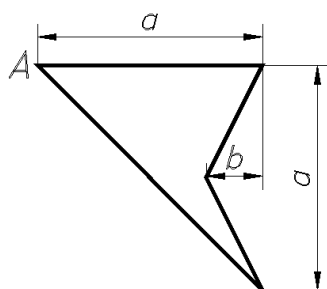
20



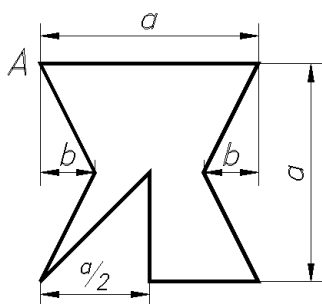
21



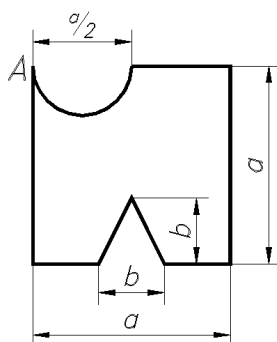
22



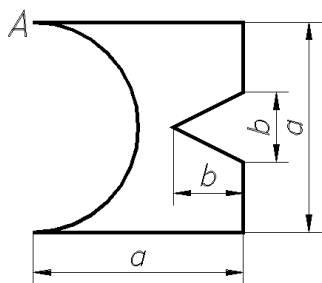
23



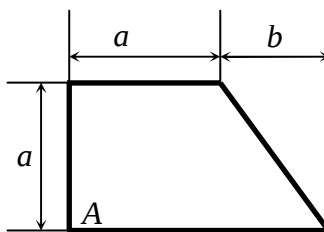
24



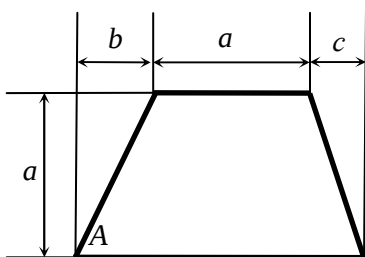
25



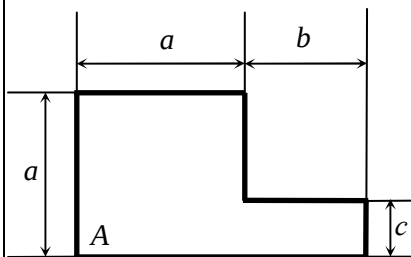
26



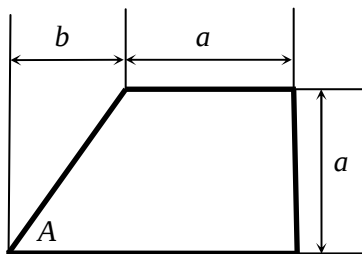
27



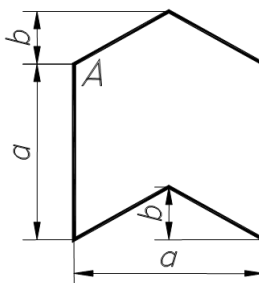
28



29

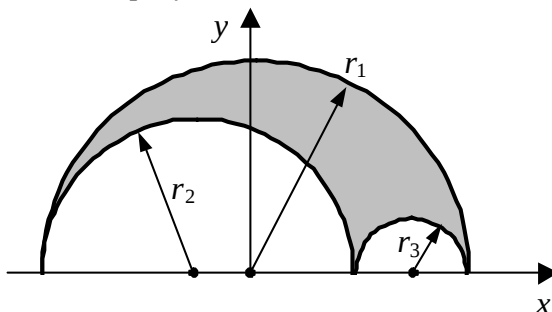


30



Пример выполнения задания

Определить центр тяжести сечения арочного перекрытия, представленного на рисунке. Здесь $r_1 = 4r$, $r_2 = 3r$, $r_3 = r = 2$ м.



Решение

Для определения координат центра тяжести фигуры применим метод отрицательных весов, согласно которому

$$x_C = \frac{x_{C_1}S_1 - x_{C_2}S_2 - x_{C_3}S_3}{S_1 - S_2 - S_3}, \quad y_C = \frac{y_{C_1}S_1 - y_{C_2}S_2 - y_{C_3}S_3}{S_1 - S_2 - S_3}.$$

Центры тяжести полукругов с радиусами r_1, r_2, r_3 соответственно:

$$x_{C_1} = 0, \quad y_{C_1} = 2r_1 \sin \alpha / 3\alpha = 16r / 2\pi,$$

$$x_{C_2} = -r, \quad y_{C_2} = 4r_2 / \pi, \quad x_{C_3} = 3r, \quad y_{C_3} = 4r_3 / 3\pi.$$

