

утверждение, в котором используются обозначения: $V_e(T) = M[e_T e_T^T]$ – матрица вторых моментов случайного вектора невязки $e_T = \tilde{f} - \hat{f}_T$; $E(T) = I - T$ – оператор невязки, позволяющий представить e_T в виде $e_T = E(T)\tilde{f}$, $V_\eta = M[\eta\eta^T]$ – ковариационная матрица случайного вектора шума измерения η .

Утверждение 3.3.1. Необходимым и достаточным условием оптимальности линейного оператора фильтрации T , строящего $\hat{f}_T = T\tilde{f}$, где $\tilde{f} = f + \eta$, является матричное тождество

$$V_e(T) = V_\eta E^T(T), \quad (3.3.3)$$

где V_η – ковариационная матрица вектора η . ♣

Заметим, что в это условие *не входит априорная информация о неизвестном векторе f в виде матрицы вторых моментов $V_f = f f^T$ вектора f .*

Соотношение (3.3.3) трудно использовать для априорного построения оптимального оператора фильтрации T_{opt} , так как оно включает вектор невязки, определяемый по построенному оператору T . Однако его можно использовать для ответа на вопрос: *оптимален или нет построенный оператор фильтрации T ?* Поэтому соотношение (3.3.3) можно рассматривать как *критерий оптимальности фильтрующего оператора T .*

Применение изложенного выше критерия оптимальности для вычисления λ_{opt} параметрического оператора фильтрации $T(\lambda)$ (фильтрующие свойства которого зависят от некоторого параметра λ) связано с двумя трудностями.

Во-первых, оценка матрицы вторых моментов $V_e(\lambda)$, вычисленная по одной реализации вектора невязки $e_\lambda = \tilde{f} - \hat{f}_\lambda = \tilde{f} - T(\lambda)\tilde{f}$, непригодна для проверки тождества (3.3.3) из-за малой точности оценивания.

Во-вторых, в силу параметризации оператора T условие (3.3.3) становится только достаточным. Действительно, найдется величина λ ,

доставляющая минимум СКО, но при этом λ не будет точно выполняться тождество (3.3.3). Следовательно, целесообразно в качестве λ_{opt} взять такое значение λ_w , при котором принимается основная статистическая гипотеза:

$$H_0: V_e(\lambda) = V_\eta E^T(\lambda). \quad (3.3.4)$$

В качестве альтернативной гипотезы примем

$$H_1: V_e(\lambda) \neq V_\eta E^T(\lambda). \quad (3.3.5)$$

Эта гипотеза принимается, если невыполнение тождества (3.3.4) обусловлено не случайными ошибками, возникающими из-за оценивания $V_e(\lambda)$ по одной реализации, а систематическими, обусловленными не оптимальностью параметра сглаживания. Таким образом, значение λ_w можно рассматривать как оценку оптимального параметра сглаживания λ_{opt} .

Для проверки гипотезы (3.3.4) введем статистику [2, 4, 10, 12]

$$\rho_w(\lambda) = e_\lambda^T [V_\eta E^T(\lambda)]^{-1} e_\lambda. \quad (3.3.6)$$

Существование матрицы $[E^T(\lambda)]^{-1}$ позволяет переписать $\rho_w(\lambda)$ в виде

$$\rho_w(\lambda) = \tilde{f}^T V_\eta^{-1} e_\lambda. \quad (3.3.7)$$

В качестве оценки для оптимального параметра сглаживания λ_{opt} принимается значение λ_w , при котором случайная величина

$$\rho_w(\lambda) = \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{f}_i e_{\lambda_i}}{\sigma^2} \quad (3.3.8)$$

попадает в интервал

$$\left[\vartheta_{\frac{\gamma}{2}, N}, \vartheta_{1-\frac{\gamma}{2}, N} \right], \quad (3.3.9)$$

где $e_{\lambda_i} = \tilde{f}_i - \hat{f}_{\lambda_i}$ – i -я проекция вектора невязки e_λ , $\vartheta_{\frac{\gamma}{2}, N}, \vartheta_{1-\frac{\gamma}{2}, N}$ – квантили χ^2 -распределения с числом степеней свободы N уровней $\frac{\beta}{2}$, $1 - \frac{\beta}{2}$ соответственно (обычно вероятность ошибки первого рода $\beta = 0.05$); N – число измеренных значений $\tilde{f}_i$.

3.3.2. Выбор глобального порога на основе критерия оптимальности

Первоначально рассмотрим оценивание глобального порога λ (т.е. одной пороговой величины для всех уровней разложения) на основе критерия оптимальности.

Можно показать, что при использовании ортогональных вейвлет-функций статистика $\rho_w(\lambda)$ (см. формулу (3.3.8)) вычисляется через коэффициенты вейвлет-разложений [21, 61]:

- для функции *soft*

$$\rho_w(\lambda) = \frac{\sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_k \tilde{d}_{j,k} (\tilde{d}_{j,k} - T_s(\tilde{d}_{j,k}; \lambda))}{\sigma^2}; \quad (3.3.10)$$

- для функции *hard*

$$\rho_w(\lambda) = \frac{\sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_k \tilde{d}_{j,k} (\tilde{d}_{j,k} - T_H(\tilde{d}_{j,k}; \lambda))}{\sigma^2}. \quad (3.3.11)$$

В качестве оценки для оптимальной величины λ_{opt} (при которой СКО фильтрации пороговыми алгоритмами минимальна) примем значение λ_w , при котором $\rho_w(\lambda)$ попадает в интервал (3.3.9).

Замечание 3.3.1. Если $N > 30$, то границы интервала (3.3.9) при $\beta = 0.05$ можно вычислить по формулам:

$$\vartheta_{0.25, N} = N - 1.96\sqrt{2N}, \quad \vartheta_{0.975, N} = N + 1.96\sqrt{2N}. \quad \blacklozenge \quad (3.3.12)$$

Пример 3.3.1. Для сигнала, точные значения которого изображены на рис. 2.1а, вычислить зависимости $\rho_w(\lambda)$ и $\delta_f(\lambda)$ для двух уровней шума 0.023 и 0.12 и пороговой функции *soft*.

Решение. Для 60 значений λ из интервала $[0.001, 60]$ вычислим сглаженную функцию (пороговая функция *soft*), найдем относительную ошибку фильтрации $\delta_f(\lambda) = \|\hat{f}_\lambda - f\|/\|f\|$ и определим значение $\rho_w(\lambda)$. На рис. 3.8а показаны графики $\rho_w(\lambda)$ (точечная кривая) для относительного уровня шума $\delta_\eta = 0.023$, а на рис. 3.8б – $\delta_\eta = 0.12$. Здесь же показаны (штриховыми линиями) границы интервала (3.3.9), которые вычислялись по формулам (3.3.12). Видно, что значения λ , при которых $\rho_w(\lambda)$ попадает в интервал (3.3.9) (т.е. значения λ_w) соответствуют минимуму относительной ошибки фильтрации (на рис. 3.8 сплошная кривая). Таким образом, пороговые значения λ_w являются хорошими оценками для λ_{opt} . ☺

Заметим, что вычисление λ_w сводится к решению нелинейного уравнения

$$\rho_w(\lambda) = m, \quad (3.3.13)$$

где для одномерного сигнала $m = N$ – число значений фильтруемого сигнала. Однако итерационный процесс прекращается, как только $\rho_w(\lambda^{(n)})$ попадает в интервал (3.3.9). Число итераций, необходимых для этого, гораздо меньше, чем при поиске корня нелинейного уравнения с заданной точностью $\varepsilon \in [10^{-8}, 10^{-6}]$. Это обуславливает возможность эффективно использовать «медленные» итерационные алгоритмы (например, метод дихотомии – деление отрезка пополам).

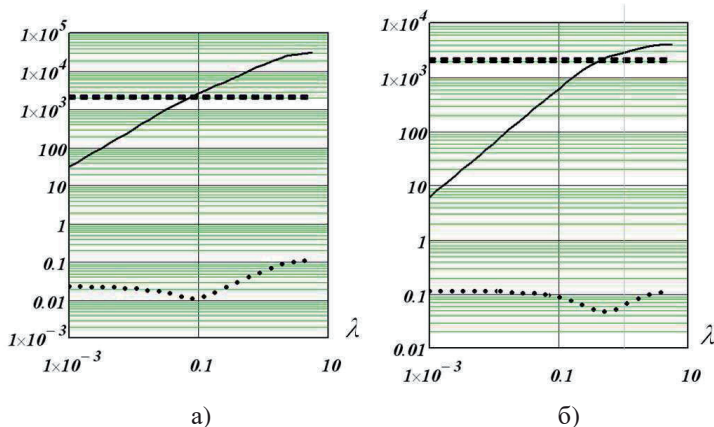


Рис. 3.8. Графики функционала $\rho_w(\lambda)$ для функции *soft*

3.3.3. Выбор локальных пороговых величин на основе критерия оптимальности

Учитывая асимптотическую оптимальность универсального порога λ_j^U , величину локального порога на каждом j -м уровне разложения будем задавать выражением [19, 21]:

$$\lambda_j(\beta) = \beta \sqrt{2 \cdot \ln(N_j)} = \beta \cdot c_j. \quad (3.3.14)$$

Необходимо построить оценку для величины β_{opt} , которая минимизирует СКО фильтрации при использовании пороговых величин (3.3.14).

Можно показать, что при использовании ортогональных вейвлетов критерий $\rho_w(\beta)$ вычисляется через коэффициенты вейвлет-разложения:

- для функции *soft*

$$\rho_w(\beta) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_k \tilde{d}_{j,k} \cdot (\tilde{d}_{j,k} - \text{soft}(\tilde{d}_{j,k}, \lambda_j(\beta)));$$

- для функции *hard*

$$\rho_w(\beta) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_k \tilde{d}_{j,k} \cdot (\tilde{d}_{j,k} - \text{hard}(\tilde{d}_{j,k}, \lambda_j(\beta))).$$

В качестве оценки для β_{opt} принимается величина β_w , для которой выполняется неравенство

$$\vartheta_{m,\gamma/2} \leq \rho_w(\beta_w) \leq \vartheta_{m,1-\gamma/2}. \quad (3.3.15)$$

Тогда локальные пороговые величины, вычисленные на основе критерия оптимальности, определяются выражением

$$\lambda_j^w = \beta_w \sqrt{2 \cdot \ln(N_j)}. \quad (3.3.16)$$

Рассмотрим свойства критерия $\rho_w(\beta)$. Выполнив несложные преобразования, можно $\rho_w(\lambda)$ переписать в виде:

- для функции *soft*

$$\rho_w(\beta) = \frac{1}{\sigma^2} \left[\sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_{|\tilde{d}_{j,k}| \leq \beta \cdot c_j} \tilde{d}_{j,k}^2 + \beta \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_{|\tilde{d}_{j,k}| > \beta \cdot c_j} \tilde{d}_{j,k}^2 \cdot c_j \right];$$

- для функции *hard*

$$\rho_w(\beta) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_{|\tilde{d}_{j,k}| \leq \beta \cdot c_j} \tilde{d}_{j,k}^2,$$

где запись $\sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_{|\tilde{d}_{j,k}| \leq \beta \cdot c_j} \tilde{d}_{j,k}^2$ означает суммирование только тех коэффициентов $\tilde{d}_{j,k}$, которые по абсолютной величине меньше или равны $\beta \cdot c_j$.

Видно, что статистика $\rho_w(\beta)$ для функции *soft* является непрерывной функцией параметра β , в то же время $\rho_w(\beta)$ для функции *hard* может иметь разрывы первого рода при небольшом числе измерений и небольшом уровне шума.

Заметим, что вычисление β_w сводится к решению нелинейного уравнения

$$\rho_w(\beta) = m, \quad (3.3.17)$$

где $m = N$ – число значений фильтруемого сигнала. Однако итерационный процесс прекращается, как только $\rho_w(\beta^{(n)})$ попадает в интервал $[\vartheta_{m, \gamma/2}, \vartheta_{m, 1-\gamma/2}]$. Количество итераций, необходимых для этого, гораздо меньше, чем при поиске корня нелинейного уравнения с заданной точностью $\varepsilon \in [10^{-8}, 10^{-6}]$. Это обуславливает возможность эффективно использовать «медленные» итерационные алгоритмы (например, метод дихотомии – деление отрезка пополам).

