

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (СИБСТРИН)

Кафедра физики

**ФИЗИКА
ЧАСТЬ II.
ЭЛЕКТРОСТАТИКА.
ПОСТОЯННЫЙ ТОК.
ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ**

Методические указания
по выполнению контрольных работ
для студентов направления «Строительство»
заочной формы обучения

НОВОСИБИРСК 2004

Методические указания составлены ст. преподавателем
В.Н. Анцуповой, канд. техн. наук, профессором Л.Ф. Меденцовым, канд. физ.-мат. наук, доцентом Л.В. Глазковой

Утверждены методической комиссией факультета ВиЗО
21 мая 2004 г.

Методические указания по решению контрольных задач предназначены для студентов II курса заочной формы обучения НГАСУ. В них приведены примеры решения типовых задач третьей и четвертой контрольных работ по следующим разделам: электростатика, постоянный ток, электромагнетизм.

Рецензенты:

- А.Д. Заикин, канд. техн. наук, доцент (НГАСУ);
- Е.П. Матус, канд. техн. наук, доцент (НГАСУ)

© Новосибирский государственный
архитектурно-строительный
университет (Сибстрин), 2004

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ, ЗАКОНЫ И СООТНОШЕНИЯ

Закон Кулона

$$F = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \varepsilon r^2},$$

где F – сила взаимодействия точечных зарядов Q_1 и Q_2 ; r – расстояние между зарядами; ε – диэлектрическая проницаемость; ε_0 – электрическая постоянная.

Напряженность электрического поля и потенциал

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}, \quad \varphi = \frac{W}{Q},$$

где W – потенциальная энергия точечного положительного заряда Q , находящегося в данной точке поля (при условии, что потенциальная энергия заряда, удаленного в бесконечность, равна нулю).

Сила, действующая на точечный заряд, находящийся в электрическом поле, и потенциальная энергия этого заряда

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E}, \quad W = Q\varphi.$$

Напряженность и потенциал поля, создаваемого системой точечных зарядов (принцип суперпозиции электрических полей):

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i, \quad \varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i,$$

где $\vec{E}_i, \varphi_i$ – напряженность и потенциал поля, создаваемого i -м зарядом.

Напряженность и потенциал поля, создаваемого точечным зарядом:

$$E = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \varepsilon r^2}, \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \varepsilon r},$$

где r – расстояние от заряда Q до точки, в которой определяются напряженность и потенциал.

Напряженность и потенциал поля, создаваемого проводящей сферой радиусом R на расстоянии r от центра сферы:

$$\text{а) } E = 0; \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \varepsilon R} \quad (\text{при } r < R);$$

$$\text{б) } E = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon R^2}; \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon R} \quad (\text{при } r = R);$$

$$\text{в) } E = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r^2}; \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r} \quad (\text{при } r > R),$$

где Q – заряд сферы.

Линейная плотность заряда:

$$\tau = \frac{Q}{\ell}.$$

Поверхностная плотность заряда:

$$\sigma = \frac{Q}{S}.$$

Напряженность и потенциал поля, создаваемого
распределенными зарядами

Если заряд равномерно распределен вдоль линии с линейной плотностью τ , то на линии выделяется малый участок длиной dl с зарядом $dQ = \tau dl$. Такой заряд можно рассматривать как точечный и применять формулы:

$$d\vec{E} = \frac{\tau dl}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}; \quad d\varphi = \frac{\tau dl}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r},$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, направленный от выделенного элемента dl к точке, в которой вычисляется напряженность.

Используя принцип суперпозиции электрических полей, находим интегрированием напряженность и потенциал поля, создаваемого распределенным зарядом:

$$E = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_l \frac{dl}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}; \quad d\varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_l \frac{dl}{r},$$

при этом интегрирование ведется вдоль всей длины l заряженной линии.

Напряженность поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0\epsilon}.$$

Напряженность поля, создаваемого двумя бесконечными равномерно заряженными плоскостями (с поверхностными плотностями зарядов $+\sigma_1$ и $-\sigma_2$):

$$E = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0\epsilon}.$$

При $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ и разноименных зарядах на плоскостях:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon}.$$

Связь потенциала с напряженностью:

а) $\vec{E} = -grad\varphi;$

б) $E = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{d}$ в случае однородного поля (в частности, поля между обкладками плоского конденсатора);

в) $E = -\frac{d\varphi}{dr}$ в случае поля, обладающего центральной или

осевой симметрией.

Электрический момент диполя

$$\vec{p} = |Q| \cdot \vec{l},$$

где Q – заряд, $\vec{l}$ – плечо диполя (векторная величина, направленная от отрицательного заряда к положительному и численно равная расстоянию между зарядами).

Работа сил электрического поля по перемещению заряда Q из точки поля с потенциалом φ_1 в точку поля с потенциалом φ_2

$$A_{12} = Q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Емкость

$$C = \frac{Q}{\varphi}, \text{ или } C = \frac{Q}{U},$$

где φ – потенциал проводника (при условии, что в бесконечности потенциал проводника принимается равным нулю); U – разность потенциалов пластин конденсатора.

Емкость плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d},$$

где S – площадь пластины (одной) конденсатора; d – расстояние между пластинами.

Емкость шара радиусом R :

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R.$$

Емкость батареи конденсаторов:

а) $\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$ при последовательном соединении;

б) $C = \sum_{i=1}^n C_i$ при параллельном соединении;

где n – число конденсаторов в батарее.

Энергия заряженного конденсатора:

$$W = \frac{QU}{2}, \quad W = \frac{CU^2}{2}, \quad W = \frac{Q^2}{2C}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

В вершинах квадрата со стороной a расположены два положительных и два отрицательных заряда, значение каждого из которых равно Q . Определить напряженность и потенциал электрического поля в центре квадрата.

Решение

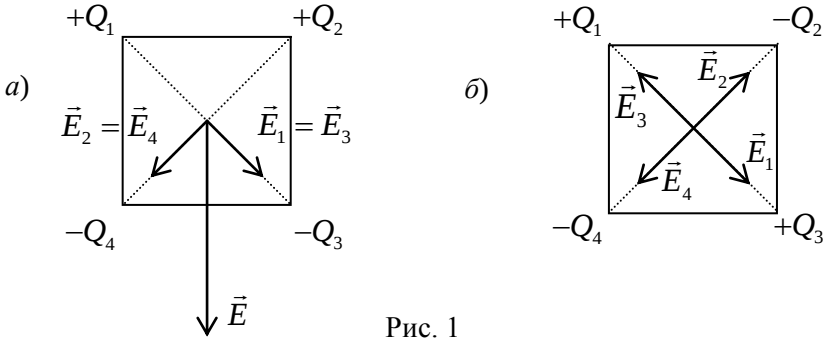


Рис. 1

Потенциал и напряженность следует определять независимо друг от друга с помощью принципа суперпозиции:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4,$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4.$$

Расстояние от любого из зарядов до рассматриваемой точки

$$r = a\sqrt{2}/2.$$

Потенциал, создаваемый зарядом Q_i в рассматриваемой точке, $\varphi_i = Q_i/(4\pi\epsilon_0 r)$, следовательно, $\varphi = \sum Q_i/(4\pi\epsilon_0 r)$.

Так как по условию задачи алгебраическая сумма зарядов равна нулю, то и результирующий потенциал $\varphi = 0$ независимо от порядка расположения зарядов.

