

## Рекуррентный алгоритм оценивания градиента в системах экстремального регулирования\*

Ю.Е. ВОСКОБОЙНИКОВ, А.Г. ХАНИН

В работе предложен рекуррентный алгоритм оценивания градиента в экстремальных системах управления на основе фильтра Калмана. Модель динамической системы в пространстве состояний строится на основе аппроксимации целевой функции экстремальной системы конечным числом ряда Тейлора в окрестности экстремальной точки. Исследуются систематическая и случайная ошибки оценки градиента. Проведенный вычислительный эксперимент показал высокую помехоустойчивость предлагаемого алгоритма оценивания градиента.

**Ключевые слова:** экстремальные системы управления, вычисление градиента, рекуррентный алгоритм, фильтр Калмана.

### ВВЕДЕНИЕ

Системы экстремального управления востребованы в различных областях науки и техники: радиолокации, спутниковой навигации, системах экологического мониторинга и контроля и многих других [1, 2]. Решение задачи экстремального управления в условиях неполной априорной информации о состоянии объекта управления вызывает существенные затруднения. Эти затруднения в современных системах преодолеваются использованием градиента (производной) целевой функции для выработки необходимого управляющего воздействия, т. е. использование градиента позволяет достичь экстремальных точек (минимума или максимума) целевой функции.

Однако такой подход обуславливает определенные проблемы. Так, оценку градиента необходимо вычислять в реальном масштабе времени. Поэтому алгоритмы, требующие накопления измеренных значений целевой функции (например, построение сглаживающих сплайнов), оказываются неприменимыми.

Существующие на данный момент способы оценки градиента имеют как преимущества, так и недостатки. Кратко рассмотрим их.

Метод деления производных и метод конечных разностей просты в технической реализации, но имеют высокую чувствительность к шуму измерения целевой функции, т. е. слабую помехоустойчивость. Метод синхронного детектирования, довольно часто используемый на практике, имеет сравнительно хорошую помехоустойчивость, но недостатком является сложность его реализации: необходим источник синхронного и синфазного опорного сигнала, а также фазочувствительные детекторы и дополнительные фильтры [2].

Поэтому в данной работе строится рекуррентный алгоритм вычисления градиента, который сравнительно просто реализуется элементами цифровой техники и имеет высокую помехоустойчивость.

### 1. РЕКУРРЕНТНЫЙ АЛГОРИТМ ОЦЕНИВАНИЯ ГРАДИЕНТА

Рекуррентный алгоритм будем строить на основе теории фильтра Калмана, который нашел широкое применение в задачах фильтрации, идентификации [3–5]. Необходимым условием применения фильтра Калмана является возможность описания исследуемой динамической

---

\* Получена 25 октября 2011 г.

системы (или процесса) в пространстве состояний. При этом описание включает две модели: модель динамики вектора состояний системы и модель измерений вектора состояний. Построим эти модели применительно к рассматриваемой задаче оценивания градиента целевой функции.

Обозначим целевую функцию экстремальной системы как  $\varphi(u)$ , где  $u$  – аргумент целевой функции. Далее предположим, что в окрестности точек экстремума целевая функция является дважды дифференцируемой. Это позволяет построить следующее приближение в окрестности некоторой точки  $u^*$ :

$$\varphi(u) = \varphi(u^*) + \varphi'(u^*)(u - u^*) + \frac{1}{2} \varphi''(u^*)(u - u^*)^2 + r_2(u), \quad (1)$$

где  $r_2(u)$  – дополнительный член ряда Тейлора, который можно рассматривать как ошибку аппроксимации целевой функции первыми тремя членами ряда (1). Существуют несколько форм записи дополнительного члена. Например, дополнительный член в форме Лагранжа имеет вид

$$r_2(u) = \frac{\varphi'''(\zeta)}{3!} \cdot (u - u^*)^3, \quad (2)$$

где  $\zeta \in (u^*, u)$ , если  $u \geq u^*$ , или  $\zeta \in (u, u^*)$ , если  $u \leq u^*$ . Если целевая функция в окрестности точки экстремума является параболой, то дополнительный член равен нулю и ошибка аппроксимации отсутствует.

На практике значения целевой функции измеряются в дискретных точках с некоторой случайной погрешностью (шумом измерения). Поэтому измеренные в моменты  $u_k$  значения представим как

$$\tilde{\varphi}_k = \tilde{\varphi}(u_k) = \varphi(u_k) + \eta_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad (3)$$

где  $\eta_k$  – случайные величины с числовыми характеристиками:  $M[\eta_k] = 0$ ,  $D[\eta_k] = \sigma_k^2$ ,  $M[\eta_j \eta_k] = 0$ , если  $j \neq k$ . Последнее означает отсутствие корреляции между погрешностями в разных точках измерения.