Утверждение 3.3.2. Если

$$\rho_w(\infty) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N \tilde{f}_i^2 > \vartheta_{m, 1-\beta/2}, \quad (3.3.18)$$

где $\vartheta_{\frac{\gamma}{2}, N}$ – квантиль χ^2 -распределения с числом степеней свободы N уровня $\frac{\gamma}{2}$, то существует конечное значение β_w , для которого выполняется неравенство (3.3.15).

Доказательство. Если выполняется условие (3.3.18), то точка $\beta = \infty$ может рассматриваться как верхняя граница интервала локализации корня уравнения (3.3.17). Если $\beta \rightarrow 0$, то $\rho_w(\beta) \rightarrow 0$ и $\beta = 0$ может рассматриваться как нижняя граница интервала локализации. Таким образом, при выполнении условия (3.3.18) обязательно существует хотя бы одно значение $0 \leq \beta < \infty$, для которого $\rho_w(\beta)$ удовлетворяет условию (3.3.15).

Невыполнение условия (3.3.18) означает, что значения $\tilde{f}_i$ обусловлены только шумом η_i , т.е. значения точной функции $f(x_i) \equiv 0$. В этом случае $\beta_w = \infty$ и сглаженные значения $\hat{f}_i \equiv 0$. ♣

Заметим, что изложенный алгоритм построения оценки β_w для β_{opt} легко обобщается для вейвлет-фильтрации изображений. В этом случае число степеней свободы m (см. формулу (3.3.17)) определяется как $m = N_x \cdot N_y$, где N_x, N_y – размеры фильтруемого изображения.

Замечание 3.3.2. Приведенный алгоритм вычисления β_w требует задания дисперсии шума измерения σ^2 . Если дисперсия неизвестна, то рекомендуется обратиться к оценке (2.3.11). ♦

3.3.4. Результаты вычислительного эксперимента

Для исследования оптимальности построенной оценки β_w был выполнен обширный вычислительный эксперимент по вейвлет-фильтрации сигналов и изображений. Приведем и обсудим только некоторые результаты вейвлет-фильтрации изображений, уделяя также внимание на оптимальность других (рассмотренных в п. 3.2) пороговых величин.

В качестве тестовых изображений были взяты два изображения LENA и TARGET размером 256×256 пикселей, приведенных на рис. 3.9.



Рис. 3.9. Тестовые изображения:
а – LENA; б – TARGET

По статистической природе моделируемого шума измерения выполненный вычислительный эксперимент можно условно разделить две серии:

- *Белый шум измерения.* Двумерный шум измерения η_{i_1, i_2} имеет нулевое среднее, одинаковую дисперсию σ^2 для всех η_{i_1, i_2} и соседние

отсчеты шума не коррелированы друг с другом, т.е. шум измерения являлся «белым».

- *Цветной шум измерения.* Двумерный шум измерения η_{i_1, i_2} имеет нулевое среднее, одинаковую дисперсию σ^2 и соседние отсчеты шума коррелированы друг с другом с коэффициентом корреляции 0.2, т.е. шум измерения являлся «цветным».

В экспериментах интенсивность шума задавалась по относительному уровню шума

$$\delta_F = \frac{\|\tilde{F} - F\|}{\|F\|}, \quad (3.3.19)$$

где $\|\cdot\|$ – обозначает евклидову норму матрицы, а матрицы $F, \tilde{F}$ размером 256×256 пикселей составлены из значений точного и зашумленного изображений соответственно, при этом дисперсия шума σ^2 определялась выражением $\sigma^2 = \left[\frac{\delta_F \cdot \max(F)}{2} \right]^2$. Однако во всех экспериментах при выборе пороговых величин дисперсия σ^2 считалась неизвестной (эта ситуация часто имеет место на практике), и она оценивалась с использованием выражения (2.3.11).

Первоначально исследуем свойство оптимальности оценки β_w . Точность фильтрации определим относительной ошибкой:

$$\delta(\beta) = \frac{\|\hat{F}_\beta - F\|}{\|F\|}, \quad (3.3.20)$$

где $\hat{F}_\beta$ – результат вейвлет-фильтрации с локальными порогами (3.3.14) при заданной величине β . На рис. 3.10 показаны значения $\rho_w(\beta)$ (кривая 1) для функции *hard* (рис. 3.10а) и функции *soft* (рис. 3.10б), которые были вычислены при вейвлет-фильтрации изображения LENA, искаженного «белым» шумом с относительным уровнем $\delta_F = 0.10$.

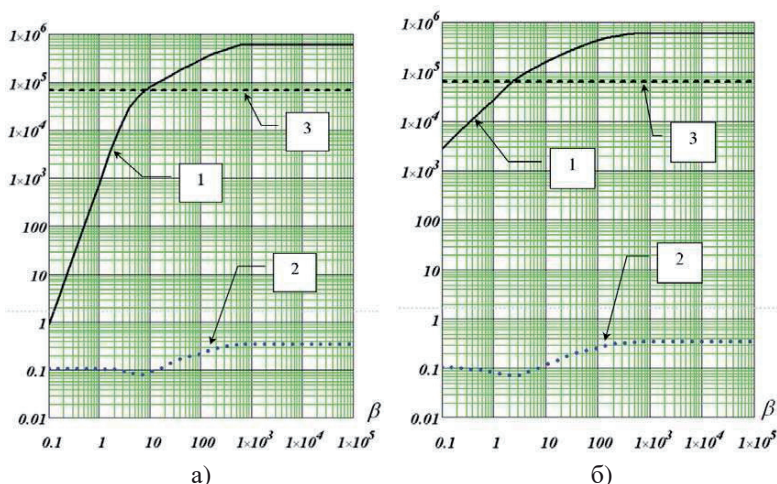


Рис. 3.10. Графики функций $\rho_w(\beta)$ и $\delta(\beta)$

На рис. 3.10 показаны значения относительной ошибки фильтрации (кривые 2) и величины $\vartheta_{m,0.025}, \vartheta_{m,0.975}$ при $m = 256 \cdot 256 = 65536$ (прямые линии 3), которые из-за масштаба рисунка слились в одну прямую. Видно, что точка пересечения $\rho_w(\beta)$ с прямой 3 (т.е. значение β_w) соответствует области минимума относительной ошибки фильтрации $\delta(\beta)$.

Следовательно, можно сделать вывод о приемлемой точности оценки β_w для оптимальной величины β_{opt} . Этот вывод также подтверждается приводимыми ниже результатами другого вычислительного эксперимента.

В следующем вычислительном эксперименте сравнивались ошибки вейвлет-фильтрации при использовании четырех пороговых величин: $\lambda_j^U, \lambda_j^S, \lambda_j^B, \lambda_j^W$ (см. п. 3.2) при трех уровнях шума 0.05, 0.10, 0.15. В качестве критерия точности фильтрации была принята *средняя относительная ошибка* (СОО), определяемая выражением

$$\bar{\delta}(\hat{F}_\lambda) = M \left[\frac{\|\hat{F}_\lambda - F\|}{\|F\|} \right], \quad (3.3.21)$$

где математическое ожидание берется по распределению матрицы случайного шума η . Выборочная оценка $\hat{\delta}(\hat{F}_\lambda)$ математического ожидания вычислялась по 30 изображениям $\hat{F}_\lambda^{(l)}$, где $\hat{F}_\lambda^{(l)}$ – результат фильтрации изображения $\tilde{F}^{(l)} = F + \eta^{(l)}$, $\eta^{(l)}$ – l -я реализация матрицы шума, т.е.

$$\hat{\delta}(\hat{F}_\lambda) = \sum_{l=1}^{30} \frac{\|\hat{F}_\lambda^{(l)} - F\|}{\|F\|}$$

В качестве *минимальной COO* $\delta_{\min}$ была принята COO вейвлет-фильтра с пороговой величиной:

$$\lambda_j^{OPT} = \lambda_j(\beta_{opt}) = \beta_{opt} \sqrt{2 \cdot \ln(N_j)},$$

в которой оптимальное значение β_{opt} определялось из условия минимума относительной ошибки фильтрации для каждой реализации $\tilde{F}^{(l)}$. Это возможно так, как в вычислительном эксперименте точное изображение F известно (оно задается). Очевидно, что на практике такое определение β_{opt} нереализуемо, но $\delta_{\min}$ может служить базовым «ориентиром» при сравнении COO вейвлет-фильтрации, использующие другие пороговые величины. Для этого определим коэффициент эффективности

$$E = \frac{\delta_{\min}}{\hat{\delta}(\hat{F}_\lambda)}. \quad (3.3.22)$$

Очевидно, чем больше E отклоняется от единицы в меньшую сторону, тем больше проигрыш по точности соответствующего алгоритма вейвлет-фильтрации по сравнению с алгоритмом вейвлет-фильтрации, использующего оптимальную пороговую величину λ_j^{OPT} .

В табл. 3.1 приведены значения коэффициента эффективности E для четырех пороговых величин: λ_j^U , λ_j^S , λ_j^B , λ_j^W , используемых при фильтрации изображения LENA. Строки с буквой H соответствуют функции *hard*, с буквой S – функции *soft*. Видно, что использование пороговой величины λ_j^U приводит к значительному (в 1.5–2 раза)

увеличению СОО (особенно для функции *soft*). Пороги λ_j^B , λ_j^S также имеют СОО на 10–25 % выше $\delta_{\min}$ (в зависимости от используемой функции *hard* или *soft*), пороговое значение λ_j^W дает самый наименьший проигрыш по точности как при использовании функции *hard*, так и при использовании *soft*.

Таблица 3.1

Пороговые величины		Относительный уровень шума		
		0.05	0.10	0.15
λ_j^U	H	0.681	0.786	0.798
	S	0.444	0.561	0.632
λ_j^S	H	0.803	0.812	0.814
	S	0.857	0.923	0.946
λ_j^B	H	0.854	0.859	0.861
	S	0.861	0.855	0.880
λ_j^W	H	0.928	0.975	0.995
	S	0.991	0.993	0.998

В табл. 3.2 приведены значения коэффициента эффективности E при фильтрации изображения TARGET. Анализ данных таблицы позволяет сделать выводы, аналогичные табл. 3.1, но дополнительно следует отметить увеличение СОО при использовании байесовского порога λ_j^B (составляет 15–30 %). Лучшие результаты имеет пороговая величина λ_j^W .

Результаты, полученные при фильтрации изображений, искаженных цветным шумом (коэффициент корреляции между соседними значениями шума равен 0.2) характеризуют небольшое уменьшение коэффициента эффективности (порядка 3–8 %), но соотношение коэффициента E для разных пороговых величин такое же, как и при фильтрации белого шума.

Таблица 3.2

Пороговые величины		Относительный уровень шума		
		0.050	0.100	0.150
λ_j^U	H	0.725	0.742	0.786
	S	0.443	0.536	0.610
λ_j^S	H	0.766	0.795	0.782
	S	0.887	0.923	0.936
λ_j^B	H	0.675	0.721	0.807
	S	0.681	0.723	0.824
λ_j^W	H	0.906	0.934	0.963
	S	0.966	0.992	0.996

По-видимому, при фильтрации других изображений количественные значения ошибок алгоритмов вейвлет-фильтрации будут другими, но «иерархия» рассмотренных и предложенных пороговых величин по точности фильтрации сохранится. Этот вывод основан на приведенных результатах фильтрации существенно отличающихся изображений – «гладкого» LENA и «контрастного» TARGET. Поэтому в качестве наилучшей пороговой величины в пороговых алгоритмах обработки коэффициентов разложения зашумленных сигналов и изображений, **целесообразно использовать пороговую величину λ_j^W , определяемую выражением (3.3.16) и найденную с использованием критерия оптимальности.**

3.3.5. Реализация пороговых алгоритмов вейвлет-фильтрации в MathCAD

В приложении приведен текст подпрограммы-функции $D1_Filter_ \lambda_{all}$, которая реализует алгоритм вейвлет-фильтрации одномерных сигналов с порогом λ_w , а также тексты программных модулей, используемых $D1_Filter_ \lambda_{all}$.

