

- величины η_i являются случайными;
- $M[\eta_i] = 0, i = 1, \dots, N;$ (2.1.2)
- $D[\eta_i] = \sigma^2, i = 1, \dots, N;$ (2.1.3)
- $M[\eta_i \eta_j] = 0$, если $i \neq j$. (2.1.4)

Последнее равенство означает некоррелированность значений η_i, η_j при $i \neq j$. Рассмотрим вейвлет-разложение глубиной разложения J (см. п. 1.3):

$$f(x) = \sum_k a_{J+j_0,k} \Phi_{J+j_0,k}(x) + \sum_{j=1}^J \sum_k d_{j_0+j,k} \Psi_{j_0+j,k}(x),$$

где $\Phi_{J+j_0,k}(x)$, $\Psi_{j_0+j,k}(x)$ – семейство ортонормированных вейвлетов. Начальный уровень разложения j_0 определяется из равенства $N = 2^{j_0}$, но для упрощения дальнейших записей положим $j_0 = 0$. Тогда имеем следующую запись:

$$f(x) = \sum_k a_{J,k} \Phi_{J,k}(x) + \sum_{j=1}^J \sum_k d_{j,k} \Psi_{j,k}(x), \quad (2.1.5)$$

где аппроксимирующие $a_{J,k}$ и детализирующие коэффициенты $d_{j,k}$ вычисляются по точным значениям f_i сигнала $f(x)$ с использованием алгоритма Малла (см. п. 1.3.2).

Обозначим $\tilde{a}_{J,k}$, $\tilde{d}_{j,k}$ коэффициенты, которые вычисляются по зашумленным значениям $\tilde{f}_i$ и определим их статистические характеристики. Для этого приведем запись алгоритма Малла для вычисления коэффициентов $\tilde{a}_{1,k}$, $\tilde{d}_{1,k}$ (т.е. $j=1$) по значениям $\tilde{a}_{0,k} = \tilde{f}_k$, $k = 1, \dots, N$:

$$\tilde{a}_{1,k} = \sum_m h_m \tilde{a}_{0,2k+m}; \quad \tilde{d}_{1,k} = \sum_m g_m \tilde{a}_{0,2k+m}. \quad (2.1.6)$$

Введем ошибки вычисления коэффициентов: $\varepsilon_{1,k}^a = \tilde{a}_{1,k} - a_{1,k}$; $\varepsilon_{1,k}^d = \tilde{d}_{1,k} - d_{1,k}$ и перепишем предыдущие выражения относительно этих ошибок: $\varepsilon_{1,k}^a = \sum_m h_m \eta_{2k+m}$; $\varepsilon_{1,k}^d = \sum_m g_m \eta_{2k+m}$. Вычислим корреляционный момент между двумя величинами $\varepsilon_{a_{1,k}}$, $\varepsilon_{a_{1,k+l}}$:

$$\begin{aligned} M[\epsilon_{1,k}^a \epsilon_{1,k+l}^a] &= M\left[\sum_m h_m \eta_{m+2k} \sum_{m'} h_{m'} \eta_{m'+2k+2l}\right] = \\ &= \sum_m \sum_{m'} h_m h_{m'} M[\eta_{m+2k} \eta_{m'+2k+2l}]. \end{aligned}$$

Если справедливы предположения (2.1.3), (2.1.4), то получаем

$$M[\epsilon_{1,k}^a \epsilon_{1,k+l}^a] = \sigma^2 \sum_m h_m h_{m-2l}. \quad (2.1.7)$$

В силу ортонормированности отцовского вейвлета имеем

$$\sum_m h_m h_{m-2l} = \delta_{0,l} = \begin{cases} 1, & \text{если } l=0; \\ 0, & \text{если } l \neq 0. \end{cases} \quad (2.1.8)$$

Тогда из формулы (2.1.7) следуют статистические свойства ошибок $\epsilon_{1,k}^a$:

- а) $\epsilon_{1,k}^a$ являются случайными величинами с нулевым средним, т.е. $M[\epsilon_{1,k}^a] = 0$ для всех k ;
- б) дисперсия $D[\epsilon_{1,k}^a] = \sigma^2$;
- в) случайные величины $\epsilon_{1,k}^a$ и $\epsilon_{1,l}^a$ не коррелированы друг с другом при $k \neq l$.

Аналогично можно показать, что при выполнении условия

$$\sum_m g_m g_{m-2l} = \delta_{0,l}, \quad (2.1.9)$$

(которое справедливо для ортонормированных материнских вейвлетов), ошибки $\epsilon_{1,k}^d$ имеют нулевое среднее, одинаковую дисперсию σ^2 и не коррелированы друг с другом.

Определим корреляционный момент между ошибками $\epsilon_{1,k}^a$, $\epsilon_{1,l}^d$:

$$\begin{aligned} M[\epsilon_{1,k}^a \cdot \epsilon_{1,k+l}^d] &= M\left[\sum_m h_m \eta_{m+2k} \sum_{m'} g_{m'} \eta_{m'+2k+2l}\right] = \\ &= \sum_m \sum_{m'} h_m g_{m'} M[\eta_{m+2k} \eta_{m'+2k+2l}] = \sigma^2 \sum_m h_m g_{m-2l}. \end{aligned}$$

В силу ортогональности пространств V_2 и W_1 имеем:

$$\sum_m h_m g_{m-2l} = 0 \text{ при любых } l, \quad (2.1.10)$$

а следовательно, ошибки $\epsilon_{1,k}^a$ и $\epsilon_{1,k}^d$ не коррелированы друг с другом.

Ошибки $\epsilon_{1,k}^a$ и $\epsilon_{1,k}^d$ имеют те же первые два момента, что и исходный шум η_i . Поэтому, повторяя на каждом уровне разложения сходные построения, можно доказать следующие свойства:

$$\bullet M[\epsilon_{j,k}^a] = 0; M[\epsilon_{j,k}^d] = 0 \text{ для всех } k; \quad (2.1.11)$$

$$\bullet D[\epsilon_{j,k}^a] = \sigma^2; D[\epsilon_{j,k}^d] = \sigma^2 \text{ для всех } k; \quad (2.1.12)$$

$$\bullet M[\epsilon_{j,k+l}^a \epsilon_{j,k}^a] = 0 \text{ для } l \neq 0; \quad (2.1.13)$$

$$\bullet M[\epsilon_{j,k+l}^d \epsilon_{j,k}^d] = 0 \text{ для всех } l \neq 0; \quad (2.1.14)$$

$$\bullet M[\epsilon_{j,k}^a \epsilon_{j,l}^d] = 0 \text{ для всех } k, l. \quad (2.1.15)$$

Следует отметить, что несмотря на одинаковую дисперсию ошибок вычисления коэффициентов $\tilde{a}_{j,k}$, $\tilde{d}_{j,k}$, их относительная величина будет различной. Это иллюстрирует следующий пример.

Пример 2.1.1. Тестовый «ступенчатый» сигнал, часто используемый в литературе при исследовании алгоритмов фильтрации, задан своими значениями $f_i = f(x_i)$, $x_i \in [0,1]$, в 2048 узлах x_i (рис. 2.1а). Необходимо определить влияние погрешностей задания этих значений на точность вычисления коэффициентов вейвлет-разложений разного уровня.

Решение. По точным значениям $f_i = f(x_i)$ были вычислены коэффициенты разложения для вейвлетов Добеши8 (т.е. детализирующие коэффициенты) уровней $j = 1, \dots, J = 7$. На рис. 2.1б, в, г показаны значения «точных» коэффициентов $d_{j,k}$ для уровней разложения $j = 1, 3, 5$, количество которых на каждом уровне определяется выражением $N_j = \frac{N}{2^j}$, $j = 1, 3, 5$.

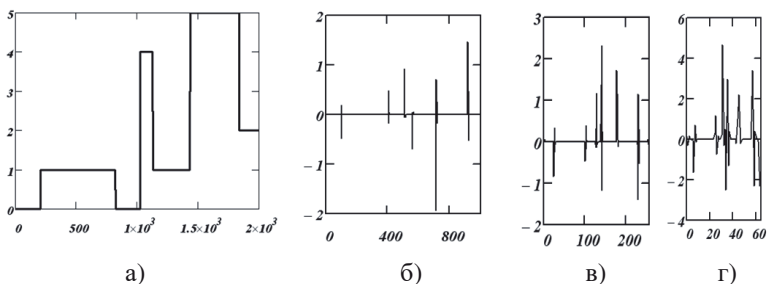


Рис. 2.1. Значения «точной» функции $f(t)$ и «точных» коэффициентов разложения

Относительный уровень погрешностей задания значений функции определялся величиной $\delta_\eta = \|\tilde{f} - f\| / \|f\|$, где $f, \tilde{f}$ – векторы, составленные из значений $f_i, \tilde{f}_i$; $\|\tilde{f}\|, \|f\|$ – евклидовы нормы векторов. Значения $\tilde{f}_i$, соответствующие $\delta_\eta = 0.12$, показаны на рис. 2.2а. По этим значениям были вычислены коэффициенты разложения для вейвлетов Добеши8 уровней $j=1, \dots, J=7$. На рис. 2б, в, г показаны значения «зашумленных» коэффициентов $\tilde{d}_{j,k}$ для уровней разложения $j=1, 3, 5$.

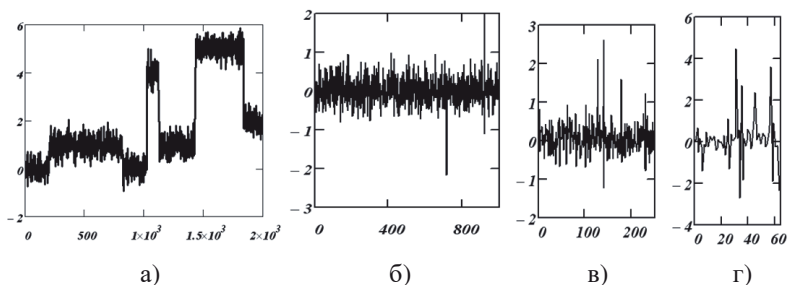


Рис. 2.2. Значения «зашумленной» функции $f(t)$ и «зашумленных» коэффициентов разложения

Сравнивая эти рисунки с рисунками «точных» коэффициентов видим, что погрешности η_i в основном искажают детализирующие коэффициенты уровней 1, 2, 3. Это хорошо подтверждается данными табл. 2.1, в которой приведены относительные ошибки вычисления коэффициентов

$$\delta_a(j) = \|\tilde{a}_j - a_j\| / \|a_j\|, \delta_d(j) = \|\tilde{d}_j - d_j\| / \|d_j\|,$$

где $a_j, \tilde{a}_j, d_j, \tilde{d}_j$ – векторы, составленные из соответствующих коэффициентов разложения j -го уровня.

Из табл. 2.1 видно, что относительная ошибка детализирующих коэффициентов $\tilde{d}_j$ существенно выше (для малых значений j) по сравнению с аппроксимирующими коэффициентами. Поэтому на практике обработке подвергаются только детализирующие коэффициенты $\tilde{d}_{j,k}$. ☹

Таблица 2.1

Уровень разложения	Относительные ошибки	
	$\delta_a(j)$	$\delta_d(j)$
1	0,082	2,674
2	0,059	0,983
3	0,044	0,637
4	0,033	0,185
5	0,024	0,102
6	0,017	0,051
7	0,012	0,028

2.1.2. Общий подход к фильтрации шума на основе вейвлет-разложения

Напомним, что алгоритмы Фурье-фильтрации основываются на предположении, что коэффициенты дискретного преобразования Фурье с большими индексами l (высокие частоты) в основном обу-

словлены шумами измерения и зануляя эти коэффициенты, удается отфильтровать (лучше или хуже) шум измерения [19, 28, 32].

Алгоритмы вейвлет-фильтрации основаны на следующих свойствах вейвлет-разложения:

- информация о «точном» сигнале $f(x)$ содержится только в небольшом количестве коэффициентов вейвлет-разложения (*информативные коэффициенты*). Остальные коэффициенты равны нулю, либо незначительно отличаются от нуля по абсолютной величине и их можно назвать *незначимыми* (шумовыми) коэффициентами разложения. Это свойство также широко используется для сжатия сигналов и изображений;

- шум измерения равномерно «перераспределяется» по всем коэффициентам вейвлет-разложения. В частности, если значения шума η_i не коррелированны и имеют одинаковую дисперсию σ^2 , то коэффициенты разложения этого шума по базису ортогональных вейвлетов также не коррелированны между собой и имеют одинаковую дисперсию.

Иллюстрацией этих двух свойств является рассмотренный ранее пример 2.1.1.

