

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (СИБСТРИН)

Кафедра физики

ФИЗИКА

Часть I. Механика. Молекулярная физика

Методические указания по выполнению контрольных работ
для студентов направления «Строительство»
заочной формы обучения

НОВОСИБИРСК 2005

Методические указания составлены
канд. физ.-мат. наук, доцентом Л.В. Глазковой,
канд. техн. наук, доцентом Л.Ф.Меденцовым,
доцентом Н.И. Новиковой

В методических указаниях подробно разобраны примеры решения типовых задач по разделам «Механика», включая раздел «Механические колебания», и «Молекулярная физика», включая раздел «Термодинамика».

Утверждены методической комиссией ФВиЗО
15 февраля 2005 года

Рецензенты:

- 1 А.Д. Заикин, канд. техн. наук, доцент (НГАСУ);
- 2 Е.П. Матус, канд. техн. наук, доцент (НГАСУ)

© Новосибирский государственный
архитектурно-строительный
университет (Сибстрин), 2004

При изучении физики исключительно велика роль решения задач, в каждой из которых предлагается какая-нибудь проблема, рассматривается конкретная ситуация, процесс, состояние.

Для описания состояния или решения проблемы надо знать физические законы, характеризующие определенные взаимосвязи между физическими величинами, выбрать оптимальный вариант решения. Это развивает навыки применения теоретических знаний и углубляет их.

В первом семестре студенты-заочники изучают следующие разделы физики: механику, механические колебания и волны, молекулярную физику и термодинамику.

Учитывая затруднения студентов и наиболее часто встречающиеся у них ошибки, предлагаем по указанным выше разделам физики помощь по решению задач.

ВОПРОСЫ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЭКЗАМЕН ПО РАЗДЕЛАМ "МЕХАНИКА", "КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ", "МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА", "ТЕРМОДИНАМИКА"

1. Сопоставить кинематические характеристики поступательного движения тела (материальной точки) с кинематическими характеристиками вращательного движения.
2. Инерциальные системы отсчета. Законы динамики для поступательного движения.
3. Основные законы динамики поступательного и вращательного движений.
4. Момент инерции материальной точки. Момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси.
5. Законы сохранения импульса и момента импульса.
6. Работа переменной силы. Кинетическая и потенциальная энергии. Закон сохранения энергии.
7. Работа и энергия вращающегося твердого тела.

8. Гармонические колебания. Основные характеристики колебательного движения. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний и его решение. Графическое представление гармонических колебаний. Физический маятник.

9. Сложение одинаково направленных гармонических колебаний одинаковой частоты.

10. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты.

11. Затухающие колебания и их характеристики. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний. Логарифмический коэффициент затухания.

12. Вынужденные колебания. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его решение. Условие резонанса.

13. Продольные и поперечные волны. Характеристики волн: длина волны, скорость распространения, частота. Уравнение плоской волны.

14. Принцип Гюйгенса. Когерентные источники. Интерференция волн. Условия максимума и минимума при интерференции. Связь разности хода с разностью фаз.

15. Стоячие волны. Координаты узлов и пучностей.

16. Идеальный газ. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газа. Кинетическая энергия молекул газа.

17. Распределение молекул газа по скоростям. Наиболее вероятная, средняя арифметическая и средняя квадратичная скорости молекул газа.

18. Явление переноса в газах. Число столкновений и средняя длина свободного пробега молекул. Диффузия, теплопроводность и внутреннее трение.

19. Степени свободы молекул. Распределение энергии по степеням свободы. Внутренняя энергия идеального газа.

20. Удельная и молярная теплоемкости газов. Теплоемкость газа при постоянном объеме и давлении. Количество теплоты.

21. Работа газа при изобарном процессе.

22. Первое начало термодинамики и его применение к различным изопроцессам. Работа газа при изотермическом и адиабатном процессах.

23. Применение первого начала термодинамики к адиабатному процессу. Уравнение адиабаты идеального газа.

24. Круговые процессы. Обратимые и необратимые круговые процессы. Цикл Карно. КПД идеальной тепловой машины.

25. Второе начало термодинамики. Энтропия. Изменение энтропии при обратимых и необратимых процессах.

26. Реальные газы. Уравнение Ван-дер-Ваальса. Изотермы реального газа. Критическое состояние вещества. Внутренняя энергия реального газа.

МЕХАНИКА. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Пример 1

Уравнение движения точки по прямой имеет вид $X = 4t + 0,05t^3$ (X – в метрах, t – в секундах). Найти: 1) положение точки в моменты времени $t_1 = 2$ с, $t_2 = 5$ с; 2) среднюю скорость точки за время, протекающее между этими моментами; 3) мгновенные скорости в указанные моменты времени; 4) среднее ускорение за указанный промежуток времени; 5) мгновенные ускорения в указанные моменты времени.

Решение

1) Положение точки, движущейся прямолинейно, в некоторый момент времени определяется расстоянием X точки от начала отсчета. Чтобы найти это расстояние, надо в уравнение движения подставить вместо t заданное значение времени:

$$X_1 = (4 \cdot 2 + 0,05 \cdot 2^3) \text{ м} = 8,40 \text{ м}.$$

$$X_2 = (4 \cdot 5 + 0,05 \cdot 5^3) \text{ м} = 26,25 \text{ м}.$$

2) Средняя скорость точки есть изменение координаты X за промежуток времени Δt :

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1}; \quad \langle v \rangle = \frac{(26,25 - 8,40) \text{ м}}{(5 - 2) \text{ с}} = 5,95 \text{ м/с}.$$

3) Мгновенная скорость есть первая производная от координаты по времени:

$$v = \frac{dX}{dt} = 4 + 0,15t^2.$$

Подставим сюда значения времени, получим:

$$v_1 = (4 + 0,15 \cdot 2^2) \text{ м/с} = 4,60 \text{ м/с};$$

$$v_2 = (4 + 0,15 \cdot 5^2) \text{ м/с} = 7,75 \text{ м/с}.$$

4) Среднее ускорение есть изменение скорости Δv за промежуток времени Δt :

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}; \quad \langle a \rangle = \frac{(7,75 - 4,60) \text{ м/с}}{(5 - 2) \text{ с}} = 1,05 \text{ м/с}^2.$$

5) Мгновенное ускорение есть первая производная от скорости по времени:

$$a = \frac{dv}{dt} = 0,3 \cdot t.$$

Получим значения a_1 и a_2 для моментов времени t_1 и t_2 :

$$a_1 = 0,3 \cdot 2 \text{ м/с}^2 = 0,6 \text{ м/с}^2;$$

$$a_2 = 0,3 \cdot 5 \text{ м/с}^2 = 1,5 \text{ м/с}^2.$$

Пример 2

Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону, выраженному формулой $\varphi = 10 + 20t - 2t^2$.

Найти по величине и направлению полное ускорение точки, находящейся на расстоянии $0,1 \text{ м}$ от оси вращения, для момента времени $t = 4 \text{ с}$.