Обращение к подпрограмме-функции $D1_Filter_ \lambda_{all}$ имеет вид:

$D1_Filter_ \lambda_{all}(f_{\eta}, J_{fil}, J_{wav}, wav, Num).$

Формальные параметры:

f_n – одномерный массив длиной $N = 2^{j_0}$, содержащий зашумленные значения функции;

J_{fil} – максимальный уровень разложения при пороговой обработке детализирующих коэффициентов;

J_{wav} – уровень разложения в базисе вейвлет-функций (необходимо выполнение условия $J_{fil} \leq J_{wav} < j_0$);

wav – задает имя семейства вейвлетов. Например, задав *daublet(8)*, получаем разложение в базисе ортогональных вейвлетов Добеши8;

Num – задает вид пороговой функции: если $Num = 1$, то функция *hard*; если $Num > 1$, то функция *soft*.

Результатом работы является массив данной N , содержащий отфильтрованные значения функции.

Внимание! Значение дисперсии σ^2 , входящего в выражения (3.3.10), (3.3.11), оценивается внутри описываемой подпрограммы-функции.

Изложенные алгоритмы вычисления пороговых значений достаточно просто обобщаются для выбора порогов в алгоритмах вейвлет-фильтрации изображений.

3.4. Выбор параметров двухпараметрических пороговых функций

Предлагается алгоритм оценивания оптимальных параметров двухпараметрических пороговых функций из условия минимума СКО фильтрации на основе критерия оптимальности, изложенного в п. 3.3.

3.4.1. Пороговые функции с двумя параметрами

Ранее (см. п. 3.1) обсуждались недостатки пороговых функций *hard* и *soft*. Основные из которых:

- в функции *soft* из-за уменьшения амплитуды коэффициента разложения на величину λ возможно сглаживание (размытие) кон-

трастных элементов обрабатываемого сигнала, особенно при больших λ ;

- в функции *hard* наличие разрыва в окрестности точки λ в определенной степени обуславливает появление осцилляций (эффекта Гиббса) в особых точках сигнала.

Для преодоления этих недостатков в литературе (например, [38]) были предложены *двухпараметрические функции*, среди которых наиболее часто упоминается пороговая функция вида (в зарубежной литературе она получила название *semisoft* или *firm*):

$$T_{ss}(\tilde{d}, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } |\tilde{d}| \leq \lambda_1; \\ \text{sign}(\tilde{d}) \frac{\lambda_2 (|\tilde{d}| - \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1}, & \text{если } \lambda_1 < |\tilde{d}| \leq \lambda_2; \\ \tilde{d}, & \text{если } |\tilde{d}| > \lambda_2, \end{cases} \quad (3.4.1)$$

которая включает уже две пороговые величины λ_1, λ_2 . График этой функции приведен на рис. 3.11 (сплошная линия). Для сравнения с однопараметрическими пороговыми функциями здесь же приведены графики функции *hard* (штриховой график) и функции *soft* (точечный график).

Из графика видно, что в пороговой функции *semisoft* отсутствуют (в определенной степени) недостатки функций *hard, soft*. Предпочтительный выбор функции *semisoft* обусловлен также ее лучшими статистическими характеристиками. Так в работе [38], была получена аналитическая зависимость величины среднеквадратической ошибки

$$R_\lambda(\theta) = M \left[\left(T_\lambda(\tilde{\theta}) - \theta \right)^2 \right], \quad (3.4.2)$$

как функции оцениваемого коэффициента разложения, если зашумленный (обрабатываемый) коэффициент $\tilde{\theta}$ имеет нормальное распределение $N(0,1)$. В верхнем ряду рис. 3.12 приведены графики пороговых функций, а в нижнем – соответствующие графики $R_\lambda(\theta)$. При этом задавались следующие пороговые величины: функция *hard* – $\lambda = 3.312$; *soft* – $\lambda = 2.045$; *semisoft* – $\lambda_1 = 2.331, \lambda_2 = 7.259$.

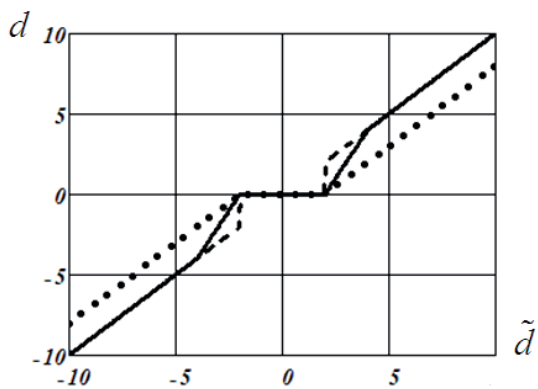


Рис. 3.11. Графики пороговых функций

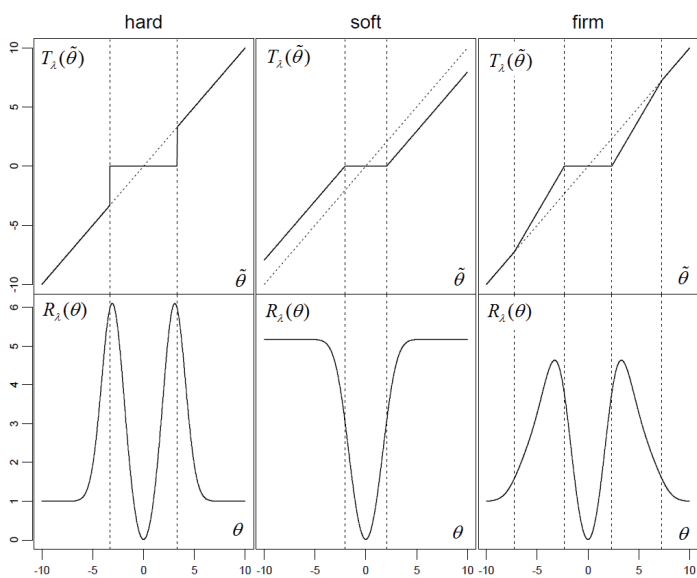


Рис. 3.12. Графики пороговых функций и функций $R_\lambda(\theta)$

Анализ графиков показывает:

- влияние формы пороговой функции на характер и величину ошибки $R_\lambda(\theta)$;
- функция *semisoft* имеет меньшие значения ошибки $R_\lambda(\theta)$.

Все это позволяет сделать вывод о предпочтительности использования пороговой функции *semisoft* при построении пороговых алгоритмов вейвлет-фильтрации.

Однако функция *semisoft* включает две пороговые величины λ_1, λ_2 , которые играют роль управляющих параметров, существенно влияющих на ошибку фильтрации. При заниженных значениях λ_1, λ_2 часть шумовых коэффициентов разложения не зануляются и результат обратного вейвлет-преобразования (отфильтрованная функция) может содержать значительный остаточный шум, т.е. функция не достаточно сглажена. При завышенных порогах λ_1, λ_2 зануляются информативные коэффициенты и результат фильтрации оказывается переглаженным.

3.4.2. Выбор двух пороговых величин на основе критерия оптимальности

Заметим, что для двухпараметрических пороговых функций в литературе (как отечественной, так и зарубежной) отсутствовали алгоритмы выбора порогов λ_1, λ_2 , позволяющие с приемлемой точностью оценить оптимальные пороги $\lambda_{opt1}, \lambda_{opt2}$, которые минимизируют СКО фильтрации. Для решения задачи оценивания $\lambda_{opt1}, \lambda_{opt2}$ в пионерских работах [22, 63] был успешно использован критерий оптимальности. Следуя этой работе, приведем основные построения алгоритма оценивания $\lambda_{opt1}, \lambda_{opt2}$.

Перейдем к оцениванию оптимальных порогов функции (3.4.1). По аналогии с порогом (3.3.14) представим λ_1, λ_2 в виде

$$\lambda_1(\beta) = \beta \cdot \sqrt{2 \ln(N_j)}; \quad (3.4.3)$$

$$\lambda_2(\beta, C) = \beta \cdot C \sqrt{2 \ln(N_j)}, \quad (3.4.4)$$

где множитель $C > 1$ следует из неравенства $\lambda_2 > \lambda_1$ для функции (3.4.1). Таким образом, следует построить оценки β_w, C_w для оп-

тимальных значений β_{opt} , C_{opt} , при которых СКО фильтрации минимальна. Введем критерий

$$\rho_w(\beta, C) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N e_{(\beta, C)i} \cdot \tilde{f}_i, \quad (3.4.5)$$

где $e_{(\beta, C)i}$ – проекции вектора невязки $e_{(\beta, C)} = \tilde{f} - \hat{f}_{(\beta, C)}$; $\hat{f}_{(\beta, C)}$ – вектор фильтрованных значений, вычисленных с использованием порогов (3.4.3), (3.4.4). В качестве оценок для соответствующих оптимальных порогов примем такие значения β_w, C_w , которые удовлетворяют неравенству

$$\vartheta_{m, \gamma/2} \leq \rho_w(\beta_w, C_w) \leq \vartheta_{m, 1-\gamma/2}, \quad (3.4.6)$$

Для вычисления значений β_w, C_w вместо решения нелинейного уравнения

$$\rho_w(\beta, C) = m, \quad (3.4.7)$$

включающего две неизвестные величины β, C , рассмотрим задачу минимизации функционала

$$F(\beta, C) = |\rho_w(\beta, C) - m|^2. \quad (3.4.8)$$

Заметим, что решение этой задачи всегда существует и для его нахождения можно использовать известные процедуры минимизации. В качестве β_w, C_w принимается такой элемент $\{\beta^{(n)}, C^{(n)}\}$ минимизирующей последовательности, для которого выполняется неравенство (3.4.6).

Можно показать, что при использовании ортогональных вейвлетов критерий $\rho_w(\beta, C)$ вычисляется через коэффициенты вейвлет-разложения:

$$\rho_w(\beta, C) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_k \tilde{d}_{j,k} \cdot \left(\tilde{d}_{j,k} - T_F(\tilde{d}_{j,k}, \lambda_1(\beta), \lambda_2(\beta, C)) \right). \quad (3.4.9)$$

Это позволяет находить значения критерия (при реализации процедуры минимизации) в пространстве коэффициентов вейвлет-разложения, а затем (при найденных β_w , C_w и вычисленных $\hat{d}_{j,k}$) только один раз выполнить обратное вейвлет-преобразование и получить сглаженные значения функции.

Отметим некоторые свойства $\rho_w(\beta, C)$, которые следуют из (3.4.9):

- все слагаемые, входящие в формулу (3.4.9), не отрицательны (могут изменяться от 0 до $\tilde{d}_{j,k}^2$) и поэтому $\rho_w(\beta, C) \geq 0$;
- при $\beta \rightarrow 0$ и $C < \infty$ справедлив предел $\rho_w(\beta, C) \rightarrow 0$;
- при $\beta \rightarrow \infty$ и $C < \infty$ справедлив предел

$$\rho_w(\beta, C) \rightarrow \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_k \tilde{d}_{j,k}^2 = \frac{1}{\sigma^2} \|\tilde{f}\|^2. \quad (3.4.10)$$

Последнее равенство имеет место для ортогональных вейвлетов при соответствующей нормировке базисных функций. Два последних свойства обуславливают следующее утверждение.

Утверждение 3.4.1. Если выполняется неравенство

$$\rho_w(\infty, C) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N \tilde{f}_i^2 > \vartheta_{m,1-\gamma/2}, \quad (3.4.11)$$

то существуют конечные значения β_w , C_w , для которых выполняется неравенство (3.4.6). ♣

Невыполнение условия (3.4.11) означает, что значения $\tilde{f}_i = \eta_i$, т.е. $f_i \equiv 0$. В этом случае $\beta_w = \infty$ и сглаженные значения равны 0.

Заметим, что изложенный алгоритм построения оценки β_w , C_w легко обобщается для вейвлет-фильтрации изображений. В этом случае число степеней свободы m (см. неравенство (3.4.6)) определяется как $m = N_x \cdot N_y$, где N_x, N_y – размеры фильтруемого изображения.