Площади же трех полукругов соответственно:

$$S_1 = 8\pi r^2, \quad S_2 = 9\pi r^2 / 2, \quad S_3 = \pi r^2 / 2.$$

В результате координаты центра тяжести фигуры определяются так:

$$x_C = \frac{9r\pi r^2 - 3r\pi r^2}{16\pi r^2 - 9\pi r^2 - \pi r^2} = r,$$

$$y_C = (3\pi r^2)^{-1} \left(\frac{16r}{3\pi} 8\pi r^2 - \frac{4r}{\pi} \frac{9\pi r^2}{2} - \frac{4r}{3\pi} \frac{\pi r^2}{2} \right) = \frac{8r}{\pi}.$$

Таким образом, $x_C = r = 2$ м, $y_C = 8r / \pi = 5,09$ м.

ЗАДАНИЕ 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР ТВЕРДОГО ТЕЛА. ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ

Задача А. Определение реакций опор твердого тела

Твердое тело в форме прямоугольного параллелепипеда закреплено сферическим шарниром в точке A , цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке B и невесомым стержнем в точке C (рис. 1, варианты 1–19, 25–30) или же двумя подшипниками в точках A и B и двумя невесомыми стержнями в точках C и D (см. рис. 1, варианты 20–24). В вершинах параллелепипеда приложены силы $F_1 = 3$ кН, $F_2 = 2$ кН, $F_3 = 4$ кН, $F_4 = 1$ кН, а в одной из граней – пара сил с моментом $m = 6$ кН·м. Длины ребер параллелепипеда составляют: параллельного оси x $a = 1$ м, оси y $b = 2$ м и оси z $c = 3$ м. Размеры параллелепипеда и величины усилий во всех вариантах одинаковы. Величины углов: $\alpha_1 = 30^\circ$ и $\alpha_2 = 60^\circ$. Плоскости действия сил и пары сил указаны на рисунках. Определить реакции опор твердого тела. При решении воспользуйтесь примером выполнения задачи А.

Задача Б. Приведение системы сил к простейшему виду

На твердое тело действует система заданных активных сил и пара сил $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4, \mathbf{m}\}$, как в задаче А (см. рисунок).

1. Определить модуль и направление главного вектора $\mathbf{R}$ (1-й инвариант I_1) системы сил $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4, \mathbf{m}\}$.

2. Определить модуль и направление главного момента системы сил относительно центра A системы сил $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4, \mathbf{m}\}$.

3. Определить 2-й инвариант

$$I_2 = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_A = R_x M_{Ax} + R_y M_{Ay} + R_z M_{Az}$$

системы сил $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4, \mathbf{m}\}$.

4. Изобразить на рисунке главный вектор и главный момент.

5. Определить, к какому простейшему виду из шести приводится система сил $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4, \mathbf{m}\}$.

При решении воспользуйтесь примером выполнения задачи Б.