Рассмотрим распределение зарядов, показанное на рис. 1, а.

Напряженности полей, созданных первым и третьим зарядами в центре квадрата, сонаправлены и равны по модулю: $\vec{E}_1 = \vec{E}_3$. Аналогично $\vec{E}_2 = \vec{E}_4$. Поэтому напряженность результирующего поля

$$\vec{E} = 2\vec{E}_1 + 2\vec{E}_2.$$

Векторы $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ равны по модулю и направлены ортогонально (по диагоналям квадрата). Значит, результирующий вектор направлен вертикально вниз и

$$E = 4E_1 \cos \pi/4.$$

Напряженность поля, созданного каждым из зарядов,

$$E_i = \frac{|Q_i|}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{|Q_i|}{2\pi\epsilon_0 a^2}.$$

Заряд Q_i следует брать по модулю, так как знак каждого из зарядов был учтен при изображении соответствующего вектора $\vec{E}_i$.

Окончательно

$$E = \frac{4|Q_i| \cos \pi/4}{2\pi\epsilon_0 a^2}.$$

При расположении зарядов, показанном на рис. 1, б, $E = 0$.

Задача 2

Два одинаковых шарика массой $m = 0,1$ г каждый подвешены к нитям длиной $l = 25$ см. После того, как шарикам были сообщены одинаковые заряды, они разошлись на расстояние $r = 25$ см. Определить заряды шариков.

Решение

Заряженные шарики будут находиться в равновесии, если геометрическая сумма сил, действующая на каждый из них, равна нулю:

$$\vec{F}_n + \vec{F}_{кл} + m\vec{g} = 0.$$

Равнодействующая

$\vec{F}_{рез}$ кулоновской силы и силы тяжести равна по модулю силе натяжения.

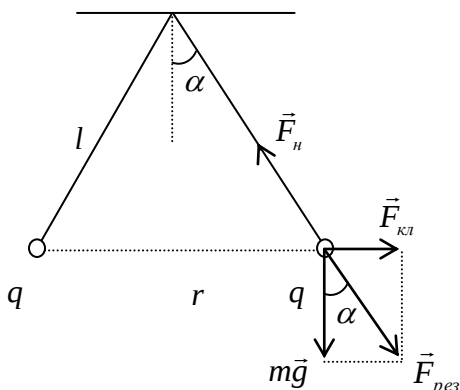
Из треугольника

$$F_{кл} = mg \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

С другой стороны

$$F_{кл} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{er^2}.$$

Объединяя эти формулы, получим



$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{\epsilon r^2} = mg \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Отсюда заряд q равен:

$$q = \sqrt{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^2 \cdot mg \cdot \operatorname{tg} \alpha}.$$

Выражая все величины в СИ ($m = 0,1 \text{ г} = 10^{-4} \text{ кг}$, $r = 0,25 \text{ м}$) и учитывая, что $\alpha = 30^\circ$ (треугольник равносторонний), $\epsilon = 1$, а $1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}$, после подстановки числовых данных получим:

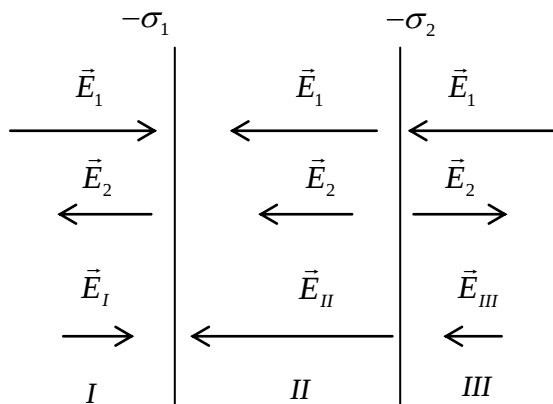
$$q = 1,09 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}.$$

Задача 3

Две пластины площадью $S = 250 \text{ см}^2$ каждая расположены на расстоянии $d = 5 \text{ см}$ друг от друга. Заряд одной пластины $-3 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$, а другой $+4 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$. Найти напряженность электрического поля вне пластин и между ними. Чему равна разность потенциалов между пластинами?

Решение

Из теоремы Остроградского–Гаусса следует, что напряжен-



ность поля, созданного одной пласти-

ной, $E = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0}$, где

$\sigma = q/S$ – поверхностная плотность заряда на пластине. В нашем случае поле создают две пластины, значит, нужно применить принцип суперпозиции полей:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

В скалярном виде, учитывая направление векторов:

$$E_I = E_1 - E_2 = \frac{|\sigma_1|}{2\varepsilon\varepsilon_0} - \frac{|\sigma_2|}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{1}{2\varepsilon\varepsilon_0} (|\sigma_1| - |\sigma_2|);$$

$$E_{II} = -E_1 - E_2 = -\frac{1}{2\varepsilon\varepsilon_0} (|\sigma_1| + |\sigma_2|);$$

$$E_{III} = E_2 - E_1 = \frac{1}{2\varepsilon\varepsilon_0} (|\sigma_2| - |\sigma_1|).$$

Выразим все величины в единицах СИ и произведем вычисления:

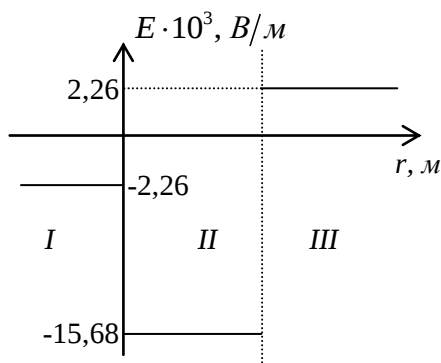
$$\varepsilon = 1; \varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}; S = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2; d = 0,05 \text{ м};$$

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{S} = \frac{3 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}}{2,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2} = 1,2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2};$$

$$\sigma_2 = \frac{q_2}{S} = \frac{4 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}}{2,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2} = 1,6 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2};$$

$$E_I = \frac{1}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} (1,2 \cdot 10^{-7} - 1,6 \cdot 10^{-7}) = -2,24 \cdot 10^3 \frac{\text{В}}{\text{м}};$$

$$E_{II} = -15,68 \cdot 10^3 \frac{\text{В}}{\text{м}}; E_{III} = 2,24 \cdot 10^3 \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$



Построим график $E = E(r)$.

Разность потенциалов между пластинами найдем из формулы, связывающей напряженность электрического поля E с разностью потенциалов U для однородных полей (поле вблизи пластин и между ними считаем однородным):

$$E_{II} = \frac{U}{d};$$

$$U = |E_{II}| \cdot d = 15,68 \cdot 10^3 \cdot 0,05 = \\ = 784 \text{ В}.$$

Задача 4

С какой силой электрическое поле заряженной бесконечной плоскости действует на каждый метр заряженной бесконечно длинной нити, помещенной в это поле? Линейная плотность заряда нити $\tau = 3 \cdot 10^{-8} \text{ Кл/см}$, а поверхностная плотность заряда плоскости $\sigma = 2 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/см}^2$.

Решение

Силу, действующую со стороны заряженной плоскости на нить, можно найти из формулы

$$\vec{F} = q\vec{E},$$

где q – заряд нити, а $\vec{E}$ – напряженность поля, созданного плоскостью.

Зная величину линейной плотности заряда нити, найдем ее заряд

$$\tau = \frac{q}{l}; q = \tau \cdot l,$$

где l – длина нити.