Существенной чертой приведенного алгоритма вычисления β_w , C_w является использование дисперсии шума σ^2 . На практике, как

правило, эта величина неизвестна, и в этом случае так же, как и при выборе одной пороговой величины (см. п. 2.3), можно использовать оценку

$$\hat{\sigma}^2 = \left[\frac{\text{median}(|\tilde{d}_{1,k}|)}{0.6745} \right]^2, \quad (3.4.12)$$

где оператор $\text{median}(|\tilde{d}_{1,k}|)$ вычисляет медиану абсолютных величин детализирующих коэффициентов уровня разложения $j_0 + 1$ (объем выборки равен $N/2$).

3.4.3. Исследования алгоритма выбора порогов двухпараметрических пороговых функций

Приведем некоторые результаты вычислительного эксперимента по исследованию оптимальности построенных оценок β_w , C_w .

В качестве тестовых сигналов были взяты две дискретные функции, значения которых приведены на рис. 3.13а (назовем ее функция 1) и на рис. 3.13б (функция 2). Количество значений $N = 2048$. Выбор этих функций обусловлен присутствием в их спектре высококачественных составляющих, что существенно затрудняет фильтрацию шума.

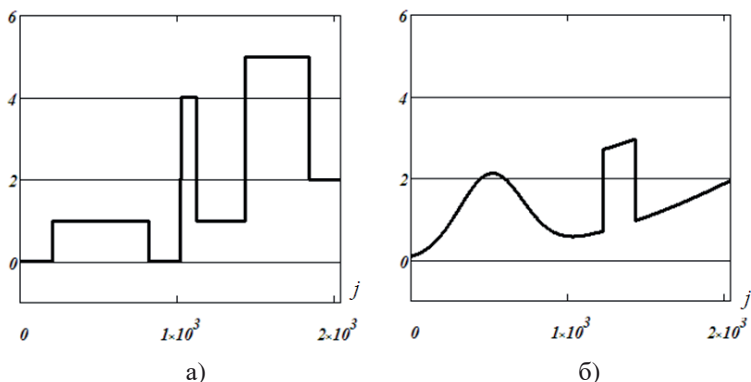


Рис. 3.13. Графики тестовых функций

Значения f_i этих функций искажались аддитивным шумом η_i , который моделировался псевдослучайными числами, имеющими нормальное распределение, нулевое среднее и дисперсию σ^2 . Дисперсия вычислялась по задаваемому относительному уровню шума $\delta_\eta = \frac{\|\tilde{f} - f\|}{\|f\|}$, $\delta_\eta = 0.05, 0.10, 0.15$. На рис. 3.14 представлены зашумленные значения функций 1, 2 при $\delta_f = 0.10$. В качестве критерия точности фильтрации была принята относительная ошибка

$$\delta_f(\beta, C) = \frac{\|\hat{f}_{(\beta, C)} - f\|}{\|f\|}, \quad (3.4.13)$$

где $\hat{f}_{(\beta, C)}$ – вектор отфильтрованных значений, вычисленных при заданных параметрах β , C порогов (3.4.3), (3.4.4).

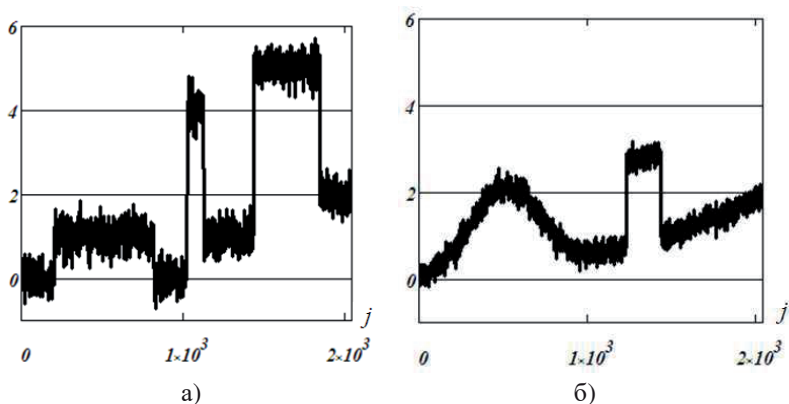


Рис. 3.14. Графики зашумленных функций

На рис. 3.15 приведены изолинии функционала $\delta_f(\beta, C)$, значения которого были вычислены для функции 1 и уровне шума $\delta_\eta = 0.10$. По оси абсцисс – параметр β , по оси ординат – C . Анализ формы изолиний показывает, что ошибка фильтрации сильно зависит от β , и значительно слабее от параметра C . Следовательно, оценка параметра β_{opt}

должна иметь более высокую точность по сравнению с оценкой для C_{opt} .

Остановимся на очень важном вопросе: насколько точно β_w , C_w оценивают оптимальные значения параметров β_{opt} , C_{opt} или насколько увеличивается ошибка фильтрации при параметрах β_w , C_w от минимально возможной ошибки фильтрации?

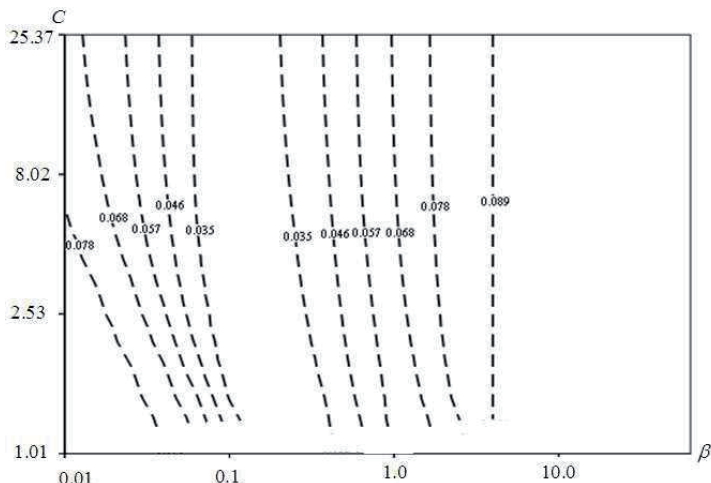


Рис. 3.15. Изолинии относительной ошибки фильтрации

Для ответа на этот вопрос был выполнен обширный вычислительный эксперимент, результаты которого для функции 2 и $\delta_\eta = 0.10$ приведены в табл. 3.3. В верхней строке табл. 3.3 приведены значения β , в левом крайнем столбце – значения C , а в ячейке, стоящей на пересечении столбца с конкретным значением β и строки с значением C , соответствующее значение относительной ошибки $\delta_f(\beta, C)$. Выделенные ячейки соответствуют парам (β, C) , для которых выполняется неравенство (3.4.6), т.е. эти пары значений могут быть приняты в качестве пар (β_w, C_w) .

Таблица 3.3

$\beta \backslash C$	0,032	0,046	0,068	0,1	0,147	0,215	0,316
1,010	0,081	0,071	0,053	0,030	0,025	0,033	0,043
1,272	0,077	0,065	0,042	0,025	0,027	0,034	0,046
1,601	0,074	0,058	0,034	0,024	0,028	0,360	0,048
2,015	0,069	0,051	0,030	0,024	0,030	0,038	0,05
2,537	0,063	0,044	0,028	0,025	0,031	0,040	0,052
3,194	0,058	0,04	0,027	0,026	0,032	0,041	0,053
4,021	0,054	0,038	0,026	0,026	0,033	0,042	0,054
5,062	0,051	0,036	0,026	0,027	0,034	0,043	0,055
6,373	0,049	0,035	0,027	0,028	0,035	0,044	0,056
8,023	0,048	0,035	0,027	0,029	0,036	0,045	0,056
10,100	0,047	0,034	0,027	0,030	0,036	0,046	0,057
12,715	0,046	0,034	0,027	0,031	0,037	0,046	0,057

Анализ таблицы показывает:

- сильную зависимость ошибки фильтрации от параметра β и слабую зависимость от параметра C (эта закономерность также проявилась в расположении изолиний на рис. 3.15);
- все выделенные (заштрихованные) ячейки соответствуют либо минимальной ошибке фильтрации, либо незначительному ее увеличению (не более чем на 10 %).

Аналогичные выводы можно сделать по данным полученным при других уровнях шума $\delta_\eta = 0.05, 0.15$, а также для функции 1.

Заметим, что минимальная относительная ошибка фильтрации с помощью однопараметрической функции *soft* была на 15 ÷ 25 % больше минимальной ошибки фильтрации с помощью двухпараметрической функции. Это является весомым аргументом в пользу двухпараметрических пороговых функций.

Величина относительной ошибки $\delta_f(\beta, C)$ является случайной величиной (в силу статистической природы шума измерения η_i). Поэтому для определения неслучайных характеристик точности был проведен следующий вычислительный эксперимент.

Определим коэффициент эффективности параметров (β_w, C_w) выражением

$$E = \frac{\delta_{\min}}{\delta_f(\beta_w, C_w)}. \quad (3.4.14)$$

Очевидно, что чем больше E отклоняется от единицы к нулю, тем больше проигрыш по точности алгоритма фильтрации с параметрами (β_w, C_w) по сравнению с минимально возможной ошибкой $\delta_{\min}$ (параметры (β_{opt}, C_{opt})).

Для вычисления оценок числовых характеристик и построения гистограммы случайной величины E генерировались случайные векторы $\tilde{f}^{(l)} = f + \eta^{(l)}$, $l = 1, \dots, N_s$, где $\eta^{(l)}$ – l -я реализация случайного вектора η . Каждый вектор $\tilde{f}^{(l)}$ фильтровался алгоритмом вейвлет-фильтрации с параметрами (β_w, C_w) , вычислялось значение $E^{(l)}$. По выборочной совокупности $\{E^{(l)}\}$ вычислялись среднее $\bar{E}$, минимальное $E_{\min}$, максимальное $E_{\max}$ значения и строилась гистограмма. Объем выборки $N_s = 50$. В табл. 3.4 приведены характеристики коэффициента эффективности для разных уровней шума и разных функций. Анализ средних значений $\bar{E}$ показывает, что отклонение коэффициента эффективности параметров (β_w, C_w) от единицы в среднем не превосходит 8 %, что говорит о приемлемой точности оценивания параметров (β_{opt}, C_{opt}) .

На рис. 3.16 приведена гистограмма случайной величины E (относительный уровень шума равен $\delta_\eta = 0.10$, тестовая функция 1). Заметим, что по оси ординат откладываются значения относительной частоты $\omega_k = \frac{n_j}{\sum_{k=1}^M n_k}$, $k = 1, \dots, M$, где M – число интервалов гистограммы,

n_k – число значений E , попавших в k -ый интервал. Анализ гистограммы показывает, что значения величины E в основном сосредото-

чены в окрестности точки $\bar{E} = 0.975$ и имеют небольшие отклонения от этой точки.

Этот факт (а также данные табл. 3.4) позволяет сделать вывод о приемлемой точности оценок β_w , C_w для оптимальных порогов и позволяет рекомендовать *величины β_w , C_w в качестве порогов в алгоритмах выелет-фильтрации с двухпараметрической пороговой функцией.*

Таблица 3.4

δ_η	Функция 1			Функция 2		
	$E_{\min}$	$\bar{E}$	$E_{\max}$	$E_{\min}$	$\bar{E}$	$E_{\max}$
0.01	0.823	0.937	1	0.782	0.918	1
0.05	0.852	0.958	1	0.806	0.927	1
0.10	0.915	0.976	1	0.811	0.931	1
0.15	0.883	0.968	1	0.804	0.929	1

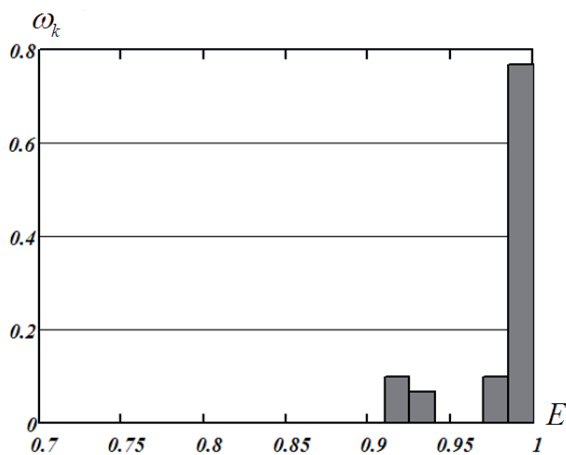


Рис. 3.16. Гистограмма коэффициента эффективности

Замечание 3.4.1. Появление небольшого числа значений коэффициента эффективности в окрестности точки 0.93 можно объяснить. При проверке основной гипотезы (3.3.4) можно с вероятностью

$\gamma = 0.05$ совершить ошибку первого рода, т.е. отвергнуть гипотезу H_0 в случае, когда она верна. Тогда вычисляется другие значения пороговых величин, которые обуславливают увеличение ошибки фильтрации и уменьшение коэффициента эффективности. ♦

3.5. Выбор параметров трехпараметрических пороговых функций

Предлагается алгоритм оценивания оптимальных параметров трехпараметрических пороговых функций из условия минимума СКО фильтрации на основе критерия оптимальности, изложенного в п. 3.3.