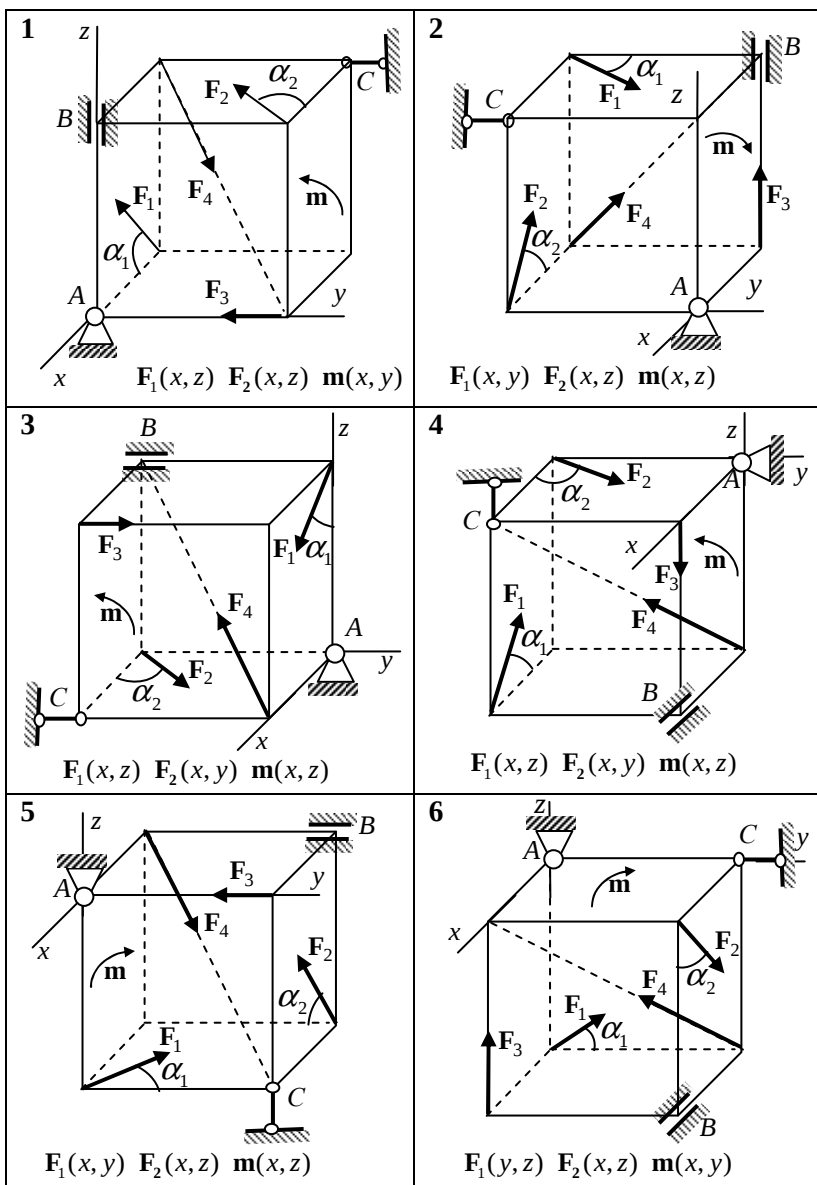


Рис. 1. Варианты 1–6

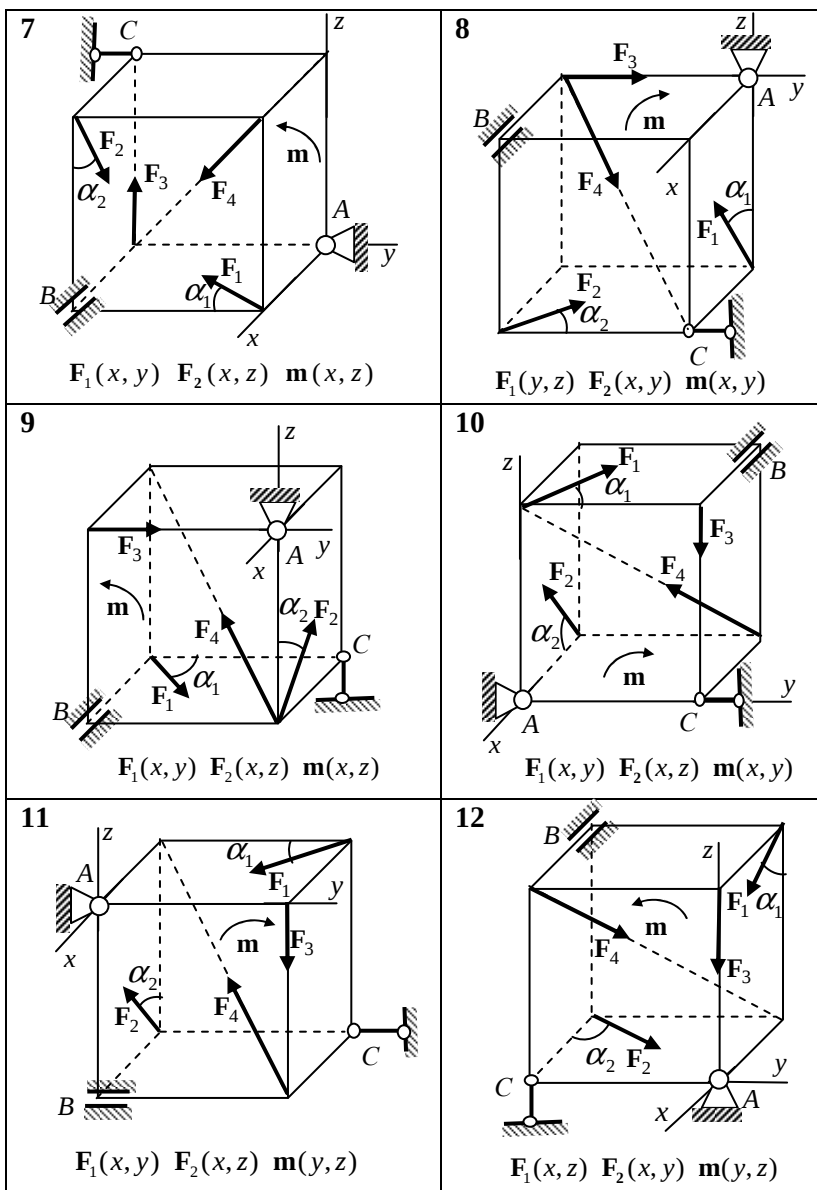


Рис. 1 (продолжение). Варианты 7–12