Из теоремы Остроградского–Гаусса известна напряженность поля, созданного бесконечной заряженной плоскостью:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0},$$

тогда $F = \tau l \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0}; \frac{F}{l} = \frac{\tau\sigma}{2\epsilon\epsilon_0}.$

Выразим величины в СИ и проведем вычисления:

$$\tau = 3 \cdot 10^{-8} \frac{Кл}{см} = 3 \cdot 10^{-6} \frac{Кл}{м}; \sigma = 2 \cdot 10^{-5} \frac{Кл}{м^2}; \varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{Ф}{м}; \varepsilon = 1;$$

$$\frac{F}{l} = \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} = 3,39 \frac{Н}{м}.$$

Задача 5

Электрическое поле создано положительно заряженной бесконечной нитью. Протон, двигаясь под действием поля вдоль линии напряженности, изменил свою скорость от 1 до 10 Мм/с, пройдя расстояние от $r_1 = 1$ см до $r_2 = 5$ см. Определить линейную плотность заряда нити.

Решение

Работа, которую совершает поле по переносу протона, равна разности его кинетических энергий:

$$A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \quad (1)$$

Так как электрическое поле нити неоднородно, то для определения работы расстояние между точками 1 и 2 разобьем на бесконечно малые отрезки dr и найдем элементарную работу dA на каждом из них:

$$dA = F \cdot dr = q_p E \cdot dr.$$

Здесь q_p – заряд протона, равный по модулю заряду электрона, а E – напряженность поля бесконечной нити, равная

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}.$$

Тогда полная работа по перемещению протона будет равна:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} dA = \frac{q_p \tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{q_p \tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Подставим это выражение в формулу (1):

$$\frac{q_p \tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

Отсюда выразим линейную плотность заряда на нити:

$$\tau = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 \left(\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \right)}{q_p \ln \frac{r_1}{r_2}} = \frac{\pi\epsilon\epsilon_0 m(v_2^2 - v_1^2)}{q_p \ln \frac{r_1}{r_2}}.$$

В нашей задаче

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}; \epsilon = 1; r_1 = 10^{-2} \text{ м}; r_2 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

$$v_1 = 10^6 \text{ м/с}; v_2 = 10^7 \text{ м/с}; m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}; q_p = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}.$$

Тогда

$$\tau = \frac{3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} (10^{14} - 10^{12})}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot \ln \frac{5}{1}} = 1,78 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Кл}}{\text{м}}.$$

Задача 6

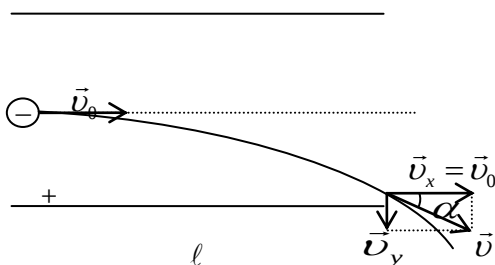
Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U = 284 \text{ В}$, влетает в плоский горизонтальный конденсатор параллельно его пластинам. Напряженность поля в конденсаторе $E = 100 \text{ В/м}$, длина конденсатора $\ell = 5 \text{ см}$. Найти направление и величину скорости электрона перед вылетом из конденсатора.

Решение

Скорость v_0 , с которой электрон влетел в конденсатор, найдем из закона сохранения энергии: работа электрического поля, разгоняющего электрон,

$A = eU$, равна изменению кинетической энергии электрона

$$A = \frac{mv_0}{2} - 0.$$



Отсюда $eU = \frac{mv_0^2}{2}$, и скорость

$$v_0 = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{19} \cdot 284}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 10^7 \text{ м/с}.$$

Так как движение по оси X равномерное, то скорость v_x постоянна во всех точках траектории $v_x = v_0$, и $\ell = v_0 t$, откуда время движения электрона в конденсаторе $t = \ell / v_0$. Одновременно с равномерным движением по оси X электрон «падает» с ускорением a на положительно заряженную пластину. Начальная скорость падения по оси Y равна нулю, тогда $v_y = at$. Ускорение найдем, записав уравнение движения электрона

$$F = ma,$$

где F – электрическая сила, которая определяется, как $F = eE$.

$$eE = ma, \text{ откуда } a = \frac{eE}{m}, \text{ и } v_y = at = \frac{eE}{m} \frac{\ell}{v_0}.$$

После вычисления $v_y = 0,88 \cdot 10^7 \text{ м/с}$. Тогда скорость электрона перед вылетом

$$v = \sqrt{v_0^2 + v_y^2} = \sqrt{10^{14} + 0,77 \cdot 10^{14}} = 1,33 \cdot 10^7 \text{ м/с}.$$

Из треугольника скоростей найдем угол α :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v} = \frac{0,88 \cdot 10^7}{1,33 \cdot 10^7} = 0,66;$$

$$\alpha \approx 65^\circ.$$

Задача 7

Плоский конденсатор емкостью 2 мкФ , заряженный до напряжения 100 В , соединяют параллельно с конденсатором емкостью 3 мкФ , заряженным до 200 В . Найти заряд и напряжение на каждом из конденсаторов после соединения. Чему будет равна энергия батареи конденсаторов?

Решение

Обозначим заряды и напряжения на конденсаторах до соединения через q_1, q_2, U_1, U_2 , а после соединения – q'_1, q'_2 ,

U'_1 , U'_2 . Так как конденсаторы соединены параллельно, то после соединения на них установилось одинаковое напряжение $U'_1 = U'_2$, или, с учетом формулы для емкости конденсатора

$$C = \frac{q}{U}; \quad \frac{q'_1}{C_1} = \frac{q'_2}{C_2}. \quad (1)$$

Запишем закон сохранения заряда: суммарный заряд до и после соединения конденсаторов останется постоянным.

$$q_1 + q_2 = q'_1 + q'_2.$$

Выразим отсюда заряд q'_2

$$q'_2 = q_1 + q_2 - q'_1 \quad (2)$$

и подставим его в уравнение (1):

$$\frac{q'_1}{C_1} = \frac{q_1 + q_2 - q'_1}{C_2}.$$

Решаем уравнение относительно q'_1 :

$$q'_1 = \frac{q_1 C_1 + q_2 C_1}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 (q_1 + q_2)}{C_1 + C_2}.$$

Заряды q_1 и q_2 найдем, зная емкость и напряжение на обкладках

$$q_1 = C_1 U_1, \quad q_2 = C_2 U_2,$$

$$q_1 = 2 \cdot 10^{-6} \Phi \cdot 100 \text{ В} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Кл};$$

$$q_2 = 3 \cdot 10^{-6} \Phi \cdot 200 \text{ В} = 6 \cdot 10^{-4} \text{ Кл};$$

$$q'_1 = \frac{2 \cdot 10^{-6} \Phi \cdot 8 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}}{5 \cdot 10^{-6} \Phi} = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}.$$

Из формулы (2):

$$q'_2 = 8 \cdot 10^{-4} \text{ Кл} - 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ Кл} = 4,8 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}.$$

Тогда

$$U'_1 = \frac{q'_1}{C_1}; U'_1 = \frac{3,2 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}}{2 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}} = 160 \text{ В},$$

$$U'_2 = U'_1 = 160 \text{ В}.$$

Энергию батареи конденсаторов найдем по формуле

$$W = \frac{CU^2}{2},$$

где C – общая емкость параллельно соединенных конденсаторов $C = C_1 + C_2$, а $U = U'_1 = U'_2$

$$W = \frac{(C_1 + C_2)(U'_1)^2}{2},$$

$$W = \frac{5 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} \cdot 160^2 \text{ В}^2}{2} = 6,4 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}.$$

ПОСТОЯННЫЙ ТОК

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ, ЗАКОНЫ И СООТНОШЕНИЯ

Постоянный ток

$$J = \frac{Q}{t},$$

где Q – заряд, прошедший через поперечное сечение проводника за время t .