3.5.1. Пороговые функции с тремя параметрами

После рассмотрения двухпараметрических пороговых функций (см. п. 3.4) возникает вопрос: существуют ли пороговые функции с тремя параметрами? Ответ положителен. В работе [53] построена трехпараметрическая пороговая функция (обозначаемая как *custom*), определяемая следующим выражением:

$$T_c(\tilde{d}, \lambda_1, \lambda_2, \alpha) = \begin{cases} 0, & \text{если } |\tilde{d}| \leq \lambda_1; \\ \alpha \lambda_2 \cdot \left[\frac{|\tilde{d}| - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right]^2 \cdot \left\{ (\alpha - 3) \cdot \left(\frac{|\tilde{d}| - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) + 4 - \alpha \right\}, & \text{если } \lambda_1 < |\tilde{d}| \leq \lambda_2; \\ \tilde{d} - \text{sign}(\tilde{d})(1 - \alpha)\lambda_2, & \text{если } |\tilde{d}| > \lambda_2, \end{cases} \quad (3.5.1)$$

где $\lambda_1 < \lambda_2$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

На рис. 3.17 показаны графики функции (3.5.1) при $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ и разных значениях параметра α : кривая 1 – $\alpha = 0$; кривая 2 – $\alpha = 0.2$; кривая 3 – $\alpha = 0.5$; кривая 4 – $\alpha = 0.7$; кривая 5 – $\alpha = 1.0$. Видно, что при $\alpha = 0.0$ и $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2$ функция (3.5.1) совпадает с функцией (3.1.2).

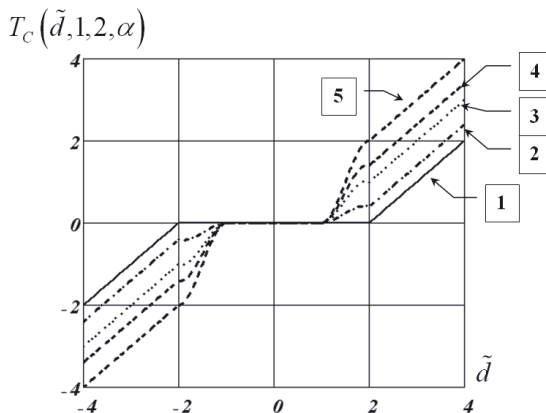


Рис. 3.17. Графики пороговой функции (3.5.1)

Вопрос: что дает использование этой пороговой функции? С одной стороны, меняя параметр α , можно менять форму пороговой функции, но с другой – надо выбирать (и желательно наилучшим образом) уже три параметра и выбор этих параметров вообще не рассматривается в соответствующих научных публикациях. Исключением являются работы автора [23, 25, 65]

3.5.2. *Оценивание оптимальных пороговых величин на основе критерия оптимальности*

Обозначим через μ вектор, составленный из параметров пороговой функции. Тогда для одномерного дискретного сигнала СКО фильтрации определим функционалом

$$\Delta(\mu) = M \left[\| \hat{f}_\mu - f \|^2 \right], \quad (3.5.2)$$

где $M[\]$ – оператор математического ожидания по плотности распределения шума; $f, \hat{f}_\mu$ – векторы, проекции которых равны значениям «точного» и «сглаженного» (с использованием соответствующей пороговой функции) сигналов соответственно. Набор μ_{opt} , минимизирующий СКО (3.5.2) назовем вектором оптимальных параметров и для оценки этого вектора вновь обратимся к критерию оптимальности.

Определим вектор невязки $e_\mu = \tilde{f} - \hat{f}_\mu$ с проекциями $e_{\mu_i} = \tilde{f}_i - \hat{f}_{\mu_i}$, $i=1, \dots, N$, где N – число значений обрабатываемой функции. Введем статистику:

$$\rho_w(\mu) = \frac{1}{\sigma^2} \langle e_\mu, \tilde{f} \rangle = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N e_{\mu_i} \tilde{f}_i. \quad (3.5.3)$$

В качестве оценки для μ_{opt} примем вектор μ_w , для которого статистика $\rho_w(\mu)$ удовлетворяет неравенству

$$\vartheta_{m, \gamma/2} \leq \rho_w(\mu_w) \leq \vartheta_{m, 1-\gamma/2}, \quad (3.5.4)$$

где $\vartheta_{m, \gamma/2}$, $\vartheta_{m, 1-\gamma/2}$ – квантили χ_m^2 -распределения с m степенями свободы уровней $\gamma/2$, $1-\gamma/2$ соответственно; γ – вероятность ошибки первого рода при проверке статистической гипотезы об оптимальности параметра сглаживания (обычно $\gamma = 0.05$), $m = N$ – число значений фильтруемого сигнала (проекция вектора $\tilde{f}$). Если число степеней свободы $m > 30$, то, приняв вероятность ошибки первого рода $\gamma = 0.05$, получаем формулы для вычисления квантилей, входящих в неравенство (3.5.4):

$$\vartheta_{m, 0.025} = m - 1.96\sqrt{2m}; \quad \vartheta_{m, 0.975} = m + 1.96\sqrt{2m}. \quad (3.5.5)$$

Для вычисления вектора μ_w рассмотрим задачу минимизации функционала

$$F(\mu) = |\rho_w(\mu) - m|^2 \quad (3.5.6)$$

при заданных ограничениях на проекции вектора μ . Для решения этой задачи можно использовать известные процедуры минимизации. В качестве μ_w принимается такой элемент $\{\mu^{(n)}\}$ минимизирующей последовательности, для которого выполняется неравенство (3.5.4).

Можно показать, что при использовании ортогональных вейвлетов статистика $\rho_w(\mu)$ вычисляется через коэффициенты вейвлет-разложения:

$$\rho_w(\mu) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_k \tilde{d}_{j,k} \cdot \left(\tilde{d}_{j,k} - T(\tilde{d}_{j,k}, \mu) \right). \quad (3.5.7)$$

В алгоритмах вейвлет-фильтрации изображений обработке подвергаются следующие коэффициенты: горизонтальные детализирующие $ad_{j,n,m}$, вертикальные детализирующие коэффициенты $da_{j,n,m}$, диагональные детализирующие коэффициенты $dd_{j,n,m}$.

Тогда

$$\begin{aligned} \rho_w(\mu) = & \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \left[\sum_{n,m} \tilde{ad}_{j,n,m} \cdot \left(\tilde{ad}_{j,n,m} - T(\tilde{ad}_{j,n,m}, \mu) \right) + \right. \\ & \left. + \sum_{n,m} \tilde{da}_{j,n,m} \cdot \left(\tilde{da}_{j,n,m} - T(\tilde{da}_{j,n,m}, \mu) \right) \right] + \\ & + \frac{1}{\sigma^2} + \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \left[\sum_{n,m} \tilde{dd}_{j,k} \cdot \left(\tilde{dd}_{j,n,m} - T(\tilde{dd}_{j,n,m}, \mu) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

Предложенные формулы позволяют вычислять значения $\rho_w(\mu)$ (которые необходимы в процедурах минимизации функционала (3.5.6)) в пространстве коэффициентов вейвлет-разложения, а затем (при найденном векторе μ_w и вычисленных коэффициентах разложения) только один раз выполнить обратное вейвлет-преобразование и получить сглаженные значения сигнала или изображения. Это существенно сокращает число вычислительных операций для нахождения вектора θ_w , особенно при фильтрации изображений.

Рассмотрим формирование вектора μ для конкретной пороговой функции (3.5.1). Для этой функции вектор $\mu = \begin{bmatrix} \beta \\ C \\ \alpha \end{bmatrix}$, пороговые величины

λ_1, λ_2 определяются выражениями:

$$\lambda_1(\beta) = \beta \cdot \sqrt{2 \ln(N_j)}, \quad \lambda_2(\beta, C) = \beta \cdot C \cdot \sqrt{2 \ln(N_j)},$$

а α принимает значения из интервала $[0,1]$.

Вычисление оценок β_w, C_w, α_w для оптимальных значений $\beta_{opt}, C_{opt}, \alpha_{opt}$ осуществляется на основе минимизации функционала (3.5.6) при ограничениях:

$$0 \leq \beta < \infty, \quad C > 1, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (3.5.9)$$

Отметим некоторые свойства $\rho_w(\mu)$ для сформированных векторов μ (одномерный сигнал):

- все слагаемые, входящие в (3.5.7), не отрицательны (могут изменяться от 0 до $\tilde{d}_{j,k}^2$) и поэтому $\rho_w(\mu) \geq 0$;
- при $\beta \rightarrow 0$ и $C < \infty, 0 \leq \alpha \leq 1$ справедлив предел $\rho_w(\mu) \rightarrow 0$;
- при $\beta \rightarrow \infty$ и $C < \infty, 0 \leq \alpha \leq 1$ справедлив предел

$$\rho_w \begin{pmatrix} \beta \\ C \\ \alpha \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_k \tilde{d}_{j,k}^2 = \frac{1}{\sigma^2} \|\tilde{f}\|^2. \quad (3.5.10)$$

Последнее равенство имеет место для ортогональных вейвлетов при соответствующей нормировке базисных функций. Два последних свойства обуславливают следующее утверждение.

Утверждение 3.5.1. Если выполняется неравенство

$$\rho_w \begin{pmatrix} \infty \\ C \\ \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N \tilde{f}^2 > \vartheta_{m,1-\gamma/2}, \quad (3.5.11)$$

то существуют конечные значения μ_w , для которых выполняется неравенство (3.5.4).

Невыполнение этого условия означает, что зашумленные значения сигнала или изображения определяются только шумом измерения. В этом случае $\beta_w = \infty$ и сглаженные значения сигнала или изображения равны 0.

Аналогичные свойства и соответствующее утверждение можно сформулировать и для вейвлет-фильтрации изображений, где $\rho_w(\mu)$ определяется выражением (3.5.8). При этом число степеней свободы

m определяется как $m = N_x \cdot N_y$, где N_x, N_y – размеры фильтруемого изображения.

Существенной чертой приведенного алгоритма вычисления θ_w является использование дисперсии шума σ^2 . Как правило, σ^2 неизвестна, и в этом случае можно использовать оценку $\hat{\sigma}^2$ (см. формулу (2.3.11)).

3.5.3. Исследование многопараметрических пороговых алгоритмов вейвлет-фильтрации

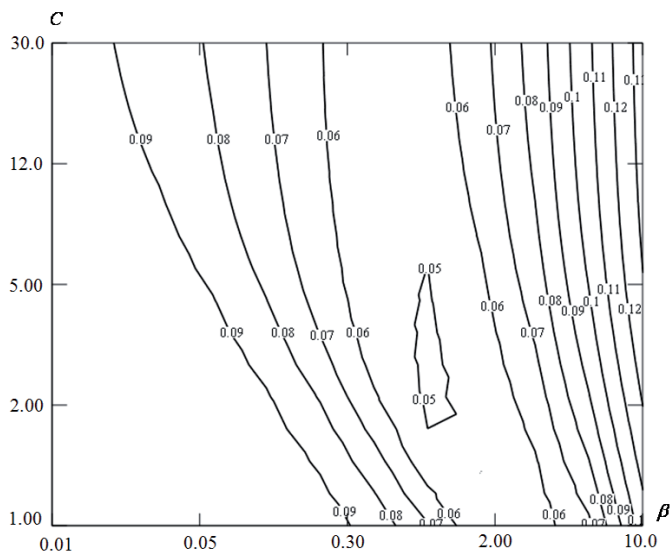
Для ответа на вопрос: какая пороговая функция лучше с двумя или с тремя параметрами, был выполнен обширный вычислительный эксперимент, некоторые результаты которого рассматриваются ниже.