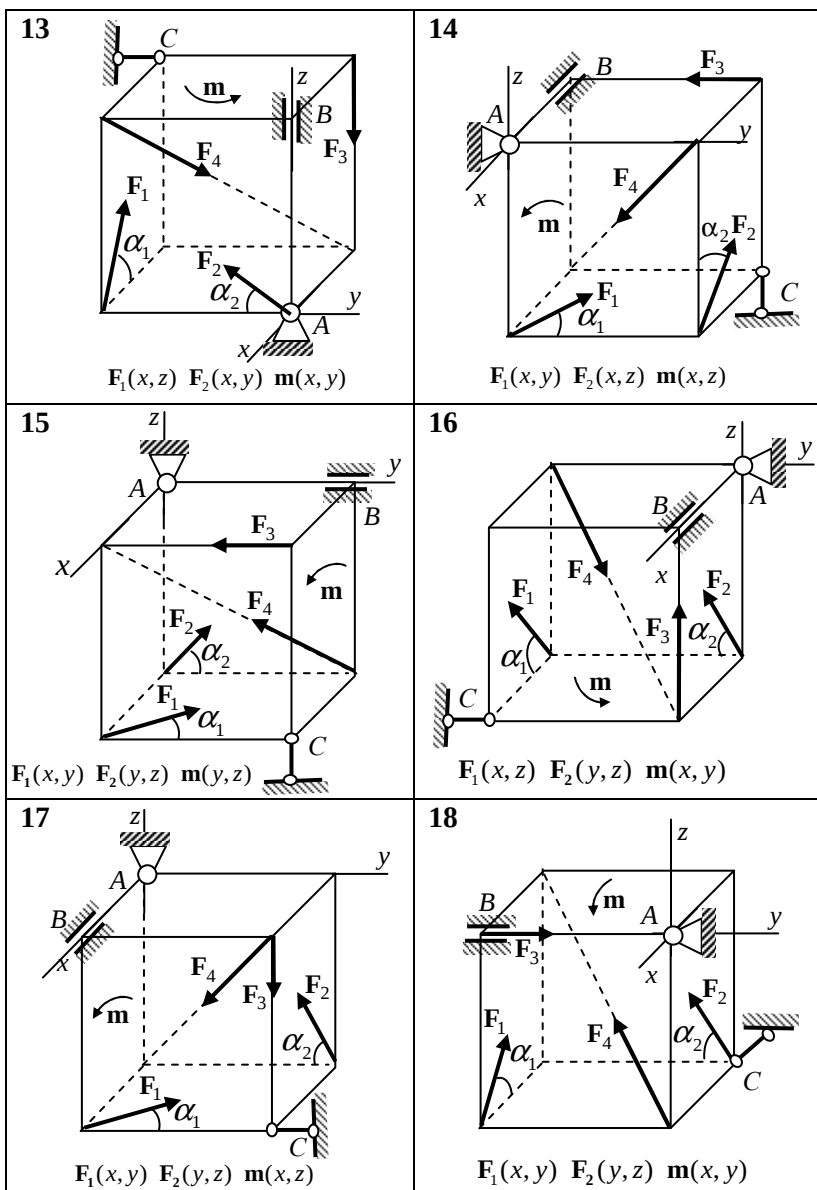


Рис. 1 (продолжение). Варианты 13–18

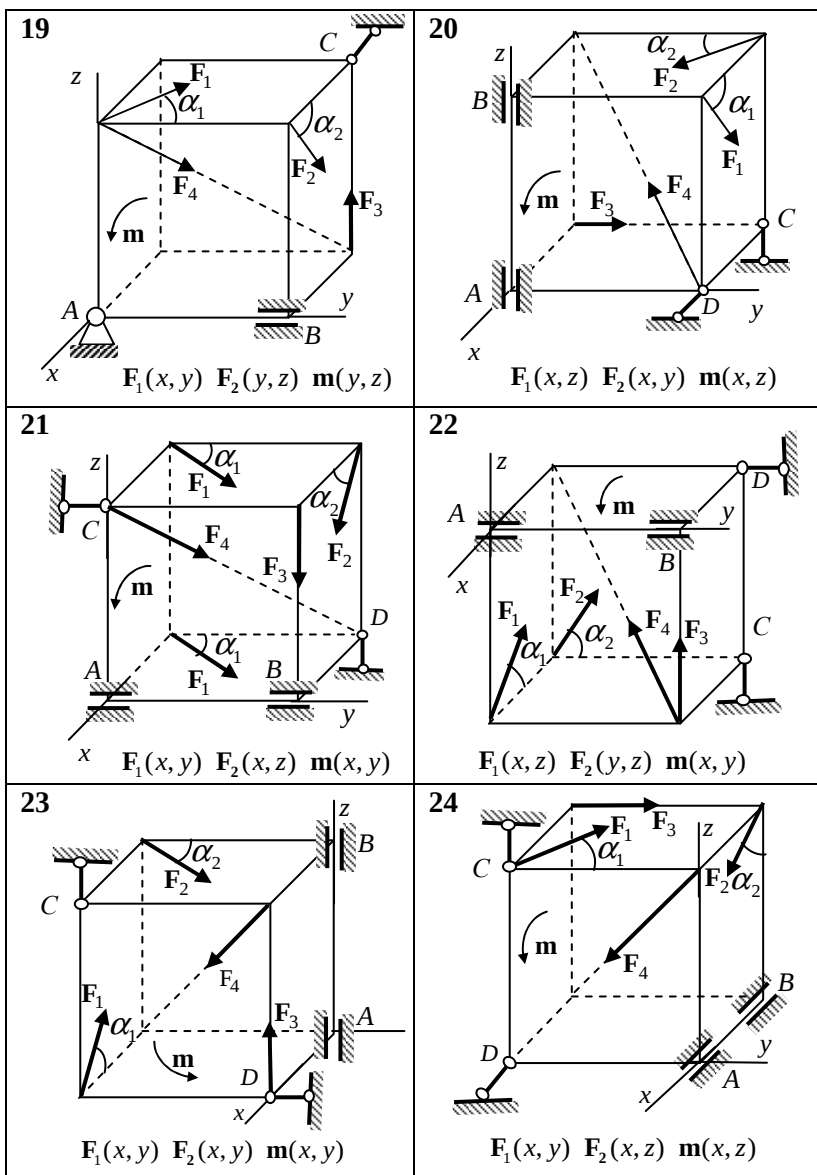