Решение

Точка вращающегося тела описывает окружность. Полное ускорение точки, движущейся по кривой линии, может быть найдено как геометрическая сумма тангенциального ускорения $\vec{a}_\tau$, направленного по касательной к траектории, и нормального ускорения $\vec{a}_n$, направленного к центру кривизны траектории:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Тангенциальное и нормальное ускорения выражаются формулами:

$$a_\tau = \varepsilon \cdot r;$$

$$a_n = \omega^2 \cdot r;$$

где ω – угловая скорость тела, ε – его угловое ускорение; r – расстояние от точки до оси вращения. Подставляя выражения a_τ и a_n в формулу, находим

$$a = \sqrt{\varepsilon^2 r^2 + \omega^4 r^2} = r \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Угловая скорость ω вращающегося тела равна первой производной от угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 20 - 4t.$$

В момент времени $t = 4 \text{ с}$ угловая скорость $\omega = (20 - 4 \cdot 4) \text{ с}^{-1} = 4 \text{ с}^{-1}$.

Угловое ускорение равно первой производной от угловой скорости по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -4 \text{ с}^{-2}.$$

Это выражение углового ускорения не содержит времени, следовательно, угловое ускорение имеет постоянную величину. Подставляя найденные значения ω , ε и заданное значение r в формулу для полного ускорения, получим:

$$a = 0,1 \sqrt{(-4)^2 + 4^4} \text{ м/с}^2 = 1,65 \text{ м/с}^2.$$

Направление полного ускорения определится, если найти углы, которые вектор ускорения образует с касательной к траектории или с нормалью к ней (рис. 1):

$$\cos(\vec{a}, \vec{a}_\tau) = \frac{|\vec{a}_\tau|}{a};$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{a}_n) = \frac{|\vec{a}_n|}{a}.$$

Значения a_τ и a_n равны соответственно:

$$a_\tau = -4 \cdot 0,1 \text{ м/с}^2 = -0,4 \text{ м/с}^2;$$

$$a_n = 4^2 \cdot 0,1 \text{ м/с}^2 = 1,6 \text{ м/с}^2.$$

Подставив эти значения и значение полного ускорения, получим:

$$\cos(\vec{a}, \vec{a}_\tau) = \frac{0,4}{1,65} = 0,242;$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{a}_n) = \frac{1,6}{1,65} = 0,97.$$

Пользуясь тригонометрическими таблицами, найдем значения искомых углов: $(\vec{a}, \vec{a}_\tau) = 76^\circ$; $(\vec{a}, \vec{a}_n) = 14^\circ$.

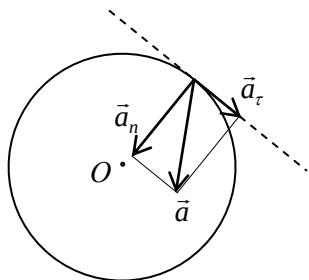


Рис. 1

Пример 3

Тело брошено с поверхности Земли под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту со скоростью 20 м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти радиус кривизны траектории в точке максимального подъема; высоту наибольшего подъема и дальность полета.

Решение

Введем координатные оси, направленные по горизонтали (OX) и вертикали (OY) и совместим начало координат с положением тела в начальный момент времени (рис. 2).

Траекторией тела, брошенного под углом к горизонту, является парабола, проходящая через точку, из которой брошено тело.

Запишем начальные условия движения тела в соответствии с выбранной системой координат: при $t = 0$ имеем $x_0 = 0$; $y_0 = 0$; $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$; $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$.

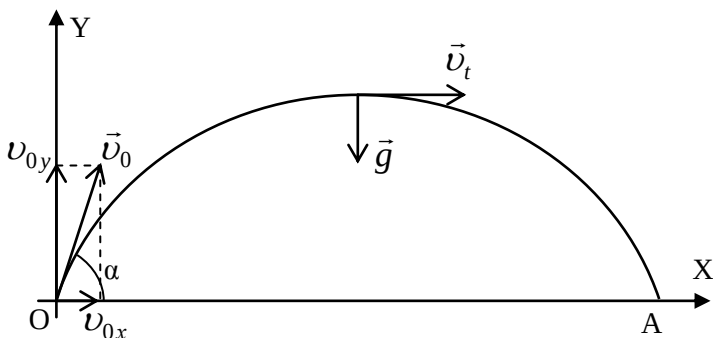


Рис. 2

По оси OX тело движется равномерно со скоростью v_{0x} ($a_x = 0$). По оси OY тело движется с ускорением свободного падения под действием силы тяжести ($a_y = -g$). Тогда формулы проекций скорости и уравнения координат примут вид:

$$v_x = v_0 \cos \alpha \quad (1)$$

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin \alpha - gt \quad (2)$$

$$x = (v_0 \cos \alpha)t = v_0 t \cos \alpha \quad (3)$$

$$y = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{gt^2}{2} \quad (4)$$

В наивысшей точке подъема вектор скорости $\vec{v}$ параллелен оси OX и $v = v_x = v_0 \cos \alpha$. Так как $v_y = 0$, то уравнение (2) примет вид:

$$v_0 \sin \alpha - gt_n = 0,$$

где $t_n = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$ – время подъема. Тогда наибольшая высота подъема из уравнения (4) равна:

$$\begin{aligned} H = y_{\max} &= v_0 t_n \sin \alpha - \frac{gt_n^2}{2} = \frac{v_0 \cdot v_0 \sin \alpha \cdot \sin \alpha}{g} - \frac{g v_0^2 \sin^2 \alpha}{2 \cdot g^2} = \\ &= \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \end{aligned}$$

Подставляя значения v_0 , α , g в последнее выражение, получим:

$$H = \frac{(20)^2 \cdot \sin^2 60^\circ \text{ м}^2 / \text{с}^2}{2 \cdot 9,8 \text{ м} / \text{с}^2} = 15,45 \text{ м}.$$

Дальность полета, т.е. длину отрезка ОА определим из уравнения (3):

$$\begin{aligned} S = x &= (v_0 \cos \alpha) \cdot t, \text{ где } t = 2t_n - \text{ время полета тела;} \\ S &= v_0 \cos \alpha \cdot 2 \cdot \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{2v_0 \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{g} = \\ &= \frac{2 \cdot (20)^2 \cdot \cos 60^\circ \cdot \sin 60^\circ}{9,8} = \frac{2 \cdot 400 \cdot 0,5 \cdot 0,87 \text{ м}^2 / \text{с}^2}{9,8 \text{ м} / \text{с}^2} = 35,5 \text{ м}. \end{aligned}$$

В точке наибольшего подъема полное ускорение $\vec{g}$ направлено по радиусу к центру кривизны траектории и по модулю равно центростремительному (нормальному) ускорению:

$$g = a_n = \frac{v_x^2}{R} = \frac{(v_0 \cos \alpha)^2}{R}.$$

Поэтому радиус кривизны траектории равен:

$$R = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} = \frac{(20)^2 \cos^2 60^\circ \text{ м}^2 / \text{с}^2}{9,8 \text{ м} / \text{с}^2} = 10,2 \text{ м}.$$

Пример 4

На спокойной воде пруда стоит лодка длиной L и массой M , перпендикулярно берегу, обращенная к нему носом. На корме стоит человек массой m . На какое расстояние s удалится лодка от берега, если человек перейдет с кормы на нос лодки? Трением о воду и о воздух пренебречь.

Решение

1. Будем считать, что человек идет по лодке с постоянной скоростью. Лодка в этом случае тоже будет двигаться равномерно. По-

этому путь, пройденный лодкой относительно берега, определим по формуле:

$$s = vt, \quad (1)$$

где v – скорость лодки относительно берега, t – время движения лодки.