В качестве тестовых изображений были взяты два изображения LENA (пример гладкого изображения) и TARGET (пример контрастного изображения) размером 256×256 пикселей, приведенных на рис. 3.9. Условия эксперимента были те же, что и в п. 3.3.4.

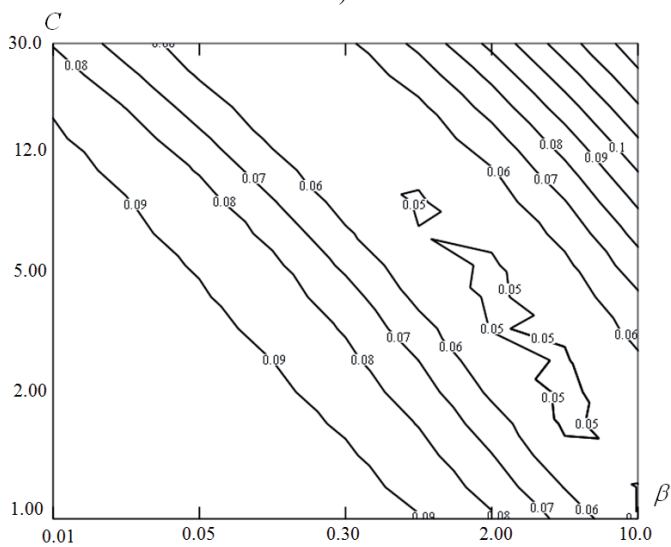
В качестве критерия точности фильтрации изображения была принята *относительная ошибка*, определяемая выражением

$$\delta_F(\theta) = \frac{\|\hat{F}_\theta - F\|}{\|F\|}, \text{ где } \hat{F}_\theta - \text{результат фильтрации зашумленного изображения при заданном наборе параметров } \theta.$$

Первоначально рассмотрим зависимость $\delta_F(\theta)$ от различных параметров пороговых функций (3.4.1), (3.5.1). На рис. 3.18 приведены изолинии функционала $\delta_F(\beta, C)$, значения которого были вычислены при уровне шума $\delta_n = 10$ для функций (3.4.1), (3.5.1) (у последней функции параметр $\alpha = 0.10$). По оси абсцисс отложен параметр β , по оси ординат – C . Видно, что у пороговой функции (3.4.1) ошибка фильтрации сильно зависит от β , и значительно слабее от параметра C .



а)



б)

Рис. 3.18. Изолинии функционала ошибки фильтрации

Для пороговой функции (3.5.1) наблюдается зависимость ошибки фильтрации как от β , так и от C , что предъявляет более строгие требования к точности оценивания C_{opt} и поэтому эта пороговая функция является менее предпочтительной по сравнению с функцией (3.4.1).

Кратко остановимся на результатах исследований минимально возможных относительных ошибок для функций (3.4.1), (3.4.5). Генерировалась матрица шума $\eta^{(l)}$, где l – номер шумовой реализации (номер выборки) и для каждого зашумленного изображения $\tilde{F}^{(l)} = F + \eta^{(l)}$, $l = 1, \dots, 50$, находились оптимальные параметры пороговых функций (3.4.1), (3.5.1) и соответствующие наименьшие (оптимальные) значения относительных ошибок фильтрации

$$\delta_{opt}^{(l)} = \frac{\|\hat{F}_{\theta_{opt}}^{(l)} - F\|}{\|F\|}. \quad (3.5.12)$$

Нахождение таких величин возможно, так как в вычислительном эксперименте известно точное (незашумленное) изображение F . Затем вычислялось отношение

$$O^{(l)} = \frac{\delta_{opt_{ss}}^{(l)}}{\delta_{opt_c}^{(l)}}, \quad (3.5.13)$$

где в числителе стоит величина наименьшей ошибки для функции (3.4.1), в знаменателе – для функции (3.5.1). Если это отношение меньше 1, то предпочтение отдается пороговой функции (3.4.1), в противном случае – функции (3.5.1). По выборочным величинам $O^{(l)}$ (объем выборки равен 50) вычислялись наименьшее $O_{\min}$, среднее $\bar{O}$ и максимальное $O_{\max}$ значения. Эти числовые характеристики приведены в табл. 3.5 для трех уровней шума и трех значений α (функция (3.5.1)).

Таблица 3.5

δ_η	α	Изображение LENA			Изображение TARGET		
		$O_{\min}$	$\bar{O}$	$O_{\max}$	$O_{\min}$	$\bar{O}$	$O_{\max}$
0.02	0.2	0.743	0.811	0.911	0.758	0.805	0.857
	0.5	0.801	0.862	0.971	0.799	0.843	0.891
	0.9	0.971	0.986	0.992	0.970	0.989	0.994
0.05	0.2	0.813	0.866	0.923	0.793	0.831	0.871
	0.5	0.863	0.909	0.982	0.816	0.865	0.908
	0.9	0.978	0.995	1.005	0.972	0.992	0.999
0.10	0.2	0.888	0.945	0.982	0.848	0.893	0.941
	0.5	0.921	0.935	0.996	0.869	0.914	0.958
	0.9	0.981	1.002	1.011	0.979	0.999	1.006

Анализ табл. 3.5 показывает, что только для значений $\alpha \geq 0.9$ минимальные относительные ошибки фильтрации при использовании функций (3.4.1), (3.5.1) сопоставимы. Для всех других α более предпочтительным является функция (3.4.1). Учитывая, что эта функция требует для своего вычисления еще и меньше операций (что особенно важно при фильтрации изображений) окончательный выбор следует сделать в пользу пороговой функции (3.4.1), которая зависит только от двух параметров.

Перейдем к исследованию эффективности оценивания оптимальных параметров пороговых функций предложенным алгоритмом на основе минимизации функционала (3.5.6). Заметим, что величина от-

носительной ошибки фильтрации $\delta_F(\theta) = \frac{\|\hat{F}_\theta - F\|}{\|F\|}$ является случайной

величиной (в силу статистической природы шума измерения). Поэтому для определения неслучайных характеристик точности был проведен следующий вычислительный эксперимент.

Коэффициент эффективности оценки θ_w для θ_{opt} определим выражением

$$E = \frac{\delta_{\min}}{\delta_F(\theta_w)}. \quad (3.5.14)$$

Очевидно, что, чем больше E отклоняется от единицы к нулю, тем больше проигрыш по точности алгоритма фильтрации с параметрами θ_w по сравнению с минимально возможной (для данного зашумленного изображения $\tilde{F}$) ошибкой $\delta_{\min}$ (алгоритм фильтрации с параметрами θ_{opt}).

Для вычисления оценок числовых характеристик и построения гистограммы случайной величины E генерировались зашумленные изображения $\tilde{F}^{(l)}$, $l = 1, \dots, 50$. Для каждого изображения $\tilde{F}^{(l)}$ определялись: $\delta_{\min}^{(l)}$, $\delta_F^{(l)}(\theta_{w_F})$ (пороговая функция (3.4.1)), $\delta_F^{(l)}(\theta_{w_C})$ (пороговая функция (3.4.5) при $\alpha = 0.9$) и коэффициенты эффективности $E_F^{(l)} = \frac{\delta_{\min}^{(l)}}{\delta_F^{(l)}(\theta_{w_F})}$, $E_C^{(l)} = \frac{\delta_{\min}^{(l)}}{\delta_F^{(l)}(\theta_{w_C})}$. Для каждой выборочной совокупности $\{E_F^{(l)}\}$, $\{E_C^{(l)}\}$ вычислялись соответствующие числовые характеристики: среднее $\bar{E}$, минимальное $E_{\min}$, максимальное $E_{\max}$ значения и строилась гистограмма относительных частот (т.е. вычислялись отношения $\omega_j = n_j / 50$, где n_j – количество значений коэффициента эффективности, попавших в j -й интервал гистограммы). В табл. 3.6 приведены числовые характеристики коэффициента эффективности для разных уровней шума и разных изображений. Выделенные темным фоном ячейки таблицы соответствуют относительной ошибке фильтрации с использованием пороговой функции (3.5.1); не выделенные ячейки – пороговой функции (3.4.1).

Анализ средних значений $\bar{E}$ показывает, что предложенный подход к выбору параметров пороговых функций позволяет достаточно точно оценить оптимальные значения как для функции (3.4.1), так и для функции (3.5.1). Так отклонение среднего значения коэффициента эффективности от единицы для функции (3.4.1) не превосходит 6 %. Для функции (3.5.1) такое отклонение выше (на уровне 9–12 %). Дополнительно заметим, что для некоторых уровней шума максимальное значение $E_{\max}$ функции (3.5.1) не равняется единице. Все это подтверждает ранее высказанный тезис о предпочтительности пороговой функции (3.4.1). На это также указывают гистограммы, приведенные

на рис. 3.19а (случайная величина E_F) и рис. 3.19б (случайная величина E_C), построенные для изображения TARGET и уровне шума 0.1.

Таблица 3.6

δ_η	Изображение LENA			Изображение TARGET		
	$E_{\min}$	$\bar{E}$	$E_{\max}$	$E_{\min}$	$\bar{E}$	$E_{\max}$
0.02	0.785	0.945	1	0.831	0.948	1
	0.746	0.879	1	0.812	0.925	0.976
0.05	0.813	0.961	1	0.873	0.965	1
	0.797	0.929	1	0.857	0.932	0.989
0.10	0.831	0.976	1	0.946	0.991	1
	0.781	0.942	1	0.928	0.969	1

Видно, что для пороговой функции (3.5.1) значения коэффициента эффективности в большей степени отклоняются от единицы, что говорит о меньшей точности оценивания оптимальных параметров этой функции.

Результаты численных исследований показали, что предложенный подход к выбору пороговых величин позволяет с приемлемой точностью оценить оптимальные пороги как для пороговой функции (3.4.1), так и для функции (3.5.1). Однако использование двухпараметрической функции (3.4.1) в пороговых алгоритмах вейвлет-фильтрации является более предпочтительным.

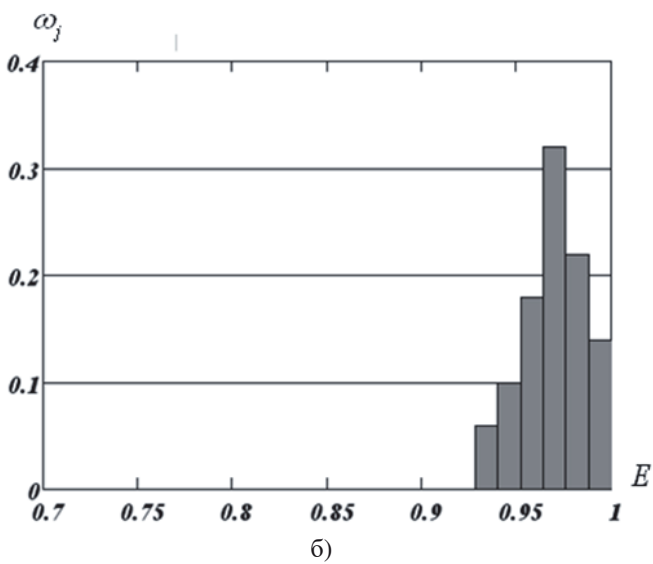
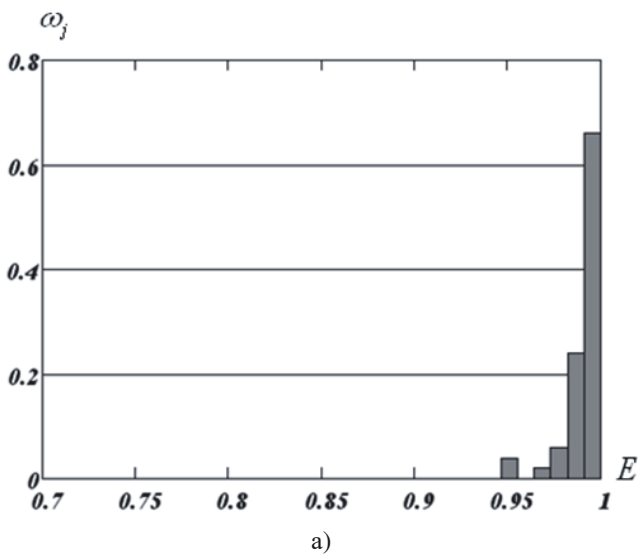


Рис. 3.19. Гистограммы коэффициента эффективности

Глава 4. ЧТО ЛУЧШЕ: ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ИЛИ ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРАЦИИ

Глава посвящена сравнению двух классов алгоритмов фильтрации шумов различной статистической природы.