Рис. 1 (продолжение). Варианты 19–24

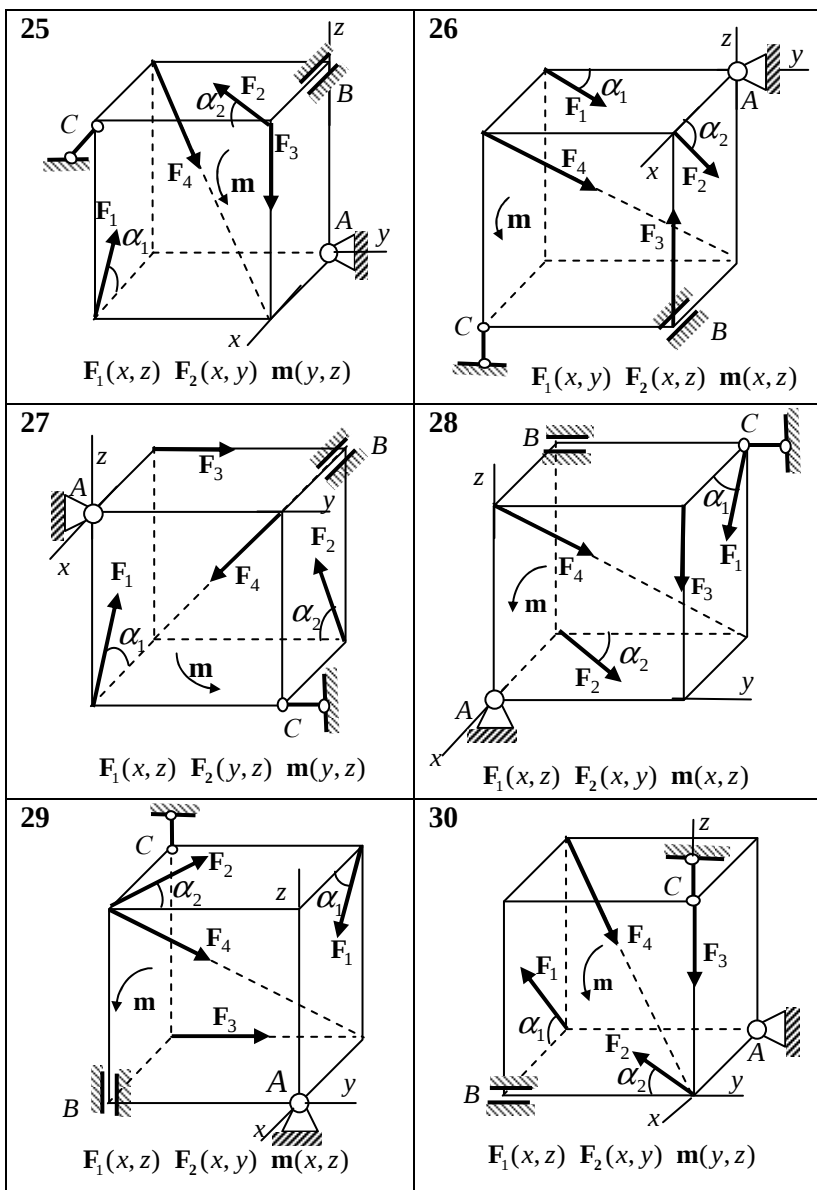
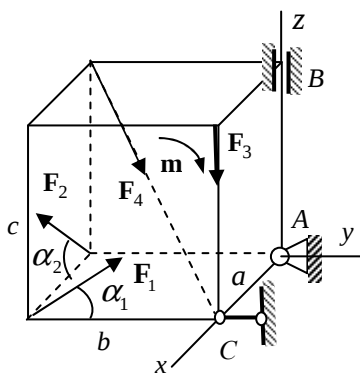