Скорость лодки найдем, пользуясь законом сохранения импульса. Так как по условию задачи система "человек – лодка" изолированная и в начальный момент была в покое относительно берега, то по закону сохранения импульса, опустив знак минуса, получим:

$$Mv = mu, \quad (2)$$

где u – скорость человека относительно берега. Отсюда

$$v = \frac{mu}{M}. \quad (3)$$

Время движения лодки равно времени перемещения человека по лодке, т.е.

$$t = \frac{s'}{u} = \frac{L-s}{u}, \quad (4)$$

где s' – путь, пройденный человеком относительно берега.

Подставив полученные выражения v, t в (1), найдем:

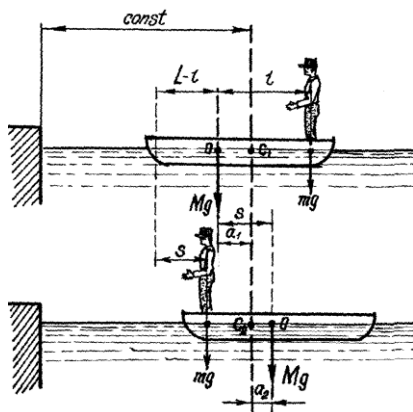
$$s = \frac{mu}{M} \cdot \frac{L-s}{u} = \frac{m}{M}(L-s), \quad (5)$$

откуда

$$s = \frac{m}{m+M}L.$$

Заметим, что предположение о равномерности движения человека не является обязательным. В приведенном ниже, более общем способе решения задачи, такое предположение не используется.

2. Внутренние силы не могут изменить положение центра тяжести системы. Поэтому можно считать, что при перемещении человека по лодке центр тяжести системы не изменит своего положения, т.е. останется на прежнем расстоянии от берега.



Пусть центр тяжести системы "человек – лодка" находится на вертикали, проходящей в начальный момент через точку C_1 , а после перемещения лодки через другую точку C_2 . Так как эта вертикаль неподвижна относительно берега, то искомое перемещение s лодки относительно берега равно перемещению лодки относительно вертикали. А это последнее легко определить по перемещению центра тяжести O лодки. Как

видно из рис. 3, в начальный момент точка O находилась от вертикали слева на расстоянии a_1 , а после перехода человека – на расстоянии a_2 справа от нее. Следовательно, искомое перемещение лодки

$$s = a_1 + a_2.$$

Для определения a_1 и a_2 воспользуемся тем, что относительно центра тяжести системы моменты сил тяжести лодки и человека равны.

Для точки C_1 имеем

$$Mga_1 = mg(l - a_1),$$

откуда после сокращения на g , получим

$$a_1 = \frac{m}{M + m} \cdot l.$$

Для точки C_2 имеем

$$Mga_2 = mg(L - a_2 - l),$$

откуда

$$a_2 = \frac{m}{M + m} \cdot (L - l).$$

Подставив выражения a_1 и a_2 в формулу для s , получим

$$s = \frac{m}{M + m} l + \frac{m}{M + m} (L - l) = \frac{m}{M + m} L,$$

что совпадает с результатом, полученным первым способом.

Пример 5

Найти работу подъема груза по наклонной плоскости, если масса груза 100 кг , длина наклонной плоскости 2 м , угол наклона $\alpha = 30^\circ$, коэффициент трения $\mu = 0,1$, а груз движется с ускорением 1 м/с^2 .

Решение

На груз действуют силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормального давления $\vec{N}$ опоры, сила трения $\vec{F}_{mp}$ и сила $\vec{F}$, поднимающая груз.

Ускорение $\vec{a}$ груза направлено вдоль наклонной плоскости вверх. Запишем уравнение движения груза на основании второго закона Ньютона в векторной форме:

$$m\vec{g} + \vec{F}_{mp} + \vec{N} + \vec{F} = m\vec{a}.$$

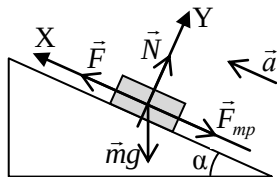


Рис. 4

Направим ось OX в сторону ускорения и запишем в скалярном виде уравнения движения груза:

$$OX: -mg\sin\alpha - F_{mp} + F = ma, \quad (1)$$

$$OY: -mg\cos\alpha + N = 0. \quad (2)$$

Сила трения скольжения равна:

$$F_{mp} = \mu N,$$

где N – силу нормальной реакции найдем из уравнения (2):

$$N = mg\cos\alpha, \quad F_{mp} = \mu mg\cos\alpha.$$

Тогда уравнение (1) запишется в виде:

$$-mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha + F = ma,$$

откуда $F = \mu mg\cos\alpha + mg\sin\alpha + ma$

Работу подъема груза найдем из определения работы

$$A = F \cdot S,$$

где S – пройденный телом путь

Подставим выражение силы в формулу работы и получим:

$$A = (\mu mg\cos\alpha + mg\sin\alpha + ma)S =$$

$$= (0,1 \cdot 100 \cdot 9,8 \cdot \cos 30^\circ + 100 \cdot 9,8 \cdot \sin 30^\circ + 100 \cdot 1) \cdot 2 =$$

$$= 1370 \text{ Дж}.$$

Пример 6

Молот массой $m_1 = 10 \text{ кг}$ ударяет по небольшому куску мягкого железа, лежащему на наковальне. Масса наковальни вместе с куском железа равна $m_2 = 400 \text{ кг}$. Считая удар неупругим, определить КПД удара молота при данных условиях. Полезной в данном случае является энергия, пошедшая на деформацию куска железа.

Решение

КПД удара молота определяется как отношение полезной энергии к полной:

$$\eta = \frac{W_{\text{полезн.}}}{W_{\text{полн.}}} \quad (1)$$

Полная энергия равна кинетической энергии молота в момент удара:

$$W_{\text{полн.}} = \frac{m_1 v_1^2}{2} \quad (2)$$

На основании закона сохранения энергии можно утверждать, что энергия, затраченная на деформацию изделия, равна разности значений механической энергии системы до и после удара:

$$W_{\text{полезн.}} = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2}, \quad (3)$$

где u – общая скорость всех тел системы после неупругого удара. Эту скорость можно получить, используя закон сохранения импульса:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) u.$$

Выразим из последнего выражения скорость u и подставим в уравнение (3):

$$\begin{aligned} u &= \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}, \\ W_{\text{полезн.}} &= \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)}{2} \cdot \frac{m_1^2 v_1^2}{(m_1 + m_2)^2} = \\ &= \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_1^2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 v_1^2}{2} \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставив выражение (4) и (2) в формулу (1), получим:

$$\eta = \frac{2 \cdot m_1 v_1^2 \cdot m_2}{2 \cdot m_1 v_1^2 \cdot (m_1 + m_2)} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

После подстановки значений m_1 и m_2 , найдем:

$$\eta = \frac{400}{400+10} = 0,97.$$

Пример 7

Маховик в виде сплошного диска радиусом $R = 0,2$ м и массой 50 кг был раскручен до частоты вращения $\nu = 6 \text{ с}^{-1}$ и предоставлен самому себе. Под действием сил трения маховик остановился через 1 мин. Найти момент сил трения.