Для переменного тока $J = \frac{dQ}{dt}.$

Плотность тока

$$j = \frac{J}{S},$$

где S – площадь поперечного сечения проводника.

Связь плотности тока j со средней скоростью $\langle v \rangle$ направленного движения заряженных частиц

$$j = Qn\langle v \rangle,$$

где Q – заряд частицы; n – концентрация заряженных частиц.

Закон Ома:

$$\text{а) } J = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R} \quad \text{– для участка цепи, не содержащего}$$

ЭДС, где $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ – разность потенциалов (напряжение) на концах участка цепи; R – сопротивление участка;

$$\text{б) } J = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) \pm \varepsilon}{R} \quad \text{– для участка цепи, содержащего}$$

ЭДС, где ε – ЭДС источника; R – полное сопротивление участка (сумма внешних и внутренних сопротивлений);

$$\text{в) } J = \frac{\varepsilon}{R + R_i} \quad \text{– для замкнутой (полной) цепи,}$$

где R – внешнее сопротивление цепи; R_i – внутреннее сопротивление источника тока.

Законы Кирхгофа:

$$\text{а) } \sum_{i=1}^n J_i = 0 \quad \text{– первый закон;}$$

$$\text{б) } \sum_{i=1}^n J_i R_i = \sum_{j=1}^k \varepsilon_j \quad \text{– второй закон,}$$

где $\sum_{i=1}^n J_i$ – алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле;

$\sum_{i=1}^n J_i R_i$ – алгебраическая сумма произведений сил токов на со-

противления участков; $\sum_{j=1}^k \varepsilon_j$ – алгебраическая сумма ЭДС.

Сопротивление R и проводимость G проводника:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad G = \gamma \frac{S}{l},$$

где ρ – удельное сопротивление; γ – удельная проводимость; l – длина проводника; S – площадь поперечного сечения проводника.

Сопротивление системы проводников:

а) $R = \sum_{i=1}^n R_i$ – при последовательном соединении;

б) $\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$ – при параллельном соединении,

где R_i – сопротивление i -го проводника.

Работа тока:

$$A = JU t, \quad A = J^2 R t, \quad A = \frac{U^2}{R} t.$$

Первая формула справедлива для любого участка цепи, на концах которого поддерживается напряжение U , последние две – для участка, не содержащего ЭДС.

Мощность тока:

$$P = JU, \quad P = J^2 R, \quad P = \frac{U^2}{R}.$$

Закон Джоуля–Ленца

$$Q = J^2 R t.$$

Закон Ома в дифференциальной форме

$$\vec{j} = \gamma \vec{E},$$

где γ – удельная проводимость; $\vec{E}$ – напряженность электрического поля; $\vec{j}$ – плотность тока.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 8

От источника, разность потенциалов на клеммах которого $U_0 = 10^5 \text{ В}$, требуется передать мощность $N = 5 \cdot 10^3 \text{ кВт}$ на расстояние $\ell = 5 \text{ км}$. Допустимая «потеря» напряжения в проводах $n = 1\%$. Рассчитать минимальное сечение S медного провода, пригодного для этой цели. Удельное сопротивление меди $\rho = 1,7 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{м}$.

Решение

На чертеже U_0 – разность потенциалов на клеммах источника, R_n – нагрузка потребителя, U_R – напряжение на нагрузке.



Напряжение U_0 , снимаемое с клемм источника, частично падает на проводах и частично подается потребителю:

$$U_0 = nU_0 + U_R.$$

Ток в нагрузке R_n и в проводах один и тот же, так как R_n и провода соединены последовательно. Он может быть определен из соотношения:

$$N = J \cdot U_0; \quad J = \frac{N}{U_0}. \quad (1)$$

«Потерю» напряжения в проводах можно найти по закону Ома для участка цепи:

$$U_1 = J \cdot R,$$

где R – сопротивление проводов.

По условию задачи «потери» в проводах составляют n процентов от напряжения, даваемого источником, т.е.

$$U_1 = nU_0 \text{ и } nU_0 = J \cdot R. \quad (2)$$

Сопротивление проводов можно выразить через их длину и сечение:

$$R = \rho \frac{2\ell}{S}, \quad (3)$$

(длина равна 2ℓ , так как для передачи мощности на расстояние ℓ используются два провода).

Подставим соотношения (1) и (3) в (2):

$$nU_0 = \frac{N}{U_0} \rho \frac{2\ell}{S}, \text{ откуда } S = \frac{2N\rho\ell}{nU_0^2}.$$

После подстановки данных получим $S = 8,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$.

Задача 9

С каким коэффициентом полезного действия работает аккумулятор, ЭДС которого $\mathcal{E} = 2,15 \text{ В}$, если во внешней цепи с сопротивлением $R = 0,25 \text{ Ом}$ идет ток $J = 5 \text{ А}$? Какую максимальную полезную мощность может дать аккумулятор во внешней цепи?

Решение

По определению коэффициент полезного действия η есть отношение полезной мощности ко всей мощности, выделяемой аккумулятором:

$$\eta = \frac{JU}{J\mathcal{E}} = \frac{U}{\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{E} - Jr}{\mathcal{E}},$$

где U – разность потенциалов на полюсах батареи, r – внутреннее сопротивление источника.

Максимальную полезную мощность (мощность, выделяемую на внешнем сопротивлении) источник дает в том случае, когда его внутреннее сопротивление равно сопротивлению внешнего участка R_1 :

$$R_1 = r = \frac{U}{J} = \frac{\mathcal{E} - Jr}{J}. \quad (1)$$

При таком сопротивлении ток в цепи равен:

$$J_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r} = \frac{\mathcal{E}}{2r}, \quad (2)$$

следовательно,

$$N_{\max} = J_1 U_1 = J_1 (\mathcal{E} - J_1 r).$$

Учтем формулы (1) и (2):

$$N_{\max} = \frac{\varepsilon}{2r} \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2r} r \right) = \frac{\varepsilon^2}{4r} = \frac{\varepsilon^2 J}{4(\varepsilon - Jr)}.$$

Результаты расчета:

$$\eta = 42 \%, \quad N_{\max} = 6,45 \text{ Вт}.$$

Задача 10

Четыре батареи с электродвижущими силами $\varepsilon_1 = 55 \text{ В}$, $\varepsilon_2 = 10 \text{ В}$, $\varepsilon_3 = 30 \text{ В}$, $\varepsilon_4 = 15 \text{ В}$ и внутренними сопротивлениями $r_1 = 0,3 \text{ Ом}$, $r_2 = 0,4 \text{ Ом}$, $r_3 = 0,1 \text{ Ом}$, $r_4 = 0,2 \text{ Ом}$ включены в цепь. $R_1 = 9,5 \text{ Ом}$, $R_2 = 19,6 \text{ Ом}$, $R_3 = 4,9 \text{ Ом}$. Найти токи в каждой ветви цепи.