Введем вектор состояния

$$x(k) = \begin{bmatrix} \varphi(u_k) \\ \varphi'(u_k) \\ \varphi''(u_k) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Тогда, обозначая  $u_{k+1} = u$ ,  $u_k = u^*$ , используя первые три члена ряда (1) и допуская пренебрежительно малость дополнительного члена  $r_2(u)$  (в силу гладкости целевой функции и малой величины  $u - u^*$ ), приходим к следующей модели представления целевой функции в пространстве состояний:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & u_{k+1} - u_k & \frac{(u_{k+1} - u_k)^2}{2} \\ 0 & 1 & u_{k+1} - u_k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x(k). \quad (5)$$

Модель измерений имеет вид:

$$z_{k+1} = \tilde{\varphi}(u_{k+1}) = [1 \ 0 \ 0] \cdot x(k+1) + \eta_{k+1}. \quad (6)$$

Введем матрицы

$$\Phi(k+1, k) = \begin{bmatrix} 1 & u_{k+1} - u_k & \frac{(u_{k+1} - u_k)^2}{2} \\ 0 & 1 & u_{k+1} - u_k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H = [1 \ 0 \ 0].$$

Запишем выражения (5) и (6) в виде, принятом в теории фильтра Калмана [6, 7]:

$$x(k+1) = \Phi(k+1, k) \cdot x(k), \quad (7)$$

$$z_{k+1} = H(k+1, k) \cdot x(k+1) + \eta_{k+1}. \quad (8)$$

Также сделаем «обычные» для фильтра Калмана предположения:

- вектор  $x(0)$  («стартовая точка») имеет нормальное распределение с  $M[x(0)] = \bar{0}$  – нулевой вектор и ковариационной матрицей  $V_x$ , т. е.  $x(0) \in N(m_x, V_x)$ ;
- погрешности  $\eta_k$  имеют нормальные распределения  $\eta_k \in N(0, \sigma_k^2)$ , и они не коррелированы с  $x(k)$ .

При сделанных предположениях оптимальная оценка  $\hat{x}(k+1)$ , минимизирующая СКО оценивания  $\Delta(k+1) = M[|\hat{x}(k+1) - x(k+1)|^2]$ , определяется следующим рекуррентным соотношением [6, 8]:

$$\hat{x}(k+1) = \Phi(k+1, k) \cdot \hat{x}(k) + K(k+1) \cdot [z_{k+1} - H(k+1) \cdot \Phi(k+1) \cdot \hat{x}(k)], \quad k=1, 2, \dots, \quad (9)$$

с начальным условием  $\hat{x}(0)$ , задание которого обсуждается позже. Вектор  $K(k+1)$  определяется выражениями [6, 8]:

$$K(k+1) = \frac{1}{[H \cdot V_\varepsilon(k+1|k) \cdot H^T + \sigma_{k+1}^2]} \cdot V_\varepsilon(k+1|k) \cdot H^T, \quad (10)$$

где

$$V_\varepsilon(k+1|k) = \Phi(k+1, k) \cdot V_\varepsilon(k) \cdot \Phi^T(k+1, k), \quad (11)$$

$$V_\varepsilon(k+1) = [I - K(k+1) \cdot H(k+1)] \cdot V_\varepsilon(k+1|k) \quad (12)$$

с начальным условием  $V_\varepsilon(0)$ . Матрица  $V_\varepsilon(k+1|k)$  – ковариационная матрица вектора ошибки предсказания,  $V_\varepsilon(k+1)$  – ковариационная матрица вектора ошибки оценивания  $\varepsilon(k+1) = \hat{x}(k+1) - x(k+1)$ .

Отметим некоторые особенности построенного алгоритма оценивания:

- текущая оценка  $\hat{x}(k+1)$  вектора состояния определяется двумя слагаемыми: вектором предсказания (первое слагаемое в (9)) и вектором коррекции (второе слагаемое в (9)), который зависит от нового измерения  $z_{k+1}$ ;
- матрица  $K(k+1)$  не зависит от измерений  $\{z_1, \dots, z_{k+1}\}$ , поэтому она может быть вычислена априори, т. е. до начала процедуры вычисления градиента, и ее элементы сохранены в памяти компьютера, что позволяет строить оценку  $\hat{x}(k+1)$  в реальном масштабе времени;

• вычисление ковариационной матрицы  $V_\varepsilon(k+1)$  вектора ошибки оценивания позволяет определить числовые характеристики случайной ошибки оценивания  $\xi(k+1) = \varepsilon(k+1) - M[\varepsilon(k+1)]$ , что позволяет говорить о точности алгоритма оценивания градиента.