Так, из рис. 2.1 видно, что:

- только небольшое число коэффициентов $d_{j,k}$ точной функции уровней разложения 1, 3, 5 отличны от нуля;

- особенно сильному искажению подвергаются детализирующие коэффициенты с небольшим уровнем разложения.

Приведенные и проиллюстрированные свойства коэффициентов вейвлет-разложения определяют общий подход для построения алгоритмов фильтрации с использованием вейвлетов (в дальнейшем вейвлет-фильтрации):

для уменьшения уровня шума в исходных данных (т.е. для фильтрации шума) необходимо к коэффициентам разложения $\tilde{a}_{J,k}$, $\tilde{d}_{j,k}$ применить алгоритмы обработки, уменьшающие их дисперсию, а затем от этих новых «отфильтрованных» коэффициентов разложения взять обратное вейвлет-преобразование.

Таким образом, алгоритм вейвлет-фильтрации включает три этапа:

- взятие прямого вейвлет-преобразования от зашумленных значений функции (вычисление «зашумленных» коэффициентов разложения $\tilde{a}_{j,k}, \tilde{d}_{j,k}$);
- обработка коэффициентов разложения $\tilde{a}_{j,k}, \tilde{d}_{j,k}$ (построение приемлемых (по точности) оценок $\hat{a}_{j,k}, \hat{d}_{j,k}$ для точных коэффициентов $a_{j,k}, d_{j,k}$);
- взятие обратного вейвлет-преобразования от коэффициентов $\hat{a}_{j,k}, \hat{d}_{j,k}$.

Эти три этапа в дальнейшем будут называться *вейвлет-фильтрацией*.

Замечание 2.1.1. Алгоритмы обработки коэффициентов разложения $\tilde{a}_{j,k}, \tilde{d}_{j,k}$ должны максимально уменьшать дисперсию этих коэффициентов, внося при этом минимальное смещение относительно точных значений коэффициентов $a_{j,k}, d_{j,k}$. Очевидно, что создание таких алгоритмов является достаточно трудной задачей. ♦

Одним из простейших алгоритмов обработки зашумленных коэффициентов вейвлет-разложения является использование на втором этапе порогового алгоритма с «жесткой» пороговой функцией:

$$T_H(\tilde{d}, \lambda) = \begin{cases} \tilde{d}, & \text{если } |\tilde{d}| \geq \lambda; \\ 0, & \text{если } |\tilde{d}| < \lambda. \end{cases} \quad (2.1.16)$$

Если обрабатываемый коэффициент меньше величины порога λ , то этот коэффициент заменяется нулем, в противном случае коэффициент сохраняется и «участвует» в обратном вейвлет-преобразовании. В этом алгоритме «управляющим» параметром, от которого зависит ошибка фильтрации, является величина порога λ . Проиллюстрируем критичность его выбора следующим примером.

Пример 2.1.2. В качестве зашумленных значений функции примем значения, изображенные на рис. 2.2 и соответствующие относительно уровню шума

$$\delta_\eta = \|\tilde{f} - f\| / \|f\| = 0.12.$$

По этим значениям необходимо вычислить коэффициенты вейвлет-разложения в базисе Добеши8 глубины разложения 5, подвергнуть детализирующие коэффициенты пороговой обработке и определить ошибки фильтрации при различных величинах λ .

Решение. Первоначально примем $\lambda = 0.5$ и с помощью пороговой функции (2.1.16) обработаем все детализирующие коэффициенты $\tilde{d}_{j,k}$ уровней разложения $j = 1, 2, 3, 4, 5$. На рис. 2.3а приведены результаты обработки коэффициентов $\tilde{d}_{1,k}$ (сплошная линия – точные значения коэффициентов, точки – обработанные).

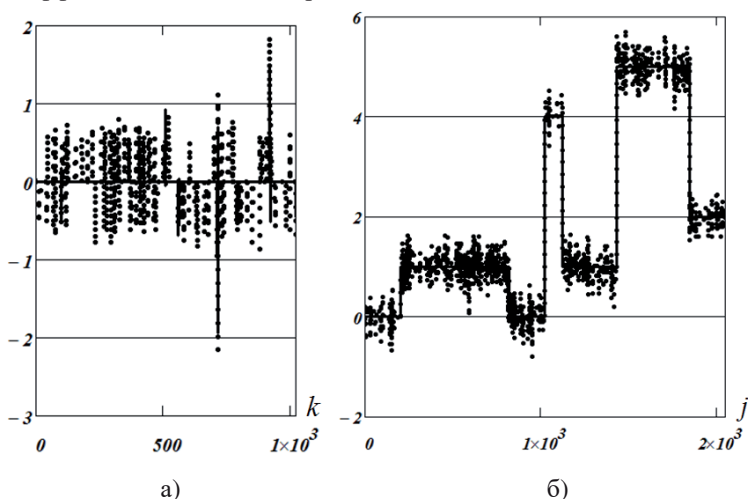


Рис. 2.3. Вейвлет-фильтрация при $\lambda = 0.5$

Видно, что часть зашумленных коэффициентов разложения, которые обусловлены только шумом, «остались» после обработки с такой величиной порога. Это привело к тому, что результат обратного вейвлет-преобразования содержит значительный «остаточный» шум (см. рис. 2.3б) и относительная ошибка фильтрации $\delta_f(\lambda) = \|\hat{f}_\lambda - f\| / \|f\|$ равна 0.082. На рис. 2.4а приведены результаты обработки коэффициентов $\tilde{d}_{1,k}$ с порогом $\lambda = 1.0$, а на рис. 2.4б – соответствующая отфильтрованная функция. Относительная ошибка фильтрации равна 0.044. Видно, что при этом λ часть точных детализирующих коэффициентов

не сохранились в результате обработки и это вызвало искажение сигнала в угловых («особых») точках (эффект, подобный эффекту Гиббса при Фурье-фильтрации). ☹

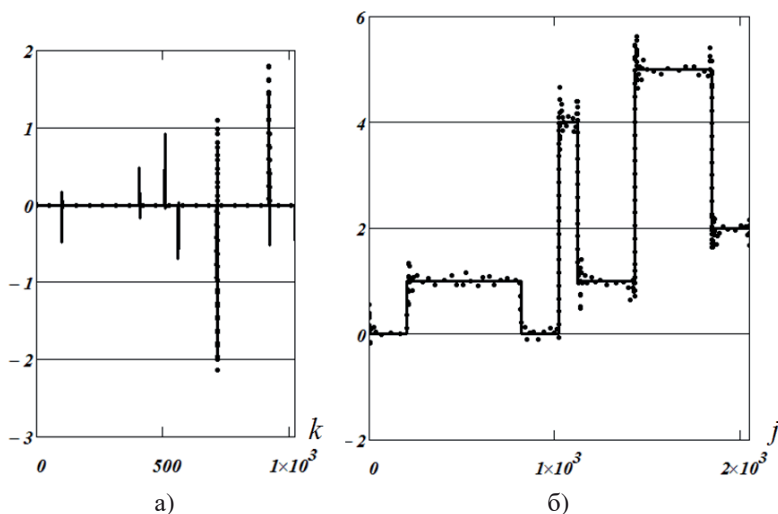


Рис. 2.4. Вейвлет-фильтрация при $\lambda = 1.0$

Очевидно, что для обработки коэффициентов разложения необходимо иметь программные средства, позволяющие:

- выбрать из общего массива коэффициентов разложения вектор, содержащий аппроксимирующие или детализирующие коэффициенты заданного уровня разложения j (например, вектор из коэффициентов $\tilde{d}_{j,k}$);
- вставить в общий массив коэффициента разложения вектор, содержащий аппроксимирующие или детализирующие коэффициенты заданного уровня разложения j (например, вектор из коэффициентов $\hat{d}_{2,k}$, полученный обработкой коэффициентов $\tilde{d}_{2,k}$).

Рассмотрим реализацию этих операций в пакете MathCAD.

2.1.3. Функции MathCAD обработки коэффициентов вейвлет-разложения

В пакете *Wavelet Extension* системы MathCAD имеется ряд функций, которые выполняют эти операции.

Функция $get_smooth(w, l)$ позволяет выделить вектор аппроксимирующих коэффициентов разложения $a_{l,k}$ по базису $\Phi_{l,k}(x)$ уровня разложения l из массива коэффициентов w (массив w – результат выполнения функции dwt).

Функция $get_detail(w, l)$ позволяет выделять вектор детализирующих коэффициентов разложения $d_{l,k}$ по базису $\Psi_{l,k}(x)$ уровня разложения l из массива коэффициентов w (где массив w результат выполнения функции dwt).

Функция $get_subband(w, l, m)$ выделяет вектор аппроксимирующих коэффициентов (если $m=0$) или вектор детализирующих коэффициентов (если $m=1$) уровня разложения l из массива коэффициентов w (где массив w – результат выполнения функции dwt).

Функция $put_smooth(w, l, y)$ заменяет в массиве w аппроксимирующие коэффициенты уровня разложения l на элементы вектора y .

Функция $put_detail(w, l, y)$ заменяет в массиве w детализирующие коэффициенты уровня разложения l на элементы вектора y .

2.2. Оптимальные алгоритмы вейвлет-фильтрации

Построен оптимальный (винеровский) алгоритм вейвлет-фильтрации, использующий отношение «шум/сигнал» для каждого коэффициента разложения.

2.2.1. Среднеквадратическая ошибка вейвлет-фильтрации

Вернемся к вейвлет-представлению «точного» сигнала $f(x)$ с глубиной разложения J :

$$f(x) = \sum_k a_{J,k} \Phi_{J,k}(x) + \sum_{j=1}^J \sum_k d_{j,k} \Psi_{j,k}(x). \quad (2.2.1)$$

Напомним, что начальный уровень разложения j_0 определяется из равенства $N = 2^{j_0}$, но для удобства дальнейших обозначений принимаем

$j_0 = 0$. Вновь предположим, что значения функции $f(x)$ заданы в узлах x_i , $1 \leq i \leq N$ со случайной аддитивной погрешностью (шум измерения) η_i , имеющей нулевое среднее и дисперсию σ^2 . Очевидно, что коэффициенты разложения (глубина разложения равна J)

$$\{\tilde{d}_{1,k}\}, \dots, \{\tilde{d}_{j,k}\}, \dots, \{\tilde{d}_{J,k}\}, \{\tilde{a}_{J,k}\}, k=1, 2, \dots, \frac{N}{2^j}, j=1, \dots, J, \quad (2.2.2)$$

вычисленные по зашумленным значениям $\tilde{f}_i = f(x_i) + \eta_i$, также содержат случайные ошибки $\epsilon_{j,k}^d, \epsilon_{j,k}^a$. В силу линейности прямого дискретного вейвлет-преобразования эти ошибки носят аддитивный характер, т.е. справедливы следующие модели:

$$\tilde{d}_{j,k} = d_{j,k} + \epsilon_{j,k}^d; \quad \tilde{a}_{J,k} = a_{J,k} + \epsilon_{J,k}^a. \quad (2.2.3)$$

Предположим, что по коэффициентам выражения (2.2.2) были вычислены оценки $\{\hat{d}_{j,k}\}, \{\hat{a}_{J,k}\}$ для соответствующих коэффициентов $\{d_{j,k}\}, \{a_{J,k}\}$ и построена аппроксимирующая функция:

$$\hat{f}(x) = \sum_k \hat{a}_{J,k} \Phi_{J,k}(x) + \sum_{j=1}^J \sum_k \hat{d}_{j,k} \Psi_{j,k}(x). \quad (2.2.4)$$

Определим среднеквадратическую ошибку (СКО) фильтрации выражением

$$\Delta(\hat{f}) = M \left[\int_R (\hat{f}(x) - f(x))^2 dx \right] = M \left[\int_R \epsilon^2(x) dx \right], \quad (2.2.5)$$

где ошибка фильтрации $\epsilon(x) = \hat{f}(x) - f(x)$ определяется (с учетом формулы (2.2.1)) выражением

$$\epsilon(x) = \sum_k (\hat{a}_{J,k} - a_{J,k}) \Phi_{J,k}(x) + \sum_{j=1}^J \sum_k (\hat{d}_{j,k} - d_{j,k}) \Psi_{j,k}(x). \quad (2.2.6)$$

Квадрат ошибки $\epsilon^2(x)$ можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2(x) = & \sum_k \sum_{k'} (\hat{a}_{J,k} - a_{J,k})(\hat{a}_{J,k'} - a_{J,k'}) \varphi_{J,k}(x) \varphi_{J,k'}(x) + \\
& + \sum_{j=1}^J \sum_{j'=1}^J \sum_k \sum_{k'} (\hat{d}_{j,k} - d_{j,k})(\hat{d}_{j',k'} - d_{j',k'}) \psi_{j,k}(x) \psi_{j',k'}(x) + \\
& + 2 \sum_k \sum_{j=1}^J \sum_{k'} (\hat{a}_{J,k} - a_{J,k})(\hat{d}_{j,k'} - d_{j,k'}) \varphi_{J,k}(x) \psi_{j,k'}(x).
\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Напомним, что для используемых ортогональных вейвлетов имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned}
\int_R \varphi_{j,k}(x) \varphi_{j',k'}(x) dx &= \delta_{j',j} \delta_{k',k}; \quad \int_R \psi_{j,k}(x) \psi_{j',k'}(x) dx = \delta_{j',j} \delta_{k',k}; \\
\int_R \varphi_{j,k}(x) \psi_{j,k'}(x) dx &= 0, \text{ для любых } k, j,
\end{aligned}$$

где величина $\delta_{j,j'} = 1$, если $j = j'$ и равна 0 во всех остальных случаях.