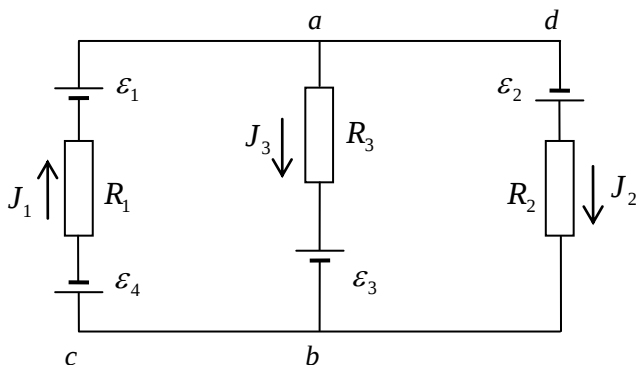
Решение

В схеме неизвестных токов три, следовательно, необходимо составить систему из трех независимых уравнений. Два уравнения получим, используя второе правило Кирхгофа, а третье уравнение даст первое правило Кирхгофа.

Выберем произвольно направления токов. Будем считать ток положительным, если он подходит к узлу, и отрицательным, если выходит из него.

Запишем первое правило Кирхгофа для узла b :

$$-J_1 + J_2 + J_3 = 0.$$



Для составления уравнений по второму правилу Кирхгофа выберем направление обхода контуров (например, по часовой стрелке). Если направление тока совпадает с направлением об-

хода, то произведение $J_i R_i$ берется со знаком «плюс»; точно так же ЭДС положительна, если «действует» в направлении обхода (не забывайте, что внутри источника заряды движутся от «-» (короткая черта) к «+» (длинная черта)).

Для контура $abca$:

$$J_1 R_1 + J_1 r_1 + J_1 r_4 + J_3 R_3 + J_3 r_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4,$$

или $J_1(R_1 + r_1 + r_4) + J_3(R_3 + r_3) = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4.$

Для контура $adba$:

$$J_2 R_2 + J_2 r_2 - J_3 R_3 - J_3 r_3 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$

или $J_2(R_2 + r_2) - J_3(R_3 + r_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$

Подставим в систему числовые данные:

$$-J_1 + J_2 + J_3 = 0; \quad (1)$$

$$10 \cdot J_1 + 5 \cdot J_3 = 10; \quad (2)$$

$$20 \cdot J_2 - 5 \cdot J_3 = 40. \quad (3)$$

Систему можно решать любым из способов, известных в математике.

Выразим из уравнения (2) ток J_1 :

$$J_1 = \frac{10 - 5 \cdot J_3}{10},$$

а из уравнения (3) – ток J_2 :

$$J_2 = \frac{40 + 5 \cdot J_3}{20},$$

и подставим их в уравнение (1):

$$-\frac{10 - 5 \cdot J_3}{10} + \frac{40 + 5 \cdot J_3}{20} + J_3 = 0.$$

Отсюда $J_3 = -0,57 \text{ А}$; $J_1 = 1,28 \text{ А}$; $J_2 = 1,85 \text{ А}$.

Знак «минус» перед током J_3 показывает, что истинный ток в ветви течет на самом деле в противоположном направлении.

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ, ЗАКОНЫ И СООТНОШЕНИЯ

Связь магнитной индукции $\vec{B}$ с напряженностью магнитного поля $\vec{H}$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H},$$

где μ — магнитная проницаемость изотропной среды; μ_0 — магнитная постоянная. Для вакуума $\mu = 1$, и тогда индукция магнитного поля

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}.$$

Закон Био–Савара–Лапласа

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \left[d\vec{l} \times \vec{r} \right] \frac{J}{r^3}, \text{ или } dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{J \sin \alpha}{r^2} dl,$$

где $d\vec{B}$ — индукция магнитного поля, создаваемого элементом проводника длиной dl с током I ; $\vec{r}$ — радиус-вектор, направленный от элемента проводника к точке, в которой определяется магнитная индукция; α — угол между радиус-вектором и направлением тока в элементе проводника.

Магнитная индукция в центре кругового тока (N витков):

$$B = \frac{\mu_0 \mu NJ}{2R},$$

где R — радиус кругового витка.

Магнитная индукция на оси кругового тока (N витков):

$$B = \frac{\mu_0 \mu R^2 NJ}{2(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}},$$

где h — расстояние от центра витка до точки, в которой определяется магнитная индукция.

Магнитная индукция поля прямого бесконечного проводника с током:

$$B = \frac{\mu_0 \mu J}{2\pi r},$$

где r – кратчайшее расстояние от провода до точки, в которой определяется магнитная индукция.

Магнитная индукция поля, создаваемого отрезком прямого провода с током:

$$B = \frac{\mu_0 \mu J}{4\pi r} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2),$$

где α_1 – угол между радиус-вектором, проведенным из начала проводника в определяемую точку, и направлением тока в проводнике; α_2 – угол между радиус-вектором, проведенным из конца проводника в точку, и продолжением проводника.

Магнитная индукция на оси соленоида бесконечной длины (когда длина соленоида во много раз больше его диаметра)

$$B = \mu_0 \mu n J,$$

где n – число витков соленоида на единице длины соленоида.

Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле (закон Ампера)

$$\vec{F} = J \cdot [\vec{l} \times \vec{B}], \text{ или } F = J B l \sin \alpha,$$

где l – длина провода; α – угол между направлением тока в проводе и вектором магнитной индукции $\vec{B}$. Это выражение справедливо для однородного магнитного поля и прямого отрезка проводника. Если поле неоднородно и провод не является прямым, то закон Ампера можно применять лишь к каждому элементу провода в отдельности:

$$d\vec{F} = J \cdot [d\vec{l} \times \vec{B}].$$

Магнитный момент плоского контура с током:

$$\vec{p}_m = J S N \vec{n},$$

где S – площадь контура; N – число витков в контуре, $\vec{n}$ – нормаль к поверхности S .

Механический (вращательный) момент, действующий на контур с током, помещенный в однородное магнитное поле:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}] \text{ или } M = p_m B \sin \alpha,$$

где α – угол между векторами $\vec{p}_m$ и $\vec{B}$.

Потенциальная энергия (часть полной потенциальной энергии, которая обусловлена существованием вращательного момента) контура с током в магнитном поле:

$$\Pi_{\text{мех}} = -(\vec{p}_m \cdot \vec{B}) \text{ или } \Pi_{\text{мех}} = -p_m B \cos \alpha.$$

Отношение магнитного момента p_m к механическому L (моменту импульса) заряженной частицы, движущейся по круговой орбите:

$$\frac{p_m}{L} = \frac{Q}{2m},$$

где Q – заряд частицы; m – масса частицы.

Сила Лоренца:

$$\vec{F} = Q[\vec{v} \times \vec{B}], \text{ или } F = QBv \sin \alpha,$$

где $\vec{v}, (v)$ – скорость частицы, α – угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$.

Магнитный поток:

а) в случае однородного магнитного поля и плоской поверхности:

$$\Phi = BS \cos \alpha \text{ или } \Phi = B_n S = BS_n,$$

где S – площадь контура; α – угол между нормалью к плоскости контура и вектором магнитной индукции; B_n – проекция вектора магнитной индукции на нормаль к поверхности, S_n – проекции поверхности S на направление, перпендикулярное вектору $\vec{B}$;

б) в случае неоднородного поля и произвольной поверхности:

$$\Phi = \int_S B_n dS,$$

где интегрирование ведется по всей поверхности S .