Решение

Для решения задачи воспользуемся основным уравнением динамики вращательного движения:

$$M = J\varepsilon,$$

где J – момент инерции маховика в виде сплошного диска – определяется по формуле:

$$J = \frac{1}{2} mR^2.$$

ε – угловое ускорение маховика – равно изменению угловой скорости в единицу времени:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t}.$$

Изменение угловой скорости выразим через начальную и конечную частоты вращения, используя соотношение $\omega = 2\pi\nu$:

$$\varepsilon = \frac{2\pi\nu_2 - 2\pi\nu_1}{\Delta t},$$

и так как $\nu_2 = 0$, то $\varepsilon = -\frac{2\pi\nu_1}{\Delta t}$. Тогда

$$M = J\varepsilon = -\frac{1}{2} mR^2 \cdot \frac{2\pi\nu_1}{\Delta t} = -\frac{mR^2 \pi\nu_1}{\Delta t}.$$

Подставим числовые значения величин и произведем вычисления:

$$M = -\frac{50 \cdot 0,04 \cdot 3,14 \cdot 6}{60} = -0,628 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

(Знак минус означает, что момент M – тормозящий).

Пример 8

Через блок в виде диска, имеющий массу $m = 2 \text{ кг}$, перекинута нить, к концам которой привешены грузы массами $m_1 = 0,1 \text{ кг}$ и $m_2 = 0,3 \text{ кг}$. С каким ускорением будут двигаться грузы, если их предоставить самим себе? Трением пренебречь.

Решение

Заданная система состоит из трех тел: грузов m_1 и m_2 и блока m . На каждый груз действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вниз, и сила натяжения нити, направленная вверх. Направим ось Y вертикально вниз и напишем для каждого груза уравнение движения в проекциях на эту ось на основании второго закона Ньютона (рис. 5).

Для первого груза:

$$m_1 g - T_1 = -m_1 a, \text{ откуда}$$

$$T_1 = m_1 g + m_1 a.$$

Для второго груза:

$$m_2 g - T_2 = m_2 a, \text{ откуда}$$

$$T_2 = m_2 g - m_2 a.$$

Блок вращается вокруг неподвижной горизонтальной оси O , проходящей через центр блока, поэтому моменты сил тяжести блока и реакции оси равны нулю. Вращение блока вызывается действием только сил натяжения нити. Под действием моментов сил T_2' , T_1' относительно оси O , перпендикулярной плоскости рисунка, блок приобретает угловое ускорение. Согласно основному закону динамики вращательного движения, вращающий момент, приложенный к диску, равен произведению момента инерции J на угловое ускорение ε :

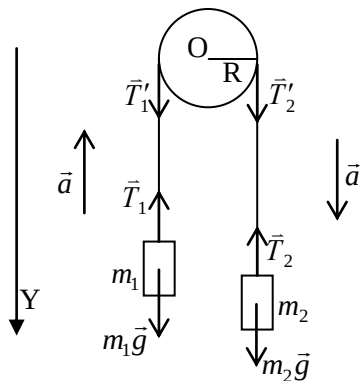


Рис. 5

$$M = J\varepsilon.$$

Вращающий момент равен произведению силы на плечо. Моменты сил T_2' , T_1' направлены по оси вращения, но в противоположные стороны, и так как $T_2' > T_1'$, то

$$M = T_2' \cdot R - T_1' \cdot R = (T_2' - T_1')R.$$

По третьему закону Ньютона силы $T_1 = T_1'$, $T_2 = T_2'$, тогда $M = (T_2 - T_1)R$, или $J\varepsilon = (T_2 - T_1)R$.

Учитывая, что момент инерции диска $J = \frac{mR^2}{2}$, а угловое ускорение $\varepsilon = \frac{a}{R}$, получим:

$$\frac{mR^2}{2} \cdot \frac{a}{R} = (T_2 - T_1)R; \quad \frac{ma}{2} = T_2 - T_1.$$

Подставим выражения для T_1 и T_2 в последнее выражение:

$$\frac{ma}{2} = m_2g - m_2a - m_1g - m_1a,$$

откуда

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}}.$$

После подстановки числовых значений получим:

$$a = \frac{(0,3 - 0,1) \cdot 9,8 \text{ кг} \cdot \text{м/с}^2}{(0,1 + 0,3 + \frac{0,2}{2}) \text{ кг}} = 3,9 \text{ м/с}^2.$$

Пример 9

Деревянный стержень массой $m_{cm} = 1 \text{ кг}$ и длиной $l = 40 \text{ см}$ может вращаться вокруг оси (OO'), проходящей через его середину (рис. 6). В конец стержня попадает пуля массой $m_n = 10 \text{ г}$, летящая

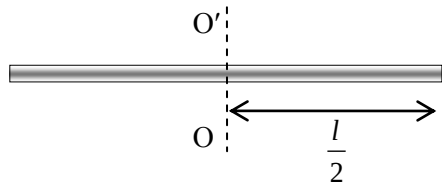


Рис. 6

перпендикулярно к оси и стержню со скоростью $v_n = 200 \text{ м/с}$. Определить угловую скорость, которую получит стержень, если пуля застрянет в нем. Как изменилась при попадании пули в стержень сумма их кинетических энергий?

Решение

Удар пули следует рассматривать, как неупругий: после удара и пуля, и конец стержня будут вращаться с одинаковой скоростью.

В момент удара угловая скорость стержня $\omega_0 = 0$, и момент импульса стержня $L_{cm} = J\omega_0 = 0$.

Начальный момент импульса пули $L_n = m_n v_n r$,

где $r = \frac{l}{2}$ – расстояние от точки попадания пули до оси вращения.

После удара стержень приобретет угловую скорость ω , а пуля – линейную скорость v , равную линейной скорости точек стержня, находящихся на расстоянии r от оси вращения. Так как $v = \omega r$, то конечные значения моментов импульса пули L_n' и стержня L_{cm}' равны соответственно:

$$L_n' = m_n v r = m_n r^2 \omega;$$

$$L_{cm}' = J_{cm} \omega; \quad J_{cm} = \frac{1}{12} m_{cm} l^2.$$

На основании закона сохранения момента импульса можно написать:

$$L_n + L_{cm} = L_n' + L_{cm}', \text{ или}$$

$$m_n v_n r + 0 = J_{cm} \omega + m_n r^2 \omega; \quad m_n v_n \frac{l}{2} = \left(\frac{1}{12} m_{cm} l^2 + \frac{m_n l^2}{4} \right) \omega.$$

$$\text{Откуда } \omega = \frac{6 m_n v_n}{l(m_{cm} + 3 m_n)}. \quad (1)$$

Подставив в последнее выражение числовые значения, получим:

$$\omega = \frac{6 \cdot 10^{-2} \cdot 200}{0,4 \cdot (1 + 3 \cdot 10^{-2})} = 29 \text{ рад/с}.$$

Кинетическая энергия пули до удара о стержень равна:

$$E_n = \frac{m_n v_n^2}{2}.$$

Кинетическая энергия стержня до удара пули равна нулю.