4.1. Алгоритмы пространственной фильтрации

Рассматриваются основные алгоритмы, в которых обработке подвергаются зашумленные значения, попавшие в апертуру фильтра.

4.1.1. Классификация алгоритмов фильтрации

Часто используемые на практике алгоритмы фильтрации изображений, искаженных шумами, можно условно разделить на два класса:

- *алгоритмы фильтрации в пространственной области;*
- *алгоритмы фильтрации в частотной области.*

Результат фильтрации алгоритмами первого класса определяется преобразованием значений исходного сигнала или изображения, попавших в апертуру (окно) фильтра [1, 2, 27, 32]. Такими преобразованиями может быть вычисление среднего значения, медианы или других числовых характеристик (например, вычисление среднего только тех значений, которые принадлежат некоторому интервалу). Для обработки всего изображения апертуру фильтра «перемещают» по обрабатываемому изображению.

Изменение размеров апертуры фильтра позволяет «управлять» характеристиками алгоритма сглаживания. При малых размерах апертуры сохраняются контрастные элементы (ребра, резкие грани) изображения, но шум сглаживается слабо; увеличение размеров апертуры приводит к более сильному сглаживанию шума, но при этом возможно «размытие» контрастных элементов исходного изображения.

Размеры апертуры можно задать априори (что и делается на практике) и в процессе обработки зашумленных значений эти размеры не меняются (т.е. размеры апертуры фиксированы). Такое задание не учитывает структуру фильтруемого сигнала или изображения и не позволяет минимизировать ошибку фильтрации.

Второй подход к заданию размера апертуры заключается в том, что учитывается структура фильтруемого сигнала (путем анализа его числовых характеристик) и это позволяет менять размеры апертуры: при фильтрации контрастных элементов (ребра, резкие грани) размеры апертуры уменьшаются; при фильтрации «плоских» фрагментов (уровень сигнала слабо изменяется) размеры апертуры увеличиваются. Такие алгоритмы фильтрации можно назвать *адаптивными*, а алгоритмам адаптации размера апертуры посвящен ряд публикаций (например, [5, 6, 9, 11, 58, 59]).

Описанные алгоритмы фильтрации (как с фиксированной, так и изменяющейся апертурой) в дальнейшем будем называть *локально-пространственными алгоритмами фильтрации* (ЛПАФ).

В алгоритмах фильтрации в частотной области обработке подвергаются коэффициенты разложения зашумленного изображения по некоторой системе базисных функций. Примером могут служить рассмотренные в предыдущих главах алгоритмы вейвлет-фильтрации, где коэффициенты вычисляются в базисе вейвлет-функций. Обработка заключается в умножении коэффициента на фильтрующий множитель, значения которого находятся в интервале от нуля до единицы. Такие алгоритмы фильтрации в дальнейшем будем называть *алгоритмами вейвлет-фильтрации* (АВФ).

Следует отметить, что алгоритмы и локально-пространственной фильтрации и вейвлет-фильтрации используются и при решении одного класса обратных измерительных задач – *восстановления изображений*. Здесь алгоритмы фильтрации используются на этапе постобработки восстановленного (с использованием методов регуляризации) изображения. Так, в работах [13, 16] предложен класс частотно-пространственных регуляризирующих алгоритмов, позволяющих восстанавливать изображения со значительно меньшей ошибкой по сравнению с линейными регуляризирующими алгоритмами. В работах [24, 52] для постобработки восстановленного изображения использовался АВФ.

Несмотря на столь широкое использование ЛПАФ и АВФ при решении различных задач обработки, в литературе отсутствует сравнение точности этих алгоритмов при фильтрации изображений различной структуры и «гладкости» и зашумленных шумами различной

статистической природы. Дело в том, что при построении и исследовании алгоритмов фильтрации исходят из справедливости предположения о *некоррелированности соседних отсчетов шума измерения* (так называемый «белый» шум). На практике это предположение часто не выполняется. Очевидно, что фильтрация цветного шума рассматриваемыми алгоритмами имеет свои особенности, но это не нашло отражения в соответствующих публикациях. Поэтому ниже проводится исследование точности ЛПАФ и АВФ по результатам фильтрации разных (по структуре и гладкости) изображений, искаженных шумами различной статистической природы: белым, цветным и импульсным.

4.1.2. Локально-пространственные алгоритмы фильтрации

Для пояснения принципа работы этих фильтров предположим, что даны значения некоторого зашумленного одномерного сигнала $\tilde{f}_j = f_j + \eta_j$, $j = 1, \dots, N$, где η_j – случайный шум (погрешность) с нулевым средним и дисперсией σ^2 (для простоты такой шум будем называть *однородным*). Приведем краткое описание часто применяемых на практике локально-пространственных алгоритмов фильтрации (подробнее см. [3, 27, 34]).

Фильтр скользящего среднего. Выходной сигнал $f_j^{\text{ФСС}}$ фильтра скользящего среднего определяется соотношением

$$f_j^{\text{ФСС}} = \text{aver}_K(\tilde{f}_{j-K}, \tilde{f}_{j-K+1}, \dots, \tilde{f}_j, \dots, \tilde{f}_{j+K}) = \frac{1}{2K+1} \sum_{i=-K}^K \tilde{f}_{j+i}, \quad (4.1.1)$$

где $\text{aver}_K()$ – функция, вычисляющая среднее значение из $2K+1$ значений, указанных в скобках. Величину K можно интерпретировать как размер апертуры фильтра скользящего среднего. «Переменная» апертура фильтра по всем значениям $\tilde{f}_j$, вычисляются значения $f_j^{\text{ФСС}}$ для всего исходного сигнала. Особенностью фильтра скользящего среднего является хорошее сглаживание однородного шума измерения. Дисперсия отфильтрованного значения $f_j^{\text{ФСС}}$ (т.е. дисперсия «остаточного» шума) равна $D[f_j^{\text{ФСС}}] = \frac{\sigma^2}{2K+1}$. Следовательно, чем

больше размер апертуры, тем сильнее сглаживание. Однако при этом сильнее сглаживаются и контрастные детали исходного сигнала, которые необходимо сохранить в отфильтрованном сигнале. Это противоречие всех линейных алгоритмов фильтрации в определенной степени отсутствует в следующем фильтре.

Интервальный фильтр скользящего среднего. Выходной сигнал определяется выражением:

$$f_j^{H\Phi} = \text{aver}_K(\tilde{f}_i : j - K \leq i \leq j + K, |\tilde{f}_i - \tilde{f}_j| \leq \beta), \quad (4.1.2)$$

т.е. усредняются только те исходные значения $\tilde{f}_i$, которые попали в интервал $[\tilde{f}_j - \beta, \tilde{f}_j + \beta]$. Такое интервальное усреднение предотвращает сглаживание контрастных деталей «точного» сигнала f_j . Выбор величины β играет существенную роль в работе рассматриваемого фильтра. Для определения β можно использовать правило «двух сигм»:

$$\beta = 2\sigma, \quad (4.1.3)$$

которое говорит о том, что значения нормально распределенной случайной величины с нулевым средним и дисперсией σ^2 с вероятностью близкой к 0.95 попадут в интервал $[-\beta, \beta]$.

Медианный фильтр. Выходной сигнал $f_j^{M\Phi}$ медианного фильтра определяется соотношением

$$f_j^{M\Phi} = \text{med}_L(\tilde{f}_{j-L}, \tilde{f}_{j-L+1}, \dots, \tilde{f}_j, \dots, \tilde{f}_{j+L}), \quad (4.1.4)$$

где $\text{med}_L()$ – функция, вычисляющая медиану из $2L + 1$ значений, указанных в скобках. Особенности медианного фильтра являются:

- хорошая фильтрация импульсных шумов;
- сохранение в отфильтрованном сигнале контрастных деталей сигнала f_j ;
- выходной сигнал медианного фильтра равен одному из значений $\tilde{f}_j$, попавших в апертуру фильтра. Следовательно, выходной сигнал медианного фильтра содержит «остаточный» шум фильтрации, который определяется погрешностями исходных данных, что обу-

сравнивает его низкую эффективность при фильтрации однородных шумов.

Комбинированный фильтр. Работу такого комбинированного фильтра (КФ) «медианный фильтр + интервальный фильтр скользящего среднего» можно представить следующими шагами, выполняемыми для $j \in [1, \dots, N]$:

Шаг 1. Строится оценка

$$f_j^{M\Phi} = \text{med}_L(\tilde{f}_{j-L}, \dots, \tilde{f}_j, \dots, \tilde{f}_{j+L}). \quad (4.1.5)$$

Шаг 2. Строится оценка

$$f_j^{K\Phi} = \text{aver}_K(f_i^{M\Phi} : j-K \leq i \leq j+K, |f_i^{M\Phi} - f_j^{M\Phi}| \leq \beta), \quad (4.1.6)$$

где L, K – размер апертур фильтров, причем $K \geq L$. Заметим, что на шаге 2 усредняются только те значения $f_i^{M\Phi}$, которые попали в интервал $[f_j^{M\Phi} - \beta, f_j^{M\Phi} + \beta]$. Такое интервальное усреднение предотвращает сглаживание контрастных деталей сигнала f_j .

Для определения величины β можно использовать следующий способ. Предположим, что значение $f_j^{M\Phi}$ являющееся результатом медианной фильтрации, содержит «остаточную» случайную ошибку с дисперсией σ^2 . Тогда величину β вычислим по правилу «двух сигм» (формула (4.1.3)).

4.1.3. Исследования локально-пространственных алгоритмов фильтрации

Для иллюстрации работы рассмотренных фильтров приведем результаты следующего вычислительного эксперимента. Значения $f_j, j = 1, \dots, N = 1024$, прямоугольного сигнала искажались нормально распределенными случайными числами η_j (имитация однородного шума), имеющими нулевое среднее и дисперсию 10^4 , что соответствовало относительному уровню погрешности $\delta_f = \frac{\|\tilde{f} - f\|}{\|f\|} = 0.115$, где

$f, \tilde{f}$ – векторы, составленные из «точных» и «зашумленных» значений функции соответственно. Пять процентов значений функции искажались случайными числами η_j' с дисперсией 10^6 (имитация импульсного шума). На рис. 4.1 показаны искаженные значения функции, которые являлись исходными данными для алгоритмов фильтрации. Отчетливо видно выбросы значений, обусловленные импульсным шумом. Относительный уровень погрешности исходных данных с импульсным шумом $\delta_f = 0.299$.

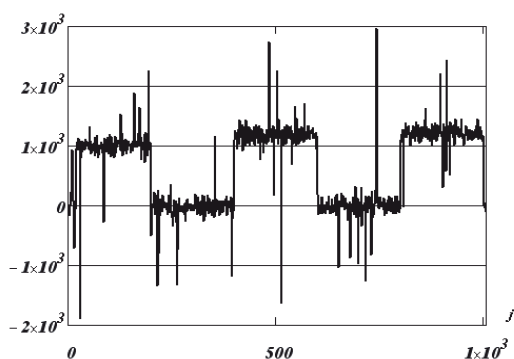


Рис. 4.1. Исходный зашумленный сигнал

Первоначально эти данные подверглись медианной фильтрации при $L = 5$. Результаты фильтрации показаны на рис. 4.2 и имеют относительный уровень ошибки

$$\frac{\|f^{M\Phi} - f\|}{\|f\|} = 0.06.$$

Медианный фильтр хорошо удалил импульсный шум, но оставил низкоамплитудный шум, что является отмеченной особенностью медианного фильтра.