Заметим, что вектор ошибки  $\varepsilon(k+1)$  состоит из двух слагаемых: вектора случайной ошибки  $\xi(k+1)$ , который обусловлен погрешностями измерений, и вектора систематической ошибки  $b(k+1)$ . Вектор  $b(k+1)$  в свою очередь зависит от задания «стартовой точки»  $\hat{x}(0)$ . Как правило, в большинстве случаев нет априорной информации о векторе состояний в момент  $u_0$ . Произвольное задание  $\hat{x}(0)$  (например, нулевым вектором) вызывает систематическую ошибку (иногда значительную) в начальные моменты оценивания градиента, которая затем уменьшается. Это хорошо иллюстрируют нижеприводимые результаты вычислительного эксперимента.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Для проверки работоспособности предлагаемого алгоритма вычисления градиента и ответа на ряд вопросов был проведен обширный вычислительный эксперимент с различными целевыми функциями при разных уровнях погрешностей измерений. Приведем результаты некоторых экспериментов для демонстрации поведения систематической и случайной ошибок оценивания. Целевая функция в этих экспериментах задавалась параболой и при построении оценок ее параметры были неизвестны. Управление  $u_k$  задавалось гармоническим сигналом, среднее значение которого плавно перемещалось в окрестность точки минимума целевой функции. Уровень  $\delta_\eta$  погрешности измерения определялся величиной  $\delta_\eta = \frac{\|\eta\|}{\|\phi\|}$ , где  $\|\eta\|, \|\phi\|$  – нормы векторов, составленных из последовательностей  $\{\eta_k\}, \{\phi(u_k)\}$ ,  $k = 1, \dots, N = 400$ , соответственно.

Рассмотрим влияние задания «стартовой точки»  $\hat{x}(0)$  на поведение величины систематической ошибки оценивания градиента. При этом уровень погрешности  $\delta_\eta = 0$ . На рис. 1, а, б приведены графики: точного градиента (сплошная кривая) и оценки градиента (вторая проекция вектора оценки  $\hat{x}_2(k)$  – точечная кривая) при различных смещениях второй проекции «стартового» вектора  $\hat{x}_2(0)$  от точного значения градиента  $\phi'(u_0)$ . Видно, что на начальном участке работы алгоритма оценивания («переходный процесс» алгоритма) присутствует значительная систематическая ошибка (особенно на рис. 1, б), которая затем существенно уменьшается. Аналогичный процесс уменьшения систематической ошибки наблюдался и при других векторах  $\hat{x}(0)$  и управляющих воздействиях.

Исследуем помехоустойчивость предложенного алгоритма. Для этого введем следующие числовые характеристики: точечную относительную погрешность измерения  $\delta_{\eta_k} = \frac{|\eta_k|}{|\phi(u_k)|}$ ; точечную относительную ошибку оценивания градиента (вторая проекция вектора состояния)  $\delta_{e_k} = \frac{|\hat{x}_2(k) - x_2(k)|}{|x_2(k)|}$ ; относительную ошибку оценивания на заданном ин-

$$\text{тервале } \delta_\epsilon(L) = \sqrt{\frac{\sum_{k=L}^N |\hat{x}_2(k) - x_2(k)|^2}{\sum_{k=L}^N |x_2(k)|^2}} \quad (\text{величина } L > 1 \text{ позволяет не учитывать переходный процесс рекуррентного алгоритма}).$$

На рис. 2 показаны графики величин  $\delta_{\eta_k}$  (точечная кривая) и  $\delta_{\epsilon_k}$  (сплошная кривая) при относительном уровне  $\delta_\eta = 0.05$ . Виден гармонический характер изменения точечных ошибок оценивания. Для  $\delta_\eta = 0.05$  относительная ошибка  $\delta_\epsilon(50) = 1.7 \cdot 10^{-2}$ , для  $\delta_\eta = 0.15$  —  $\delta_\epsilon(50) = 2.8 \cdot 10^{-2}$ . Видно, что при увеличении уровня погрешностей в три раза, относительная ошибка оценивания увеличивается менее чем в два раза. Это говорит о хорошей помехоустойчивости предлагаемого алгоритма оценивания градиента. Для сравнения на рис. 3 приведен график  $\delta_{\epsilon_k}$ , где оценка градиента вычислялась через конечные разности ( $\delta_\eta = 0.05$ ). Видно, что в этом случае ошибка вычисления градиента возрастает на три-четыре порядка. Значение  $\delta_\epsilon(50) = 18.32$ . Это тоже говорит о возрастании ошибки на три порядка.