Потокоцепление (полный поток):

$$\Psi = N \Phi.$$

Эта формула верна для соленоида и тороида с равномерной намоткой плотно прилегающих друг к другу витков.

Работа по перемещению замкнутого контура в магнитном поле:

$$A = J \Delta \Phi.$$

ЭДС индукции:

$$\varepsilon = -\frac{d\Psi}{dt}.$$

Разность потенциалов на концах проводника, движущегося со скоростью $\vec{v}$ в магнитном поле,

$$U = Blv \sin \alpha,$$

где l – длина проводника; α – угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$.

Заряд, протекающий по замкнутому контуру при изменении магнитного потока, пронизывающего контур:

$$Q = -\frac{\Delta \Psi}{R} = -N \frac{\Delta \Phi}{R},$$

где R – сопротивление контура.

Индуктивность контура (с одним витком):

$$L = \frac{\Phi}{J}.$$

Индуктивность катушки (с N витками):

$$L = \frac{\Psi}{J} = N \frac{\Phi}{J}.$$

Индуктивность соленоида:

$$L = \mu_0 \mu n^2 V,$$

где n – число витков на единицу длины соленоида; V – объем соленоида.

Мгновенное значение силы тока в цепи, содержащей сопротивление R и индуктивность L :

$$\text{а) } J = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \text{ (при замыкании цепи), где } \varepsilon \text{ – ЭДС источника тока; } t \text{ – время, прошедшее после замыкания цепи;}$$

$$\text{б) } J = J_0 e^{-\frac{R}{L}t} \text{ (при размыкании цепи), где } J_0 \text{ – сила тока в цепи в момент времени } t = 0; t \text{ – время, прошедшее с момента размыкания цепи.}$$

Энергия магнитного поля, создаваемого током в проводнике, контуре, соленоиде

$$W = \frac{L J^2}{2}.$$

Объемная плотность энергии магнитного поля (отношение энергии магнитного поля к его объему)

$$w = \frac{BH}{2}, \text{ или } w = \frac{B^2}{(2\mu_0\mu)}, \text{ или } w = \frac{\mu_0\mu H^2}{2},$$

где B – магнитная индукция; H – напряженность магнитного поля.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 11

По контуру, изображенному на рисунке, идет ток $J = 10 \text{ А}$. Определить магнитную индукцию в точке O , если радиус дуги $R = 0,1 \text{ м}$, $\alpha = 60^\circ$.

Решение

Разобьем весь контур на три участка: дугу AB и прямолинейные отрезки BC и CA . Тогда результирующую индукцию в точке O найдем по принципу суперпозиции магнитных полей:

$$\vec{B} = \vec{B}_{AB} + \vec{B}_{BC} + \vec{B}_{CA}.$$

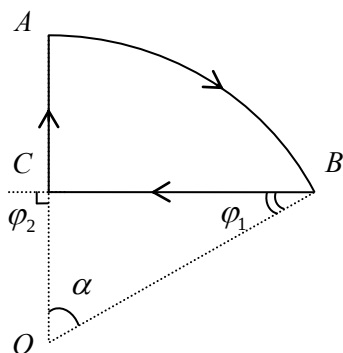
Индукция отрезка CA в точке O равна нулю, поэтому

$$\vec{B} = \vec{B}_{AB} + \vec{B}_{BC}.$$

Применив правило буравчика, находим, что вектор $\vec{B}_{AB}$ в точке O направлен «от нас», а вектор $\vec{B}_{BC}$ – «на нас», и в скалярном виде

$$B = B_{BC} - B_{AB},$$

если принять направление вектора $\vec{B}_{BC}$ за положительное.



Поскольку угол $\alpha = 60^\circ$, дуга AB составляет $1/6$ часть окружности. Согласно закону Био–Савара–Лапласа, индукция в центре кругового витка

$$B = \mu\mu_0 \frac{J}{2R},$$

тогда $B_{AB} = \frac{1}{6} \mu\mu_0 \frac{J}{2R} = \frac{\mu\mu_0 J}{12R}.$ (1)

Для вычисления индукции, создаваемой в точке O отрезком BC , применим формулу для поля прямолинейного проводника конечной длины:

$$B_{BC} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{J}{a} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2).$$

Здесь $a = OC = R \sin \varphi_1 = R/2$; $\varphi_1 = 30^\circ$; $\varphi_2 = 90^\circ$. Поэтому

$$B_{BC} = \frac{2\mu\mu_0 J}{4\pi R} (\cos 30^\circ - \cos 90^\circ) = \frac{\sqrt{3}\mu\mu_0}{4\pi} \frac{J}{R}. \quad (2)$$

С учетом (1) и (2), получим:

$$B = \frac{\mu\mu_0 J}{R} \left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} - \frac{1}{12} \right).$$

Произведем вычисления, учитывая, что $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$, $\mu = 1$:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10}{0,1} \left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} - \frac{1}{12} \right) = 6,9 \cdot 10^{-6} \text{ Тл}$$

Результирующий вектор индукции в точке O направлен в сторону вектора $\vec{B}_{BC}$, т.е. «на нас».

Задача 12

По прямому горизонтально расположенному проводу проходит ток $J_1 = 5 \text{ А}$. Под ним находится другой, параллельный ему алюминиевый провод, по которому пропускают ток $J_2 = 1 \text{ А}$. Расстояние между проводами $d = 1 \text{ см}$. Какова долж-

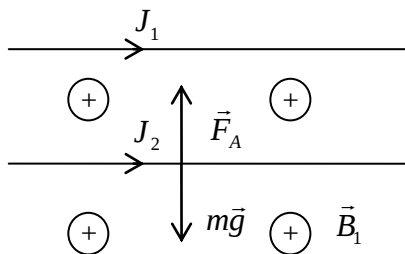
на быть площадь поперечного сечения S второго провода, чтобы он находился в состоянии равновесия незакрепленным? Плотность алюминия $\rho = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

Решение

Нижний проводник находится в равновесии, значит, сила тяжести уравнивается силой Ампера, действующей на него со стороны магнитного поля проводника с током J_1 :

$$F_A = mg. \quad (1)$$

Направление тока J_1 выберем сами.



Чтобы F_A была направлена вверх, ток J_2 по направлению должен совпадать с током J_1 . Его направление можно найти по правилу левой руки, предварительно определив по правилу буравчика направление вектора индукции магнитного поля $\vec{B}_1$ в том месте, где находится нижний проводник. Вектор $\vec{B}_1$ направлен «от нас».

Левую ладонь располагаем так, чтобы линии индукции входили в ладонь, отогнутый на 90° большой палец направлен по силе F_A , тогда четыре пальца покажут направление тока J_2 .