Поэтому выражение (2.2.5) можно записать в виде:

$$\Delta(\hat{f}) = M \left[\sum_k (\hat{a}_{J,k} - a_{J,k})^2 \right] + M \left[\sum_{j=1}^J \sum_k (\hat{d}_{j,k} - d_{j,k})^2 \right]. \tag{2.2.8}$$

2.2.2. Оптимальный алгоритм оценивания коэффициентов вейвлет-разложения

Коэффициенты $\{\hat{a}_{J,k}\}$, $\{\hat{d}_{j,k}\}$, доставляющие минимум функционалу (2.2.8), назовем *оптимальными оценками* коэффициентов вейвлет-разложения функции $f(t)$. Оптимальные оценки будем искать в виде

$$\hat{a}_{J,k} = \omega_{J,k}^a \cdot \tilde{a}_{J,k}, \quad \hat{d}_{j,k} = \omega_{j,k}^d \cdot \tilde{d}_{j,k}, \tag{2.2.9}$$

где $\omega_{J,k}^a, \omega_{j,k}^d$ назовем *фильтрующими множителями*. Так как математическое ожидание $M[\eta_i] = 0, i = 1, \dots, N$, то формулу (2.2.8) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}
\Delta(\hat{f}) = & \sum_k \left[(\omega_{J,k}^a - 1)^2 a_{J,k}^2 + (\omega_{J,k}^a)^2 D[\varepsilon_{J,k}^a] \right] + \\
& + \sum_{j=1}^J \sum_k \left[(\omega_{j,k}^d - 1)^2 d_{j,k}^2 + (\omega_{j,k}^d)^2 D[\varepsilon_{j,k}^d] \right],
\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

где $D[\varepsilon_{j,k}^a]$, $D[\varepsilon_{j,k}^d]$ – дисперсии соответствующих ошибок вычисления коэффициентов разложения. В п. 2.1 было показано, что дисперсии $D[\varepsilon_{j,k}^a] = \sigma^2$, $D[\varepsilon_{j,k}^d] = \sigma^2$, $j = 1, \dots, J$, т.е. дисперсии одинаковы для всех уровней j . Тогда из необходимых и достаточных условий минимума $\Delta(\hat{f})$:

$$\frac{\partial \Delta(\hat{f})}{\partial \hat{a}_{j,k}} = 0; \quad \frac{\partial \Delta(\hat{f})}{\partial \hat{d}_{j,k}} = 0,$$

получаем *оптимальные фильтрующие множители*:

$$\omega_{opt,j,k}^a = \frac{1}{1 + S_{j,k}^a}; \quad \omega_{opt,j,k}^d = \frac{1}{1 + S_{j,k}^d} \quad (2.2.11)$$

и *оптимальные оценки* для соответствующих коэффициентов разложения:

$$\hat{a}_{opt,j,k} = \frac{1}{1 + S_{j,k}^a} \tilde{a}_{j,k}; \quad \hat{d}_{opt,j,k} = \frac{1}{1 + S_{j,k}^d} \tilde{d}_{j,k}. \quad (2.2.12)$$

Отношения

$$S_{j,k}^a = \frac{\sigma^2}{a_{j,k}^2}; \quad S_{j,k}^d = \frac{\sigma^2}{d_{j,k}^2} \quad (2.2.13)$$

можно трактовать как отношение «шум/сигнал» соответствующего коэффициента разложения. Можно показать, что СКО $\Delta(\hat{f})$ при оптимальных множителях (2.2.11) определяется выражением

$$\Delta(\hat{f}_{opt}) = \sum_k \frac{S_{j,k}^a}{1 + S_{j,k}^a} \cdot a_{j,k}^2 + \sum_{j=1}^J \sum_k \frac{S_{j,k}^d}{1 + S_{j,k}^d} \cdot d_{j,k}^2, \quad (2.2.14)$$

из которого (с учетом отношений (2.2.13)) видно, что при достаточно малых σ^2 величина $\Delta(\hat{f}_{opt})$ имеет порядок σ^2 , т.е. $\Delta(\hat{f}_{opt}) \sim \sigma^2$.

Оптимальные оценки (2.2.12), построенные из условия минимума СКО фильтрации, можно назвать *винеровскими оценками*, а соответствующий алгоритм фильтрации – *винеровским алгоритмом вейвлет-*

фильтрации. В дальнейшем алгоритм фильтрации с коэффициентами (2.2.12) будем называть *оптимальным алгоритмом фильтрации*.

Замечание 2.2.1. Оценки (2.2.12) имеют характерную особенность: они получаются в результате «сжатия» соответствующих зашумленных коэффициентов, т.е. умножением $\{\tilde{a}_{j,k}\}, \{\tilde{d}_{j,k}\}$ на величины

$\omega_{opt_{j,k}}^a, \omega_{opt_{j,k}}^d$ меньше 1 (или равные 1, если $\sigma^2 = 0$ и когда фильтрация не нужна). Такая процедура получения оценок в англоязычной литературе получила название *shrinkage* (глагол *to shrinkage* – сжимать). ♦

К сожалению, построенные оптимальные оценки (2.2.12) включают в себя отношение «шум/сигнал», который на практике неизвестен из-за незнания значений «точного» коэффициента разложения, стоящего в знаменателях выражений (2.2.13). Эти оценки представляют теоретический интерес, так как указывают, к чему надо стремиться при построении оценок, реализуемых на практике. Две практических реализации оптимального алгоритма вейвлет-фильтрации строятся ниже.

2.3. Квазиоптимальные алгоритмы вейвлет-фильтрации с итерационным уточнением отношения «шум/сигнал»

Предлагается вариант реализации оптимального алгоритма на практике, который не требует задания (или знания) точного значения отношения «шум/сигнал», а использующий итерационный алгоритм оценивания этого отношения.

2.3.1. Итерационное уточнение отношения «шум/сигнал»

Для упрощения записи алгоритма вычисления оценок с уточнением отношения «шум/сигнал» введем следующие обозначения: θ – любой точный коэффициент разложения; $\hat{\theta}$ – коэффициент, вычисленный по зашумленным значениям функции; $\tilde{S} = \sigma^2 / \hat{\theta}^2$. Пусть задана (или вычислена) некоторая «стартовая» оценка $\hat{\theta}^{(0)}$ для коэффициента θ . Вычислим нулевое приближение для отношения «шум/сигнал»: $\hat{S}^{(0)} = \sigma^2 / (\hat{\theta}^{(0)})^2$. Подставляя это отношение в формулу (2.2.12), полу-

чаем $\hat{\theta}^{(1)} = \frac{1}{1 + \hat{S}^{(0)}} \tilde{\theta}$. Далее подставляя $\hat{\theta}^{(1)}$ в отношение «шум/сигнал», получаем $\hat{S}^{(1)}$, $\hat{\theta}^{(2)}$ и таким образом приходим к итерационной процедуре апостериорного уточнения отношения «шум/сигнал» вида

$$\hat{S}^{(n)} = \frac{\sigma^2}{(\hat{\theta}^{(n)})^2}; \quad \hat{\theta}^{(n+1)} = \frac{1}{1 + \hat{S}^{(n)}} \tilde{\theta}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3.1)$$

Остановимся на сходимости этой итерационной процедуры. Для этого введем квадратное уравнение

$$\left(\hat{S}^*\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{\tilde{S}}\right)\hat{S}^* + 1 = 0, \quad (2.3.2)$$

корни которого определяются по формуле

$$\hat{S}_{1,2}^* = \frac{1 - 2\tilde{S} \pm \sqrt{1 - 4\tilde{S}}}{2\tilde{S}} \quad (2.3.3)$$

и зависят от величины $\tilde{S}$.

Первоначально рассмотрим ситуацию $\tilde{S} \leq 1/4$ и выделим четыре предельных случая, положив для определенности $S_1^* \leq S_2^*$. Доказательство предельных соотношений, соответствующих этим случаям, проводятся аналогично доказательствам работ [8, 12, 55, 57] и поэтому здесь ограничимся записью конечных выражений для пределов последовательности $\hat{S}^{(n)}$.

Случай 1: $0 < \hat{S}^{(0)} \leq \hat{S}_1^*$.

Тогда имеет место монотонная сходимость $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{S}^{(n)} = \hat{S}_1^*$.

Случай 2: $\hat{S}_1^* < \hat{S}^{(0)} < \hat{S}_2^*$.

Тогда имеет место монотонная сходимость $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{S}^{(n)} = \hat{S}_1^*$.

Случай 3: $\hat{S}^{(0)} = \hat{S}_2^*$.

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{S}^{(n)} = \hat{S}_2^*$.

Случай 4: $\hat{S}^{(0)} > \hat{S}_2^*$.

Тогда имеет место монотонная сходимость $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{S}^{(n)} = \infty$.

Если $\hat{S} > 1/4$, то корни формулы (2.3.3) уравнения (2.3.2) являются комплексными величинами, что противоречит определению S . Поэтому будем полагать $\hat{S}^{(n)} \rightarrow \infty$ при $\tilde{S} > 1/4$.

Обобщая выше рассмотренные случаи, приходим к следующим утверждениям.

Утверждение 2.3.1. Итерационная процедура уточнения отношения «шум/сигнал» сходится к следующему предельному значению:

$$\hat{S}^* = \begin{cases} \hat{S}_1^*, & \text{если } \tilde{S} \leq 1/4 \text{ и } 0 < \hat{S}^{(0)} < \hat{S}_2^*; \\ \hat{S}_2^*, & \text{если } \tilde{S} \leq 1/4 \text{ и } \hat{S}^{(0)} = \hat{S}_2^*; \\ \infty, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \quad (2.3.4)$$

Утверждение 2.3.2. Итерационная процедура уточнения отношения «шум/сигнал» дает следующую оценку для коэффициента разложения:

$$\tilde{\theta}^* = \begin{cases} \frac{1}{1 + \hat{S}_1^*} \tilde{\theta}, & \text{если } \tilde{S} \leq \frac{1}{4} \text{ и } 0 < \hat{S}^{(0)} < \hat{S}_2^*; \\ \frac{1}{1 + \hat{S}_2^*} \tilde{\theta}, & \text{если } \tilde{S} \leq \frac{1}{4} \text{ и } \hat{S}^{(0)} = \hat{S}_2^*; \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \quad (2.3.5)$$

Алгоритм (2.3.5) можно назвать *квазиоптимальным оцениванием* коэффициентов разложения, так как в нем вместо оптимальной величины отношения «шум/сигнал» (см. выражение (2.2.13)) используется ее оценка – предельные точки итерационной процедуры (2.3.1). Делая замену общего обозначения $\tilde{\theta}$ на конкретный коэффициент разложения $\tilde{a}_{j,k}$ или $\tilde{d}_{j,k}$, получаем соответствующие квазиоптимальные коэффициенты $\hat{a}_{j,k}^*$, $\hat{d}_{j,k}^*$ вейвлет-разложения. Сглаженную функцию с такими коэффициентами обозначим как $\hat{f}^*(x)$, а сам алгоритм вейвлет-фильтрации с коэффициентами $\hat{a}_{j,k}^*$, $\hat{d}_{j,k}^*$ будем называть *квазиоптимальным с итерационным уточнением отношения «шум/сигнал»*.

Очевидно, что «хороший» алгоритм фильтрации должен обеспечивать сходимость сглаженной функции $\hat{f}(x)$ к точной функции $f(x)$ (которая имеет соответствующее вейвлет-представление) при стремлении уровня шума к нулю. Определим такую сходимость следующим пределом:

$$\begin{aligned}\Delta(\hat{f}) &= M \left[\left\| \hat{f} - f \right\|^2 \right] = \\ &= M \left[\int_R \left(\hat{f}(x) - f(x) \right)^2 dx \right] \rightarrow 0 \text{ при } \sigma^2 \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Из выражения (2.2.14) видно, что оптимальные оценки (2.2.12) обеспечивают эту сходимость и при достаточно малых σ^2 , величина СКО сглаживания имеет порядок σ^2 . Покажем сходимость функций $\hat{f}^*(x)$ с квазиоптимальными коэффициентами разложения $\hat{a}_{j,k}^*$, $\hat{d}_{j,k}^*$.