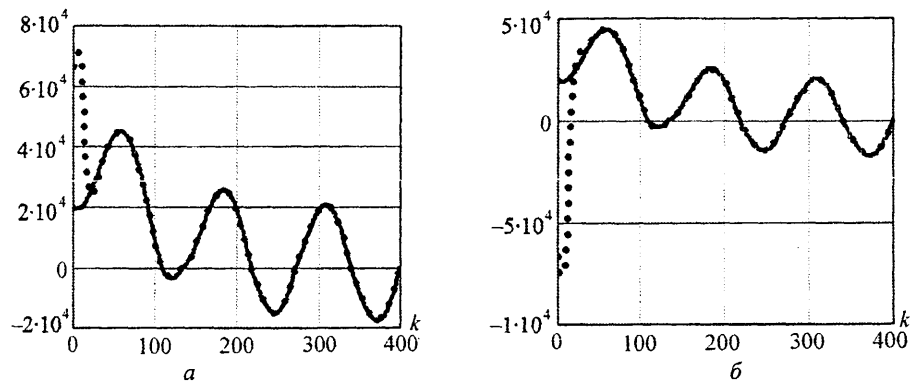


Рис. 1. Графики оценки градиента при различных начальных значениях  $\hat{x}_2(0)$

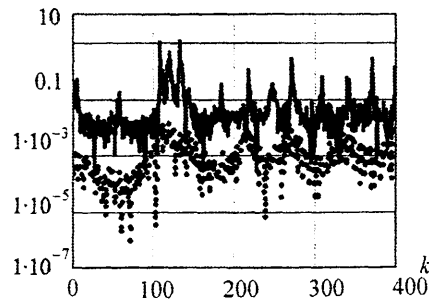


Рис. 2. График относительной ошибки (рекуррентный метод)

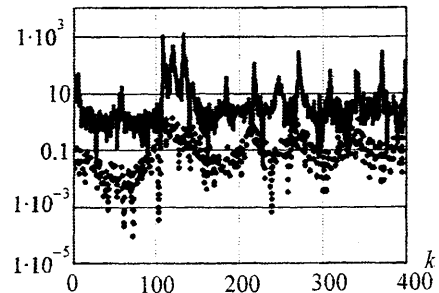


Рис. 3. График относительной ошибки (метод конечных разностей)

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен рекуррентный алгоритм оценивания градиента в системах экстремального управления. Показана высокая помехоустойчивость алгоритма по отношению к погрешностям измерения целевой функции экстремальной системы. Алгоритм не требует значи-

тельных вычислительных затрат и может вычислять оценку градиента в реальном масштабе времени. К недостаткам алгоритма следует отнести требование определенной гладкости целевой функции экстремальной системы, а также условие хорошей аппроксимации целевой функции небольшим числом членов ряда Тейлора.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Spall J.C. Introduction to Stochastic Search and Optimization: Estimation, Simulation, and Control, Wiley, Hoboken, NJ, 2003. – 618 p.
- [2] Востриков А.С., Французова Г.А. Теория автоматического регулирования: учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2003. – 364 с.
- [3] Kalman R.E. A new approach to linear filtering and prediction problems // Transactions of the ASME. – 1960. – № 3.
- [4] Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. – М.: Связь, 1976.
- [5] Мацевитый Ю.М., Мултановский А.В. Идентификация в задачах теплопроводности. – Киев: Наукова думка, 1982.
- [6] Медич Дж. Статистические оптимальные линейные оценки и управление. – М.: Энергия, 1973.
- [7] Фомин В.Н. Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация. – М.: Наука, 1984.
- [8] Воскобойников Ю.Е. Рекуррентное оценивание в динамических системах: учеб. пособие – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002. – 92 с.

*Воскобойников Юрий Евгеньевич*, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет, заслуженный работник высшей школы РФ, профессор кафедры автоматики Новосибирского государственного технического университета. Основное направление научных исследований – решение некорректных задач интерпретации данных, задачи вычислительной томографии, фильтрация сигналов и изображений. Имеет более 280 научных публикаций, в том числе 4 монографии, 12 учебников и учебных пособий.

Тел. раб. (383) 266-05-41. E-mail: voscob@mail.ru.

*Ханин Андрей Геннадьевич*, ассистент кафедры автоматики Новосибирского государственного технического университета, инженер службы времени и частоты ФГУП «Сибирский научно-исследовательский институт метрологии». Основное направление научных исследований – математическое моделирование в задачах идентификации и фильтрации сигналов, обработка траекторные измерения. Имеет 8 публикаций.

Тел. раб. (383) 210-11-85. E-mail: khanin@ngs.ru.

**Yu.E. Voskoboinikov, A.G. Khanin**

*Recursive algorithm for gradient estimating in the extreme control systems*

In article the recurrent algorithm of a gradient calculation on the basis of Kalman filter is offered. The model of dynamic system is under construction on the basis of approximation of criterion function of extreme system by final number of Taylor series. Regular and statistical errors of a gradient estimation are investigated. The made computing experiment has shown a high noise stability of offered algorithm of gradient calculation.

**Key words:** extreme control system, gradient calculation, recursive algorithm, Kalman filter.