После удара пуля вместе со стержнем вращается с угловой скоростью ω . Их общая кинетическая энергия равна

$$E_{общ} = \frac{J_{общ} \omega^2}{2}, \text{ где}$$

$$J_{общ} = J_{cm} + J_n = \frac{1}{12} m_{cm} l^2 + m_n \left(\frac{l}{2} \right)^2.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} E_{общ} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} m_{cm} l^2 + \frac{m_n l^2}{4} \right) \omega^2 = \\ &= l^2 \omega^2 \left(\frac{1}{24} m_{cm} + \frac{1}{8} m_n \right) = l^2 \omega^2 \left(\frac{m_{cm} + 3m_n}{24} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Подставив уравнение (1) в (2), получим:

$$E_{общ} = \frac{l^2 (3m_n + m_{cm})}{24} \cdot \left(\frac{6m_n v_n}{l(3m_n + m_{cm})} \right)^2 = \frac{m_n \cdot m_n v_n^2}{(3m_n + m_{cm}) \cdot 2} \quad (3)$$

Выражение $\frac{m_n v_n^2}{2}$ есть кинетическая энергия пули до попадания в стержень. Тогда уравнение (3) можно переписать в виде:

$$E_{общ} = \frac{3m_n}{(3m_n + m_{cm})} \cdot E_n.$$

Таким образом,

$$\frac{E_{общ}}{E_n} = \frac{3m_n}{(3m_n + m_{cm})}.$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$\frac{E_{общ}}{E_n} = \frac{3 \cdot 10^{-2}}{1 + 3 \cdot 10^{-2}} \approx 0,03.$$

Пример 10

Платформа в виде диска радиусом 2 м вращается по инерции с частотой 6 об/мин. На краю платформы стоит человек, масса которого 80 кг. С какой частотой будет вращаться платформа, если человек перейдет в ее центр? Момент инерции платформы 120 кг·м². Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

Решение

Человек вместе со скамейкой составляет изолированную систему, поэтому момент импульса этой системы должен сохраняться. Следовательно, для нашего случая

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2,$$

где J_1 и ω_1 – момент инерции и угловая скорость человека и скамейки, когда человек стоит на краю платформы, а J_2 и ω_2 – эти же величины, когда человек перешел в центр.

Момент инерции человека в центре равен нулю; на краю платформы:

$$J_2 = mr^2.$$

Тогда

$$(J_{nl} + J_c)\omega_1 = J_{nl}\omega_2.$$

Заменив угловую скорость ее выражением через число оборотов в единицу времени $\omega = 2\pi\nu$ и сократив на 2π , получим:

$$(J_{nl} + mr^2)\nu_1 = J_{nl}\nu_2;$$

$$\nu_2 = \frac{(J_{nl} + mr^2)\nu_1}{J_{nl}}.$$

Подставив числовые значения в последнее выражение, получим:

$$\nu_2 = \left(\frac{120 + 80 \cdot 1}{120} \right) \cdot 0,1 = 0,165 \text{ об/с}.$$

Пример 11

Однородный тонкий стержень длиной l колеблется в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси. Ось перпендикулярна стержню и проходит через его край. Как изменится период

колебаний, если ось перенести к центру параллельно самой себе на расстояние $0,25$ длины стержня?

Решение

Имеем физический маятник в виде тонкого стержня (рис. 7).

Рассмотрим первый случай, когда ось вращения проходит через точку O_1 , тогда

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_1}{mgL_1}}.$$

Здесь J_1 – момент инерции стержня относительно оси, проходящей через точку O_1 , определяемый по теореме Штейнера:

$$J_0 = J_c + md_1^2,$$

где $J_c = \frac{1}{12}ml^2$ – момент инерции тела относи-

тельно оси, проходящей через центр масс (точку C) параллельно данной оси; d – расстояние между осями: $d_1 = L_1 = \frac{l}{2}$;

$$J_1 = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2.$$

Тогда период запишется:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{2ml^2}{3mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}}.$$

Во втором случае ось вращения проходит через точку O_2 , находящуюся на расстоянии $L_2 = 0,25l$ от центра масс; период будет вычисляться по формуле:

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_2}{mgL_2}}.$$

Момент инерции J_2 относительно оси O_2 найдем по теореме Штейнера (аналогично первому случаю):

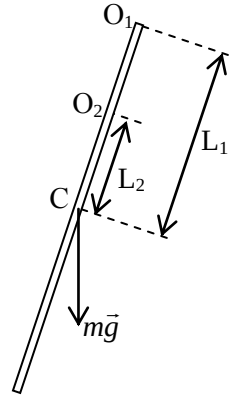


Рис. 7

$$J_2 = J_c + md_2^2, \text{ где } d_2 = \frac{1}{4}l.$$

$$J_2 = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{1}{4}l\right)^2 = \frac{7}{48}ml^2.$$

Тогда период

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{7ml^2 \cdot 4}{48 \cdot mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{7l}{12g}}.$$

Найдем, как изменится период колебаний:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi}{2\pi}\sqrt{\frac{2l \cdot 12g}{3g \cdot 7l}} = \sqrt{\frac{7}{8}} = 1,06.$$

Период колебаний уменьшится в 1,06 раз.

Пример 12

Складываются два колебания одинакового направления, выраженные уравнениями

$$x_1 = A_1 \cos \frac{2\pi}{T}(t + \tau_1); \quad x_2 = A_2 \cos \frac{2\pi}{T}(t + \tau_2),$$

где $A_1=3$ см, $A_2=2$ см, $T=2$ с, $\tau_1=1/6$ с, $\tau_2=1/3$ с. Построить векторную диаграмму сложения этих колебаний и написать уравнение результирующего колебания.

Решение

Для построения векторной диаграммы сложения двух колебаний одного направления надо фиксировать какой-нибудь момент времени. Обычно векторную диаграмму строят для момента времени $t = 0$. Преобразовав оба уравнения к канонической форме $x = A \cos(\omega t + \varphi)$, получим:

$$x_1 = A_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{T}\tau_1\right); \quad x_2 = A_2 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{T}\tau_2\right).$$

Отсюда видно, что оба складываемые гармонические колебания имеют одинаковую циклическую частоту

$$\omega = 2\pi / T.$$

Начальные фазы первого и второго колебаний соответственно равны:

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{T} \tau_1, \quad \varphi_2 = \frac{2\pi}{T} \tau_2.$$

Произведем вычисления:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} c^{-1} = 3,14 c^{-1};$$

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{2} \frac{1}{6} \text{ рад} = 30^\circ; \quad \varphi_2 = \frac{2\pi}{2} \frac{1}{3} \text{ рад} = 60^\circ.$$

Изобразим векторы $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$. Для этого отложим отрезки длиной $A_1 = 3 \text{ см}$ и $A_2 = 2 \text{ см}$ под углами $\varphi_1 = 30^\circ$ и $\varphi_2 = 60^\circ$ к оси ОХ. Результирующее колебание будет происходить с той же частотой ω и амплитудой A , равной геометрической сумме амплитуд $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$: $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$. Согласно теореме косинусов,

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

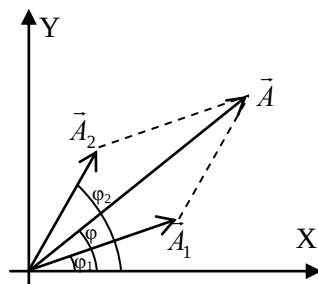


Рис. 8

Начальную фазу результирующего колебания можно также определить непосредственно из векторной диаграммы (рис. 8):

$$\varphi = \arctg \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

Произведем вычисления:

$$A = \sqrt{3^2 + 2^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 \cos(60^\circ - 30^\circ)} \text{ см} = 4,84 \text{ см};$$

$$\varphi = \arctg \frac{3 \sin 30^\circ + 2 \sin 60^\circ}{3 \cos 30^\circ + 2 \cos 60^\circ} = \arctg 0,898 = 42^\circ,$$

или $\varphi = 0,735 \text{ рад}$.