Рис. 1 (окончание). Варианты 25–30

Пример выполнения задачи А

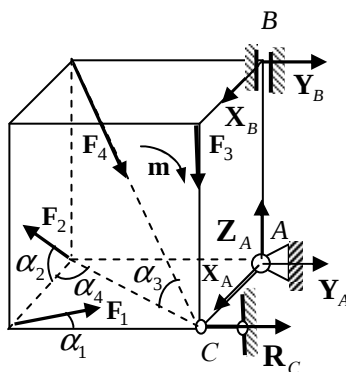
Твердое тело в форме прямоугольного параллелепипеда закреплено сферическим шарниром в точке A , цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке B и невесомым стержнем в точке C (рис. 2). Дано: $a = 1$ м, $b = 2$ м, $c = 3$ м, $F_1 = 3$ кН, $F_2 = 2$ кН, $F_3 = 4$ кН, $F_4 = 1$ кН, $m = 6$ кН·м, $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 60^\circ$.

Определить реакции опор твердого тела.



$$F_1(x, y) \quad F_2(x, z) \quad m(y, z)$$

Рис. 2



$$F_1(x, y) \quad F_2(x, z) \quad m(y, z)$$

Рис. 3

Решение

Воспользуемся аксиомой связей и заменим действие связей (сферического шарнира, подшипника и невесомого стержня) их реакциями (рис. 3). В результате получим шесть неизвестных реакций связей: $X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B, R_C$. Для их определения воспользуемся шестью уравнениями равновесия твердого тела. Таким образом, задача определения реакций опор является статически определимой.

Для решения задачи сначала вычислим синусы и косинусы углов α_3 и α_4 по заданным размерам параллелепипеда:

$$\begin{aligned}\sin \alpha_3 &= \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{3}{\sqrt{14}} = 0,8; \\ \cos \alpha_3 &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}} = 0,598; \\ \sin \alpha_4 &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0,894; \\ \cos \alpha_4 &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,447.\end{aligned}$$

Составим уравнения равновесия тела:

$$\sum F_{kx} = 0, X_A + X_B - F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 + F_4 \cos \alpha_3 \cos \alpha_4 = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0, Y_A + Y_B + R_C + F_1 \cos \alpha_1 + F_4 \cos \alpha_3 \sin \alpha_4 = 0; \quad (2)$$

$$\sum F_{kz} = 0, Z_A + F_2 \sin \alpha_2 - F_3 - F_4 \sin \alpha_3 = 0; \quad (3)$$

$$\sum m_x(\mathbf{F}_k) = 0, -Y_B \cdot c - F_2 \sin \alpha_2 \cdot b - m = 0; \quad (4)$$

$$\sum m_y(\mathbf{F}_k) = 0, X_B \cdot c + F_3 \cdot a + F_4 \cos \alpha_3 \cos \alpha_4 \cdot c = 0; \quad (5)$$

$$\begin{aligned}\sum m_z(\mathbf{F}_k) &= 0, R_C \cdot a + F_1 \cos \alpha_1 \cdot a - F_1 \sin \alpha_1 \cdot b + \\ &+ F_4 \cos \alpha_3 \cos \alpha_4 \cdot b = 0.\end{aligned} \quad (6)$$