Утверждение 2.3.3. Если «стартовая» (для итерационной процедуры уточнения) функция $\hat{f}^{(0)}(x)$ с коэффициентами разложения $\hat{a}_{j,k}^{(0)}$, $\hat{d}_{j,k}^{(0)}$ сходится к функции $f(x)$ при $\sigma^2 \rightarrow 0$, т.е.

$$M \left[\left\| \hat{f}^{(0)} - f \right\|^2 \right] \rightarrow 0 \text{ при } \sigma^2 \rightarrow 0, \quad (2.3.6)$$

то имеет место сходимость

$$M \left[\left\| \hat{f}^* - f \right\|^2 \right] \rightarrow 0 \text{ при } \sigma^2 \rightarrow 0. \quad (2.3.7)$$

Доказательство. Вернемся к обозначениям $\tilde{\theta}$, $\hat{\theta}^*$, $\hat{S}_1^*$, $\hat{S}_2^*$ и заметим, что для сходимости (2.3.7) необходимо и достаточно выполнение предельных соотношений:

$$\lim \hat{S}_1^* = 0 \text{ и } \hat{S}^{(0)} < \hat{S}_2^* \text{ при } \sigma^2 \rightarrow 0. \quad (2.3.8)$$

Если имеет место сходимость (2.3.6), то справедливы выражения:

$$\hat{S}^{(0)} \geq \tilde{S}; \quad \lim \hat{S}^{(0)} = 0 \text{ при } \sigma^2 \rightarrow 0.$$

Рассмотрим предельное поведение корней $\hat{S}_1^*, \hat{S}_2^*$ при $\tilde{S} \rightarrow 0$. При достаточно малых значениях $\tilde{S}$ справедливо представление

$$(1 - 4\tilde{S})^{1/2} = 1 - 2\tilde{S} - 2\tilde{S}^2 - 4\tilde{S}^3 - 10\tilde{S}^4 - 28\tilde{S}^5 - \dots$$

Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{\tilde{S} \rightarrow 0} \hat{S}_1^* &= \lim_{\tilde{S} \rightarrow 0} \frac{1 - 2\tilde{S} - (1 - 4\tilde{S})^{1/2}}{2\tilde{S}} \approx \\ &\approx \lim_{\tilde{S} \rightarrow 0} \frac{2\tilde{S}^2 - 4\tilde{S}^3 - 10\tilde{S}^4}{2\tilde{S}} = 0. \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

По аналогии можно доказать предел

$$\begin{aligned} \lim_{\tilde{S} \rightarrow 0} \hat{S}_2^* &= \lim_{\tilde{S} \rightarrow 0} \frac{1 - 2\tilde{S} + (1 - 4\tilde{S})^{1/2}}{2\tilde{S}} \approx \\ &\approx \lim_{\tilde{S} \rightarrow 0} \frac{2 - 4\tilde{S} - 2\tilde{S}^2 - 4\tilde{S}^3}{2\tilde{S}} = \infty. \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Из существования пределов (2.3.9), (2.3.10) и условий (2.3.8) следует сходимость (2.3.7).

Очевидно, что в качестве функций $\hat{f}^{(0)}(t)$ могут быть приняты либо «исходная» функция $\tilde{f}(t)$, либо предварительно сглаженная функция, которая имеет сходимость (2.3.6).

Замечание 2.3.1. Построенный квазиоптимальный алгоритм вейвлет-фильтрации относится к классу локальных – для каждого коэффициента разложения вычисляется свой фильтрующий множитель

$$\frac{1}{1 + \hat{S}^*} \cdot \blacklozenge$$

Замечание 2.3.2. Для вычисления нулевого отношения $\hat{S}^{(0)} = \sigma^2 / (\hat{\theta}^{(0)})^2$ и отношения $\tilde{S} = \sigma^2 / (\tilde{\theta})^2$ необходимо задать дисперсию σ^2 . Как правило, на практике σ^2 неизвестна и поэтому используется оценка:

$$\hat{\sigma}^2 = \left[\frac{\text{median}(|d_{1,k}|)}{0.6745} \right]^2, \quad (2.3.11)$$

где оператор $\text{median}(|d_{1,k}|)$ вычисляет медиану абсолютных величин детализирующих коэффициентов первого уровня (объем выборки равен $N/2$). Эта оценка получена из оценки среднеквадратического отклонения, используемой в робастных алгоритмах регрессионного анализа. Приведем результаты некоторых вычислительных экспериментов по исследованию точности оценки выражения (2.3.11) [18, 21, 60].

В первом эксперименте дисперсия погрешностей η_i задавалась $\sigma^2 = 0.91 \cdot 10^{-3}$ (что соответствовало относительному уровню $\delta_\eta = 0.012$). Далее по 30 различным реализациям $\tilde{d}_{1,k}$ ($N/2 = 1024$) вычислялась оценка (2.3.11) и все значения этой оценки находились в интервале $[0.87 \cdot 10^{-3}, 1.01 \cdot 10^{-3}]$.

Во втором эксперименте дисперсия погрешностей η_i задавалась $\sigma^2 = 0.91 \cdot 10^{-1}$ (что соответствовало $\delta_\eta = 0.12$) и вычисленные значения оценки (2.3.11) находились в интервале $[0.88 \cdot 10^{-1}, 0.97 \cdot 10^{-1}]$. Эти результаты говорят о приемлемой точности оценки (2.3.11). ♦

2.3.2. Исследование квазиоптимального алгоритма фильтрации с итерационным уточнением отношения «шум/сигнал»

Перейдем к исследованию предлагаемых квазиоптимальных оценок коэффициентов разложения. Очевидно, что замена «точных» отношений «шум/сигнал» $S_{j,k}^a$, $S_{j,k}^d$ на их оценки приведет к увеличению к СКО сглаживания. Поэтому был выполнен следующий вычислительный эксперимент по вейвлет-фильтрации одномерного дискретного сигнала, точные значения которого представлены на рис. 2.1а. Этот сигнал искажался нормально распределенными случайными числами с нулевым средним и дисперсией, определяемой относительным уровнем шума δ_η (подробнее см. пример 2.1.2). По зашумленным (с различным уровнем шума) данным вычислялись две сглаженные функции (уровень разложения был равен 7):

- оптимальное приближение $\hat{f}_{opt}(t)$ с коэффициентами $\hat{d}_{opt,j,k}$;
- квазиоптимальное приближение $\hat{f}^*(t)$ с коэффициентами $\hat{d}_{j,k}^*$;

Во всех случаях предполагалось, что дисперсия σ^2 неизвестна и использовалась оценка (2.3.11). В табл. 2.2 приведены средние значения

(вычисленные по выборке объемом 50) величины $P_{opt} = \frac{\|\hat{f}^* - f\|}{\|\hat{f}_{opt} - f\|}$, ха-

рактеризующая относительное увеличение ошибки сглаживания за счет замены оптимальной оценки $\hat{d}_{opt,j,k}$ на квазиоптимальную $\hat{d}_{j,k}^*$

при обработке одной реализации случайного вектора $\tilde{f}$, т.е. для каждой реализации $\tilde{f}^{(l)}$ вычислялось значение $P_{opt}^{(l)}$, а затем по выборке определялось среднее значение $\bar{P}_{opt}$.

Таблица 2.2

δ_η	0.001	0.005	0.010	0.050	0.100
$\bar{P}_{opt}$	1.041	1.052	1.087	1.149	1.231

Из табл. 2.2 видно, что использование квазиоптимальных оценок вместо оптимальных увеличивает ошибку сглаживания, однако это увеличение не очень велико, особенно, при малом уровне шума исходного сигнала.

Возникает вопрос: *можно ли предложенный алгоритм оценивания коэффициентов разложения использовать для сжатия сигналов?* Для ответа на этот вопрос введем в рассмотрение коэффициент сжатия

$K_{сж} = \frac{N - N_{ненул}}{N}$, где $N_{ненул}$ – общее количество ненулевых (макси-

мальных) коэффициентов вейвлет-разложения, используемых при реконструкции сигнала (обратное вейвлет-преобразование) и обратимся к табл. 2.3. В этой таблице приведены разные значения $N_{ненул}$, соответствующие коэффициенты сжатия и относительные ошибки фильтрации (относительная погрешность исходных данных $\delta_\eta = 0.12$). Видно,

что предложенный алгоритм обеспечивает разумный компромисс между величинами ошибки сглаживания и коэффициента сжатия.

Таблица 2.3

Предложенный алгоритм	Количество ненулевых коэффициентов			
	50	100	150	200
0.934	0.976	0.951	0.927	0.902
0.041	0.064	0.055	0.066	0.073

Предложенные квазиоптимальные оценки коэффициентов вейвлет-разложений не требуют задания «точных» коэффициентов разложения или их характеристик и позволяют построить приближения с ошибкой сглаживания, не существенно превышающие ошибку фильтрации оптимального алгоритма, нереализуемого на практике. Для краткости алгоритм фильтрации с квазиоптимальными оценками коэффициентов разложения будем называть *квазиоптимальный алгоритм фильтрации 1*. Этот алгоритм также можно использовать при сжатии сигналов. Он допускает простое обобщение на задачи фильтрации изображений.

2.4. Двухэтапный квазиоптимальный алгоритм вейвлет-фильтрации

Рассматривается построение квазиоптимального алгоритма, по структуре аналогичного винеровскому оптимальному алгоритму. В предлагаемом алгоритме оценивание неизвестного отношения «шум/сигнал» для каждого коэффициента осуществляется на втором этапе по сигналу, полученному в результате квазиоптимальной фильтрации зашумленного сигнала на первом этапе.

2.4.1. Эмпирический винеровский алгоритм вейвлет-фильтрации

Запишем в обобщенном виде оптимальный *фильтрующий множитель* (см. п. 2.2):

$$\omega_{opt} = \frac{1}{1+S}, \quad (2.4.1)$$

где обобщенное отношение «шум/сигнал» S определяется выражением

$$S = \frac{\sigma^2}{\theta^2}, \quad (2.4.2)$$

а θ – значение коэффициента разложения «точного» (не зашумленного) сигнала. Тогда *оптимальная оценка* для соответствующего коэффициента разложения имеет вид

$$\hat{\theta}_{opt} = \frac{1}{1+S} \tilde{\theta}, \quad (2.4.3)$$

где $\tilde{\theta}$ – коэффициент разложения «зашумленного» сигнала. Заметим, что при $S \rightarrow \infty$ имеют место следующие предельные значения:

$$\omega_{opt} = 0, \quad \hat{\theta}_{opt} = 0. \quad (2.4.4)$$

В так называемом *эмпирическом алгоритме вейвлет-фильтрации* вместо неизвестного «точного» коэффициента θ берется «зашумленный» коэффициент разложения $\tilde{\theta}$ и тогда получаем следующие характеристики алгоритма:

$$\tilde{S} = \sigma^2 / \tilde{\theta}^2 \quad \text{и} \quad \tilde{\omega} = \frac{1}{1+\tilde{S}}. \quad (2.4.5)$$

Ранее (см. п. 2.1) показано, что вычисленный по зашумленному сигналу коэффициент разложения $\tilde{\theta}$ можно представить в виде

$$\tilde{\theta} = \theta + \varepsilon, \quad (2.4.6)$$

где ε – случайная величина с нулевым средним и дисперсией σ^2 . Тогда из (2.4.5) видно, что $\tilde{S} = \sigma^2 / (\theta + \varepsilon)^2$ уже является случайной величиной и при $\sigma^2 \rightarrow \infty$ среднее значение $\tilde{S}$ не будет стремиться к ∞ , а, следовательно, и $\tilde{\omega}$ также не будет стремиться к 0, т.е. не выполняются требования выражения (2.4.4).

Для иллюстрации этого важного факта на рис. 2.5 приведены кривые: 1 – значения оптимального фильтрующего множителя (2.4.1); 2 – значения фильтрующего множителя $\tilde{\omega}$ (2.4.5) при разных значениях отношения «шум/сигнал» S . Видно, что среднее значение $\tilde{\omega}$ (вычисленное по выборке объемом 400) при увеличении S стремится к постоянной величине (примерно 0.35), в то время как оптимальный фильтрующий множитель стремится к нулю.