Силу F_A найдем по закону Ампера:

$$F_A = J_2 B_1 \ell \sin \alpha,$$

где ℓ — длина второго проводника; $\sin \alpha = 1$, так как проводник расположен перпендикулярно магнитному полю. В формуле взят ток J_2 , так как сила Ампера действует на второй проводник.

$$B_1 = \mu \mu_0 \frac{J_1}{2\pi d},$$

следовательно

$$F_A = J_2 \mu \mu_0 \frac{J_1}{2\pi d} \ell.$$

Массу второго проводника выразим через плотность и объем проводника:

$$m = \rho V = \rho \ell S.$$

Тогда формула (1) примет вид:

$$J_2 \mu \mu_0 \frac{J_1}{2\pi d} \ell = \rho \ell S g.$$

Отсюда, после сокращения на ℓ , получим формулу для S :

$$S = \frac{\mu \mu_0 J_1 J_2}{2\pi d \rho g};$$

$$S = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 5 \cdot 1}{2\pi \cdot 10^{-2} \cdot 2,7 \cdot 10^3 \cdot 9,8} = 3,7 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2.$$

Задача 13

Электрон, прошедший ускоряющую разность потенциалов $U=1 \text{ В}$, влетел в однородное магнитное поле с индукцией $B=10^{-3} \text{ Тл}$ и начал двигаться по окружности. Найти угловую скорость ω вращения электрона, момент импульса L электрона, а также магнитный момент p_m эквивалентного кругового тока.

Решение

Найдем скорость, с которой электрон влетел в магнитное поле, используя закон сохранения энергии (см. задачу 6): работа, которую совершает электрическое поле, затрачена на изменение кинетической энергии электрона.

$$eU = \frac{mv^2}{2}, \quad v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

Вычислим значение скорости, учитывая, что $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$, $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 6 \cdot 10^5 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

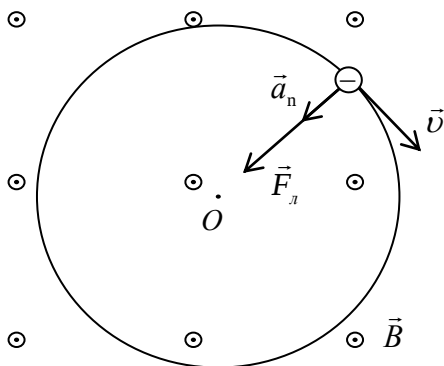
Так как электрон движется по окружности, то он влетел в магнитное поле перпендикулярно силовым линиям. На него

действует сила Лоренца $F_L = e v B \sin \alpha$, причем $\sin \alpha = 1$, так как $\vec{v} \perp \vec{B}$.

Согласно второму закону Ньютона, сила Лоренца сообщает электрону нормальное ускорение:

$$F_L = m a_n = \frac{m v^2}{R}, \quad (1)$$

где R – радиус окружности, по которой вращается электрон.



Тогда уравнение (1) примет вид:

$$e v B = \frac{m v^2}{R},$$

$$\text{откуда } R = \frac{m v}{e B}.$$

После подстановки данных:

$$R = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 6 \cdot 10^5}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-3}} = 3,4 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Момент импульса электрона можно вычислить по формуле:

$$L = m v R;$$

$$L = 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 6 \cdot 10^5 \cdot 3,4 \cdot 10^{-3} = 1,9 \cdot 10^{-27} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}.$$

Движение электрона по окружности эквивалентно круговому току, который определяется по формуле:

$$J = \frac{e}{T},$$

где T – период вращения электрона – время, за которое электрон проходит путь, равный длине окружности, двигаясь со скоростью v :

$$T = \frac{2\pi R}{v}, \text{ тогда } J = \frac{ev}{2\pi R}.$$

По определению, магнитный момент контура с током равен

$$p_m = J \cdot S,$$

где S – площадь, ограниченная окружностью, описываемой электроном ($S = \pi R^2$).

После подстановки

$$p_m = \frac{ev}{2\pi R} \pi R^2 = \frac{e v R}{2};$$

$$p_m = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 6 \cdot 10^5 \cdot 3,4 \cdot 10^{-3}}{2} = 7 \cdot 10^{-12} \text{ А} \cdot \text{м}^2.$$

Угловую скорость вращения электрона можно найти двумя способами:

1) из соотношения между линейной и угловой скоростью:

$$v = \omega R; \quad \omega = \frac{v}{R} = \frac{6 \cdot 10^5}{3,4 \cdot 10^{-3}} = 1,8 \cdot 10^8 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

2) через период вращения:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}; \quad \omega = \frac{2\pi \cdot v}{2\pi R} = \frac{v}{R} = 1,8 \cdot 10^8 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Задача 14

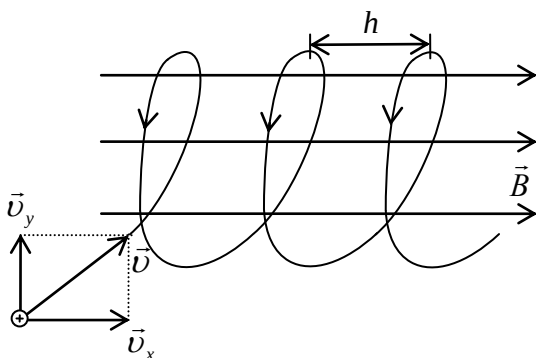
Протон движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10^{-4} \text{ Тл}$ по винтовой линии, радиус которой $R = 1 \text{ см}$ и шаг $h = 6,28 \text{ см}$. С какой скоростью и под каким углом влетел протон в магнитное поле?

Решение

Разложим скорость на две составляющие: параллельную полю (v_x) и перпендикулярную ему (v_y)

$$v_x = v \cos \alpha,$$

$$v_y = v \sin \alpha.$$



В направлении оси X магнитное поле на протон не действует, и движение его в этом направлении – равномерное. По оси Y на частицу действует сила Лоренца и закручивает траекторию в окружность.

В результате траектория представляет собой винтовую линию радиусом R и шагом h .

Уравнение движения протона в магнитном поле определяется вторым законом Ньютона:

$$F_{\text{Л}} = ma_n,$$

где $F_{\text{Л}} = qv_y B$ – сила Лоренца, $a_n = \frac{v_y^2}{R}$ – нормальное ускорение, связанное со скоростью движения по окружности.

$$qv_y B = \frac{mv_y^2}{R},$$

$$\text{отсюда } v_y = \frac{qBR}{m}. \quad (1)$$

Определим шаг винтовой линии – расстояние между соседними витками – как путь, пройденный протоном по оси X при равномерном движении со скоростью v_x за время, равное периоду:

$$h = v_x T = v \cos \alpha \cdot T.$$

Период вращения

$$T = \frac{2\pi R}{v_y} = \frac{2\pi R}{v \sin \alpha},$$

тогда
$$h = v \cos \alpha \frac{2\pi R}{v \sin \alpha} = 2\pi R \operatorname{ctg} \alpha.$$

Отсюда можно найти угол α :

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{h}{2\pi R},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{6,28 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 3,14 \cdot 10^{-2}} = 1,$$

$$\alpha = 45^\circ.$$

Чтобы найти скорость, с которой протон влетает в поле, из формулы $v_y = v \sin \alpha$ найдем $v = \frac{v_y}{\sin \alpha}$ и подставим v_y из (1):

$$v = \frac{qBR}{m \sin \alpha}.$$

Подставив числовые значения, получим:

$$v = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-2}}{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 0,707} = 136 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Задача 15

Квадратная рамка со стороной $a = 10$ см расположена в магнитном поле так, что нормаль к рамке образует угол $\alpha = 60^\circ$ с направлением поля. Магнитное поле изменяется со временем по закону $B = B_0 \cos \omega t$, где $B_0 = 0,2$ Тл и $\omega = 5,2$ рад/с. Определить величину ЭДС в рамке в момент времени $t = 4$ с.