Из уравнения (6) найдем

$$R_C = \frac{1}{a}(F_1 \sin \alpha_1 \cdot b - F_1 \cos \alpha_1 \cdot a - F_4 \cos \alpha_3 \cos \alpha_4 \cdot b) =$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot \sin 30^\circ - 3 \cdot 1 \cdot \cos 30^\circ - 1 \cdot 0,598 \cdot 0,447 \cdot 2 = -0,132 \text{ кН};$$

из уравнения (5)

$$\begin{aligned}X_B &= -\frac{1}{c}(F_4 \cos \alpha_3 \cos \alpha_4 \cdot c + F_3 \cdot a) = \\ &= -\frac{1}{3}(1 \cdot 0,598 \cdot 0,447 \cdot 3 + 4 \cdot 1) = -1,6 \text{ кН};\end{aligned}$$

из уравнения (4)

$$Y_B = -\frac{1}{c}(F_2 \sin \alpha_2 \cdot b + m) = -\frac{1}{3}(2 \sin 60^\circ \cdot 2 + 6) = -3,155 \text{ кН};$$

из уравнения (1)

$$\begin{aligned} X_A &= -X_B + F_1 \sin \alpha_1 - F_2 \cos \alpha_2 - F_4 \cos \alpha_3 \cos \alpha_4 = \\ &= 1,6 + 3 \cdot \sin 30^\circ - 2 \cdot \cos 60^\circ - 1 \cdot 0,598 \cdot 0,447 = 1,833 \text{ кН}; \end{aligned}$$

из уравнения (2)

$$\begin{aligned} Y_A &= -R_C - Y_B - F_4 \cos \alpha_3 \sin \alpha_4 = \\ &= 0,133 + 3,155 - 3 \cdot \cos 30^\circ - 1 \cdot 0,598 \cdot 0,894 = 0,155 \text{ кН}; \end{aligned}$$

из уравнения (3)

$$Z_A = F_3 + F_4 \sin \alpha_3 - F_2 \sin \alpha_2 = 4 + 1 \cdot 0,8 - 2 \cdot \sin 60^\circ = 3,068 \text{ кН}.$$

Ответ: $X_A = 1,833 \text{ кН}$, $Y_A = 0,155 \text{ кН}$, $Z_A = 3,0685 \text{ кН}$,
 $X_B = -1,6 \text{ кН}$, $Y_B = -3,155 \text{ кН}$, $R_C = -0,132 \text{ кН}$.

Пример выполнения задачи Б

Заданная, как в примере выполнения задачи А, система сил $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4, \mathbf{m}\}$ показана на рис. 3. Привести систему сил к простейшему виду.

Решение

1. Определение главного вектора:

$$\begin{aligned} R_x &= -F_1 \cdot \sin \alpha_1 + F_2 \cdot \cos \alpha_2 + F_4 \cdot \cos \alpha_3 \cdot \cos \alpha_4 = \\ &= -3 \cdot \sin 30^\circ + 2 \cdot \cos 60^\circ + F_4 \cdot 0,598 \cdot 0,447 = 0,499 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_y &= F_1 \cdot \cos \alpha_1 + F_4 \cdot \cos \alpha_3 \cdot \sin \alpha_4 = 3 \cdot \cos 30^\circ + \\ &+ 1 \cdot 0,598 \cdot 0,894 = 3,125 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$R_z = F_2 \sin \alpha_2 - F_3 - F_4 \sin \alpha_3 = 2 \cdot \sin 60^\circ - 4 - 1 \cdot 0,8 = -3,068 \text{ кН};$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{0,499^2 + 3,125^2 + 3,068^2} = 4,41 \text{ кН};$$

$$\cos(\chi, \mathbf{R}) = R_x / R = 0,499 / 4,41 = 0,113;$$

$$\cos(\gamma, \mathbf{R}) = R_y / R = 3,125 / 4,41 = 0,709;$$

$$\cos(\delta, \mathbf{R}) = R_z / R = -3,068 / 4,41 = -0,696.$$

2. Определение главного момента:

$$M_{Ax} = -F_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot b - m = -2 \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ - 6 = -9,464 \text{ кН} ;$$

$$M_{Ay} = F_3 \cdot a + F_4 \cdot \cos \alpha_3 \cdot \cos \alpha_4 \cdot c = 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0,598 \cdot 0,447 \cdot 3 = 4,8 \text{ кН} ;$$

$$\begin{aligned} M_{Az} &= F_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot a - F_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot b + F_4 \cdot \cos \alpha_3 \cdot \cos \alpha_4 \cdot b = \\ &= 3 \cdot \cos 30^\circ \cdot 1 - 3 \cdot \sin 30^\circ \cdot 2 + 1 \cdot 0,598 \cdot 0,477 \cdot 2 = 0,132 \text{ кН} ; \end{aligned}$$

$$M_A = \sqrt{M_{Ax}^2 + M_{Ay}^2 + M_{Az}^2} = \sqrt{9,464^2 + 4,8^2 + 0,132^2} = 12,29 \text{ кН}$$