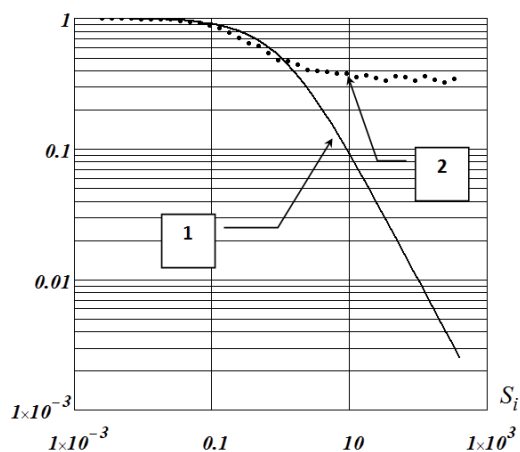


Рис. 2.5. Значения фильтрующих множителей

Следовательно, эмпирический алгоритм вейвлет-фильтрации имеет существенный недостаток: *при отношении «шум/сигнал» больше 1 фильтрующие множители $\tilde{\omega}$ не осуществляют эффективную фильтрацию шума, и результат такой фильтрации имеет СКО фильтрации значительно большую по сравнению с оптимальным (винеровским) алгоритмом вейвлет-фильтрации.*

2.4.2. Двухэтапный алгоритм вейвлет-фильтрации

Предположим, что вместо точного (но неизвестного) коэффициента θ_i в формуле (2.4.2) будет использоваться некоторая оценка $\hat{\theta}_i$ этого коэффициента. Возникает вопрос: насколько увеличится СКО

фильтрации при использовании эмпирического отношения «шум/сигнал»:

$$\hat{S} = \frac{\sigma^2}{\hat{\theta}^2}. \quad (2.4.7)$$

Можно показать, что СКО фильтрации (2.2.8) (обозначим как Δ) при использовании (2.4.7) можно представить в виде

$$\Delta = \Delta_{opt} + \Delta_{emp}, \quad (2.4.8)$$

где

$$\Delta_{opt} = \sum_i \frac{S_i}{1 + S_i} \theta_i^2 \quad (2.4.9)$$

– СКО фильтрации оптимального фильтра и сумма вычисляется по всем коэффициентам разложения с соответствующими отношениями «шум/сигнал»;

$$\Delta_{emp} = \sum_i \theta_i^2 \cdot (1 + S_i) \cdot \left[\frac{1}{1 + \hat{S}_i} - \frac{1}{1 + S_i} \right]^2 \quad (2.4.10)$$

– дополнительная (эмпирическая) СКО, обусловленная заменой точного отношения S на эмпирическое $\hat{S}$. Очевидно, что, если $\hat{S} = S$, то $\Delta_{emp} = 0$.

Вывод: *чем точнее будет оценка $\hat{\theta}_i$ коэффициента разложения θ_i , тем меньше будет величина Δ_{emp} и меньше будет суммарная СКО фильтрации (2.4.8).*

Для получения более точной оценки $\hat{\theta}$ (по сравнению с $\tilde{\theta}$) в работе [44] был предложен алгоритм (названный *эмпирическим винеровским фильтром*), суть которого можно выразить следующими этапами.

Этап 1. Используя дискретное ортогональное вейвлет-преобразование (матричное обозначение W_1) вычисляется вектор коэффициентов разложения $\tilde{\theta}$, т.е. $\tilde{\theta} = W_1 \tilde{f}$. Затем, используя пороговый алгоритм обработки $P(\tilde{\theta})$ вычисляется вектор «отфильтрованных» ко-

эффицентов разложения $\hat{\theta}_1 = P(\tilde{\theta})$. После этого берется обратное вейвлет-преобразование W_1^{-1} и получается вектор $\hat{f}_1$ отфильтрованных значений, вычисление которого в матричном виде представимо как

$$\hat{f}_1 = W_1^{-1} \cdot P(\tilde{\theta}) \cdot W_1 \tilde{f} = W_1^{-1} \hat{\theta}_1. \quad (2.4.11)$$

Этап 2. К вектору $\hat{f}_1$ применяется дискретное вейвлет преобразование W_2 , которое отличается от W_1 . Например, если в качестве W_1 использовались вейвлеты Добеши $Daub(8)$, то в качестве W_2 можно использовать $Daub(16)$ или $Daub(4)$. Таким образом, вычисляется вектор коэффициентов разложения

$$\hat{\theta}_{21} = W_2 \hat{f}_1. \quad (2.4.12)$$

По проекциям этого вектора (предполагается, что $\hat{\theta}_{21}$ является более точной оценкой по сравнению с $\tilde{\theta}$) вычисляются фильтрующие множители

$$\omega_{2_i} = \frac{\hat{\theta}_{21_i}^2}{\hat{\theta}_{21_i}^2 + \sigma^2} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma^2}{\hat{\theta}_{21_i}^2}} = \frac{1}{1 + \hat{S}_{2_i}} \quad (2.4.13)$$

и находятся новые «отфильтрованные» (в пространстве вейвлет-преобразования W_2) коэффициенты разложения

$$\hat{\theta}_{2_i} = \frac{\hat{\theta}_{21_i}^2}{\hat{\theta}_{21_i}^2 + \sigma^2} \tilde{\theta}_{2_i} = \frac{1}{1 + \hat{S}_{2_i}} \tilde{\theta}_{2_i}, \quad (2.4.14)$$

где $\tilde{\theta}_{2_i}$ – коэффициенты разложения $\hat{\theta}_2 = W_2 \tilde{f}$.

В завершении этапа 2 вычисляется вектор $\hat{f}_2 = W_2^{-1} \hat{\theta}_2$, содержащий результат фильтрации описанным алгоритмом.

В дальнейшем изложенный алгоритм будем называть *двухэтапным алгоритмом вейвлет-фильтрации*, что в большей степени соответствует сути алгоритма по сравнению с зарубежным названием *эмпирический винеровский фильтр*.

На рис. 2.6 приведена блок-схема этого алгоритма, которая графически интерпретирует описанные два этапа фильтрации. Блок P обозначает обработку зашумленных коэффициентов разложения на первом этапе; блок P_B – вычисление оценки (2.4.14) на втором этапе.

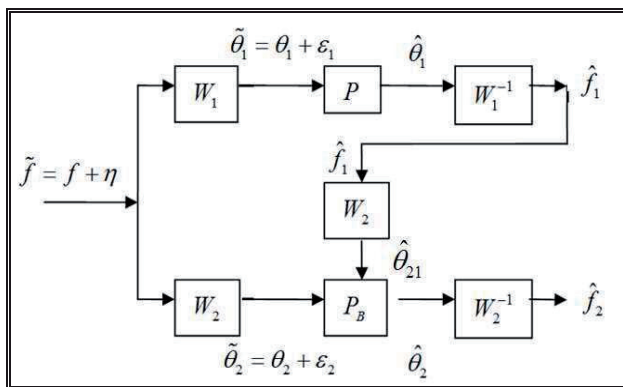


Рис. 2.6. Блок-схема двухэтапного алгоритма фильтрации

Если обозначить через N_T – число ненулевых коэффициентов $\hat{\theta}_1$, вычисленных на первом этапе, то суть описанного двухступенчатого алгоритма заключается в том, что дискретное преобразование $W_{21} = W_2 W_1^{-1}$ трансформирует («растягивает») N_T коэффициентов в N ($N > N_T$) коэффициентов $\hat{\theta}_{21}$, которые используются для построения оценок ω_2 оптимальных фильтрующих множителей ω_{opt} на втором этапе.

Возникает вопрос: как построить на первом этапе сигнал $\hat{f}_1$, имеющий СКО фильтрации меньше, чем СКО исходного (зашумленного) сигнала $\tilde{f}$. В работе [44] оценка $\hat{f}_1$ строилась с использованием порогового алгоритма вейвлет-фильтрации с поро-

говой величиной *UNIV* (подробно рассмотренного в главе 3), имеющего более высокую СКО фильтрации по сравнению с квазиоптимальным алгоритмом фильтрации, изложенного в п. 2.3 (это будет показано в главе 3). Поэтому попробуем использовать этот алгоритм для вычисления вектора $\hat{f}_1$ [26]. Для этого в записи алгоритма

$$\hat{f}_1 = W_1^{-1} \cdot P(\tilde{\theta}) \cdot W_1 \tilde{f}.$$

под оператором обработки $P(\tilde{\theta})$ зашумленных коэффициентов разложения $\tilde{\theta}$ будем подразумевать алгоритм (2.3.4), который вычисляет квазиоптимальные значения коэффициентов разложения (обозначаются как $\hat{\theta}^*$). Этим коэффициентам соответствует вектор $\hat{f}_1^* = W_1^{-1} \cdot \hat{\theta}^*$ – результат выполнения первого этапа. Второй этап выполняется в строгом соответствии с описанным выше (т.е. с выражениями (2.4.12), (2.4.13), (2.4.14)).

2.4.3. Результаты вычислительного эксперимента

Для исследования эффективности описанного двухэтапного алгоритма вейвлет-фильтрации (на первом этапе строится вектор $\hat{f}_1^*$) был выполнен вычислительный эксперимент вейвлет-фильтрации разных по форме сигналов. Остановимся на некоторых его результатах.

В качестве тестового одномерного сигнала был взят дискретный сигнал (число отсчетов $N = 2048$), точные значения которого представлены на рис. 2.1 а). Выбор такой формы сигнала обусловлен присутствием в его спектре высокочастотных составляющих, что существенно затрудняет фильтрацию высокочастотного (не коррелированного) шума из-за наложения спектров сигнала и шума.

Этот сигнал искажался нормально распределенными случайными числами с нулевым средним и дисперсией, определяемой относительным уровнем шума δ_n (подробнее см. пример 2.1.2). По зашумленным (с различным уровнем шума) данным вычислялись две сглаженные функции (уровень разложения был равен 7):

- $\hat{f}_{opt}$ – оптимальная (винеровская) вейвлет-фильтрация *Daub*(8) с оптимальными фильтрующими множителями (2.2.11);

- $\hat{f}_2^*$ – результат двухэтапной вейвлет-фильтрация (в качестве оценки первого этапа $\hat{f}_1$ брался вектор $\hat{f}_1^*$), $W_2 = Daub(4)$.

Во всех случаях предполагалось, что дисперсия σ^2 неизвестна и использовалась оценка (2.3.11). В табл. 2.4 приведены средние значения

$\bar{P}_{opt}^* = \sum_{l=1}^{50} P_{opt}^{*(l)}$ (вычисленные по выборке объемом 50) случайной

величины $P_{opt}^{*(l)} = \frac{\|\hat{f}_2^{*(l)} - f\|}{\|\hat{f}_{opt}^{(l)} - f\|}$, характеризующей относительное увеличе-

ние ошибки фильтрации за счет замены оптимальной оценки коэффициента разложения θ_{opt} на квазиоптимальную $\hat{\theta}_2^*$, при этом величина $P_{opt}^{*(l)}$ вычислялась для каждой зашумленной реализации $\tilde{f}^{(l)}$, $l = 1, \dots, 50$.

Таблица 2.4

δ_η	0.001	0.005	0.010	0.050	0.100
$\bar{P}_{opt}^*$	1.029	1.048	1.072	1.138	1.220

Сравнивая данные этой таблицы с данными табл. 2.2 можно сделать вывод о небольшом уменьшении ошибки фильтрации при использовании двухэтапного алгоритма вейвлет-фильтрации по сравнению с квазиоптимальным алгоритмом 1 (итерационным уточнением «шум\сигнал» (см. п. 2.3)). Такое незначительное уменьшение ошибки можно отчасти объяснить тем, что отфильтрованный (квазиоптимальным алгоритмом 1) сигнал $\hat{f}^*$ уже имел ошибку фильтрации, близкую к ошибке оптимального алгоритма фильтрации и поэтому сигнал $\hat{f}_2^*$ уже не может иметь значительно меньшую ошибку фильтрации по сравнению с сигналом $\hat{f}^*$, которая была бы меньше ошибки оптимального (винеровского) алгоритма. Учитывая это обстоятельство, будем называть изложенный двухэтапный алгоритм *квазиоптимальным алгоритмом фильтрации 2*.

Заметим, что в работе [44] на первом этапе использовался пороговый алгоритм вейвлет-фильтрации с порогом $UNIV$ (см. п. 3.2), который имеет ошибку фильтрации больше, чем $\hat{f}^*$ и поэтому сигнал $\hat{f}_2$ (результат фильтрации на втором этапе) имеет значительно меньшую ошибку по сравнению с $\hat{f}_1$ – результатом фильтрации на первом этапе. Однако окончательная ошибка фильтрации вектора $\hat{f}_2$ выше, чем у вектора $\hat{f}_2^*$ – результат фильтрации квазиоптимальным алгоритмом фильтрации 2.

Обобщая содержание этой главы, можно сделать **следующие выводы:**

Определены статистические характеристики случайных ошибок вычисления коэффициентов разложения (в базисе ортогональных вейвлет-функций) зашумленных сигналов и изображений, которые существенно используются при построении алгоритмов вейвлет-фильтрации.