Результирующее колебание является гармоническим, имеет ту же частоту, что и слагаемые колебания, поэтому его можно записать в виде

$$x = A \cos(\omega t + \varphi),$$

где $A = 4,84 \text{ см}$, $\omega = 3,14 \text{ с}^{-1}$, $\varphi = 0,735 \text{ рад}$.

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Пример 1

Определить для серной кислоты: 1) относительную молекулярную массу μ_r ; 2) молярную массу μ .

Решение

1) Относительная молярная масса вещества равна сумме относительных атомных масс всех элементов, атомы которых входят в состав молекулы данного вещества, и определяется по формуле:

$$\mu_r = \sum n_i A_{r,i}, \quad (1)$$

где n_i – число атомов i -го элемента, входящих в молекулу; $A_{r,i}$ – относительная атомная масса i -го элемента.

Химическая формула серной кислоты H_2SO_4 . Так как в состав этой молекулы входят атомы трех элементов, то стоящая в правой части равенства (1) сумма будет состоять из трех слагаемых, и эта формула примет вид:

$$\mu_r = n_1 A_{r,1} + n_2 A_{r,2} + n_3 A_{r,3}. \quad (2)$$

Из формулы серной кислоты следует, что $n_1 = 2$ (два атома водорода), $n_2 = 1$ (один атом серы), $n_3 = 4$ (четыре атома кислорода).

Значения относительных атомных масс водорода, серы и кислорода найдем из таблицы Менделеева:

$$A_{r,1} = 1, A_{r,2} = 32, A_{r,3} = 16.$$

Подставив значения n_i и $A_{r,i}$ в формулу (2), найдем относительную молекулярную массу серной кислоты:

$$\mu_r = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 32 + 4 \cdot 16 = 98.$$

2) Зная относительную молекулярную массу μ_r , найдем молярную массу серной кислоты по формуле:

$$\mu = \mu_r \cdot K, \quad (3)$$

где $K = 10^{-3} \text{ кг/моль}$. Подставив в (3) значения величин, получим:

$$\mu = 98 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

Пример 2

В сосуде объемом $V = 0,01 \text{ м}^3$ содержится смесь газов: азота массой $m_1 = 7 \text{ г}$ и водорода массой $m_2 = 1 \text{ г}$ при температуре 280 К . Определить давление смеси газов.

Решение

По закону Дальтона давление смеси газов равно сумме парциальных давлений газов, входящих в состав смеси:

$$P = P_1 + P_2.$$

Для нахождения парциальных давлений P_1 и P_2 воспользуемся уравнением Менделеева–Клапейрона, применив его дважды к первому и второму газам:

$$P_1 V = \frac{m_1}{\mu_1} RT; \quad P_2 V = \frac{m_2}{\mu_2} RT.$$

Выразим давления P_1 и P_2 из последних уравнений:

$$P_1 = \frac{m_1}{\mu_1} \frac{RT}{V}; \quad P_2 = \frac{m_2}{\mu_2} \frac{RT}{V}.$$

Следовательно, по закону Дальтона давление смеси газов

$$P = \frac{m_1}{\mu_1} \frac{RT}{V} + \frac{m_2}{\mu_2} \frac{RT}{V} = \frac{RT}{V} \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right),$$

где μ_1 и μ_2 – молярные массы азота и водорода; их можно найти, используя таблицу Менделеева:

$$\mu_1 = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}, \quad \mu_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}.$$

$R = 8,31 \text{ Дж(моль} \cdot \text{К)}$ – универсальная газовая постоянная.

После подстановки всех данных и вычисления получим:

$$P = \frac{8,31 \cdot 280 \frac{\text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{моль} \cdot \text{К}}}{0,01 \text{ м}^3} \left(\frac{7 \cdot 10^{-3} \text{ кг}}{28 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}} + \frac{1 \cdot 10^{-3} \text{ кг}}{2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}} \right) = 1,75 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Пример 3

Найти среднюю квадратичную скорость, среднюю кинетическую энергию поступательного движения и среднюю полную кинетическую энергию молекулы азота при температуре 300 К. Определить полную энергию всех молекул азота, содержащихся в $m = 100 \text{ г}$ газа.

Решение

Средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы любого газа определяется его термодинамической температурой:

$$\langle W_{\text{пост.1}} \rangle = \frac{3}{2} kT,$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$ – постоянная Больцмана.

$$\langle W_{\text{пост.1}} \rangle = \frac{3}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К} \cdot 300 \text{ К} = 6,2 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}.$$

Средняя квадратичная скорость молекул газа определяется по формуле:

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}},$$

где m_0 – масса одной молекулы, которую можно найти, зная молярную массу газа μ :

$$m_0 = \frac{\mu}{N_A},$$

где N_A – число Авогадро.

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kTN_A}{\mu}}.$$

Произведение постоянной Больцмана на число Авогадро есть универсальная газовая постоянная $kN_A = R$, тогда

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}},$$

где $R = 8,31 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$, $\mu = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$. Подставим числовые значения в $v_{\text{кв}}$ и получим:

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 300 \text{ К}}{28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}}} = 5,17 \cdot 10^2 \text{ м/с}.$$

Средняя полная энергия молекул зависит не только от температуры, но и от структуры молекул – от числа i степеней свободы:

$$\langle W_1 \rangle = \frac{i}{2} kT.$$

Азот – двухатомный газ, следовательно, число степеней свободы для него равно 5 ($i = 5$).

$$\langle W_1 \rangle = \frac{5}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} / \text{К} \cdot 300 \text{ К} = 10,4 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}.$$

Полная кинетическая энергия всех молекул, равная для идеального газа его внутренней энергии, может быть найдена, как произведение энергии одной молекулы $\langle W_1 \rangle$ на число молекул N , содержащихся в данной массе газа:

$$W = U = W_1 \cdot N.$$

Число молекул N , содержащихся в системе массой m , равно произведению постоянной Авогадро N_A на количество вещества ν :

$$N = N_A \cdot \nu.$$

Так как $\nu = \frac{m}{\mu}$, где μ – молярная масса, то

$$N = \frac{m}{\mu} \cdot N_A.$$

$$\text{Тогда } W = W_1 \cdot \frac{m}{\mu} N_A = \frac{i}{2} kT \cdot \frac{m}{\mu} N_A = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT.$$

Произведем вычисления:

$$\begin{aligned} W &= \frac{5}{2} \cdot \frac{0,1 \text{ кг}}{28 \cdot 10^{-23} \text{ кг} / \text{моль}} \cdot 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 300 \text{ К} = \\ &= 22,3 \cdot 10^3 \text{ Дж}. \end{aligned}$$

Пример 4

Найти среднее число столкновений $\langle z \rangle$ за одну секунду и длину свободного пробега $\langle l \rangle$ молекулы аргона при температуре 290 К и давлении 13,3 Па. Эффективный диаметр молекулы аргона $d = 2,9 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

Решение

Среднее число столкновений, испытываемых одной молекулой за секунду, определяется по формуле:

$$\langle z \rangle = \sqrt{2} \pi d^2 n \langle v \rangle, \quad (1)$$

где d – эффективный диаметр молекулы, n – концентрация молекул, $\langle v \rangle$ – средняя арифметическая скорость молекул.