3. Определение 2-го инварианта системы сил I_2 :

$$I_2 = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_A = R_x M_{Ax} + R_y M_{Ay} + R_z M_{Az} =$$

$$= -0,499 \cdot 9,496 + 3,125 \cdot 4,8 - 3,068 \cdot 0,132 = 9,872 \text{ кН}^2 \cdot \text{м}.$$

4. Главный вектор и главный момент изображены на рис. 4.

5. Система сил приводится к динаме в центре приведения, отличном от центра A , так как $I_2 \neq 0$, т.е. главный вектор и главный момент не взаимно перпендикулярны.

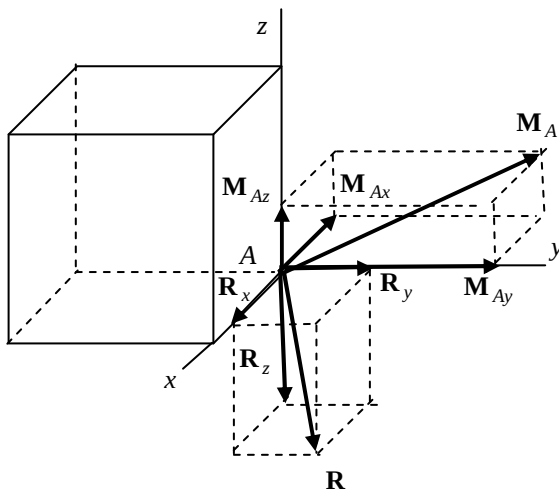


Рис. 4

Если главный момент и главный вектор заданной системы сил известны, то реакции связей можно определить из уравнений:

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= \sum F_{kx}^r + R_x = 0; \\ \sum F_{ky} &= \sum F_{ky}^r + R_y = 0; \\ \sum F_{kz} &= \sum F_{kz}^r + R_z = 0; \\ \sum m_x(\mathbf{F}_k) &= \sum m_x(\mathbf{F}_k^r) + M_{Ax} = 0; \\ \sum m_y(\mathbf{F}_k) &= \sum m_y(\mathbf{F}_k^r) + M_{Ay} = 0; \\ \sum m_z(\mathbf{F}_k) &= \sum m_z(\mathbf{F}_k^r) + M_{Az} = 0,\end{aligned}$$

где $\mathbf{F}_k^r$ – реакции связей.

Например, реакцию R_C определим из уравнения

$$\sum m_z(\mathbf{F}_k) = R_C \cdot a + M_{Az} = 0,$$

откуда

$$R_C = -M_{Az} / a = -0,132 \text{ кН}.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Учебники и учебные пособия

1. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2008. – 730 с.
2. Рудяк, В. Я. Лекции по теоретической механике / В. Я. Рудяк, В. А. Юдин. – Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2003. – Ч. 1. – 248 с.
3. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики / С. М. Тарг. – Москва : Высшая школа, 2010. – 416 с.
4. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики / А. А. Яблонский, В. Л. Никифорова. – Москва : КНОРУС, 2010. – 603 с.

Сборники задач и заданий

5. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Статика и кинематика / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – Санкт-Петербург : Политехника, 1995. – 670 с.
6. Мещерский, И. В. Задачи по теоретической механике / И. В. Мещерский. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2006. – 448 с.
7. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / под общ. ред. А. А. Яблонского. – Москва : КНОРУС, 2010. – 386 с.

Учебное издание

Белкин Александр Анатольевич
Борд Евгений Григорьевич
Краснолуцкий Сергей Леонидович
Маевский Константин Константинович
Леманов Вадим Владимирович
Ройтман Анатолий Яковлевич

СБОРНИК
ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

СТАТИКА

Учебное пособие

ISBN 978-5-7795-0863-6



Темплан 2018 г.

Редактор А.В. Тренина

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 54.НС.05.953.П.006252.06.06 от 26.06.2006 г.
Подписано к печати 21.11.2018. Формат 60×84 $\frac{1}{16}$ д.л.
Гарнитура Таймс. Бумага офсетная. Цифровая печать.
Объем 5,5 уч.-изд.л.; 6 п.л. Тираж 100 экз. Заказ №

Новосибирский государственный
архитектурно-строительный университет (Сибстрин)
630008, Новосибирск, ул. Ленинградская, 113

Отпечатано