Построен оптимальный алгоритм вейвлет-фильтрации, имеющий наименьшую среднеквадратическую ошибку фильтрации (при выбранном базисе вейвлет-функций), однако требующий знания коэффициентов разложения не зашумленного сигнала (или изображения), которые входят в отношение «шум/сигнал» и которые на практике неизвестны.

Предложены два квазиоптимальных алгоритма вейвлет-фильтрации, не требующие задания такой априорной информации и реализуемые на практике, но имеющие ошибку фильтрации выше, чем оптимальный алгоритм. Увеличение ошибки наблюдается при относительном уровне шума порядка 10 и более процентов и может составлять 20–25 % по сравнению с ошибкой оптимального алгоритма.

Глава 3. ПОРОГОВЫЕ АЛГОРИТМЫ ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРАЦИИ

Рассмотрены алгоритмы вейвлет-фильтрации, в которых оценки для детализирующих коэффициентов вейвлет-разложения вычисляются с использованием пороговых функций. Эти функции обращают в нуль (зануляют) относительно малые коэффициенты, сохраняя или преобразуя только коэффициенты, которые больше некоторой величины (называемой порогом).

3.1. Пороговые алгоритмы вейвлет-фильтрации

Приводится описание часто используемых пороговых функций и обоснудаются алгоритмы выбора пороговых величин.

3.1.1. Пороговые алгоритмы фильтрации с однопараметрическими пороговыми функциями

Теоретической основой построения пороговых оценок служат следующие предпосылки:

- только небольшое число детализирующих коэффициентов $d_{j,k}$ разложения точной функции уровней $j=1, 2, 3$ отличны по модулю от нуля;
- особенно сильному влиянию шума измерения подвергаются детализирующие коэффициенты уровней разложения $j=1, 2, 3$.
- уровень ошибок вычисления коэффициентов разложения достаточно мал по сравнению с коэффициентами разложения точной функции, что позволяет «распознать» две ситуации: «шумовой коэффициент» или «информативный коэффициент».

Хорошей иллюстрацией этих предпосылок являются примеры 2.1.1 (относительные ошибки вычисления коэффициентов) и 2.1.2.

Таким образом, **необходимо обратить в нуль шумовые коэффициенты разложения, которые обусловлены только шумом измерения, сохранив при этом коэффициенты разложения точной функции** (такие коэффициенты выше были названы информативными).

В определенной (но не в полной степени) этому требованию удовлетворяют *пороговые алгоритмы* оценивания коэффициентов разложения, которые в зарубежной литературе получили название *thresholding* [40–42]. В этих алгоритмах наиболее часто используются две пороговые функции:

- «жесткая» пороговая функция вида

$$T_H(\tilde{d}, \lambda) = \begin{cases} \tilde{d}, & \text{если } |\tilde{d}| \geq \lambda, \\ 0, & \text{если } |\tilde{d}| < \lambda; \end{cases} \quad (3.1.1)$$

- «мягкая» пороговая функция вида

$$T_S(\tilde{d}, \lambda) = \text{sign}(\tilde{d}) \cdot \left[|\tilde{d}| - \lambda \right]_+, \quad (3.1.2)$$

где обозначение $[z]_+$ определяется как

$$[z]_+ = \begin{cases} z, & \text{если } z \geq 0; \\ 0, & \text{если } z < 0. \end{cases} \quad (3.1.3)$$

Графики этих функций приведены на рис. 3.1 (функция $T_H(\tilde{d}, \lambda)$ обозначена сплошной линией, функция $T_S(\tilde{d}, \lambda)$ – точечной).

Кроме приведенных пороговых функций, на практике используются (но гораздо реже) и другие функции [38, 43], которые будут рассмотрены позже.

Величина порога λ выполняет роль «управляющего» параметра, влияющего на ошибку фильтрации. Критичность его выбора иллюстрируется примером 2.1.2. При заниженном значении λ часть шумовых коэффициентов разложения не зануляются и результат обратного вейвлет-преобразования (отфильтрованная функция) может содержать значительный остаточный шум, т.е. функция не достаточно сглажена. При завышенном пороге λ зануляются информативные коэффициенты вейвлет-разложения и результат фильтрации оказывается переглаженным.

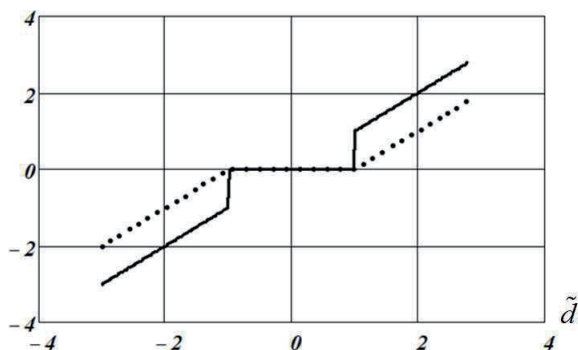


Рис. 3.1. Графики пороговых функций

Пример 3.1.1. Для зашумленной функции примера 2.1.1 (см. рис. 2.2а) необходимо установить зависимость ошибки фильтрации от величины λ пороговых алгоритмов оценивания коэффициентов разложения (см. формулы 3.1.1), (3.1.2)). Относительная ошибка исходных данных $\delta_\eta = 0.12$.

Решение. В качестве меры точности фильтрации примем относительную ошибку $\delta_f(\lambda) = \frac{\|\hat{f}_\lambda - f\|}{\|f\|}$, где $\hat{f}_\lambda$ – вектор, составленный из значений отфильтрованной функции при заданной величине порога λ ; f – вектор значений точной функции (размерность $N = 2048$). На рис. 3.2 приведены графики функции $\delta_f(\lambda)$ для жесткой пороговой функции (сплошная кривая) и мягкой (точечная кривая). По оси абсцисс откладывалась величина λ/σ . Видно наличие минимума у этих двух зависимостей, но положение точек минимума не совпадают. Левая ветвь (от точки минимума) обусловлена преобладанием случайной ошибки фильтрация (функция не доглажена), правая ветвь – систематической ошибкой (функция переглажена). ☹

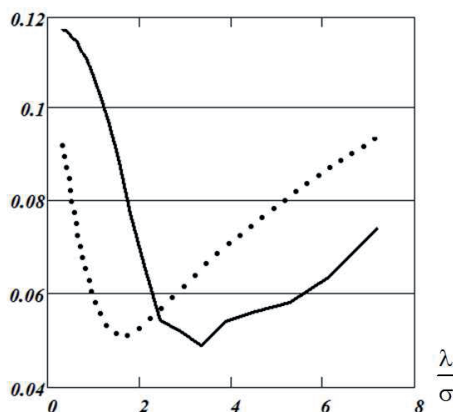


Рис. 3.2. Зависимость ошибки фильтрации от параметра λ

Возникает вопрос: какая пороговая функция предпочтительнее для фильтрации шумов? Однозначный ответ дать затруднительно, но дополнительно проведенный вычислительный эксперимент позволяет отметить следующие особенности пороговых функций *hard* и *soft*:

- Функция *hard* приемлемо работает при низком уровне шума, когда все шумовые коэффициенты разложения по модулю меньше порога λ и они соответственно зануляются, а все информативные превосходят по модулю порог λ и поэтому они сохраняются.
- Из-за уменьшения амплитуды коэффициента разложения на величину λ в функции *soft* возможно сглаживание (размытие) контрастных элементов обрабатываемого сигнала.
- Из-за наличия в функции *hard* разрыва в окрестности точки λ (см. рис. 3.1) в особых точках фильтруемого сигнала могут появиться осцилляции (эффект Гиббса). Функция *soft* в определенной степени свободна от этого недостатка.
- Функция *soft* используется при оценивании коэффициента разложения методом максимума апостериорной вероятности при предположениях: а) ошибка вычисления коэффициента разложения подчиняется нормальному распределению; б) точный коэффициент разложения имеет распределение Лапласа (априорное распределение).

Кроме этих двух рассмотренных функций, используется еще одна однопараметрическая пороговая функция (в зарубежной литературе названная *garrote*) вида [43]:

$$T_G(\tilde{d}, \lambda) = \begin{cases} \tilde{d} - \frac{\lambda^2}{\tilde{d}}, & \text{если } |\tilde{d}| \geq \lambda, \\ 0, & \text{если } |\tilde{d}| < \lambda. \end{cases} \quad (3.1.4)$$

На рис. 3.3 изображен график (сплошная кривая) этой функции при $\lambda = 2$. Видно, что отсутствует скачок в окрестности точки $\tilde{d} = \lambda$ (свойство функции *soft*), но в то же время нет смещения на величину λ при больших значениях $\tilde{d}$ (свойство функции *hard*). Таким образом, функция *garrote* свободна от тех существенных недостатков, которые были присущи *hard* и *soft*. На рис. 3.3 точками обозначена прямая, проведенная под углом 45° к оси абсцисс.

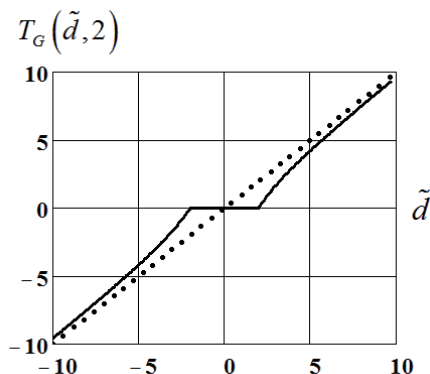


Рис. 3.3. График пороговой функции *garrote*

Однако заметим, что все-таки решающее влияние на величину ошибки фильтрации оказывает величина порога λ рассмотренных пороговых функций (это хорошо иллюстрирует рис. 3.2). При этом величина λ может быть одинаковой для всех уровней разложения зашумленного сигнала (*глобальное значение пороговой величины*) или определяется для каждого уровня j -го уровня разложения (*локальное значение пороговой величины*). При фильтрации изображений пороговые значения могут быть различными даже для каждой из матриц

H_j, V_j, D_j j -го уровня разложения. Более того, некоторые пороговые величины λ рекомендуется использовать только с определенными пороговыми функциями (с *hard*, но более всего с *soft*).

Для подтверждения этого тезиса о существенном влиянии пороговой величины на точность вейвлет-фильтрации определим среднеквадратическую ошибку фильтрации при использовании пороговой функции *hard*. Можно показать, что в этом случае СКО фильтрации определяется выражением (справедливым для ортогональных вейвлетов):

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) &= M \left[\left\| \hat{f}_\lambda - f \right\|^2 \right] = M \left[\left\| \epsilon_\lambda \right\|^2 \right] = \\ &= M \left[\sum_{i=1}^N \epsilon_{\lambda_i}^2 \right] = \sum_{i=1}^N M \left[\epsilon_{\lambda_i}^2 \right],\end{aligned}\tag{3.1.5}$$

где ϵ_{λ_i} – ошибка оценивания i -го коэффициента разложения, участвующего в фильтрации сигнала. Величина $M \left[\epsilon_{\lambda_i}^2 \right]$ допускает следующее представление

$$M \left[\epsilon_{\lambda_i}^2 \right] = \begin{cases} \sigma^2, & \text{если } |\tilde{d}_i| > \lambda; \\ d^2, & \text{если } |\tilde{d}_i| \leq \lambda, \end{cases}\tag{3.1.6}$$

где σ^2 – дисперсия шума (погрешности) измерения.

Заметим, что верхняя ветвь в выражении (3.1.6) определяет величину случайной ошибки отфильтрованного сигнала, нижняя ветвь – систематическую ошибку. Тогда с учетом (3.1.5) можно сделать вывод: при увеличении пороговой величины возрастает систематическая ошибка и уменьшается случайная ошибка. При уменьшении λ наблюдается обратная картина. Очевидно, что если бы были априори известны коэффициенты разложения d_i точного сигнала f , то можно решить вариационную задачу

$$\min_{\lambda} [\Delta(\lambda)]\tag{3.1.7}$$

и вычислить λ_{opt} , доставляющее минимум $\Delta(\lambda)$. Однако на практике такая информация отсутствует и поэтому приходится ограничиваться только некоторым алгоритмом выбора, который позволяет с приемлемой точностью оценить λ_{opt} .

Для выбора порога λ в литературе предложено несколько алгоритмов, большая часть из которых рассматривается далее.

3.1.2. Реализация пороговых алгоритмов в пакете MathCAD

Программная реализация алгоритма вейвлет-фильтрации с задаваемым порогом λ в виде подпрограмм-функций приведена в *приложении*.