Решение

По закону электромагнитной индукции Фарадея–Ленца:

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (1)$$

Поток магнитной индукции через площадь рамки

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos \alpha = B_0 \cos \omega t \cdot S \cdot \cos \alpha.$$

Подставим это выражение в формулу (1):

$$\varepsilon_i = - \frac{d(B_0 \cos \omega t \cdot S \cdot \cos \alpha)}{dt}.$$

B_0 , S , $\cos \alpha$ – постоянные величины, поэтому

$$\varepsilon_i = -B_0 S \cos \alpha \frac{d(\cos \omega t)}{dt} = B_0 S \cos \alpha \cdot \sin \omega t \cdot \omega,$$

где $S = a^2$ – площадь рамки. Окончательно имеем:

$$\varepsilon_i = B_0 a^2 \omega \sin \omega t \cos \alpha.$$

После подстановки числовых данных получим

$$\varepsilon_i = 0,018 \text{ В}.$$

Задача 16

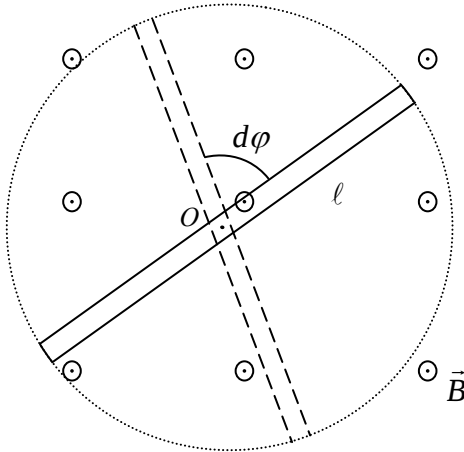
В плоскости, перпендикулярной магнитному полю напряженностью $H = 2 \cdot 10^5 \text{ А/м}$, вращается стержень длиной $\ell = 0,4 \text{ м}$ относительно оси, проходящий через его середину. В стержне индуцируется ЭДС индукции $\varepsilon_i = 0,2 \text{ В}$. Определить угловую скорость стержня.

Решение

При вращении стержень пересекает линии индукции магнитного поля, и в нем возникает ЭДС, равная скорости изменения магнитного потока:

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{B dS}{dt}.$$

Здесь dS – площадь, пересекаемая стержнем при вращении с угловой скоростью ω , а индукция магнитного поля B связана с напряженностью H по формуле $B = \mu\mu_0 H$.



Половина стержня, имея длину $r = \ell/2$, при повороте на угол $d\varphi$ пересечет площадь

$$dS' = \frac{r^2}{2} d\varphi,$$

а весь стержень пересечет площадь в два раза большую:

$$dS = 2 \cdot dS' = r^2 d\varphi.$$

Тогда

$$\varepsilon_i = -\frac{BdS}{dt} = \mu\mu_0 H r^2 \frac{d\varphi}{dt}.$$

Учитывая, что $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ – угловая скорость вращения стержня,

$$\varepsilon_i = \mu\mu_0 H r^2 \omega,$$

$$\text{откуда } \omega = \frac{\varepsilon_i}{\mu\mu_0 H r^2} = \frac{0,2}{1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 0,2^2} = 19,9 \frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

где ε_i взята по модулю, так как знак «минус» в законе Фарадея–Ленца указывает на направление индукционного тока, возникающего в стержне при его вращении. Направление тока будет меняться на противоположное при каждом повороте стержня.

Задача 17

По длинному соленоиду с немагнитным сердечником сечением $S = 5 \text{ см}^2$, содержащему $N = 1200$ витков, течет ток силой $J = 2 \text{ А}$. Индукция магнитного поля в центре соленоида $B = 100 \text{ мТл}$. Определить индуктивность соленоида.

Решение

Задачу можно решить двумя способами.

1. Индуктивность длинного соленоида выражается формулой:

$$L = \mu\mu_0 n^2 \ell S,$$

где $\mu=1$, ℓ – длина соленоида, $n = N/\ell$ – плотность намотки, т.е. число витков, приходящихся на единицу длины.

Индукция на оси длинного соленоида с током J в точках, близких к его середине:

$$B = \mu\mu_0 Jn = \mu\mu_0 J \frac{N}{\ell}.$$

Отсюда можно найти длину соленоида $\ell = \frac{\mu\mu_0 JN}{B}$. Подставив это выражение в формулу индуктивности, получим:

$$L = \mu\mu_0 \frac{N^2}{\ell^2} \ell S = \mu\mu_0 \frac{N^2 S \cdot B}{\mu\mu_0 JN} = \frac{NBS}{J}.$$

Выразив входящие величины в системе СИ ($B = 10^{-2}$ Тл, $S = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$) и выполнив вычисления, найдем

$$L = 3 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}.$$

2. Задачу можно решить, исходя из определения индуктивности контура как коэффициента пропорциональности между током в контуре и собственным магнитным потоком сквозь него:

$$\Psi = LJ. \quad (1)$$

При этом надо учесть, что в случае с соленоидом Ψ является полным магнитным потоком (потокосцеплением), равным сумме потоков, проходящих сквозь каждый виток соленоида. Поскольку через каждый виток проходит один и тот же магнитный поток $\Phi' = BS$, то полный поток равен

$$\Psi = \Phi' N = NBS.$$

Подставив это выражение в формулу (1), найдем индуктивность соленоида:

$$NBS = LJ,$$

$$L = \frac{NBS}{J},$$

что совпадает с формулой, полученной первым способом.

Задача 18

Катушку индуктивности $L = 0,6 \text{ Гн}$ подключают к источнику тока. Определить сопротивление катушки, если за время $t = 3 \text{ с}$ ток достигает 80 % предельного значения.

Решение

В момент замыкания цепи, когда ток увеличивается от нуля до своего максимального значения, в электрической цепи кроме основного тока возникает еще экстраток самоиндукции. По правилу Ленца, он потечет в сторону, противоположную основному, пытаясь затормозить его нарастание.

Значение экстратока самоиндукции при замыкании цепи найдем по формуле:

$$J = J_0 \left(1 - \exp \left(-\frac{R}{L} t \right) \right).$$

По условию задачи $J = 0,8J_0$ и

$$0,8J_0 = J_0 \left(1 - \exp \left(-\frac{R}{L} t \right) \right),$$

$$0,2 = \exp \left(-\frac{R}{L} t \right).$$

После логарифмирования получим:

$$-\frac{R}{L} t = \ln 0,2; \text{ отсюда } R = -\frac{L \cdot \ln 0,2}{t} = 322 \text{ мОм.}$$

Составители

Валентина Николаевна Анцупова

Лев Федорович Меденцов

Людмила Викторовна Глазкова

ФИЗИКА
ЧАСТЬ II.
ЭЛЕКТРОСТАТИКА.
ПОСТОЯННЫЙ ТОК.
ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Методические указания
по выполнению контрольных работ
для студентов направления «Строительство»
заочной формы обучения

Редактор Г.К. Найденова

Санитарно-эпидемиологическое заключение

№ 54.НК.05.953.П.000148.12.02 от 27.12.2002 г.

Подписано к печати 12.06.2004. Формат 60х84 1/16 д.л.

Гарнитура Таймс.

Бумага газетная. Ризография.

Объем 2,5 п.л. Тираж 100 экз. Заказ №

Новосибирский государственный архитектурно-строительный
университет (Сибстрин)

630008, Новосибирск, ул. Ленинградская, 113

Отпечатано мастерской оперативной полиграфии НГАСУ