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}. \quad (2)$$

где $\mu = 40 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ – молярная масса аргона. Из уравнения зависимости давления газа от концентрации (n) и температуры (T) $p = nkT$ выразим n :

$$n = \frac{p}{kT}. \quad (3)$$

Подставим выражения (2) и (3) в (1) и получим:

$$\langle z \rangle = \sqrt{2} \pi d^2 \frac{p}{kT} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}.$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$\begin{aligned} \langle z \rangle &= \sqrt{2} \cdot 3,14 \cdot (2,9 \cdot 10^{-10}) \frac{13,3}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 290} \sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \cdot 290}{3,14 \cdot 40 \cdot 10^{-3}}} = \\ &= 4,9 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

Средняя длина свободного пробега молекул газа определяется как отношение средней арифметической скорости $\langle v \rangle$ к среднему числу столкновений молекулы в единицу времени:

$$\langle l \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle z \rangle} = \frac{\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}}{\sqrt{2} \pi d^2 n} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}.$$

Подставим числовые значения и вычислим $\langle l \rangle$:

$$\langle l \rangle = \frac{\sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \cdot 290}{3,14 \cdot 40 \cdot 10^{-3}}}}{4,9 \cdot 10^5} = 8 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

Пример 5

Чему равны удельные теплоемкости при постоянном объеме c_V и постоянном давлении c_P некоторого двухатомного газа, если плотность этого газа при нормальных условиях $\rho = 1,43 \text{ кг/м}^3$?

Решение

Удельные теплоемкости газов определяются по формулам:

$$c_V = \frac{i}{2} \frac{R}{\mu}; \quad c_P = \frac{i+2}{2} \frac{R}{\mu}, \quad (1)$$

где i – число степеней свободы, а поскольку газ двухатомный, то $i=5$.

μ – молярная масса газа, ее нет в условии задачи, но ее можно найти, учитывая плотность газа при нормальных условиях ($P = 10^5$ Па и $T = 273$ К).

Плотность газа – масса газа в единице объема:

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Воспользуемся уравнением Менделеева–Клапейрона

$$PV = \frac{m}{\mu} RT \quad \text{или} \quad P = \rho \frac{RT}{\mu},$$

$$\text{откуда} \quad \mu = \frac{\rho RT}{P}. \quad (2)$$

Подставим выражение (2) в уравнения (1):

$$c_V = \frac{i}{2} \frac{RP}{\rho RT} = \frac{i}{2} \frac{P}{\rho T}; \quad c_P = \frac{i+2}{2} \frac{P}{\rho T}.$$

Подставим числовые значения и проведем вычисления:

$$c_V = \frac{5}{2} \cdot \frac{10^5 \text{ Н/м}^2}{1,43 \cdot 273 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \text{К}} = 640 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}};$$

$$c_P = \frac{5+2}{2} \cdot \frac{10^5 \text{ Н/м}^2}{1,43 \cdot 273 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \text{К}} = 900 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Пример 6

Газовая смесь состоит из азота массой $m_1 = 3$ кг и водяного пара массой $m_2 = 1$ кг. Принимая эти газы за идеальные, определить удельные теплоемкости c_V и c_P газовой смеси.

Решение

Удельная теплоемкость вещества есть количество теплоты, необходимое для нагревания единицы массы вещества на один градус ($\Delta T = 1 \text{ K}$). Это определение в равной степени относится и к смесям, и к однородному веществу. Поэтому можно записать для смеси при постоянном объеме:

$$Q = c_V (m_1 + m_2) \Delta T;$$

а для ее компонент:

$$Q_1 = c_{V1} m_1 \Delta T; \quad Q_2 = c_{V2} m_2 \Delta T.$$

Поскольку $Q = Q_1 + Q_2$, то

$$c_V (m_1 + m_2) = c_{V1} m_1 + c_{V2} m_2, \text{ и}$$

$$c_V = \frac{c_{V1} m_1 + c_{V2} m_2}{m_1 + m_2} = c_{V1} \frac{m_1}{m_1 + m_2} + c_{V2} \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Здесь c_{V1} – удельная теплоемкость азота, а c_{V2} – удельная теплоемкость водяного пара при $V = \text{const}$.

Удельная теплоемкость при постоянном объеме определяется по формуле:

$$c_V = \frac{i}{2} \frac{R}{\mu},$$

где i – число степеней свободы (для азота $i_1 = 5$, для водяного пара $i_2 = 6$); μ – молярная масса газа (для азота $\mu_1 = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$, для водяного пара $\mu_2 = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.)

$$c_V = \frac{i_1}{2} \frac{R}{\mu_1} \frac{m_1}{m_1 + m_2} + \frac{i_2}{2} \frac{R}{\mu_2} \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$c_V = \frac{5}{2} \cdot \frac{8,31}{28 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{3}{3+1} + \frac{6}{2} \cdot \frac{8,31}{18 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{1}{3+1} = 902 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{K}}.$$

Рассуждая так же, получим формулу для вычисления удельной теплоемкости смеси при постоянном давлении:

$$c_P = c_{P1} \frac{m_1}{m_1 + m_2} + c_{P2} \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

где $c_{p1} = \frac{i_1 + 2}{2} \frac{R}{\mu_1}$, $c_{p2} = \frac{i_2 + 2}{2} \frac{R}{\mu_2}$ – удельные теплоемкости при постоянном давлении азота и водяного пара соответственно. Тогда теплоемкость смеси

$$c_p = \frac{i_1 + 2}{2} \frac{R}{\mu_1} \frac{m_1}{m_1 + m_2} + \frac{i_2 + 2}{2} \frac{R}{\mu_2} \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Окончательно получим:

$$\begin{aligned} c_p &= \frac{5+2}{2} \cdot \frac{8,31}{28 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{3}{3+1} + \frac{6+2}{2} \cdot \frac{8,31}{18 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{1}{3+1} = \\ &= 1240 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}. \end{aligned}$$

Пример 7

Определить работу расширения $m = 7 \text{ кг}$ водорода при постоянном давлении и количество теплоты, подведенное к водороду, если в процессе нагревания его температура повысилась на $\Delta T = 200 \text{ К}$. Каково изменение внутренней энергии ΔU газа?

Решение

При изобарическом процессе работа A расширения газа определяется как $A = P\Delta V$, где ΔV – есть разность конечного и начального объемов. Согласно уравнению Менделеева–Клапейрона

при $P = \text{const}$, когда $P\Delta V = \frac{m}{\mu} R\Delta T$, работу можно записать также в виде:

$$A = P\Delta V = \frac{m}{\mu} R\Delta T,$$

что при подстановке числовых значений (учитывая, что

$$\mu = 2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}) \text{ дает:}$$

$$A = \frac{7}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 \cdot 200 = 5,82 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

Количество подведенной теплоты Q найдем по формуле:

$$Q = mc_p \Delta T,$$

где $c_p = \frac{i+2}{2} \frac{R}{\mu}$, причем $i = 5$ (двухатомный газ). Таким образом,

$$Q = 7 \cdot \frac{5+2}{2} \cdot \frac{8,31}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot 200 = 20,4 \cdot 10^6 \text{ Дж.}$$

Это количество тепла согласно первому началу термодинамики расходуется не только на работу расширения газа, но и на повышение его внутренней энергии: $Q = A + \Delta U$. Тогда

$$\Delta U = Q - A = 20,4 \cdot 10^6 - 5,82 \cdot 10^6 = 14,58 \cdot 10^6 \text{ Дж.}$$

Примечание. Приращение внутренней энергии можно определить также как количество тепла при изохорическом нагреве, а именно $\Delta U = Q_v = m c_v \Delta T$, где $c_v = \frac{i}{2} \frac{R}{\mu}$. Тогда

$$\Delta U = m \frac{i}{2} \frac{R}{\mu} \Delta T,$$

что при подстановке численных значений дает ранее полученную величину:

$$\Delta U = 7 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{8,31}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot 200 = 14,58 \cdot 10^6 \text{ Дж.}$$

Пример 8

Один киломоль газа, находившегося при температуре $T_1 = 300 \text{ K}$, охлаждается изохорически так, что его давление уменьшается вдвое (рис. 9). Затем газ изобарически расширяется до такого объема V_2 , что в конечном состоянии его температура равна первоначальному значению T_1 .