Обращение к подпрограммам-функциям имеет вид:

$$D1_Filter_H(f_{\eta}, \lambda, J_{fil}, J_{wav}, wavelet);$$

$$D1_Filter_S(f_{\eta}, \lambda, J_{fil}, J_{wav}, wavelet).$$

Формальные параметры:

f_{η} – одномерный массив длиной $N = 2^{j_0}$, содержащий зашумленные значения функции;

λ – задаваемое значение порога;

J_{fil} – максимальный уровень разложения при пороговой обработке детализирующих коэффициентов;

J_{wav} – уровень разложения в базисе вейвлет-функции (необходимо выполнения неравенства $J_{fil} \leq J_{wav} < j_0$);

$wavelet$ – задает имя семейства вейвлет-функций. Например, задав $daublet(8)$, имеем разложение в базисе ортогональных вейвлетов Добеши8.

Результатом работы является массив длиной N , содержащий *сглаженные значения функции*.

Заметим, что в этих подпрограммах-функциях использовались функции MathCAD, описанные в п. 1.3.3, находящиеся в файле *Wavedef*, который входит в состав пакета *Wavelet Extension* системы компьютерной математики MathCAD15.

В подпрограммах-функциях $D1_Filter_H$, $D1_Filter_S$, приведенных в *приложении*, порог λ одинаков для всех уровней разложения (т.е. задается глобальное значение порога).

3.2. Выбор параметра пороговой функции

Рассматриваются наиболее часто используемые алгоритмы выбора пороговой величины в однопараметрических пороговых функциях.

3.2.1. Универсальный порог (UNIV-порог)

Этот порог предложен в работах [40–42] и определяется для каждого j -го уровня разложения (т.е. является локальным порогом) следующим выражением:

$$\lambda_j^{UNIV} = \sigma \sqrt{2 \ln N_j}, \quad (3.2.1)$$

где N_j – число детализирующих коэффициентов на j -м уровне разложения. Таким образом, чем выше уровень разложения, тем меньше величина порога. Теоретическим обоснованием такого выбора может служить утверждение 3.2.1 [41, 42].

Утверждение 3.2.1. Предположим, что $f(x)$ является кусочным полиномом на интервале $[0, 1]$. Тогда оптимальная величина порога λ_{opt} функции *soft*, минимизирующая СКО фильтрации

$$\Delta(\lambda) = M \left[\left\| \hat{f}_\lambda - f \right\|^2 \right] \quad (3.2.2)$$

при $N \rightarrow \infty$ имеет порядок

$$\lambda_{opt} \approx \sigma \sqrt{2 \ln N}. \quad \clubsuit \quad (3.2.3)$$

В *приложении* приведен фрагмент документа MathCAD, содержащий текст подпрограммы-функции $D1_Filter_Univ$, которая осуществляет вейвлет-фильтрацию одномерного сигнала с универсальным порогом λ_j (3.2.1). Обращение имеет вид:

$$D1_Filter_Univ(f_\eta, J_{fil}, J_{wav}, wavelet, Num).$$

Формальные параметры:

f_{η} – одномерный массив длиной $N = 2^{j_0}$, содержащий зашумленные значения функции;

J_{fil} – максимальный уровень разложения при пороговой обработке детализирующих коэффициентов;

J_{wav} – уровень разложения в базисе вейвлет-функций (необходимо выполнения условия $J_{fil} \leq J_{wav} < j_0$);

wavelet – задает имя семейства вейвлетов. Например, задав *daublet*(8), получаем разложение в базисе ортогональных вейвлетов Добеши8;

Num – задает вид пороговой функции: если *Num*=1, то функция *hard*; если *Num*>1, то функция *soft*.

Результатом работы является массив данной *N*, содержащий отфильтрованные значения функции.

Внимание! Значение среднеквадратического отклонения σ , входящего в выражение (3.2.1), оценивается внутри описанной подпрограммы-функции.

Вернемся к формуле (3.2.1), которая получена из условия минимума СКО формулы (3.2.2) при $N \rightarrow \infty$, т.е. носит асимптотический характер. На практике величина *N* конечна и во многих случаях не превосходит несколько сотен. Поэтому возникает вопрос: насколько оптимален универсальный порог λ_j^{UNIV} ? Для ответа на этот вопрос был проведен вычислительный эксперимент, описанный в следующем примере.

Пример 3.2.1. Для зашумленной функции примера 2.1.1 с относительными ошибками $\delta_{\eta} = 0.12$ и $\delta_{\eta} = 0.025$ установить значение β_{opt} величины β , входящей в выражение

$$\lambda_j^{\beta} = \beta \cdot \sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \ln N_j}, \quad (3.2.4)$$

при котором достигается минимум относительной ошибки фильтрации $\delta_f(\beta) = \frac{\|\hat{f}_\beta - f\|}{\|f\|}$, где $\hat{f}_\beta$ – вектор, составленный из значений сглаженной функции при заданном значении β в формуле (3.2.4).

Решение. Для вычисления β_{opt} были заданы 20 значений β из интервала $[0.1, 2]$ и при этих значениях вычислялись относительные ошибки фильтрации. На рис. 3.4а приведены значения этих ошибок при использовании пороговой функции *soft*: сплошная кривая – $\delta_\eta = 0.12$; точечная кривая – $\delta_\eta = 0.023$. На рис. 3.4б приведены ошибки для пороговой функции *hard* с сохранением тех же обозначений. Значения координат экстремальных точек приведены в табл. 3.1.

Анализ табл. 3.1 показывает, что для функции *soft* необходимо более чем в два раза уменьшить получаемые по формуле (3.1.4) значения λ_j^{UNIV} , чтобы получить минимальные ошибки. Для функции *hard* уменьшение значения λ_j^{UNIV} незначительно.

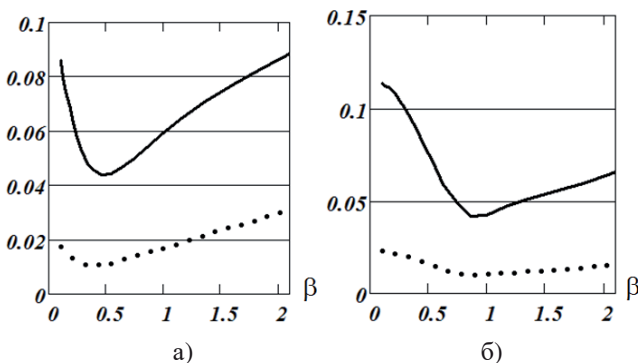


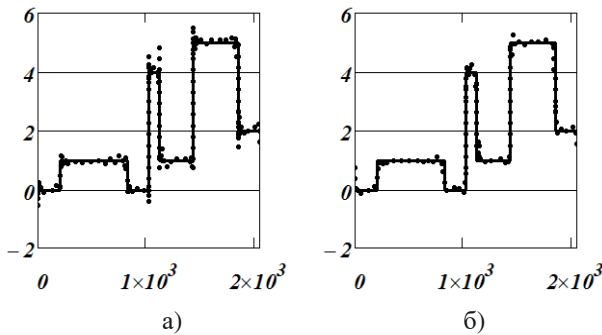
Рис. 3.4. Графики относительной ошибки фильтрации

Таблица 3.1

	Функция <i>soft</i>		Функция <i>hard</i>	
	$\delta_\eta = 0.025$	$\delta_\eta = 0.12$	$\delta_\eta = 0.025$	$\delta_\eta = 0.12$
β_{opt}	0.401	0.463	0.857	0.851
$\delta_f(\beta_{opt})$	0.010	0.043	0.010	0.041

Это хорошо иллюстрирует рис. 3.5, на котором приведены значения отфильтрованных функций (уровень шума $\delta_\eta = 0.12$): рис. 3.5а – с использованием функции *soft*; рис. 3.5б – с использованием функции *hard*. Для обеих функций $\beta = 1$, т.е. использовались пороговые значения λ_j^{UNIV} (см. формулу (3.2.1)).

Завышенные значения λ_j^{UNIV} функции *soft* (по сравнению с оптимальными) обусловили обнуление части информативных коэффициентов разложения, а это в свою очередь увеличило уровень систематической ошибки отфильтрованного сигнала (проявление эффекта Гиббса в особых точках сигнала (см. рис. 3.5а). ☹

Рис. 3.5. Фильтрация сигнала при $\lambda_j = \lambda_j^{UNIV}$

Заметим, что порог λ_j^{UNIV} можно использовать и с функцией *hard*, и с функцией *soft*. По-видимому, это обстоятельство и определило название порога – *универсальный*. Хотя проведенный вычислительный эксперимент примера 3.2.1 показал предпочтительность функции *hard*.

Если порог функции *soft* одинаков для всех уровней разложения (т.е. глобальный порог), то такая модификация в англоязычной литературе получила название *VisuShrink* и пороговая величина определяется выражением

$$\lambda^{UNIV} = \sigma \sqrt{2 \ln N},$$

где N – число отсчетов фильтруемого сигнала. При фильтрации некоторых одномерных сигналов этот порог дает меньшую ошибку фильтрации по сравнению с порогами λ_j^{UNIV} , вычисляемыми для каждого уровня разложения.

3.2.2. SURE-порог

Это пороговое значение было предложено в работах [39, 67]. Идея заключается в нахождении величины λ , минимизирующей несмещенную оценку риска Стейна (SURE – *Stein's Unbiased Risk Estimation*). Оценка риска для j -го уровня разложения в случае $\sigma^2 = 1$ определяется выражением

$$SURE_j(\mu) = N_j + \sum_{k=1}^{N_j} \left[\min(|\tilde{d}_{j,k}|, \mu) \right]^2 - 2 \sum_{k=1}^{N_j} If(|\tilde{d}_{j,k}| \leq \mu), \quad (3.2.5)$$

где If (условие) – условная функция, принимающая значение 1, если условие выполняется, и значение 0 – в противном случае; N_j – число коэффициентов j -го уровня разложения. Если $\sigma^2 \neq 1$, то оценка риска имеет вид

$$SURE_j(\mu) = N_j + \sum_{k=1}^{N_j} \left[\min\left(\frac{|\tilde{d}_{j,k}|}{\sigma}, \mu\right) \right]^2 - 2 \sum_{k=1}^{N_j} If\left(\frac{|\tilde{d}_{j,k}|}{\sigma} \leq \mu\right). \quad (3.2.6)$$

Пороговое значение на j -м уровне разложения определяется выражением

$$\lambda_j^{SURE} = \sigma \cdot \mu_j^{SURE}, \quad (3.2.7)$$

где μ_j^{SURE} – значение μ , доставляющее минимум функционалу (3.2.6).
Рекомендуется пороговую величину λ_j^{SURE} использовать для функции *soft*.

В работе [42] для пороговой функции *soft* показано, что при выполнении условия

$$\frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} \left[\left(\frac{\tilde{d}_{j,k}}{\sigma} \right)^2 - 1 \right] \leq \frac{(\log_2 N_j)^{3/2}}{\sqrt{N_j}}$$

предпочтительнее вместо λ_j^{SURE} использовать универсальный порог λ_j^{UNIV} . Такое объединение двух пороговых величин в одну процедуру оценивания коэффициентов j -го уровня разложения получило в зарубежной литературе обозначение *SureShrinking*.

Для выбора величины глобального порога (т.е. одна пороговая величина для всех уровней разложения) можно использовать следующую оценку риска:

$$SURE(\lambda) = \sigma^2 + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left[\min(|\tilde{d}_{j,k}|, \lambda) \right]^2 - 2 \frac{\sigma^2}{N} \sum_{k=1}^N \text{If}(|\tilde{d}_{j,k}| \leq \lambda)$$

и тогда пороговая величина λ^{SURE} определяется из условия минимума функционала $SURE(\lambda)$, т.е.

$$\lambda^{SURE} = \arg \min SURE(\lambda). \quad (3.2.8)$$

3.2.3. FDR-порог

Применимо к задаче вычисления пороговой величины метод FDR (*False Discovery Rate*) был рассмотрен в работах [37, 53]. Пусть даны N_j коэффициентов $\tilde{d}_{j,k}$ на j -м уровне разложения. Первоначально вычислим *p-величины* для каждого коэффициента $\tilde{d}_{j,k}$:

$$p_k = 2 \left[1 - \Phi \left(\frac{|\tilde{d}_{j,k}|}{\sigma} \right) \right], \quad (3.2.9)$$

где $\Phi(\cdot)$ – функция распределения нормированной нормально распределенной случайной величины $N(0, 1)$, у которой математическое ожидание равно нулю, а дисперсия равна 1):

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2} dt. \quad (3.2.10)$$

Величину p_k можно трактовать как вероятность попадания случайной величины $N(0, 1)$ в интервал $\left[\frac{|\tilde{d}_{j,k}|}{\sigma}, \infty \right)$. Далее из величин p_k сформируем вариационный ряд, т.е. располагаем p_k по возрастанию:

$$p_{(1)} \leq p_{(2)} \leq \dots \leq p_{(N_j-1)} \leq p_{(N_j)}. \quad (3.2.11)$$

Затем, начиная с $k = 1$, находим индекс m , как наибольшее из тех значений k , для которых выполняется неравенство

$$p_{(k)} \leq \frac{k}{N_j} \cdot q, \quad (3.2.12)$$

где величина q , как правило, задается из интервала $[0.1, 0.2]$ и ее можно трактовать как среднее значение доли коэффициентов разложения, ошибочно используемых в обратном вейвлет-преобразовании (т.е. при построении отфильтрованной функции). Тогда порог, который будем обозначать как λ_j^{FDR} , определяется выражением

$$\lambda_j^{FDR} = \sigma \Phi^{-1} \left(1 - \frac{p_{(m)}}{2} \right), \quad (3.2.13)$$

где $z = \Phi^{-1}(p)$ означает квантиль распределения (3.2.10), т.е. корень нелинейного уравнения $p = \Phi(z)$. Пороговую величину λ_j^{FDR} можно использовать для функций *hard*, *soft*.