Затем для обработки данных использовался интервальный фильтр с параметрами $K = 100, \beta = 200$. Результат фильтрации изображен на рис. 4.3. Относительная погрешность отфильтрованного сигнала

$$\frac{\|f^{I\Phi} - f\|}{\|f\|} = 0.285.$$

Видно, что импульсный шум не удаляется интервальным фильтром.

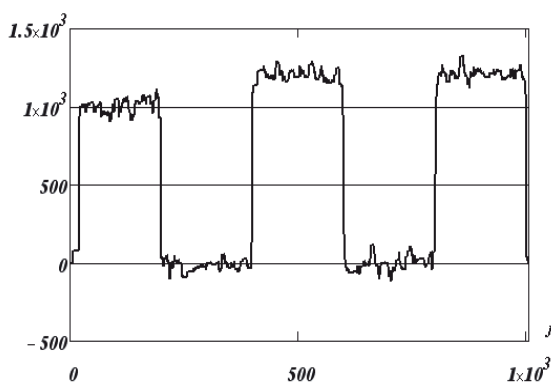


Рис. 4.2. Результат работы алгоритма медианной фильтрации

На рис. 4.4 представлен результат обработки исходных данных комбинированным фильтром при $L = 5$, $K = 100$. Величина β задавалась по правилу (4.1.3) и равнялась 200. Видно, что отсутствуют не только импульсные помехи, но и однородные шумы, которые присутствовали после медианной фильтрации (см. рис. 4.2). Кроме этого, в отфильтрованном сигнале сохранены (не сглажены) все прямоугольные углы.

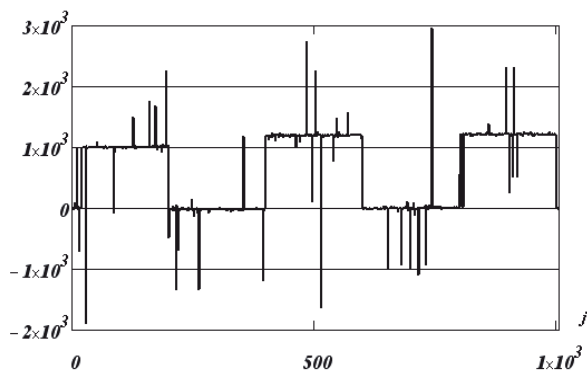


Рис. 4.3. Результат работы интервального фильтра

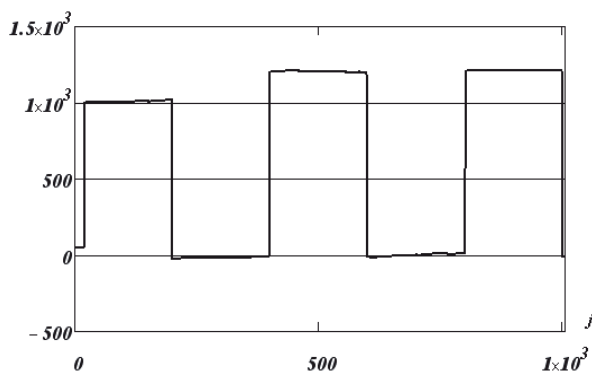


Рис. 4.4. Результат работы комбинированного фильтра

Это позволяет сделать вывод: комбинированный фильтр (4.1.5), (4.1.6) позволяет эффективно удалять импульсные и низкоамплитудные погрешности, сохраняя при этом высокочастотные информативные составляющие (в нашем случае это прямые углы). Относительная погрешность отфильтрованного сигнала

$$\frac{\|f^{K\Phi} - f\|}{\|f\|} = 0.029.$$

Таким образом, применение КФ позволило подавить как импульсный шум, так и однородный шум.

Описанные алгоритмы фильтрации одномерного сигнала легко обобщается на фильтрацию изображений (двумерный сигнал). Для этого операции вычисления медианы, интервального среднего будут выполняться над значениями $\tilde{f}_{i_1, i_2}$, попавших в плоские апертуры, чаще всего прямоугольные. Например, для медианного фильтра – апертура размером $(2L_1 + 1) \times (2L_2 + 1)$, а для интервального усреднения – апертура размером $(2K_1 + 1) \times (2K_2 + 1)$.

Очевидно, что качество фильтрации как рассмотренных ЛПАФ, так и других алгоритмов этого класса зависит от размеров апертуры фильтра, т.е. размеры апертуры являются своеобразным «управляющим параметром». К сожалению, реальные изображения не являются стационарными: они содержат как монотонные области, так и области

с большими градиентами (ребра, скачки амплитуды и т.д.). Поэтому на практике очень трудно подобрать один оптимальный размер апертуры фильтра для обработки всего изображения. В подобных ситуациях желательно использовать апертуру с большими размерами в монотонных областях обрабатываемого изображения, и апертуру с малыми размерами – вблизи «скачков» или «ребер» изображений. Локальные фильтры с изменяющимися размерами апертуры называются *адаптивными фильтрами*.

При построении таких адаптивных фильтров главным вопросом является алгоритм адаптации размеров апертуры локального фильтра. В работах [5, 6, 7, 11, 56, 59] предложены разные алгоритмы адаптации, основанные на локальных статистиках обрабатываемого изображения. Не останавливаясь на этих алгоритмах, только заметим, что использование адаптивных фильтров может на 20–30 % уменьшить ошибку фильтрации изображений [5, 6].

4.2. Сравнение двух классов алгоритмов фильтрации

Исследуется эффективность фильтрации шумов различной статистической природы с использованием локально-пространственных алгоритмов фильтрации и алгоритмов вейвлет-фильтрации [20, 62].

4.2.1. Схема вычислительного эксперимента

Кратко опишем схему проведенного вычислительного эксперимента по фильтрации шумов различной статистической природы.

В качестве тестовых изображений были взяты два изображения LENA и TARGET размером 256×256 пикселей, приведенных на рис. 3.9. По статистической природе моделируемого шума измерения выполненный вычислительный эксперимент можно условно разделить три серии:

1. **Белый шум измерения.** Двумерный шум измерения η_{i_1, i_2} имеет нулевое среднее, одинаковую дисперсию σ^2 и соседние отсчеты шума не коррелированы друг с другом, т.е. шум измерения являлся белым.

2. **Цветной шум измерения.** Двумерный шум измерения η_{i_1, i_2} имеет нулевое среднее, одинаковую дисперсию σ^2 и соседние отсчеты

шума коррелированы друг с другом с коэффициентом корреляции 0.5, т.е. шум измерения являлся цветным.

3. Комбинированный шум измерения. Двумерный шум измерения η_{i_1, i_2} имеет с вероятностями 0.99 и 0.95 дисперсию σ^2 и с вероятностями 0.01 и 0.05 – дисперсию $400 \sigma^2$. Соседние отсчеты шума не коррелированы друг с другом. Это означает, что из 65536 отсчетов изображения примерно 655 (вероятность 0.01) и 3275 (вероятность 0.05) отсчетов искажены импульсным шумом, амплитуда которого в 20 раз больше амплитуды шума с дисперсией σ^2 .

Дисперсия σ^2 задавалась по относительному уровню шума $\delta_F = \frac{\|\tilde{F} - F\|}{\|F\|}$, где $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму матрицы, т.е.

$$\|F\| = \left(\sum_{i_1} \sum_{i_2} F_{i_1, i_2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \text{ Матрицы } F, \tilde{F} \text{ размером } 256 \times 256 \text{ пикселей состав-}$$

лены из значений точного и зашумленного изображений соответственно. В эксперименте задавались два уровня 0.05, 0.10. В качестве критерия точности фильтрации была принята средняя относительная

$$\text{ошибка (COO), определяемая выражением } \delta(\hat{F}) = M \left[\frac{\|\hat{F} - F\|}{\|F\|} \right], \text{ где } \hat{F}$$

означает матрицу значений отфильтрованного изображения, а математическое ожидание берется по распределению матрицы случайного шума η . Выборочная оценка математического ожидания вычислялась по 30 изображениям $\tilde{F}^{(l)}$, где $\tilde{F}^{(l)}$ – результат фильтрации изображения $\tilde{F}^{(l)} = F + \eta^{(l)}$, где $\eta^{(l)}$ – l -я реализация матрицы шума.

В первых двух сериях вычислительного эксперимента в качестве минимальной COO была принято COO $\delta(\hat{F}_{\text{винер}})$ винеровского алгоритма вейвлет-фильтрации (базисом являлись ортогональные вейвлеты Добеши8), в котором оптимальные коэффициенты разложения вычисляются с использованием *точного отношения* «шум/сигнал», требующего задания коэффициентов разложения *точного изображения*. Очевидно, что на практике такой фильтр нереализуем, но его COO

может служить базовым «ориентиром» при сравнении СОО других алгоритмов фильтрации.

4.2.2. Анализ результатов вычислительного эксперимента

В табл. 4.1 и 4.2 приведены значения коэффициента эффективности $E = \frac{\delta(\hat{F}_{\text{винер}})}{\delta(\hat{F})}$ для разных алгоритмов фильтрации – чем E меньше

значения единицы, тем больше проигрыш по точности соответствующего алгоритма фильтрации по сравнению с винеровским алгоритмом вейвлет-фильтрации, минимизирующим СКО фильтрации однородного шума. Для ЛПАФ задавались параметры $L = 0$ (импульсный шум отсутствует), $K = 4$ (что соответствует апертуре усредняющего фильтра 81×81). Для АВФ применялась жесткая пороговая функция (3.1.1) (для используемых изображений она давала меньшую СОО по сравнению с выражением (3.1.2)). В табл. 4.1 приведены значения E при фильтрации изображения LENA, в табл. 4.2 – изображения TARGET для двух уровней шума и двух коэффициентов корреляции (0 и 0.5) между соседними значениями шума.

Таблица 4.1

	Шум не коррелирован		Шум коррелирован	
Уровень шума	0.05	0.10	0.05	0.10
$\delta(\hat{F}_{\text{винер}})$	0,029	0,046	0,038	0,069
Фильтр	Отношение $\delta(\hat{F}_{\text{винер}}) / \delta(\hat{F})$			
ФСС	0,243	0,383	0,317	0,548
KF	0,743	0,696	0,883	0,920
Универсальный порог	0,453	0,501	0,717	0,742
SURE-порог	0,508	0,502	0,745	0,697
Байесовский порог	0,630	0,589	0,760	0,690
Квазиоптимальный алгоритм	0,724	0,709	0,825	0,784

Таблица 4.2

	<i>Шум не коррелирован</i>		<i>Шум коррелирован</i>	
	0.05	0.10	0.05	0.10
$\delta(\hat{F}_{\text{винер}})$	0,021	0,035	0,030	0,056
Фильтр	Отношение $\delta(\hat{F}_{\text{винер}})/\delta(\hat{F})$			
ФСС	0,183	0,318	0,297	0,494
KF	0,833	0,786	0,967	0,965
Универсальный порог	0,444	0,454	0,683	0,614
SURE-порог	0,588	0,393	0,612	0,571
Байесовский порог	0,417	0,443	0,598	0,603
Квазиоптимальный алгоритм	0,794	0,775	0,856	0,843

В табл. 4.1, 4.2 темным фоном выделены ячейки, соответствующие наибольшим значениям коэффициента эффективности E , т.е. указывающие на «наилучший» алгоритм фильтрации.

Проведенный анализ табл. 4.1, 4.2 показывает, что:

- минимальная СОО фильтрации (винеровский вейвлет-фильтр) при фильтрации цветного шума возрастает на 30–50 %;
- как при фильтрации белого шума, так и цветного наименьшую ошибку имеет комбинированный фильтр (4.1.5), (4.1.6) (даже с фиксированными размерами апертуры);
- среди АВФ наименьшую ошибку имеет квазиоптимальный алгоритм фильтрации с квазиоптимальными коэффициентами (2.3.5).

В табл. 4.3 приведены значения коэффициента эффективности E для фильтрации изображения LENA и TARGET, искаженных импульсными шумами, вероятность появления которых равна 0.01 и 0.05.