Вычислить: полное количество поглощенного газом тепла Q , работу A , произведенную газом, приращение внутренней энергии газа ΔU

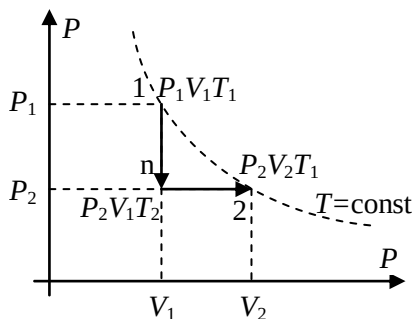


Рис. 9

Решение

Поскольку внутренняя энергия идеального газа определяется его температурой, приращение ее – приращением температуры, а по условию задачи температура газа в конечном состоянии такая же, как и в начальном, то приращение внутренней энергии $\Delta U = 0$.

На участке изохорического охлаждения работа не выполняется, так как объем остается постоянным. Поэтому полная работа равна работе изобарического расширения от объема V_1 до объема V_2 при давлении P_2 , а именно:

$$A = P_2(V_2 - V_1).$$

Поскольку ни давление P_2 , ни объемы V_1 и V_2 не известны, воспользуемся уравнением Менделеева–Клапейрона и запишем работу в виде:

$$A = P\Delta V = \frac{m}{\mu} R\Delta T,$$

где $\Delta T = T_1 - T_2$, то есть $A = \frac{m}{\mu} R(T_1 - T_2)$.

Для промежуточного состояния n параметры газа имеют следующие значения: $P_n = P_2$, $V_n = V_1$ и $T_n = T_2$. На основании закона Шарля для изохорического процесса

$$\frac{P_1}{P_n} = \frac{T_1}{T_n}, \text{ или } \frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Таким образом, искомая работа расширения газа:

$$A = \frac{m}{\mu} R(T_1 - T_2) = \frac{m}{\mu} R \left(T_1 - T_1 \cdot \frac{P_2}{P_1} \right) = \frac{m}{\mu} R T_1 \left(1 - \frac{P_2}{P_1} \right).$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$A = 10^3 \cdot 8,31 \cdot 300 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 1,25 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

Поскольку $\Delta U = 0$, то согласно первому началу термодинамики:

$$Q = \Delta U + A = A = 1,25 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

Пример 9

В цилиндре под поршнем находится водород массой $m = 0,02 \text{ кг}$ при температуре $T_1 = 300 \text{ К}$. Водород сначала расширился адиабатно, увеличив свой объем в $n_1 = 5$ раз, а затем был сжат изотермически, причем объем газа уменьшился в $n_2 = 5$ раз. Найти температуру в конце адиабатного расширения и работу, совершенную газом при этих процессах. Изобразить процесс графически.

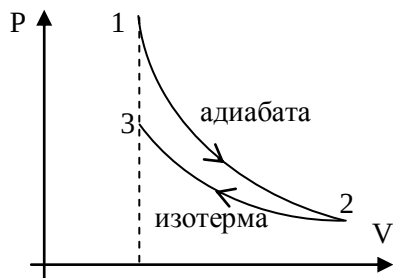


Рис. 10

Решение

Температуры и объемы газа, совершающего адиабатный процесс, связаны между собой соотношением:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}, \text{ или } \frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{n_1^{\gamma-1}}.$$

Здесь γ – отношение теплоемкостей газа при постоянном объеме и постоянном давлении; $n_1 = V_2/V_1$.

Отсюда получаем выражение для конечной температуры:

$$T_2 = \frac{T_1}{n_1^{\gamma-1}}.$$

Работа A_1 газа при адиабатном расширении может быть определена по формуле:

$$A_1 = \frac{m}{\mu} C_V (T_1 - T_2) = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R (T_1 - T_2),$$

где C_V – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме. Работа A_2 газа при изотермическом процессе может быть выражена в виде:

$$A_2 = \frac{m}{\mu} R T_2 \ln \frac{V_3}{V_2}, \text{ или } A_2 = \frac{m}{\mu} R T_2 \ln \frac{1}{n_2},$$

где $n_2 = V_2/V_3$.

Произведем вычисления, учтя, что для водорода как двухатомного газа $\gamma = 1,4$, $i = 5$ и $\mu = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$:

$$T_2 = \frac{300}{5^{1,4-1}} \text{ К} = 157 \text{ К};$$

$$A_1 = \frac{0,02 \cdot 5 \cdot 8,31}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 2} (300 - 157) \text{ Дж} = 29,8 \text{ кДж};$$

$$A_2 = \frac{0,02}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 \cdot 157 \cdot \ln \frac{1}{5} \text{ Дж} = -21 \text{ кДж}.$$

Знак "минус" показывает, что при сжатии работа совершается над газом внешними силами.

Пример 10

Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура нагревателя T_1 в три раза выше температуры холодильника T_2 . Нагреватель передал газу количество теплоты 42 кДж. Какую работу совершил газ?

Решение

Термический КПД тепловой машины показывает, какая доля теплоты, полученной от нагревателя, превращается в механическую работу:

$$\eta = \frac{A}{Q_1}, \quad (1)$$

где Q_1 – количество теплоты, полученной от нагревателя, и A – работа, совершенная рабочим телом тепловой машины.

КПД цикла Карно определяется по формуле:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}; \quad \eta = \frac{3T_2 - T_2}{3T_2} = \frac{2}{3}. \quad (2)$$

Приравняем выражения (1) и (2) и выражаем работу A :

$$\frac{2}{3} = \frac{A}{Q_1},$$

$$\text{откуда } A = \frac{2}{3} Q_1 = \frac{2}{3} \cdot 42 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 28 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

Составители

Людмила Викторовна Глазкова
Лев Федорович Меденцов
Нина Ивановна Новикова

ФИЗИКА

Часть I. Механика. Молекулярная физика

Методические указания по выполнению контрольных работ
для студентов направления «Строительство»
заочной формы обучения

Редактор А.А.Крат

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 54.НК.05.953.П.000148.12.02 от 27.12.2002 г.
Подписано к печати 25.04.2005. Формат 60х84 1/16 д.л.
Гарнитура Таймс. Бумага газетная. Ризография.
Объем 2,5 п.л. Тираж 150 экз. Заказ № 165

Новосибирский государственный архитектурно-
строительный университет (Сибстрин)
630008, Новосибирск, ул. Ленинградская, 113

Отпечатано мастерской оперативной полиграфии НГАСУ