3.2.4. Bayes-porog

Этот порог рекомендуется использовать с пороговой функцией *soft*. Он определяется выражением [35, 36, 49]

$$\lambda_j^B = \frac{\sigma^2}{\hat{\sigma}_{d_j}}, \quad (3.2.14)$$

где $\hat{\sigma}_{d_j}$ – оценка среднеквадратического отклонения точных детализирующих коэффициентов j -го уровня разложения, вычисляемая по формуле

$$\hat{\sigma}_{d_j} = \left[\max \left(\sigma_{\tilde{d}_j}^2 - \sigma^2, 0 \right) \right]^{1/2}. \quad (3.2.15)$$

Дисперсия $\sigma_{\tilde{d}_j}^2$ зашумленных коэффициентов разложения j -го уровня, определяется по формуле

$$\sigma_{\tilde{d}_j}^2 = \frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} \tilde{d}_{j,k}^2. \quad (3.2.16)$$

В ситуации, когда $\sigma_{\tilde{d}_j}^2 \leq \sigma^2$, имеем $\lambda_j^B = \infty$ и все байесовские оценки

$$\hat{d}_{j,k}^B = \text{soft}(\tilde{d}_{j,k}, \lambda_j^B) \quad (3.2.17)$$

на j -м уровне разложения равны нулю.

Величину порога (3.2.14) в зарубежных публикациях часто называют *BayesShrink*.

Замечание 3.2.1. Строго говоря, байесовская пороговая величина была получена для пороговой функции *soft*, но может использоваться и для функции *hard*. ♦

Замечание 3.2.2. Приведенные выше алгоритмы выбора пороговой величины требуют задания дисперсии шума измерения σ^2 . Если дисперсия неизвестна, то рекомендуется обратиться к оценке (2.3.11). ♦

3.2.5. GVC-порог

На протяжении трех десятилетий для выбора параметра регуляризации при построении регуляризованных решений некорректных задач широко используется метод перекрестной значимости (*cross validation method*) [2, 10, 12, 17]. Этот метод применяется для выбора параметра сглаживания при построении сглаживающих сплайнов [2, 45] и для определения параметра сглаживания в алгоритмах Фурье-фильтрации [19]. Вариации этого метода для выбора порога в алгоритмах вейвлет-фильтрации были предложены в работах [50, 51].

Величина порога λ^{GCV} является одинаковой для всех уровней разложения (т.е. глобальная пороговая величина) и определяется из условия минимума функционала:

$$GCV(\lambda) = \frac{\frac{1}{N} \|\tilde{f} - \hat{f}_\lambda\|^2}{\left[\frac{N_0(\lambda)}{N} \right]^2}, \quad (3.2.18)$$

где $N_0(\lambda)$ – число коэффициентов разложения $\tilde{d}_{j,k}$, которые меньше порога λ , т.е. эти значения при обработке пороговыми функциями за нуляются.

Вычисление функционала (3.2.18) можно полностью осуществить в пространстве коэффициентов вейвлет-разложения зашумленного сигнала, а именно:

- для пороговой функции *soft*

$$GCV(\lambda) = \frac{N}{N_0^2(\lambda)} \left[\sum_{j=1}^J \sum_{|\tilde{d}_{j,r}| < \lambda} \tilde{d}_{j,k}^2 + (N - N_0(\lambda))\lambda^2 \right]; \quad (3.2.19)$$

- для пороговой функции *hard*

$$GCV(\lambda) = \frac{N}{N_0^2(\lambda)} \sum_{j=1}^J \sum_{|\tilde{d}_{j,r}| < \lambda} \tilde{d}_{j,k}^2. \quad (3.2.20)$$

Запись $\sum_{|\tilde{d}_{j,r}| < \lambda} \tilde{d}_{j,r}^2$ обозначает суммирование только тех коэффициентов

$\tilde{d}_{j,k}$, которые по модулю меньше λ . Как правило, порог λ^{GCV} используется для функции *soft*, однако, его можно использовать и для других поправочных функций.

Заметим, что при $\lambda > 0$ функционал $GCV(\lambda)$ является непрерывным (по аргументу λ) и для нахождения точки минимума λ^{GCV} функционала (3.2.19) можно использовать известные методы минимизации нулевого порядка (например процедуру Фибоначчи).

Пример 3.2.2. Для сигнала, точные значения которого изображены на рис. 2.1а, вычислить зависимости $GCV(\lambda)$ и для двух уровней шума 0.023 и 0.12.

Решение. Для 60 значений λ из интервала [0.001, 60] вычислим сглаженную функцию (пороговая функция *soft*), найдем относительную ошибку фильтрации и определим значение функционала $GCV(\lambda)$. На рис. 3.6а показаны графики $GCV(\lambda)$ (точечная кривая) для относительного уровня шума $\delta_\eta = 0.023$, а на рис. 3.6б – $\delta_\eta = 0.12$. Видно, что точка минимума $GCV(\lambda)$ находится в области минимума относительной ошибки фильтрации (на рисунках сплошная кривая). Аналогичная картина наблюдается и для *hard* (рис. 3.7). Таким образом, пороговые значения λ^{GCV} можно использовать в алгоритмах вейвлет-фильтрации. ☺

К преимуществам метода перекрестной значимости следует отнести отсутствие задания дисперсии σ^2 . Недостатками являются:

- полагая левая ветвь графика функционала $GCV(\lambda)$ и наличие нескольких локальных минимумов существенно усложняют вычисление λ^{GCV} численными методами;
- даже небольшая корреляция соседних проекций вектора шума η (коэффициент корреляции по модулю 0.2 и выше) приводит к существенному уменьшению пороговых величин λ_j^{GCV} , что вызывает неполное сглаживание шума алгоритмами вейвлет-фильтрации.

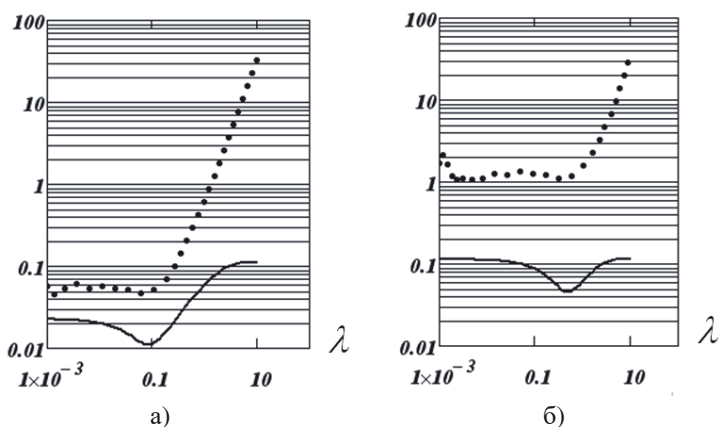


Рис. 3.6. Графики функционала $GCV(\lambda)$ для функции *soft*

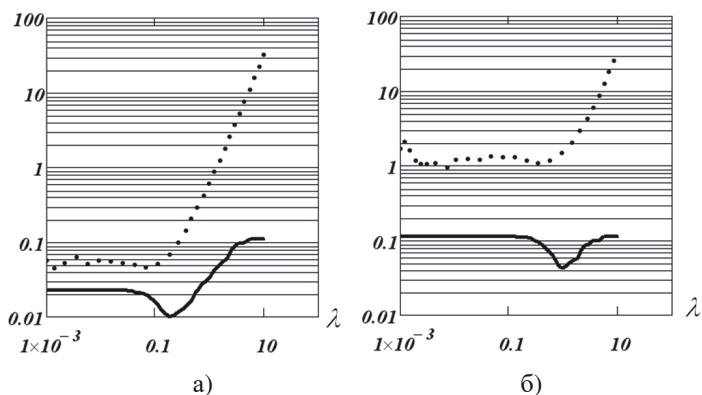


Рис. 3.7. Графики функционала $GCV(\lambda)$ для функции *hard*

Отмеченные недостатки не лишают метод перекрестной значимости права использовать его для вычисления пороговых значений как основного, так и альтернативного метода в алгоритмах вейвлет-фильтрации.

Можно сказать, что определенным недостатком изложенного варианта метода GCV также является вычисление глобальной пороговой величины. Это можно преодолеть задав зависимость локальных

порогов от одного параметра, который можно вычислить используя метод GCV . Например,

$$\lambda_j(\beta) = \beta \cdot \sqrt{2 \ln(N_j)}, \quad (3.2.21)$$

где параметр β будет вычисляться исходя из минимума функционала

$$GCV(\beta) = \frac{\frac{1}{N} \|\tilde{\mathbf{f}} - \hat{\mathbf{f}}_\beta\|^2}{\left[\frac{N_0(\beta)}{N} \right]^2}, \quad (3.2.22)$$

где $N_0(\beta)$ – число коэффициентов разложения $\tilde{d}_{j,k}$, которые при обработке пороговыми функциями зануляются.

Вычисление функционала (3.2.22) можно полностью осуществить в пространстве коэффициентов вейвлет-разложения зашумленного сигнала (так же, как и функционала (3.2.18)), а именно:

- для пороговой функции *soft*

$$GCV(\beta) = \frac{N}{N_0^2(\beta)} \left[\sum_{j=1}^J \left[\sum_{|\tilde{d}_{j,k}| < \lambda_j} \tilde{d}_{j,k}^2 + (N_j - N_0(\lambda_j)) \lambda_j^2 \right] \right]; \quad (3.2.23)$$

- для пороговой функции *hard*

$$GCV(\beta) = \frac{N}{N_0^2(\beta)} \sum_{j=1}^J \sum_{|\tilde{d}_{j,k}| < \lambda_j} \tilde{d}_{j,k}^2. \quad (3.2.24)$$

Запись $\sum_{|\tilde{d}_{j,k}| < \lambda_j} \tilde{d}_{j,k}^2$ обозначает суммирование только тех коэффициентов $\tilde{d}_{j,k}$, которые по модулю меньше порога λ_j , N_j – общее число обрабатываемых коэффициентов разложения на j -м уровне, $N_0(\lambda_j)$ – число коэффициентов на j -м уровне, которые меньше порога λ_j (и поэтому зануляемых).

Сравнение приведенных алгоритмов выбора пороговых величин по ошибке фильтрации будет выполнено позже (см. п. 3.3.4).

3.3. Выбор пороговых значений на основе критерия оптимальности

В этом параграфе будет изложен алгоритм выбора пороговых величин, основанный на критерии оптимальности линейных алгоритмов фильтрации.

3.3.1. Критерий оптимальности линейного алгоритма фильтрации

Этот критерий был использован для выбора параметра сглаживания в линейных алгоритмах Фурье-фильтрации (см. например, [19]) и для выбора параметра регуляризации в линейных регуляризирующих алгоритмах решения некорректных задач (например [2, 4, 12, 17, 54]). Пороговые алгоритмы вейвлет-фильтрации в общем случае не являются линейными. Однако попытаемся использовать этот критерий для нахождения пороговой величины λ .

Кратко изложим основные положения этого критерия.

Используя векторные обозначения, представим результат фильтрации алгоритмом T (матричный оператор соответствующей размерности) в виде

$$\hat{f}_T = T\tilde{f}, \quad (3.3.1)$$

а среднеквадратическую ошибку фильтрации такого алгоритма определим функционалом

$$\Delta(T) = M \left[\left\| \hat{f}_T - f \right\|^2 \right], \quad (3.3.2)$$

где f – вектор, составленный из значений не зашумленной функции (вектор точных значений). Требуется определить оптимальный оператор сглаживания T_{opt} , доставляющий минимум $\Delta(T)$ среди всех других линейных операторов сглаживания вида (3.3.1). Без доказательства (оно имеется в монографии [19, с. 39–41]) приведем следующее